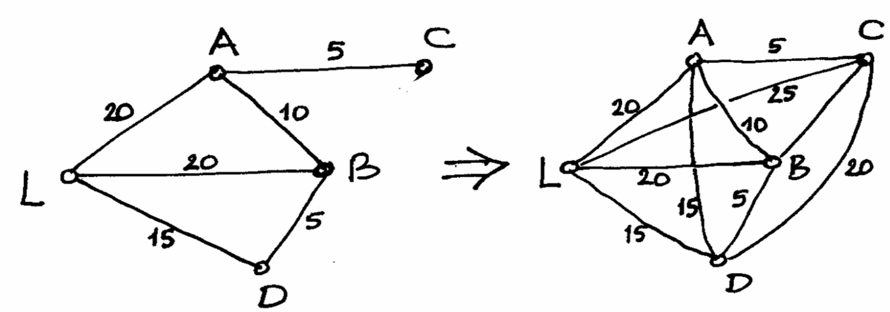
Le livreur de fuel lorrain (suite... et fin ?)

Pour comprendre le problème, se reporter au PETIT VERT n° 70 de juin (pages centrales) ou sur notre site http://www.ac-nancy-metz.fr/enseign/maths/apmep/
Rappelons simplement que le livreur part de Lunéville (désignée par la lettre L sur les graphes qui illustrent cet article) et qu'il a 51 clients à livrer.
Dans notre précédent bulletin (PETIT VERT n° 71 pages 18-19), nous avons montré qu'il était nécessaire de transformer la “ carte géographique ” en un graphe **complet** (où tous les clients sont reliés deux à deux, et tous les clients reliés à L, les arêtes représentant le chemin le plus court – en temps – pour aller d'un point à un autre).
Dans le cas de notre problème, cela représente 52x51 = 2 652 arêtes.
Exemple avec 4 clients :
Chaque arête est ensuite remplacée par deux arcs (orientés) affectés d'un temps

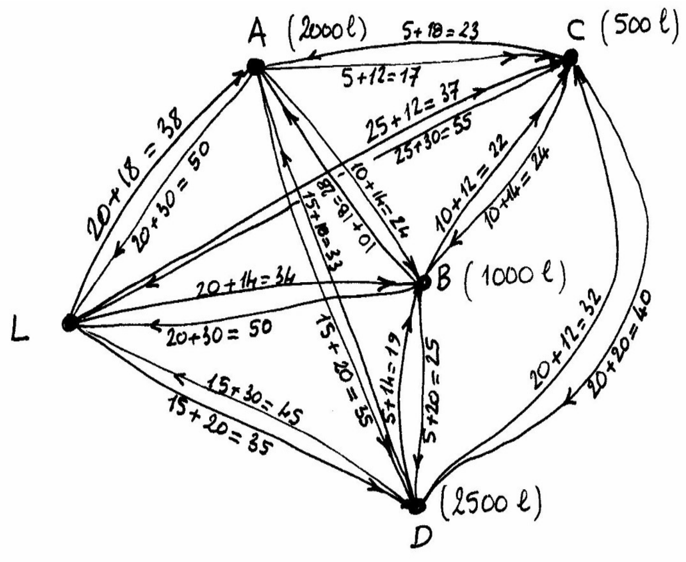


correspondant au temps de parcours augmenté du temps de livraison.
Par exemple, pour aller de A à C, il y a 5 minutes de route plus 12 minutes de livraison chez C (10 min de fixe + 2 min pour 500 l), alors que pour aller de C à A, il y a 5 minutes de route plus 18 min de livraison chez A (10 min de fixe + 8 min pour 2000 l).
Pour les arcs arrivant à L, le temps de parcours est augmenté du temps de remplissage du camion (30 min).
On obtient alors un graphe tel que celui de la page suivante :

(voir haut de la page 18)

On cherche un circuit hamiltonien, c'est à dire un circuit qui passe une fois et une seule par tous les sommets (les clients). Dans notre problème, ce chemin doit nécessairement partir de L, et aboutir à L.
Un exemple : sur le graphe ci-dessus, le chemin L A B C D L vaut 149 min.
Dans le graphe complet représentant notre problème, il y a 51! (soit environ 10^{66}) tels circuits.

Mais nous avons, jusqu'à présent, totalement passé sous silence la contrainte de la



capacité du camion, qui n'est pas illimitée : il ne peut pas prendre la quantité de fuel nécessaire aux 51 clients en une seule fois. Il lui faut donc repasser de temps en temps au dépôt.

Pour cela, la méthode la plus simple consiste à dupliquer le sommet L : il y aura k sommet L_1, L_2, ... L_k si l'on veut faire au maximum k " tournées ", et ces sommets seront tous reliés deux à deux par des arcs (orientés) de poids zéro. Tous les arcs reliés à ces sommets L_i seront également dupliqués.

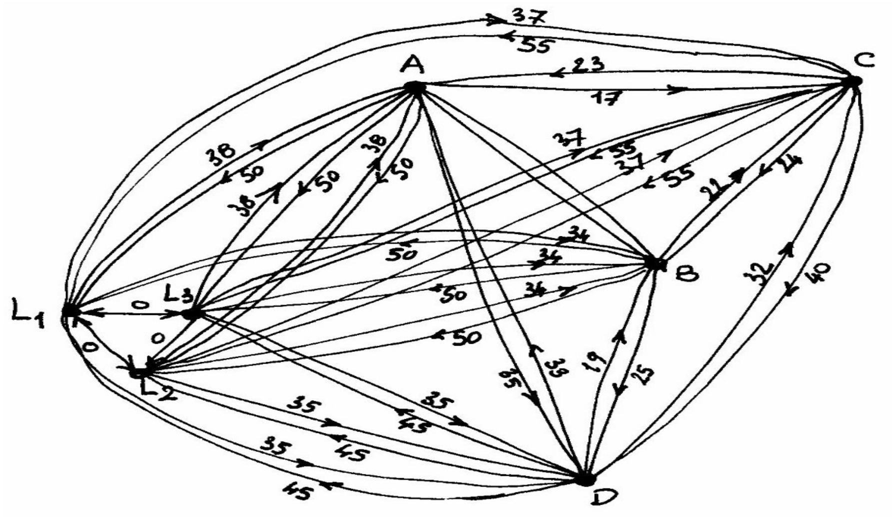
Exemple : voir le graphe du haut de la page 19.

On recherche alors un circuit hamiltonien de telle sorte que tous les chemins allant d'un L_i au suivant correspondent à une capacité de fuel inférieure ou égale à celle du camion.

Sur le graphe (*de la page 19*), en imaginant que le camion ait une capacité de 3000 l et qu'on se fixe un maximum de 3 tournées, des chemins tels que L_1 D L_2 A L_3 B C L_1 ou L_1 D C L_2 A B L_3 L_1 conviennent. Le premier correspond à trois " tournées ", le second à deux " tournées " seulement : en effet, l'arc L_3 L_1, de valeur 0, correspond à un déplacement fictif.

Dans le problème qui nous concerne, le nombre de circuits potentiels peut être de l'ordre de 10^{70}... Aucun ordinateur, actuellement, ne peut lister toutes les possibilités pour chercher la meilleure : la méthode proposée est juste en théorie, mais inapplicable en pratique.

Il existe cependant une méthode permettant de trouver le circuit le plus court sur un tel graphe : c'est l'algorithme d'énumération par séparation et évaluation (dû à Little, Murty, Sweeny et Carel, 1963). Nous ne pouvons pas le présenter ici, il dépasserait le cadre du PETIT VERT ; mais un tel algorithme ne prend pas en compte les contraintes de capacité du camion (elle est supposée infinie) : il faudrait le transformer, ce qui n'est pas évident a priori... avis aux amateurs.



Il reste une deuxième contrainte que nous n'avons pas encore intégrée : celle du temps de travail du chauffeur-livreur. A l'heure actuelle, on ne sait pas comment on pourrait modéliser (en termes de graphes) une telle contrainte.

CONCLUSION : ce problème n'admet pas encore (en l'état actuel des connaissances en recherche opérationnelle) de solution algorithmique. Il faut se “ rabattre ” sur des méthodes plus empiriques : essayer par exemple de faire des “ paquets ” de clients (les plus proches possible - en temps - les uns des autres) qui utilisent au maximum les capacités du camion.
Pol avait trouvé empiriquement une solution en 5 tournées pour un total de 27 h 44 de travail (moins de 6 h par jour).
Les journées étant prévues pour 8 h 30 de travail (pauses comprises), on devrait pouvoir “ tourner ” en 4 journées, mais c'est “ ric rac ”. Parmi nos lecteurs, personne n'a encore fourni une réponse en quatre jours. Alors ... **A VOS CALCULETTES** (réponses à envoyer à pol.legall@free.fr).

Merci à Christophe LENTÉ, qui était venu faire la conférence sur les graphes lors de notre journée du 13 mars 2002, à qui nous devons toutes les pistes et méthodes théoriques qui émaillent cet article (ainsi que celui du PETIT VERT précédent).

Problème du timestre n°71

proposé par Jacques VERDIER

Soit une parabole P d'axe z, de sommet O. On munit P de deux opérations (+ et *) définies ainsi :

Addition A+B : la parallèle à (AB) menée par O recoupe P en S ; S = A+B. Si A=B, on “ remplace ” (AB) par la tangente en A à P.

Multiplication A*B : soit I un point quelconque de P, différent de O, fixé une fois pour toutes. La droite (AB) coupe l'axe z en N, et la droite (IN) recoupe la parabole en P ; P=A*B. Si A=B, on “ remplace ” (AB) par la tangente en A à P.

Démonter que (P ; + ; *) est un corps (commutatif).

Ce problème avait été posé dans le PETIT VERT n° 4 de décembre 1985. Les seules solutions proposées alors étaient analytiques.

Nous vous demandons maintenant d'en trouver **une solution purement géométrique** (précisons que l'auteur du problème n'a réussi à monter ni l'associativité de *, ni la distributivité).

Envoyez le plus rapidement possible vos solutions, ainsi que toute proposition de nouveau problème, à

Pol LE GALL, 2 place du Chaussy, 57530 COURCELLES.

Solution de problème du timestre n°71

proposé par la S.B.P.M.E.F. lors de ses journées d'été 2002 à SOIGNIES

Quel est l'ensemble des réels strictement positifs dont les parties entières de la racine carrée positive et de la racine cubique sont égales ?

Nous avons reçu une solution de Daniel VAGOST (Bousse, Moselle)

Je note E(x) la partie entière du réel x.

Je vais utiliser les deux résultats suivants :

- Théorème 1 : $\forall (a,b) \in$ þ^2, si sa-bs?1 alors $E(a) \neq E(b)$
- Théorème 2 : soit f_1 et f_2 les fonctions définies sur þ$^+$ par $f_1(x) = x^{1/2}$ et $f_2(x) = x^{1/3}$; alors il existe un réel α tel que si $x > \alpha$, $f_1(x) - f_2(x) > 1$; de plus $\alpha \approx 9{,}91$.

Si la démonstration du théorème 1 ne présente aucune difficulté, il n'en va pas de même pour celle du théorème 2 que je me suis contenté d'admettre après avoir "étudié" $f_1 - f_2$ sur une simple machine qui dessine... Je prie le responsable de la rubrique de ne pas sourire...

Résolution du problème.

Il est clair que les entiers 1^2, 2^2, 2^3, 3^2, 3^3... vont jouer un rôle déterminant (ou plutôt discriminant !)

- Si $x \in [0, 1[$ $E(x^{1/2}) = E(x^{1/3}) = 0$ donc $[0, 1[\subset S$
- Si $x \in [1, 4[$ $E(x^{1/2}) = E(x^{1/3}) = 1$ donc $[1, 4[\subset S$
- Si $x \in [4, 8[$ $E(x^{1/2})$? 2 et $E(x^{1/3}) = 1$ donc, en vertu du théorème1, $[4, 8[\cap S = \varnothing$
- Si $x \in [8, 9[$ $E(x^{1/2}) = E(x^{1/3}) = 2$ donc $[8, 9[\subset S$
- Si $x \in [9, 10[$ $E(x^{1/2}) = 3$ et $E(x^{1/3}) = 2$ donc en vertu du théorème1, $[9, 10[\cap S = \varnothing$
- Si x ? 10 > α alors, en vertu du théorème 2, $x^{1/2} - x^{1/3} > 1$ donc, en vertu du théorème1, $[10, +\infty[\cap S = \varnothing$

Il est alors possible de conclure :

L'ensemble S des réels positifs dont les parties entières de la racine carrée positive et de la racine cubique sont égales est $[0, 4[\cup [8, 9[$.

Note de la rédaction :
On peut démonter (de façon peu élégante il est vrai, mais rigoureuse), que $x^{1/2} - x^{1/3} > 1$ dès que x ? 10.
En effet, $x^{1/2} - x^{1/3} = x^{1/3}(x^{1/6} - 1)$.
Or, pour x ? 10, $x^{1/3} > 2,154$ (car la fonction est croissante, et $2,154^3 = 9,993\,948\,264$).
De même, pour x ? 10, $x^{1/6} > 1,467$ (car la fonction est croissante, et $1,467^6 = 9,967\,372\,363\,906\,680\,969$).
Donc, pour x ? 10, $x^{1/2} - x^{1/3} = x^{1/3}(x^{1/6} - 1) > 2,154J(1,467 - 1) = 1,005\,918$.
C.Q.F.D.
Ceci peut remplacer le théorème 2 de Daniel.

AVIS DE RECHERCHE

L'ANSE DE PANIER (voir Petit Vert de septembre, page 26)

Voici une solution purement géométrique qui nous a été proposée par Michel CHAVIGNY, I.P.R. de mathématiques à Besançon.

La demi-anse de panier est tracée dans le rectangle ADCR de côtés [AC] (AC = *a*) et [AR] (AR = *b* avec *b* < *a*). On a DQ = DE = *a*-*b*. *Voir figure ci-dessous*.

Il n'y a, au plus, qu'un seul point L de la demi-droite [JG) intérieur au rectangle ADCR et tel que JA = JL.
Je me propose d'établir que ce point est le centre du cercle inscrit dans le triangle ARD.
Notons O le centre du cercle inscrit dans le triangle ARD, et U, V, W les projections orthogonales respectives de O sur les côtés [AR], [RD] et [AD] du triangle ARD.
On a OU = OV = OW.

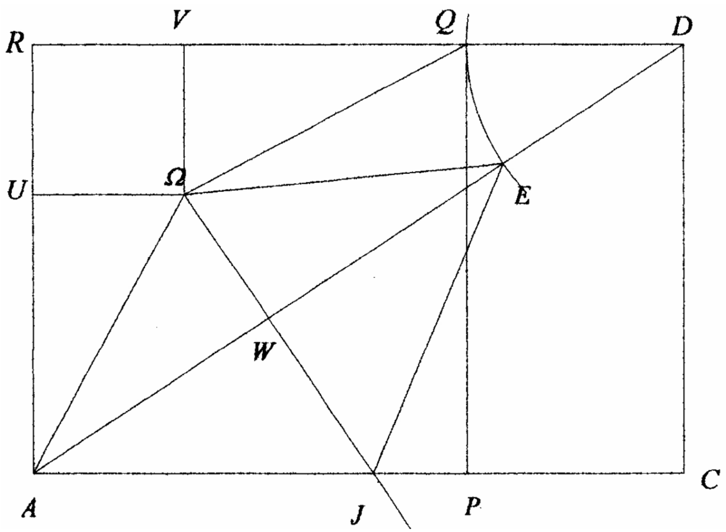
Le quadrilatère RUOV est un carré.

Les triangles rectangles AUO et OVQ sont isométriques (les deux côtés de l'angle droit ont respectivement la même longueur). On a donc OQ = OA.

La bissectrice (DO) de l'angle RDA est axe de symétrie pour le quadrilatère DQOE : OE = OQ ; Q appartient donc à la médiatrice (*d*) de [AE]. Comme (OW) est perpendiculaire à (AE), (OW) est la médiatrice de [AE]. (*N.B. le point noté W est le point G de l'énoncé*).
Il reste à prouver que JO = JA.
Les angles OAJ et AOU sont égaux (alternes-internes), de même que les angles AOW et AOU (la droite (AO) est axe de symétrie du quadrilatère AUOW).
L'angle AOW est donc égal à l'angle OAJ : le triangle AJO est donc isocèle, et AJ =JO.

On établit de même que si I est le point d'intersection de (*d*) et de (DC), alors IO = ID.

Par ailleurs, les centres I et J des arcs de cercles étant alignés avec O, il est évident que ces deux arcs de cercles admettent la même tangente au point O.



UN DEVELOPPEMENT A COLORIER POUR L'AN 2003

Avec le minimum de couleurs possibles, colorie le parallélépipède dont voici un développement.

Deux zones voisines ne peuvent pas être de la même couleur.

Les pointillés ne peuvent pas être des limites de zone. Une zone peut se prolonger d'une face à une autre.

En observant le développement, apparaissent les chiffres 2, 0, 0, 3 du nombre 2003. Pourriez-vous de plus obtenir ce minimum en coloriant ces chiffres d'une même couleur ?