Problème du trimestre n°76

On considère la pile de n étages-ci-contre.
On procède à l'expérience aléatoire suivante : on tire au hasard un nombre p_1 entre 1 et n, et on supprime les cases p_1 à n. La pile comporte donc désormais p_1-1 étages.
On recommence l'opération : on tire au hasard un nombre p_2 compris entre 1 et p_1-1 et on retire les étages p_2 à p_1-1, et ainsi de suite…

Soit X le nombre de tirages nécessaires pour faire disparaître la pile.

n
n-1
…
3
2
1

Envoyez le plus rapidement possible vos solutions, ainsi que toute proposition de nouveau problème, à
Pol LE GALL, 2 place du Chaussy, 57530 COURCELLES.

Solution du problème n°75 (sur un énoncé de F. Drouin)

Rappel de l'énoncé : on considère une grille constituée par un tableau de 3x3 cases dont les cases sont occupées par les nombres 1, 2, 3, …, 9. Par exemple :

1	6	3
5	8	2
4	7	9

Calculons ensuite les produits des trois nombres pour chaque ligne et chaque colonne :

1	6	3	***18***
5	8	2	***80***
4	7	9	***252***
20	***336***	***54***	

Nous obtenons six nombres. Considérons enfin la différence D entre le plus grand et le plus petit de ces six produits (ici D=336-18=318).
Déterminer les grilles qui permettent d'obtenir une valeur minimale pour D.

Deux contributions à la solutions sont arrivées : celles de Renaud Dehaye et de André Stef.
Renaud Dehaye procède " à la manière des quatre couleurs ", il ramène le cas à un nombre réduit de configurations (on peut décider que 9 est e haut à gauche, il y a deux cas pour le 8…) puis il confie à Maple (voir encadré page suivante) le soin d'explorer. Il aboutit à la

9	2	4
1	8	7
6	5	3

solution D = 36 obtenue pour la grille ci-contre :

André Stef découvre également cette solution par tâtonnements puis il établit que l'on ne peut pas faire mieux :

“ Supposons rempli un carré optimal et intéressons-nous à la ligne et la colonne comportant le chiffre 1. Les produit p_1 et p_2 obtenus sont plus petits que la racine cubique de 9! (qui vaut environ 72). Si la répartition n'est pas 1-6-9 et 1-7-8 alors on se retrouve avec p_1 ou p_2 inférieur ou égal à 48. Dès lors, un autre produit sera supérieur ou égal à 87 (racine carrée de (9!/48) arrondi supérieurement), donc D sera supérieur ou égal à 39. Il reste à étudier le cas (plus équilibré) 1-6-9 et 1-7-8 en espérant obtenir au moins un cas où D sera strictement inférieur à 39...

On établit la première ligne et la première colonne à 1-6-9 et 1-7-8 (toute configuration peut s'y ramener à permutation près des lignes ou des colonnes, ou à symétrie diagonale près). La position du 5 (4 possibilités) est imposée pour ne pas dépasser la valeur produit 92 (=54+38). On trouve donc une solution, et une seule (à permutations et symétrie près), avec D=36 qui est bien inférieur strictement à 39.

André ajoute :

“ A noter qu'il existe des solutions telles qu'en prenant également en compte le produit sur la diagonale descendante. Par exemple

6	1	9
3	7	4
5	8	2

Les autres solutions sont toutes obtenues par permutations et symétries telles que

Programme Maple : calcul de l'écart max-min pour une configuration

```
ecart:=proc(i)
local a,s,e,produits;
a:=permute(6)[i];
s:=9,a[1],a[2],a[3],8,7,a[4],a[5],a[6];
produits:=s[1]*s[2]*s[3],s[4]*s[5]*s[6],s[7]*s[8]*s[9],s[1]*s[4]*s[7],s[2]*s[5]*s
     [8],s[3]*s[6]*s[9];
e:=max(produits)-min(produits);
end;
listecart:=500;

for i from 1 to 720 do
ecart(i):
listecart:=listecart,ecart(i):
od:
min(listecart);
```