Sur les rapports de longueurs dans "La Géométrie" de Descartes.

Gilles ***WAEHREN***
Lycée Mangin, SARREBOURG
Commission " Histoire " de la régionale Lorraine.

Publiée en 1637, la *Géométrie* de Descartes s'inscrit dans la rupture avec ce qu'il appelle lui-même "la géométrie des Anciens", celle des *Eléments* d'Euclide. Les mesures de grandeurs deviennent des nombres à part entière ; des nombres sur lesquels on peut faire toutes les opérations arithmétiques usuelles. Les longueurs des segments constituent alors les inconnues d'équations à résoudre. Mais l'apport majeur de Descartes à cette réforme est l'introduction d'un repère pour étudier un problème géométrique et le résoudre par le calcul et non plus par une méthode purement géométrique.
Qu'en est-il du calcul sur les longueurs à l'époque de Descartes ?
Comment résout-il lui-même certaines équations par des procédés géométriques ?
Comment gère-t-il le passage des grandeurs géométriques à leur représentation numérique ?

La distinction entre nombre et grandeur dans la mathématique grecque.

A l'époque d'Aristote (IV^{ème} s. avant notre ère) un nombre est une quantité *discrète*. On est encore très proche du nombre qui permet de compter les moutons dans un pâturage ou qui détermine les parts d'un héritage : c'est un naturel ou un rationnel positif. Par contre une grandeur est une quantité *continue*, c'est-à-dire mesurable, que l'on veuille estimer la longueur d'une route ou le poids d'un sac de blé.

Ainsi un nombre (naturel) ne peut être divisé qu'une finitude de fois jusqu'à obtenir 1 ; au-delà, il perd son sens : comment pourrait-on diviser un homme en deux ou en trois sans toucher à son intégrité, son unité ? Une grandeur, elle, peut être mesurée donc elle est indéfiniment divisible. On pourra diviser un segment à volonté, la plus petite partie possible étant le point. Pour les mathématiciens grecs, le point jouait le même rôle en géométrie que le nombre 1 en arithmétique.

Il faut cependant noter que l'infinie divisibilité d'une grandeur implique qu'il n'y a pas d'unité de mesure qui soit naturelle. Ces choix d'unités seront laissés aux arpenteurs, aux "agrimenseurs" ; les géomètres, quant à eux, savent que l'on n'additionne pas des longueurs à des volumes. On verra, par la suite, comment Descartes s'est accommodé de ces problèmes d'unités.

Il est donc normal de constater que, dans les *Eléments*, les livres consacrés à l'arithmétique soient bien séparés de ceux traitant de géométrie, exception faite du livre 5 qui donne des énoncés relatifs aux grandeurs commensurables. Autrement dit, au sein même de la catégorie des grandeurs, distinguait-on celles qui sont *commensurables*, qui ont "la même raison que deux nombres", de celles dites *incommensurables*, l'opération de division permettant le tri entre les deux classes. Deux grandeurs sont donc dites commensurables s'il est possible de trouver une grandeur finie capable de les mesurer simultanément. Les raisons des grandeurs commensurables ont alors un comportement semblable à celui des raisons numériques et il est possible de faire le lien entre grandeur et nombre.

La révolution apportée par Stevin

Quand il veut introduire sa notation décimale, Stevin, dans *La Disme*, considère les fractions de 1 comme nombres, en rupture avec la pratique de la mathématique grecque.
Pour Stevin, le nombre est un moyen de rendre la quantité évidente. Les nombres ne sont pas des quantités discrètes : "*QUE NOMBRE N'EST POINT QUANTITÉ DISCONTINUE*" et "*QUE L'UNITÉ EST UN NOMBRE*", peut-on lire.
Les nombres et les grandeurs, poursuit Stevin, ont tant de choses en commun qu'ils pourraient paraître presque identiques ; par conséquent, il y a quelque chose dans le nombre qui doit correspondre à ce que le point est aux grandeurs. Stevin conclut que l'unité n'est pas au nombre ce que le point est au segment. Le nombre qui est équivalent au point pour la droite est 0.

Les calculs géométriques chez Descartes.

(Les citations dans les paragraphes qui suivent sont toutes extraites de *La Géométrie*)

Au XVII$^{\text{ème}}$ siècle encore, la géométrie se pratique encore sans unité de mesure, mais la dimension de chaque grandeur est prise en compte scrupuleusement dans tous les calculs. Il faut aussi savoir qu'à cette époque, en France et partout ailleurs, on connaît autant d'étalons de longueurs qu'il y a de seigneuries de par le Royaume. La toise est une unité de longueur plus ou moins grande selon que le seigneur est plus ou moins généreux.
On ne peut donc prétendre proposer des résultats généraux en privilégiant la toise de Paris par rapport à celle de Lyon. L'uniformisation ne viendra qu'à la fin du XVIII$^{\text{ème}}$ siècle avec la généralisation du système métrique.

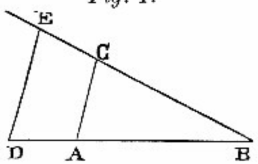
Descartes va mettre définitivement en place le lien entre nombre et grandeur de la manière suivante : à partir d'un segment dit "de longueur 1", on construit des segments dont la longueur est le résultat d'une opération arithmétique, que ce soit une multiplication, une division ou une extraction de racine. On opère donc de la même manière sur les longueurs que sur les nombres.

<u>La Multiplication</u> :

On a : (BA/BD) = (BC/BE) donc BE = (BC· BD) / 1.
Le segment BE a une longueur égale au produit des longueurs BC et BD, or, au sens strict, un produit de longueurs est une grandeur d'aire. On obtient donc un

Soit, par exemple, AB (*fig. 1*) l'unité, et qu'il faille multiplier BD par BC,

Fig. 1.



je n'ai qu'à joindre les points A et C, puis tirer DE parallèle à CA, et BE est le produit de cette multiplication.

segment qui mesure une aire, notion inconcevable encore à l'époque d'Archimède. Bien sûr, tout cela reste correct dans la mesure où l'on s'est donné un segment de longueur 1 ([AB]) qui apparaît dans le résultat : les quantités mises en oppositions sont homogènes.

<u>La Division</u>

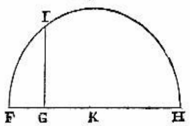
"Ou bien s'il faut diviser BE par BD, ayant joint les points E et D, je tire AC parallèle à DE, et BC est le produit de cette division". On peut aussi écrire : BC = BD/BE. Comme on a pu le constater ci-avant, le résultat de la division des longueurs BE et BD est la longueur BC, qui, a priori, est une grandeur sans unité !! Dans l'égalité précédente, la longueur BA, égale à 1, n'a pas été mentionnée.

<u>L'extraction de racine</u> suscite le même genre de remarque :
FIG et IGH sont semblables donc : (GF/GI) = (GI/GH) d'où $GI^2 = GH \cdot 1$.

Cette introduction de la *Géométrie*, qui peut servir de support à de bons exercices de troisième, n'est pas une fin en soi, mais plutôt la justification des calculs qui seront faits par la suite. Descartes s'assure ainsi que les résultats de ces calculs, notamment dans la résolution du problème de Pappus, sont

Ou s'il faut tirer la racine carrée de GH (*fig. 2*), je lui ajoute en ligne

Fig. 2.



droite FG, qui est l'unité, et divisant FH en deux parties égales au point K, du centre K je tire le cercle FIH, puis élevant du point G une ligne droite jusques à I à angles droits sur FH, c'est GI la racine cherchée.

constructibles à la règle et au compas. "*Mais souvent on n’a pas besoin de tracer ainsi ces lignes sur le papier et il suffit de les désigner par quelques lettres, chacune par une seule*." On peut ainsi résoudre des problèmes géométriques exclusivement par des calculs par des mises en équations.

Alors que, chez les mathématiciens arabes, l’usage était de mettre la géométrie au service de l’algèbre dans le cadre de la résolution d’équations algébriques. Le processus inverse est ici mis en place et va offrir de nouvelles perspectives aux mathématiques. Mais on est encore loin de la fluidité que permettent la notation symbolique et les simplifications utilisées dans les mathématiques actuelles.

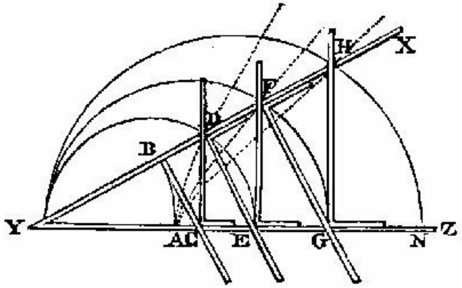
Les règles d’homogénéité de Viète

Des théories grecques, Viète a conservé la loi des homogènes : on ne peut additionner et soustraire que des grandeurs homogènes. Le produit de deux grandeurs homogènes (ou non), donne une grandeur d’une autre dimension. De même la division de grandeurs, est définie en référence à la notion grecque.

Dans un premier temps, afin de respecter les règles énoncées par Viète dans le cadre de l’écriture littérale, Descartes fait apparaître dans ses calculs le segment de longueur 1 évoqué précédemment. Il s’agit de mettre en opposition des grandeurs ayant les même unités : "Afin de ne pas manquer à se souvenir des noms de ces lignes, il en faut toujours faire un registre séparé à mesure qu’on les pose ou qu’on les change, écrivant par exemple : AB = 1, GH = *a*, BD = *b* etc. […] Ainsi, voulant résoudre quelque problème, on doit d’abord […] donner des noms à toutes les lignes […] aussi bien à celles qui sont inconnues qu’aux autres". Cette accumulation de lettres peut d’ailleurs compliquer la lecture de l’ouvrage.
"Il est aussi à remarquer que toutes les parties d’une même ligne se doivent ordinairement exprimer par autant de dimension l’une que l’autre lorsque l’unité n’est pas déterminée en la question" en introduisant des lettres supplémentaires dans ses calculs. Ainsi, Descartes propose-t-il de résoudre : $z^2 = -az + b^2$ (ou $zz = -az + bb$ comme il a plus souvent coutume de l’écrire) où la quantité positive est désignée par b^2 pour que toutes les quantités de l’équation aient la même dimension.
"…mais que ce n'est pas de même lorsque l'unité est déterminée, à cause qu'elle peut être sous-entendue par tout où il y a trop ou trop peu de dimensions : comme s'il faut tirer la racine cubique de *aabb* - *b*, il faut penser que la quantité *aabb* est divisée une fois par l'unité, et que l'autre quantité *b* est multipliée deux fois par la même". On se dirige doucement vers une simplification des règles par des sous-entendus.

Début de la résolution du problème de Pappus

La résolution du problème de Pappus commence par un rappel de l’énoncé et des ébauches de solutions apportées dans certains cas simples. Descartes considère que la résolution de ce problème dans un cadre plus général s’est

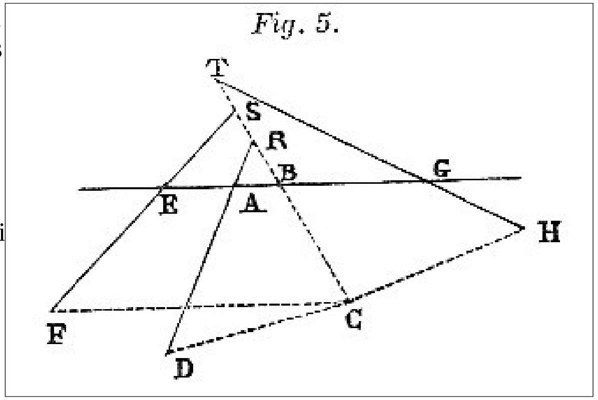


trouvée limitée par le choix des instruments choisis pour sa résolution : la règle et le compas. Si ces instruments sont bien adaptés pour résoudre des équations du second degré, ils ne le sont plus pour des équations de degré supérieur à 2.
Il propose alors un traceur de courbe de son invention (*voir figure ci-dessus*), instrument de mécanique et non de géométrie si l'on s'en tient à la classification des "Anciens" et qui serait moins "orthodoxe".

Mais la résolution de ce problème millénaire, si elle aboutit sur la construction des différentes coniques, se fera essentiellement par le calcul.

Rappel de l'énoncé

(*voir fig. 5*) "Soit AE, AD, EF, GH, etc., plusieurs lignes données par position, et qu'il faille trouver un point, comme C, duquel ayant tiré d'autres lignes droites sur les données, comme CB, CD, CF et CH, en sorte que les angles CBA, CDA, CFE, CHG, etc., soient donnés, et que ce qui est produi par la multiplication d'une partie de ces ligues soit égal à ce qui est produit par la multiplication des autres, ou bien qu'ils aient quelque autre proportion donnée, car cela ne rend point la question plus difficile."



Un énoncé que l'on pourrait aussi formuler ainsi dans le cas où les angles CBA, CDA … sont droits : "On donne quatre droites d_1, d_2, d_3, d_4 et un point M que l'on projette orthogonalement en A, B, C et D sur ces droites. On demande alors de trouver tous les points M tels que MA · MB = α MC · MD."

Mise en place d'une résolution

La méthode adoptée est celle qui a été proposée dans les pages précédentes :

supposer le problème résolu, désigner par des lettres quelques longueurs bien choisies (connues ou non) puis exprimer les autres longueurs en fonction de ces dernières. Le problème géométrique est ainsi ramener à un problème algébrique :
"Premièrement, je suppose la chose comme déjà faite, et pour me démêler de la confusion de toutes ces lignes je considère l'une des données, et l'une de celles qu'il faut trouver, par exemple AB et CB, comme les principales et auxquelles je tâche de rapporter ainsi toutes les autres."
Descartes met ainsi en place son système de repérage : on va exprimer en fonction de deux longueurs CB et AB toutes les autres, compte tenu des positions particulières des différents points de la figure. Ceci étant bien sûr possible du fait que les droites AB et CB ont des directions différentes.
"Que le segment de la ligne AB, qui est entre les points A et B, soit nommé x ; et que BC soit nommé y ; et que toutes les autres lignes données soient prolongées jusques à ce qu'elles coupent ces deux aussi prolongées, s'il est besoin, et si elles ne leur sont point parallèles ; comme vous voyez ici qu'elles coupent la ligne AB aux points A, E, G, et BC aux points R, S, T".

Expression des différentes longueurs du problème.

Les longueurs de base étant données, on peut maintenant déterminer les autres en tenant compte des rapports de proportionnalité évoqués dans l'énoncé du problème. Ces rapports censés être connus sont donc désignés par des lettres du début de l'alphabet : a, b, c, d … pour les distinguer des longueurs inconnues désignées par des lettres de la fin de l'alphabet : x ou y.
Cependant la lettre z qui apparaît dans la suite ne joue pas à proprement parler le rôle d'une inconnue.
"Puis à cause que tous les angles du triangle ARB sont donnés, la proportion qui est entre les côtés AB et BR est aussi donnée, et je la pose comme de z à b, de façon que AB étant x, RB sera bx / z…"
La variable z est introduite pour respecter les règles d'homogénéité de Viète. Elle sera remplacée par 1 dans l'étude d'un cas particulier dans la suite de la résolution. Elle donne, en quelque sorte, l'unité de longueur choisie. C'est la longueur 1 du segment avec lequel on pouvait construire le produit ou le quotient de deux longueurs.
Son existence, toujours sous-entendue en géométrie analytique, est pourtant indispensable à la construction d'un repère quel qu'il soit. Les graduations des axes y sont rapportées, les distances à l'origine du repère en dépendent.
De ce fait, elle apparaît dans l'expression de toutes les longueurs de la figure.
"… et la toute CR sera $y + bx / z$ à cause que le point B tombe entre C et R […].
Tout de même les trois angles du triangle DRC sont donnés, et par conséquent aussi la proportion qui est entre les côtés CR et CD, que je pose comme de z à c, de façon que CR étant $y + bx / z$, CD sera $cy / z + bcx / z^2$ "…

Etude d'un cas particulier.

Après la résolution dans le cas général, vient l'étude d'un cas particulier. Descartes utilise alors un repère d'origine A, l'axe des abscisses étant la droite horizontale (AG) ; l'axe des ordonnées dans la direction BC faisant un angle de 60° avec l'horizontale, orienté vers le bas (même figure qu'à la page précédente). (suivent les valeurs des différents paramètres de la résolution générale)

La quantité "d'homogénéité" *z* disparaît alors remplacée par la valeur 1. Descartes obtient alors des expressions comme celle sous le symbole racine

Et si on veut expliquer toutes les quantités données par nombres, en faisant par exemple $EA = 3$, $AG = 5$, $AB = BR$, $BS = \frac{1}{2}BE$, $GB = BT$, $CD = \frac{3}{2}CR$, $CF = 2CS$, $CH = \frac{2}{3}CT$, et que l'angle ABR soit de 60 degrés, et enfin que le rectangle des deux CB et CF soit égal au rectangle des deux autres CD et CH; car il faut avoir toutes ces choses afin que la question soit entièrement déterminée; et avec cela, supposant $AB = x$, et $CB = y$, on trouve par la façon ci-dessus expliquée.

$$y^2 = 2y - xy + 5x - x^2,$$

$$y = 1 - \frac{1}{2}x + \sqrt{1 + 4x - \frac{3}{4}x^2},$$

si bien que BK doit être 1, KL doit être la moitié de KI; et pourceque l'angle IKL ou ABR est de 60 degrés, et KIL qui est la moitié de KIB ou IKL, de 30, ILK est droit. Et pourceque IK ou AB est nommée x, KL est $\frac{1}{2}x$, et IL est $x\sqrt{\frac{3}{4}}$, et la quantité qui étoit tantôt nommée z est 1, celle qui étoit a est $\sqrt{\frac{3}{4}}$, celle qui étoit m est 1, celle qui étoit o est 4, et celle qui étoit p est $\frac{3}{4}$, de façon qu'on a $\sqrt{\frac{16}{3}}$ pour IM, et $\sqrt{\frac{19}{3}}$ pour NM;

(1 + 4*x*) pour laquelle les règles d'homogénéité n'appliquent plus : la somme d'une longueur et d'une aire… La quantité *z* revient toutefois dans la conclusion générale du problème.

Le livre troisième

Il s'ouvre sur une classification des équations algébriques allant jusqu'au degré

6 selon la nature et le nombre de leurs solutions. Descartes propose pour celles-ci diverses méthodes de résolution et rappelle celles de ses prédécesseurs (Cardan, Tartaglia). Il lui apparaît de plus en plus clair que le respect des règles d'homogénéité complique l'écriture d'équations elles-mêmes assez difficiles à résoudre.

Descartes donne alors un autre exemple de problème géométrique qu'il va encore une fois résoudre par l'algèbre et les méthodes qu'il a exposées auparavant. Au sein de cette étude il en vient à résoudre un petit exercice dans lequel les dimensions entre les quantités ne sont clairement pas les mêmes.

"Tout de même si on veut diviser l'angle NOP, ou bien l'arc ou portion de cercle NQPT en trois parties égales, faisant NO = 1 pour le rayon du cercle, et NP = q pour la subtendue de l'arc donné, et NQ = z pour la subtendue du tiers de cet arc, l'équation vient : $z^3 = 3z - q$ " (on aura bien sûr remarqué le changement de statut de la lettre z qui est à nouveau l'inconnue).

L'égalité obtenue, du point de vue des dimensions, oppose un volume à différence d'une aire par une longueur. La rupture avec la géométrie des Anciens est entièrement consommée…

C'est la dernière étape d'un long processus d'abstraction où l'on est passé de la résolution géométrique d'un problème du plan à une résolution exclusivement numérique. Les quantités numériques ont pris, dans les calculs, la place des quantités géométriques, des grandeurs. L'analogie est complète entre les deux catégories.

Bien entendu – et Descartes soulèvera le problème sans le régler – les équations algébriques possèdent des solutions ("sourdes" ou "fausses") qui n'ont pas d'interprétation géométrique possible. Le champ des nombres dépasse, en fin de compte, largement celui des grandeurs.

"Cette géométrie de Descartes est une *Algèbre des longueurs*. Même s'il ne se prononce pas clairement sur la nature du rapport géométrique (est-il un nombre ou pas ?) ou plutôt, […], même s'il maintient la distinction entre nombre et rapport géométrique, l'avancée sur le plan de la numérisation des rapports est importante." (E. Cousquer)

Des sources d'inspiration largement citées…

La Géométrie – **Descartes –** Editions Jacques Gabay

De la théorie des proportions à la notion de nombre réel – **E. Cousquer :** http://www.lille.iufm.fr/labo/cream/ressources/savoirPlus/R/Ch94/Ch94.pdf

La Géométrie de Descartes - **P. Debart :** http://perso.wanadoo.fr/debart/geometrie/geom_descartes_interactif.html

Eléments – **Euclide :**

http://perso.club-internet.fr/jfgilles/mathematiques/bibliotheque/euclide/

The ethic of geometry, a genealogy of modernity – **D. R. Lachterman:**
http://lattice.linguist.jussieu.fr/article.php3?id_article=33

De l'arithmétisation des grandeurs géométriques chez Stevin – **G. Waldegg :**
http://www.peiresc.org/New%20site/Actes.Dhombres/Waldegg.pdf