

INTERROGATIONS NAÏVES MAIS SÉRIEUSES SUR LA SYMÉTRIE

Texte rédigé par la Commission
'Collège' de l'APMEP Lorraine

Le chapitre "Symétrie orthogonale" en 6^{ème} est plus difficile à faire passer qu'il n'y paraît.

Problèmes liés à l'intuition :

Les élèves arrivant en 6^{ème} n'ont généralement que cette approche intuitive de la symétrie. Elle est très forte (cf. l'activité "décagone à remplir par des losanges" de la valise "objets à manipuler" ; lorsqu'il s'agit de remplir le décagone sans consignes particulières, les solutions symétriques apparaissent). Mais en questionnant un peu nous constatons que pour une quasi majorité elle se limite à un axe vertical (visage, architecture, mobilier, ...). Mais le reflet dans un lac ne leur vient jamais spontanément à l'esprit.

Deux erreurs classiques : figures 1 et 2

Sont-elles liées à cette image mentale de la symétrie ?

Pour de nombreux élèves, symétrique signifie : "c'est pareil des deux côtés" d'où sans doute la première erreur classique. De plus, au cours de liaisons CM2-6^{ème} en Meuse il a été constaté que des enseignants de l'élémentaire n'utilisaient jamais de papier non quadrillé pour ce chapitre. D'où peut-être la deuxième erreur.

Problèmes liés au vocabulaire :

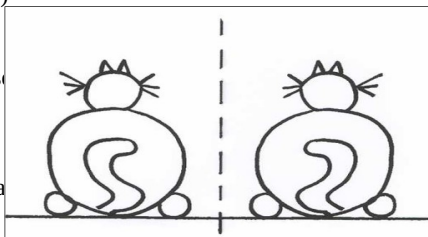
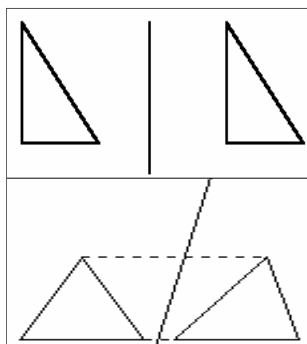
A) Demi-tour autour de l'axe de symétrie

Objection d'une élève : si le chat (figure 3) tourne autour de la droite on ne doit plus voir sa queue...

Cette vision est sous-jacente lorsqu'on utilise pliages et calques

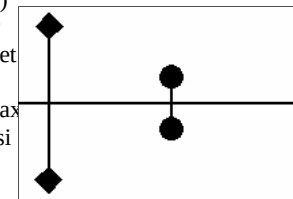
Remarque 1 : Cette image mentale sera à nouveau mise en défaut plus tard lors de la découverte de la symétrie par rapport à un plan. Elle est donc à manier avec beaucoup de prudence. Cependant, il est clair que l'activité de la tache d'encre et de sa symétrique obtenue par pliage permet une très bonne introduction au chapitre et à la construction du symétrique d'un point.

Remarque 2 : L'image du demi-tour autour de l'axe nous est aussi utile en 5^{ème} pour marquer la différence avec la symétrie centrale : demi-tour autour d'un point.



B) Reflet

Certains manuels (ex Géométrie 6^{ème} IREM Lorraine Didier) approchent ainsi la notion. L'activité est toujours réussie par les élèves mais fait encore fortement appel au réel (reflet dans l'eau d'un lac) et se transfère mal pour un axe oblique. Nous pouvons proposer alors de poser un crayon sur l'axe, tourner le cahier pour que l'axe soit horizontal et demander si ce qui est tracé peut être considéré comme un reflet.



Remarque 3 : Nous parlons de symétrie sans dire ce que c'est d'où une confusion rapide des élèves entre les mots "symétrie" et "symétrique" et beaucoup construisent "la symétrie d'une figure".

Remarque 4 : Nous constatons que la recherche des axes de symétrie d'une figure est beaucoup plus aisée, que les axes soient obliques ou non. En réfléchissant bien, nous faisons chercher ces axes dans des logos abstraits ou des figures géométriques (on ne les trouve que là...)

Remarque 5 : Calques et reflets font intervenir deux choses différentes : les programmes de 6^{ème} ne font pas de différence entre symétrie axiale et symétrie orthogonale. Or la symétrie axiale est la symétrie par rapport à une droite dans un espace à deux dimensions, d'où le calque : il devrait y avoir retournement (si je vois le visage, je dois voir les cheveux après transformation).

L'appellation "symétrie orthogonale" (les reflets...) contient le concept d'orthogonalité qui intervient dans les tracés. Quelle transformation doit-on étudier en 6^{ème} ? Laquelle est étudiée en cycle 3 ? Il est absurde de faire croire que symétrie axiale et symétrie orthogonale sont la même chose puisque les élèves perçoivent la différence. En 6^{ème}, il nous semble préférable de privilégier les constructions avec instruments, donc l'approche "reflet" (l'IREM de Lorraine avait raison...).

Autre image mentale incorrecte des élèves : la symétrie vue en 6^{ème} n'est pas la symétrie par rapport à un plan, remarquée face à un miroir. Cette symétrie est vécue corporellement dès la maternelle, n'est-elle pas un obstacle à la compréhension de la symétrie abordée en classe de 6^{ème} ?

Et le lien avec la symétrie centrale ?

Il faut en faire un et expliquer pourquoi le même mot (symétrie...) est utilisé. Si nous tournons autour d'une droite en 6^{ème}, nous tournons autour d'un point en 5^{ème} (mais plus tard nous ne pourrions pas tourner autour d'un plan). Si nous parlons de reflet, il nous faut aussi évoquer les distances par rapport au centre de symétrie. Cela est cohérent avec la symétrie par rapport à un plan ou la symétrie axiale dans l'espace.

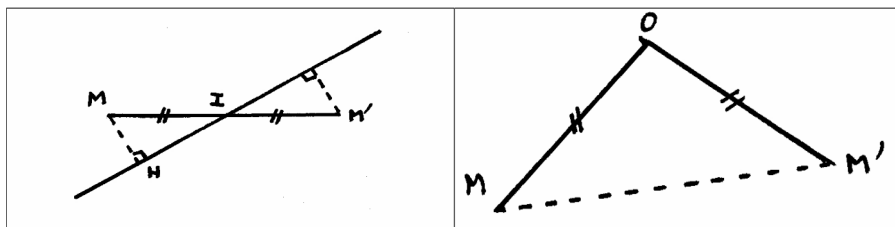
Reflet ? demi-tour ? Peut-on trouver une définition " fédératrice " ?

Proposition pour la définition "du symétrique" d'un point (François Drouin) :

M' est le symétrique de M par rapport à la droite (d) ou par rapport au point O ou par rapport au plan (P) si la longueur MM' est égale à deux fois la distance du point M au point O , à la droite (d) ou au plan (P) . (et qu'il sont situés de part et d'autre de...)

(figure 5) M' n'est pas le symétrique de M par rapport à la droite (d) en faisant intervenir la distance d'un point à une droite (4^{ème}) et l'inégalité triangulaire (5^{ème}) : $IM > MH$

(figure 6) M' n'est pas le symétrique de M par rapport à O (inégalité triangulaire) :



$$MM' < 2 OM$$

L'idée est d'essayer d'être cohérent dans le discours que nous tenons aux élèves. Est-il plus intéressant de faire appel à des notions dynamiques "ça tourne" ou à des conditions d'égalité des distances ? Les méthodes avec les longueurs (reflets) nécessitent de justifier qu'il s'agit d'isométries alors que les visions dynamiques évitent cette angoisse (la figure tourne, elle n'est pas déformée).

Question 1 : Les images mentales ne sont-elles pas génératrices des difficultés en ce qui concerne la symétrie axiale ? L'axe "oblique" a parfaitement sa place en mathématiques mais peu dans le réel et entre parfois en conflit avec toutes les images mentales des élèves. Est-il judicieux de faire appel à ces images mentales en introduction du chapitre ? Si nous tenons compte du fait que l'objectif est la construction géométrique du symétrique d'un point qui permet ensuite la construction de la figure symétrique d'une figure point par point, ne serait-il pas plus judicieux de commencer le chapitre par la définition et la construction du symétrique d'un point et de montrer ensuite que l'on retrouve ceci dans les cas particuliers de la vie courante ?

Si la symétrie est une transformation purement mathématique, et si le symétrique d'un point se construit à l'équerre et à la règle, que l'axe soit oblique ou non, cela devrait poser moins de problèmes pour les élèves. C'est peut-être notre appel trop fort à l'intuition qui les perturbe puisqu'ils cherchent ensuite toujours à s'y raccrocher et surtout à "deviner" la position finale pour éviter la construction point par point.

Question 2 : La symétrie axiale (confondue très souvent avec la symétrie par rapport à un plan) doit-elle continuée à être étudiée dans les "petites classes" de l'école primaire ? N'est-elle pas plus délicate à manier que la symétrie centrale ? Sur ce dernier point les membres de la commission sont partagés.

Question 3 : Doit-on étudier la symétrie centrale alors que ce n'est qu'une rotation

particulière ?

Question 4 : Comment les mathématiciens “ professionnels ” définissent-ils la "symétrie" ?

Conclusion :

L'étude des transformations au collège paraît faire admettre des tas de choses en s'appuyant sur des images mentales incorrectes ou non stabilisées, et sans doute la plupart du temps insuffisamment éclaircies en classe...

Ce texte peut être le départ d'un débat à enrichir encore.

Vos remarques à propos de cet écrit de la commission "collège" sont à faire parvenir à

Martine.Dechoux@ac-nancy-metz.fr

Bibliographie :

Nos “anciens” lecteurs pourront également se reporter à une étude didactique sur la symétrie orthogonale, publiée dans Le Petit Vert n° 25 de mars 1991, pages 4 à 7. Ce numéro est malheureusement épuisé.

Sur la toile...

Les nouveautés de septembre des pages Maths du site académique. Adresses données par Christophe PRÉVOT, animateur du site académique de mathématiques
(Christophe.Prevot@ac-nancy-metz.fr)

Site sur l'évaluation par compétences :
<http://vincent.obaton.free.fr> (appelé aussi <http://www.evaluer.net>)

Trois sites sur les illusions d'optique :
<http://ajl.montreal.qc.ca/jeux/illusion/illusion.html>, <http://perso.wanadoo.fr/5sens/œil>, et
<http://membres.lycos.fr/pow0/Illusion.htm>

Logiciels en ligne ou à télécharger :
Traceur de fonctions, de formules, calculatrices et convertisseurs : <http://michel.gravier.free.fr>
Logiciel du jeu "Le Compte est bon" à télécharger : <http://persoweb.francenet.fr/~fouquetp>
Logiciel Clic pour la création d'exercices et exemples d'exercices : <http://www.erasme.org/clic>

SUR VOTRE AGENDA : Prochaine réunion du Comité de la régionale, le mercredi 27 novembre à 15 h au lycée Varoquaux de Tomblaine.