

Problème du trimestre n°74

proposé par Loïc TERRIER, de METZ

La part du Lion

Le capitaine Boone et ses joyeux pirates viennent de faire main basse sur le fameux trésor des îles Tangerines, un coffre empli de pièces d'or. Durant l'aventure, ils ont dû se résoudre à manger le mousse, et tous les membres de l'équipage - qui ont entre vingt et cinquante ans - ne rêvent plus à présent que de se ranger des galères.

Pour partager le trésor, ils utilisent la règle ancestrale de la "part du lion" : le tas d'or est partagé en dix parts égales, plus éventuellement un reliquat (de moins de dix pièces). La part du lion consiste à prendre un dixième plus le reliquat. Le reste est remélangé.

Trois personnes dans l'équipage ont droit à ce privilège : le capitaine, bien sûr, ainsi que son second et le médecin de bord (spécialisé dans les prothèses avec ou sans crochet).

Le capitaine s'octroie donc la part du lion, avec un reliquat de trois pièces d'or.

Le second prend la part du lion (sur le reste), avec un reliquat de deux pièces.

Le médecin prend la dernière part du lion, avec un reliquat d'une pièce.

Les autres pirates se partagent le reste du trésor, et, par chance, cela tombe juste ; comme il se doit, leur part est inférieure à celles des trois privilégiés.

Le soir même, sur l'île de la Tortue, le capitaine donne une grande fête pour son anniversaire. Il a dépensé pour cela autant de pièces d'or qu'il y a de bougies sur son gâteau, et cette dépense ramène sa part à celle du médecin.

1. Quel est l'âge du capitaine ?
2. Sachant que si le mousse avait survécu à l'aventure, le partage final entre les marins aurait encore pu être équitable, combien d'hommes compte l'équipage ?
3. Sauriez-vous, en choisissant différemment les trois reliquats, donner au capitaine votre propre âge ? Ou n'importe quel autre ?

Envoyez le plus rapidement possible vos solutions, ainsi que toute proposition de nouveau problème, à

PoI LE GALL, 2 place du Chaussy, 57530 COURCELLES.

Solution du problème n°73

proposé par Bernard CHRÉTIEN, de VERDUN.

Voir l'énoncé sur le site de la régionale, ou bien dans le Petit Vert n°73 page 19.

Solutions d'Isabelle Henrot, Isabelle Jacques, Bernard Chrétien et Loïc Terrier.

Ci dessous la solution de l'auteur du problème :

Un nombre k étant écrit en base deux, $2k$ s'écrit en plaçant le chiffre 0 à droite et $2k+1$ s'écrit en plaçant le chiffre 1 à droite. Pour la suite, on soulignera les nombres en base 2.

On appelle I l'individu à la racine de l'arbre généalogique, son numéro SOSA est 1.

Son père a pour (numéro) SOSA 10 = 2 et sa mère 11 = 3.

La grand-mère maternelle de I a pour SOSA 111 = $2^2+2+1 = 7$ et le grand père maternel de cette dame a pour SOSA 111110 = $16+8+4+2+0 = 30$. La grand mère maternelle de cette personne a pour SOSA 1111011 = 123 ⁽¹⁾.

On considère deux cousins germains A et B, la mère de B est une sœur du père de A. X est un de leurs ancêtres communs.

- 1) X a pour SOSA : $S_{A(X)} = 2615$ dans l'arbre généalogique de A. On écrit 2615 en base deux :

$$2615 = 2048+0+512+0+0+0+32+16+0+4+2+1 = \underline{101000110111}$$

Le nombre de chiffres est 12, il indique la génération à laquelle appartient X.

Le deuxième chiffre est un 0 et correspond au père de A, il suffit de remplacer ce chiffre par le chiffre 1 pour obtenir le SOSA de B, d'où $S_{B(X)} = \underline{111000110111} = S_{A(X)} + 2^{10} = 3639$.

- 2) Plus généralement, si $S_{A(X)} = k$, on cherche la génération n de X ainsi que $S_{B(X)}$ en fonction de k .

Considérons un individu I et notons n la génération à laquelle appartient un ancêtre X de I. $S_{I(X)}$ s'écrit avec n chiffres en base deux, donc $2^{n-1}S_{I(X)} < 2^n$.

Donc $n-1 \log_2(S_{I(X)}) < n$, puis $n = E[\log_2(S_{I(X)})] + 1 = 1 + E[(\ln k)/(\ln 2)]$, en notant E la partie entière.

Enfin si $S_{A(X)}$ et $S_{B(X)}$ s'écrivent avec n chiffres en base deux, les chiffres étant identiques à partir du troisième, on a $S_{B(X)} = S_{A(X)} + 2^{E[(\ln k)/(\ln 2)] - 1}$.

¹ Remarque : La lignée ascendante de I à l'un des ancêtres X est entièrement décrite par le numéro SOSA de X. Quand ce numéro est écrit en base deux, chaque personne est représentée par un chiffre dont la position indique la génération et dont la valeur, 0 ou 1, indique le sexe.