

Problème du timestre n°73

proposé par Bernard CHRÉTIEN, de VERDUN

En généalogie, la numérotation Sosa-Stradonitz est communément utilisée pour les ascendances.

- L'individu à la racine de l'arbre généalogique a le numéro 1 (génération 1)
- Son père a le numéro 2 et sa mère le numéro 3 (génération 2)
- Si un individu de l'arbre a le numéro k , son père a le numéro $2k$ et sa mère le numéro $2k+1$.

On suppose qu'il n'y a pas d'union consanguine.

Vérifier que le grand-père maternel de la grand mère maternelle d'un individu porte le numéro 30, et que la grand mère maternelle de cette personne numérotée 30 porte le numéro 123.

Si X est un ancêtre de A , on note $S_A(X)$ le numéro de X dans l'arbre généalogique de A .

On considère deux cousins germains A et B : la mère de B est une sœur du père de A . X est un de leurs ancêtres communs.

1. On suppose que $S_A(X) = 2615$. Chercher la génération de cet ancêtre et déterminer $S_B(X)$.
2. Plus généralement, si $S_A(X) = k$, chercher $S_B(X)$ en fonction de k et préciser à quelle génération appartient cet ancêtre.

Envoyez le plus rapidement possible vos solutions, ainsi que toute proposition de nouveau problème, à

Pol LE GALL, 2 place du Chaussy, 57530 COURCELLES.

Solution du problème du timestre n°72

Rappel de l'énoncé : Soit une parabole P d'axe z , de sommet O . On munit P de deux opérations ($+$ et $*$) définies ainsi :

Addition $A+B$: la parallèle à (AB) menée par O recoupe P en S ; $S = A+B$. Si $A=B$, on "remplace" (AB) par la tangente en A à P .

Multiplication $A*B$: soit I un point quelconque de P , différent de O , fixé une fois pour toutes. La droite (AB) coupe l'axe z en N , et la droite (IN) recoupe la parabole en P ; $P=A*B$. Si $A=B$, on "remplace" (AB) par la tangente en A à P .

Démontrer que $(P ; + ; *)$ est un corps (commutatif).

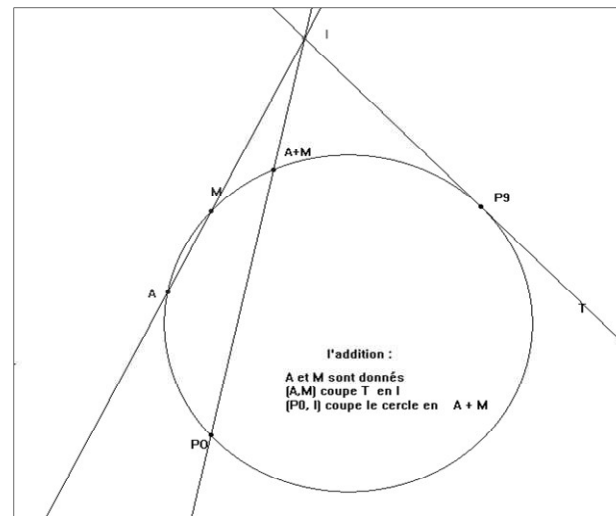
Nous demandons d'en trouver **une solution purement géométrique**.

Joël Kieffer (Lycée Hélène Boucher, THIONVILLE) a proposé deux solutions ; nous vous présentons la première. La seconde est lisible sur notre site, rubrique [Le Petit Vert](#).

Imaginons que la parabole de sommet O soit la section d'un cône de révolution de sommet S par un plan parallèle à une génératrice et considérons le cercle découpé sur le cône par un plan perpendiculaire à l'axe et passant par O .

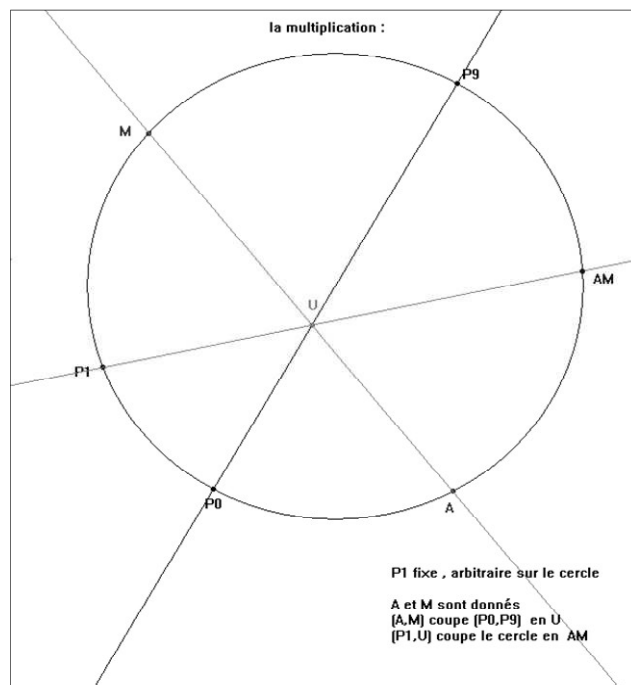
Comme la définition des opérations sur la parabole se fait uniquement en termes d'incidence, on transfère aisément ces définitions sur le cercle, grâce à une projection de centre S .

$P_0 = O$, $P_1 = I$ et P_∞ (noté P_9 sur les figures Cabri), qui est le point



diamétralement opposé à P_0 et image du point à l'infini dans la direction de l'axe de la parabole ; de même la tangente au cercle en P_∞ est l'image de la droite à l'infini dans le plan de la parabole, ce qui explique que "droites parallèles" sera traduit par "droites sécantes sur cette tangente".

On obtient ainsi l'addition sur le cercle (ci-contre),

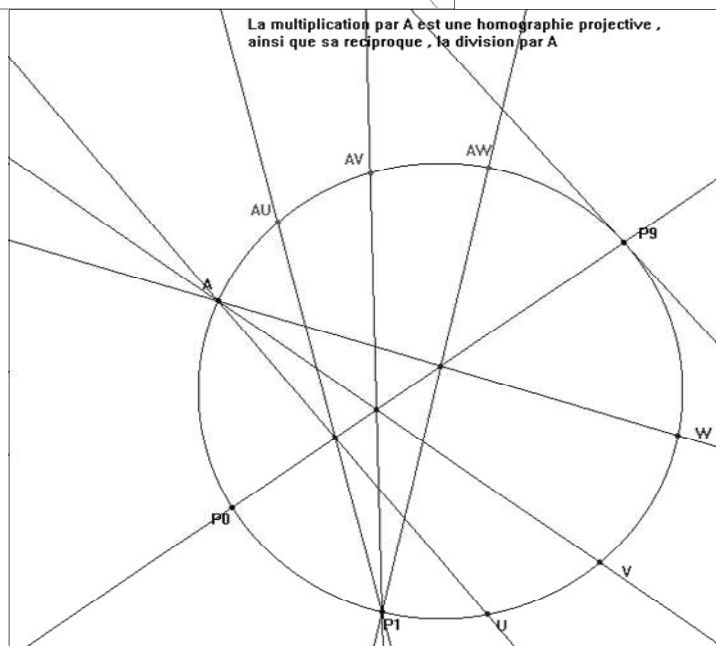


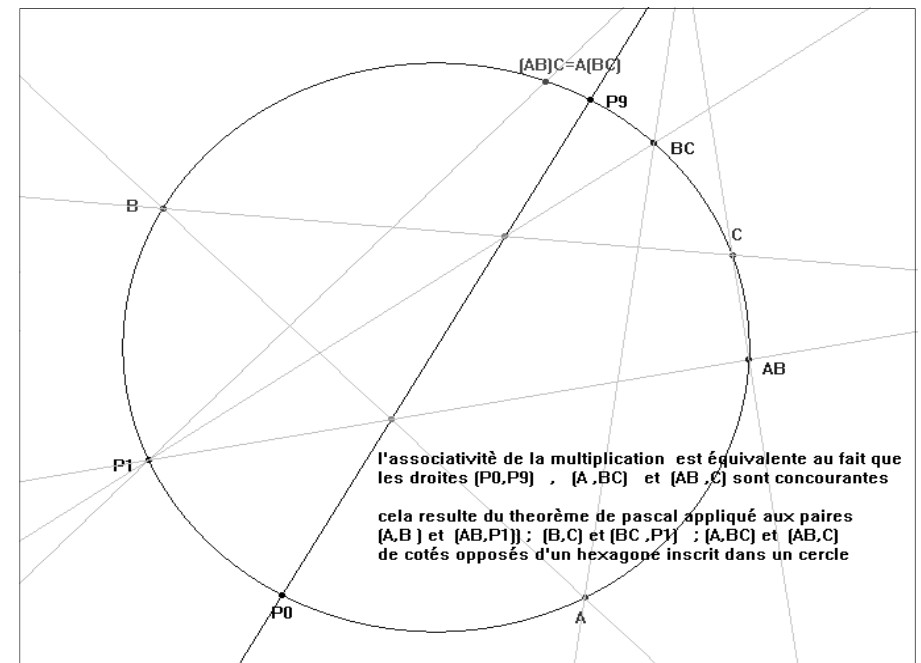
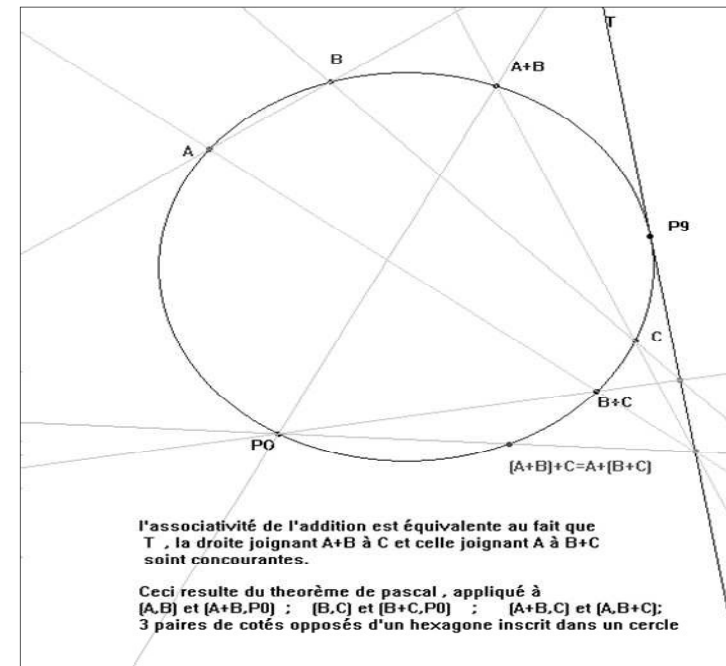
et la multiplication sur le cercle (figure 2 et figure 3 de cette page.

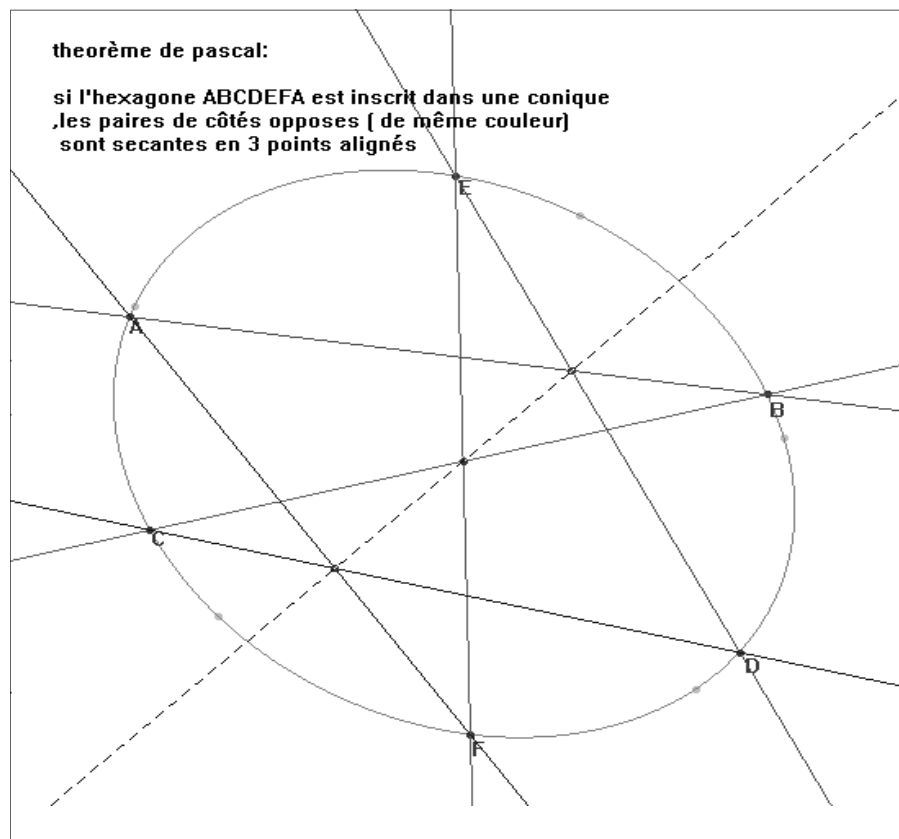
L'associativité de chacune ces 2 opérations est une conséquence du théorème de Pascal.

Voir figure 4 (pour l'addition), figure 5 (pour le produit) et figure 6 (théorème de Pascal), aux deux pages suivantes .

Pour la distributivité,
(Suite page 24)







(Suite de la page 22)

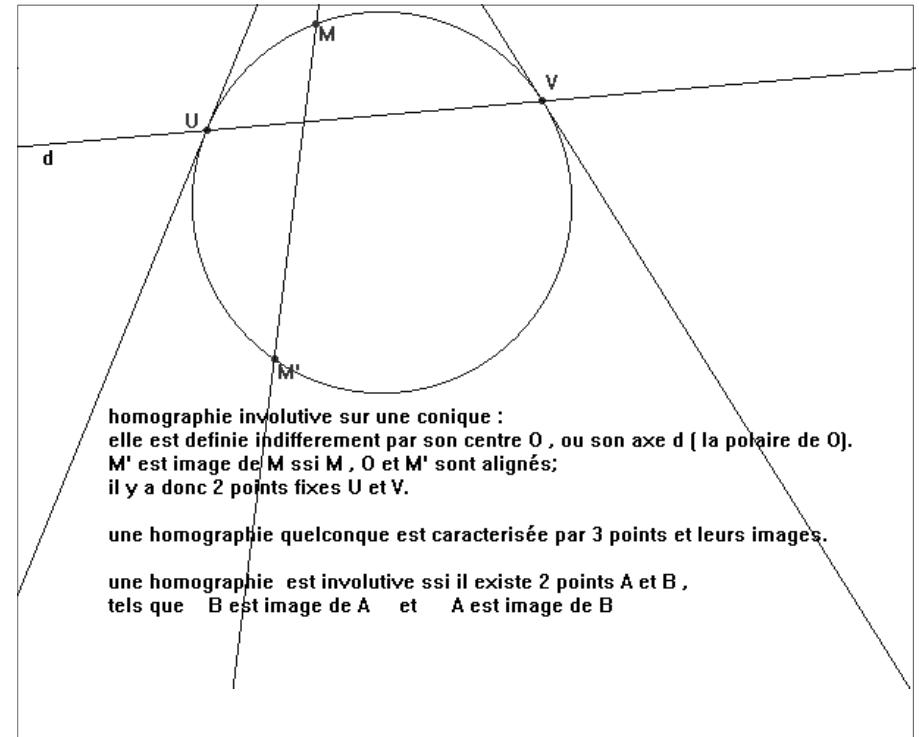
j'ai une démonstration géométrique simple, mais hélas pas élémentaire.

En fait le cadre naturel de ce problème est la géométrie projective (j'ai transposé la question sur un cercle, car les figures sont plus faciles à tracer, mais n'importe quelle conique ferait aussi bien l'affaire puisqu'elles sont toutes projectivement équivalentes ; de même la disposition des 3 points P_0 , P_1 , P_∞ est indifférente).

Le théorème auquel je fais appel caractérise les homographies (ou transformations projectives) involutives sur une conique. (théorème de Fréguier).

Une homographie sur une conique est involutive si et seulement si la droite joignant un point à son image passe toujours par un point fixe (appelé centre de l'homographie). Voir figure 7, en haut de la page 25.

On peut alors suivre la démonstration de la distributivité sur la figure 8, page 26,



et sur le schéma suivant de composition de 3 homographies (qui donne une nouvelle homographie) :

Pour passer de la première à la seconde ligne, on utilise la forme projective de la division par A .

Pour passer de la seconde à la troisième ligne, on utilise l'involution de centre I .

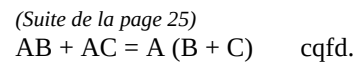
Pour passer de la troisième à la quatrième ligne, on utilise la multiplication par A .

$$\begin{array}{ccccccc}
 A & , & AB & , & AC & , & P_0 & , & P_\infty \\
 P_1 & , & B & , & C & , & P_0 & , & P_\infty & , & B+C \\
 & & C & , & B & , & B+C & , & P_\infty & , & P_0 \\
 & & AC & , & AB & , & A(B+C) & , & P_\infty & , & P_0
 \end{array}$$

On passe de la première à la quatrième par une homographie qui a comme point fixe, qui transforme P_0 en $A(B+C)$ et surtout qui échange AB et AC ; pour cette raison, elle est involutive.

Ainsi la droite joignant AB à AC , celle joignant P_0 à $A(B+C)$ et la tangente en P_∞ sont concourantes (en J) ; Mais par définition de l'addition, le point d'intersection de $P_0 J$ et du cercle est $AB + AC$.

(Suite page 26)



Cette solution, ainsi que la seconde solution proposée par Joël Kieffer, sont disponibles sur notre site (avec de belles images en couleurs).