

Une façon de rendre plus “ agréable ” le calcul littéral en classe de 3^{ème}.

Christophe **WALENTIN**

Collège Les Avrils, Saint Mihiel (55)

christophe.walentin@wanadoo.fr

Ce document est inspiré d'une activité (Françoise BRASSENX) disponible sur le site internet MATHSENIGNE (www.mathsenligne.com).

Brève description de l'activité...

L'élève est amené à trouver la forme réduite de plusieurs expressions littérales. Puis, pour chacune d'entre elles, le coefficient de chaque monôme est considéré sans son signe et associé à une lettre de l'alphabet (1 à A, 2 à B, 3 à C, 4 à D, etc.), ce qui permet à l'élève de remplir une grille de mots préalablement préparée par l'enseignant.

Exemple...

Pour l'expression $A = (x - 3)^2 - (8 + 9x - x^2)$, l'élève aboutit à la forme réduite $A = 2x^2 - 15x + 1$, ce qui lui fournit les coefficients suivants : $A_2 = 2$, qui correspond à la lettre B ; $A_1 = 15$, qui correspond à la lettre O ; $A_0 = 1$, qui correspond à la lettre A.

L'élève remplit alors au fur et à mesure une grille qui se présente ainsi, en remplaçant chaque coefficient par sa lettre correspondante :

La création de telles grilles et des expressions associées peut nécessiter un certain

				D ₂		
				A ₂		
				B		
B ₂	F ₁	C ₂	G ₂	A ₁	F ₁	D ₂
				O		
				B ₁		

6 selon la nature et le nombre de leurs solutions. Descartes propose pour celles-ci diverses méthodes de résolution et rappelle celles de ses prédécesseurs (Cardan, Tartaglia). Il lui apparaît de plus en plus clair que le respect des règles d'homogénéité complique l'écriture d'équations elles-mêmes assez difficiles à résoudre.

Descartes donne alors un autre exemple de problème géométrique qu'il va encore une fois résoudre par l'algèbre et les méthodes qu'il a exposées auparavant. Au sein de cette étude il en vient à résoudre un petit exercice dans lequel les dimensions entre les quantités ne sont clairement pas les mêmes.

"Tout de même si on veut diviser l'angle NOP, ou bien l'arc ou portion de cercle NQPT en trois parties égales, faisant NO = 1 pour le rayon du cercle, et NP = q pour la subtendue de l'arc donné, et NQ = z pour la subtendue du tiers de cet arc, l'équation vient : $z^3 = 3z - q$ " (on aura bien sûr remarqué le changement de statut de la lettre z qui est à nouveau l'inconnue).

L'égalité obtenue, du point de vue des dimensions, oppose un volume à différence d'une aire par une longueur. La rupture avec la géométrie des Anciens est entièrement consommée...

C'est la dernière étape d'un long processus d'abstraction où l'on est passé de la résolution géométrique d'un problème du plan à une résolution exclusivement numérique. Les quantités numériques ont pris, dans les calculs, la place des quantités géométriques, des grandeurs. L'analogie est complète entre les deux catégories.

Bien entendu – et Descartes soulèvera le problème sans le régler – les équations algébriques possèdent des solutions ("sourdes" ou "fausses") qui n'ont pas d'interprétation géométrique possible. Le champ des nombres dépasse, en fin de compte, largement celui des grandeurs.

"Cette géométrie de Descartes est une *Algèbre des longueurs*. Même s'il ne se prononce pas clairement sur la nature du rapport géométrique (est-il un nombre ou pas ?) ou plutôt, [...], même s'il maintient la distinction entre nombre et rapport géométrique, l'avancée sur le plan de la numérisation des rapports est importante." (E. Cousquer)

Des sources d'inspiration largement citées...

La Géométrie – **Descartes** – Editions Jacques Gabay

De la théorie des proportions à la notion de nombre réel – **E. Cousquer** :

<http://www.lille.iufm.fr/labo/cream/ressources/savoirPlus/R/Ch94/Ch94.pdf>

La Géométrie de Descartes – **P. Debart** :

http://perso.wanadoo.fr/debart/geometrie/geom_descartes_interactif.html

Eléments – **Euclide** :

Etude d'un cas particulier.

Après la résolution dans le cas général, vient l'étude d'un cas particulier. Descartes utilise alors un repère d'origine A, l'axe des abscisses étant la droite horizontale (AG) ; l'axe des ordonnées dans la direction BC faisant un angle de 60° avec l'horizontale, orienté vers le bas (même figure qu'à la page précédente). (suivent les valeurs des différents paramètres de la résolution générale)

La quantité "d'homogénéité" z disparaît alors remplacée par la valeur 1. Descartes obtient alors des expressions comme celle sous le symbole racine

Et si on veut expliquer toutes les quantités données par nombres, en faisant par exemple $EA = 3$, $AG = 5$, $AB = BR$, $BS = \frac{1}{2} BE$, $GB = BT$, $CD = \frac{3}{2} CR$, $CF = 2CS$, $CH = \frac{2}{3} CT$, et que l'angle ABR soit de 60 degrés, et enfin que le rectangle des deux CB et CF soit égal au rectangle des deux autres CD et CH ; car il faut avoir toutes ces choses afin que la question soit entièrement déterminée ; et avec cela, supposant $AB = x$, et $CB = y$, on trouve par la façon ci-dessus expliquée.

$$y^2 = 2y - xy + 5x - x^2,$$

$$y = 1 - \frac{1}{2}x + \sqrt{1 + 4x - \frac{3}{4}x^2},$$

si bien que BK doit être 1, KL doit être la moitié de KI ; et pourceque l'angle IKL ou ABR est de 60 degrés, et KIL qui est la moitié de KIB ou IKL, de 30, ILK est droit. Et pourceque IK ou AB est nommée x , KL

est $\frac{1}{2}x$, et IL est $x\sqrt{\frac{3}{4}}$, et la quantité qui étoit tantôt nommée z est 1,

celle qui étoit a est $\sqrt{\frac{3}{4}}$, celle qui étoit m est 1, celle qui étoit o est 4, et

celle qui étoit p est $\frac{3}{4}$, de façon qu'on a $\sqrt{\frac{16}{3}}$ pour IM, et $\sqrt{\frac{19}{3}}$ pour NM ;

($1 + 4x$) pour laquelle les règles d'homogénéité n'appliquent plus : la somme d'une longueur et d'une aire... La quantité z revient toutefois dans la conclusion générale du problème.

Le livre troisième

Il s'ouvre sur une classification des équations algébriques allant jusqu'au degré

temps.

C'est ce temps que l'on se propose de vous faire gagner...

Tout d'abord, nous allons donner une liste d'expressions qui génère une cinquantaine de coefficients (chaque lettre étant générée environ 2 fois). On donnera ensuite un exemple de préparation de grille.

$$\begin{aligned} A &= (3x - 2)^2 + 12 \\ B &= (x + 1)(4x - 2) - 2(8 - 3x) \\ C &= (x + 7)^2 + 3(2x^2 - 10) + 1 \\ D &= (5x - 2)^2 + (2x - 3)(x + 2) - x^2 \\ E &= (2x - 4)^2 + x(x - 1) \\ F &= (3x^2 - 4) - (2x^2 - 7x + 3) - (-10 + x) \\ G &= 3(2x^2 - 4x) + 2(x^2 - 5x - 12) \\ H &= (5x - 2)^2 \\ I &= (10x^2 - 10x + 10) - (9x^2 - 8x - 7) \\ J &= (3 - 3x)(1 + 5x) \\ K &= -3x(6x - 2) - 5(-2 - 3x) \\ L &= (3 - 5x)(3 + 5x) \\ M &= (2x + 5)^2 + (x^2 - 9x - 12) \\ N &= (2x - 1)(1 - 7x) - (6 - 14x) \\ O &= 2x^2 - 7x - 11 - 10 - 10x + 4x^2 \\ P &= (3x + 4)^2 + (2x)^2 + (-3)^2 \\ Q &= (4 - 3x)^2 + (x^2 + 5x + 6) \end{aligned}$$

L'expression A fournit les coefficients A_2, A_1, A_0 , l'expression B les coefficients B_2, B_1, B_0 , etc.

Le tableau suivant fournit, pour chaque lettre de l'alphabet les coefficients correspondants et par suite les expressions à sélectionner :

Exemple de préparation de grille...

Lettre	Coefficients			Lettre	Coefficients			Lettre	Coefficients			Lettre	Coefficients			Lettre	Coefficients		
A	F ₂	I ₂		F	F ₁	O ₂		K	M ₁	P ₀		P	A ₀	E ₀		U	O ₀	K ₁	
B	D ₀	I ₁		G	N ₀	C ₂		L	A ₁	J ₁		Q	O ₁	I ₀		V	G ₁	Q ₀	
C	J ₀	F ₀		H	B ₁	G ₂		M	P ₂	M ₀		R	K ₂	B ₀		W	N ₁		
D	B ₂	H ₀		I	A ₂	L ₀		N	C ₁	N ₂		S	D ₁	Q ₁		X	G ₀	P ₁	
E	E ₂	M ₂		J	Q ₂	K ₀		O	E ₁	J ₂		T	C ₀	H ₁		Y	H ₂	L ₂	
																Z	D ₂		

On forme une grille avec des mots :

En utilisant le tableau précédent, on remplace les lettres par les coefficients correspondants :

				M	E	T	Z
	O			I			
D	R	U	I	D	E		
				I			

(dans cet exemple, H_0 et B_2 représentent la lettre D).

				P_2	E_2	H_1	D_2
	E_1			A_2			
H_0	K_2	O_0	A_2	B_2	E_2		
				A_2			

Il suffit alors de donner cette grille à l'élève ainsi que les expressions nécessaires :

$$P = (3x + 4)^2 + (2x)^2 + (-3)^2$$

$$E = (2x - 4)^2 + x(x - 1)$$

$$H = (5x - 2)^2$$

etc.

Remarques...

(Suite page 7)

" La vie n'est bonne qu'à deux choses : découvrir les mathématiques et enseigner les mathématiques "

Siméon Denis POISSON (1781-1840), mathématicien.

supposer le problème résolu, désigner par des lettres quelques longueurs bien choisies (connues ou non) puis exprimer les autres longueurs en fonction de ces dernières. Le problème géométrique est ainsi ramené à un problème algébrique : "Premièrement, je suppose la chose comme déjà faite, et pour me démêler de la confusion de toutes ces lignes je considère l'une des données, et l'une de celles qu'il faut trouver, par exemple AB et CB, comme les principales et auxquelles je tâche de rapporter ainsi toutes les autres."

Descartes met ainsi en place son système de repérage : on va exprimer en fonction de deux longueurs CB et AB toutes les autres, compte tenu des positions particulières des différents points de la figure. Ceci étant bien sûr possible du fait que les droites AB et CB ont des directions différentes.

"Que le segment de la ligne AB, qui est entre les points A et B, soit nommé x ; et que BC soit nommé y ; et que toutes les autres lignes données soient prolongées jusques à ce qu'elles coupent ces deux aussi prolongées, s'il est besoin, et si elles ne leur sont point parallèles ; comme vous voyez ici qu'elles coupent la ligne AB aux points A, E, G, et BC aux points R, S, T".

Expression des différentes longueurs du problème.

Les longueurs de base étant données, on peut maintenant déterminer les autres en tenant compte des rapports de proportionnalité évoqués dans l'énoncé du problème. Ces rapports censés être connus sont donc désignés par des lettres du début de l'alphabet : $a, b, c, d \dots$ pour les distinguer des longueurs inconnues désignées par des lettres de la fin de l'alphabet : x ou y .

Cependant la lettre z qui apparaît dans la suite ne joue pas à proprement parler le rôle d'une inconnue.

"Puis à cause que tous les angles du triangle ARB sont donnés, la proportion qui est entre les côtés AB et BR est aussi donnée, et je la pose comme de z à b , de façon que AB étant x , RB sera $bx / z \dots$ "

La variable z est introduite pour respecter les règles d'homogénéité de Viète. Elle sera remplacée par 1 dans l'étude d'un cas particulier dans la suite de la résolution. Elle donne, en quelque sorte, l'unité de longueur choisie. C'est la longueur 1 du segment avec lequel on pouvait construire le produit ou le quotient de deux longueurs.

Son existence, toujours sous-entendue en géométrie analytique, est pourtant indispensable à la construction d'un repère quel qu'il soit. Les graduations des axes y sont rapportées, les distances à l'origine du repère en dépendent.

De ce fait, elle apparaît dans l'expression de toutes les longueurs de la figure.

"... et la toute CR sera $y + bx / z$ à cause que le point B tombe entre C et R [...]. Tout de même les trois angles du triangle DRC sont donnés, et par conséquent aussi la proportion qui est entre les côtés CR et CD, que je pose comme de z à c , de façon que CR étant $y + bx / z$, CD sera $cy / z + bcx / z^2 \dots$ "

