Les négatifs à partir de la quatrième

Maryvonne HALLEZ
Collège de Rambervillers
Responsable du groupe " Histoire " de la régionale

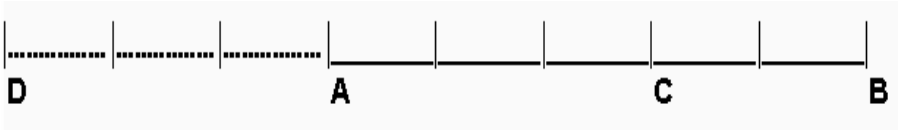
Nous apprenons la droite des réels, c'est à dire la droite sur laquelle on s'est donné une origine et une unité, dès notre plus jeune âge, avec les ascenseurs et les thermomètres atmosphériques, mais l'audace de se donner un point origine sur une droite date du **début du 19ème siècle** et cette invention a toute une histoire…
La représentation géométrique des nombres négatifs sur une droite s'est faite dans le même mouvement que la représentation géométrique des nombres imaginaires (de l'heureux temps où les imaginaires étaient au programme des terminales littéraires option mathématiques, je garde le souvenir enrichissant des élèves faisant cette découverte et réinventant cette représentation).

L'activité que je propose peut être faite à partir de la quatrième jusqu'à la terminale et plus. C'est une activité dirigée : je propose un travail de groupe avec un choix de trois personnages, accompagné d'un texte que je leur donne ; les élèves font des recherches sur le personnage et travaillent à lire le texte en vue de le faire lire aux autres groupes.

Voici les trois textes et leurs auteurs :

John Wallis : Algebra, 1685

" Il est tout à fait impossible qu'une quantité n'importe laquelle soit négative. Car il est impossible qu'une grandeur quelconque soit plus petite que rien (minus quam nihil), ou qu'un nombre quelconque soit moins nombreux que zéro (paucior quam 0)
La supposition d'une quantité négative n'est ni inutile, ni absurde, à condition de la comprendre correctement. Quoique, si l'on s'en tient à la pure notation algébrique, le signe – apparaisse indiquer une grandeur qui serait plus petite que rien, pourtant, lorsqu'on le considère d'un point de vue physique, il désigne une grandeur non moins réelle que le +, mais c'est une grandeur qu'il faut interpréter dans un sens contraire à ce qui a été supposé.
Par exemple, si l'on suppose qu'un homme s'avance de 5 pas (mettons de A vers B), puis recule de deux pas (de B vers C), et que quelqu'un pose alors la question : de combien cet homme est-il plus avancé en C qu'il n'était en A ? On dira qu'il est plus avancé de 3 pas parce que 5-2=3.
Si par contre , ayant avancé de 5 pas (de A vers B) , il recule de 8 pas (de B vers D), et qu'on demande de combien il est plus avancé en D qu'en A ? On répondra de –3 pas (car



5-2=-3), c'est à dire, il est moins avancé de 3 pas, car c'est cela que l'on veut dire lorsqu'on dit qu'il s'est avancé de -3 pas.
En effet, bien qu'au sens strict, il ne puisse y avoir un espace qui soit de 3 pas moindre que rien, et que de ce fait le cas soit impossible quant à la droite AB vers l'avant, si en revanche on comprend (à l'inverse de ce qui a été supposé) que cette droite se prolonge à partir de A vers l'arrière, alors on trouvera, à 3 pas en arrière de A, le point D que l'on cherchait comme s'il était devant. Par conséquent, s'être avancé de – 3 pas, est la même chose que s'être reculé de 3 pas.

Par conséquent on doit certes répondre négativement à la question posée plus haut : l'homme n'est pas du tout plus avancé (comme cela était supposé d'après les termes du problème) d'autre part il est moins avancé de 3 pas (à l'inverse de ce qui était supposé). Aussi, le point D n'est-il pas moins déterminé (designatur) dans le cas présent, par la réponse –3, qu'il l'était, dans le cas précédent, par la réponse +3. Non plus vers l'avant, bien sûr, mais vers l'arrière. De ces deux façons, on détermine sur la droite infinie un point fixé et unique. "

Kant : Essai pour introduire en philosophie le concept de grandeurs négatives, 1786

"Un corps en mouvement est quelque chose, un corps qui n'est pas en mouvement est aussi quelque chose (cogitabile), mais un corps qui, sous le même point de vue et en même temps serait en mouvement et ne le serait pas n'est absolument rien (nihil negativum irrepraesentabile)
La force motrice d'un corps d'un côté et un effort égal du même corps dans un sens opposé ne sont pas contradictoires. La conséquence en est le repos qui est quelque chose (repraesentabile) ; c'est également rien, mais dans un autre sens ; nous appellerons ce rien zéro = 0
Supposez qu'une personne soit créancière d'une autre pour la somme de A = 100 thalers, elle doit recevoir un montant équivalent. Mais si la même personne est débitrice de B = 100 thalers, il lui faut en prendre autant. Les deux montants pris ensemble s'annulent, c'est à dire qu'il n'y a ni à donner, ni à recevoir de l'argent. On voit facilement que ce zéro est un rien relatif, puisque seule, une certaine conséquence n'est pas dans ce cas, un certain capital, et, dans le cas cité plus haut, un certain mouvement.

Les mathématiciens utilisent à présent dans leurs grandeurs le concept de cette opposition réelle et, pour l'indiquer, ils les affectent des signes + et - .
Un bateau navigue du Portugal vers le Brésil. Marquons par le signe + toutes les distances accomplies avec le vent d'est, par le signe -celles parcourues avec le vent d'ouest. Les nombres eux-mêmes indiqueront des milles. Ainsi le trajet accompli en sept jours est de 12+7-3-5+8 = 19 milles…. Il est clair que le signe – ne peut être proprement le signe de la soustraction comme on se le représente généralement, -4-5 = -9 n'est en aucune façon une soustraction, mais un véritable accroissement et une addition de grandeurs de même espèce. Au contraire +9-5 = 4 représente une soustraction, puisque les signes de l'opposition indique qu'une grandeur enlève à l'autre une grandeur qui lui est égale…. Dans +a et -a, l'une est la grandeur négative de l'autre. A+0=A, A-0=A, 0+0=0, 0-0=0, A-A=0.

Argand : Représentation des quantités imaginaires, 1806

“ Soit a une grandeur prise à volonté. Si à cette grandeur on en ajoute une seconde qui lui soit égale, pour ne former qu’un seul tout, on aura une nouvelle grandeur, qui sera exprimée par 2a. Faisant sur cette dernière grandeur une pareille opération, le résultat sera exprimé par 3a, et ainsi de suite. On obtiendra ainsi une suite de grandeurs a, 2a, 3a, 4a,…, dont chaque terme naît du précédent par une opération qui est la même pour tous les termes, et qui peut être répétée indéfiniment.

Considérons cette même suite à rebours, savoir :…4a, 3a, 2a, a. On peut encore concevoir, dans cette nouvelle suite, chaque terme comme déduit du précédent, par une opération inverse de celle qui sert à la formation de la première suite ; mais il existe une différence notable entre les deux suites : la première peut être poussée aussi loin qu’on voudra ; il n’en est pas de même de la seconde. Après le terme a, on trouvera le terme 0 comme on l’a fait à l’égard des termes …, 4a, 3a, 2a, a. Or c’est ce qui n’est pas toujours possible.

Si a, par exemple, désigne un poids matériel comme le gramme, la suite des quantités …, 4a, 3a, 2a, a, 0 ne peut être continuée au-delà de 0 ; car on ôte bien 1 gramme de 3, de 2 ou de 1 gramme, mais on ne saurait l’ôter de 0. Ainsi les termes qui devraient suivre 0 ne peuvent avoir d’existence que dans l’imagination ; ils peuvent, par cela même, être appelés imaginaires.

Mais, au lieu d’une suite de poids matériels, considérons les divers degrés de pesanteur qui agissent sur le bassin A d’une balance qui contient des poids dans ses deux bassins, et supposons, pour donner plus d’appui à nos idées, que les mouvements des bras de cette balance soient proportionnels aux poids ajoutés ou retranchés, effet qui aurait lieu, par exemple, au moyen d’un ressort adapté à l’axe. Si l’addition du poids n dans le bassin A fait varier de la quantité n’ l’extrémité du bras A, l’addition des poids 2n, 3n, 4n… occasionnera, sur cette même extrémité, des variations 2n’, 3n’, 4n’… et ces variations pourront être prises pour mesure de la pesanteur agissant sur le bassin A : cette pesanteur est 0 pour le cas d’égalité entre les deux bassins.

On pourra en partant de la pesanteur 3n’, obtenir en retranchant des poids, les pesanteurs 2n’, n’, 0. Mais ces divers degrés peuvent être produits non seulement en enlevant des poids au bassin A, mais aussi en en ajoutant au bassin B. Or, l’addition de poids sur le bassin B peut être répétée indéfiniment ; ainsi, en la continuant, on formera de nouveaux degrés de pesanteur exprimés par -n’, -2n’, -3n’… et ces termes appelés négatifs, exprimeront des quantités aussi réelles que les termes positifs…

Selon l’espèce de grandeur à laquelle on applique la numération, la quantité négative est réelle ou imaginaire.

Deux quantités d’une espèce susceptible de fournir des valeurs négatives étant comparées entre elles, l’idée de leur rapport est complexe. Elle comprend 1° l’idée du rapport numérique dépendant de leurs grandeurs considérées absolument 2° l’idée du rapport des directions ou sens auxquelles elles appartiennent, rapport qui en est l’identité ou l’opposition .

(Suite page 12)

(Suite de la page 11)
Maintenant, si, en faisant abstraction du rapport des grandeurs absolues, on considère les différents cas que peut présenter le rapport des directions, on trouvera qu'ils se réduisent à ceux qu'offrent les deux proportions suivantes :

+1 : +1 : : -1 : -1

+1 : -1 : : -1 : +1. "

Remarque : la notation a : b : : c : d signifie a / b = c / d et se lit a est à b comme c est à d.

Il va sans dire que, suivant les classes, la réaction n'est pas au départ toujours favorable " on n'est pas des intellos nous madame " ; mais le fait de travailler en groupe, d'avoir une certaine liberté de recherche et de travailler un texte à plusieurs entraîne un certain dynamisme ; c'est ce qui s'est passé au collège de Rambervillers en 4ème cette année 2003-2004.

Pour continuer avec les négatifs, j'utilise les brochures de l'IREM de Lorraine " **Le théâtre au service de l'algèbre** " (niveaux 5ème et 4ème) et j'ai proposé ensuite le travail suivant :

1. Représentez, dessinez 3 · 2 pour un enfant du début de l'école primaire.
2. Représentez 3 · (+2) à la manière du " théâtre " pour l'algèbre.
3. Représentez 3 · (-2) toujours à la manière du " théâtre ".
4. L'égalité (-2) · 3 = 3 · (-2) vous paraît-elle juste ? fausse ? difficile à déterminer ? Et pourquoi ?
5. Quelle peut être la réponse de (-3) · (-2) ?
6. Pouvez-vous représenter à l'aide de plusieurs dessins - [3 · (-2)] à la manière du " théâtre " ou autrement ?