Sommaire

LE PETIT VERT

(BULLETIN DE LA RÉGIONALE A.P.M.E.P. LORRAINE)

N°CPPAP : 2 814 D 73 S. N°ISSN : 0760-9825. Dépô t légal : Mars 2002.

Imprimé au siège de l'Association :

IREM (Faculté des Sciences). BP 239. 54506-VANDOEUVRE

Ce numéro a été tiré à 500 exemplaires.

ABONNEMENT (4 numéros par an) : 5,80 €.

L'abonnement est gratuit et automatique pour les adhérents Lorrains de l'A.P.M.E.P. à jour de leur cotisation.

NOM :

ADRESSE :

Signature :

Désire m'abonner pour un an (année civile) au "PETIT VERT"

LE PETIT VERT

ISSN 0760-9825

BULLETIN DE LA RÉGIONALE LORRAINE DE L'A.P.M.E.P.

N°69	MARS 2002	Abonnement 4 n^{os} par an : 5,80 €

Dessin extrait de la BD "Adieu mélancolie" de Daniel Goossens

Séminaire de réflexion de la Régionale

Le séminaire de la Régionale aura lieu dans les Vosges du samedi 1er juin après-midi au dimanche 2 juin après-midi.

Ce séminaire sera ouvert à tous les adhérents qui ont envie de réfléchir (un peu) sur un certain nombre de problèmes de fond, que l'on n'a jamais le temps d'aborder dans les diverses réunions habituelles (goûters, journée régionale annuelle, réunions de Comité, etc.). Nous avons prévu d'y réfléchir principalement sur la formation continuée des enseignants de mathématiques (tant d'un point de vue global qu'au niveau du P.A.F. régional).
Nous réfléchirons aussi sur l'éventuelle organisation d'un concours ou d'un rallye l'an prochain (quels en seraient les objectifs ?), ainsi que sur l'élaboration de fiches d'activités en classe à partir des 'stands' de notre exposition itinérante.
Un moment sera consacré au 'dépouillement' des réponses à notre Concours 2002 (palindromes et symétries), et au classement des candidats. Sans oublier les essentiels moments de convivialité et d'oxygénation dans la belle nature vosgienne…

Des informations plus précises (ordre du jour, détails pratiques, modalités d'inscription) seront données sur le site de la Régionale début mai : pensez à le contacter à ce moment-là.

Le Comité

Euro : Rendons à Versailles ce qui est à Versailles

Dans notre dernier numéro (décembre 2001, page 16), nous vous proposions une construction géométrique du symbole de l'€uro. Nous disposions de ce document iconographique depuis quelques années et, au moment de mettre sous presse, impossible de retrouver la source… Nous réparons ici cette erreur : le document vient du site PLP Math-Sciences de l'académie de Versailles. On peut même le télécharger :

www.ac-versailles.fr/pedagogi/plp-maths-sciences/math/bep-geom.htm

Si vous avez essayé de reconstruire cette figure, vous avez certainement remarqué que les données étaient incomplètes et ne permettaient pas de la définir intégralement : d'une part on ne connaissait pas la longueur des barres horizontales de l'euro, d'autre part il n'était pas spécifié (mais cela était 'implicite') que les 80° de l'angle se partageaient en 2 angles de 40° symétriquement par rapport à l'horizontale.

On trouvera une autre construction décrite explicitement sur
http://casemath.free.fr/six/6euro.zip (document Word et figure zippés).
Attention aux problèmes d'échelle : ce qui vaut '1' sur le premier document vaut 1,2 cm sur le second.

Cycle : Science & Société

Amphi 8
Faculté des Sciences
Domaine Scientifique Victor Grignard
VANDŒUVRE LES NANCY

Jeudi 21 Mars 2002 à 18 h.

Jean Pierre Bourguignon
CNRS-IHÉS et École Polytechnique

Pour de nouvelles bases pour les relations entre les mathématiques et la société

Presque toutes les sociétés du monde accordent une place importante aux mathématiques dans l'enseignement de base. Il est dès lors naturel qu'on ait de cette discipline des souvenirs scolaires. Est-ce pour cela que, souvent, leur présence croissante dans la société d'aujourd'hui est ignorée, au moment où des objets quotidiens les plus divers font appel dans leur fonctionnement à des résultats mathématiques éventuellement récents, voire contiennent bien cachées des techniques mathématiques sophistiquées ?

Cette sous-estimation mérite d'être analysée, au moment où beaucoup de choix auxquels sont confrontés les citoyens dépendent d'une compréhension des mécanismes fondamentaux de cette discipline (utilisation généralisée de statistiques, de codes, de méthodes d'optimisation, de modèles mathématiques pour la prévision, etc.).

L'objet de l'exposé est de présenter quelques pistes pour mieux comprendre cette situation à partir d'exemples explicites et de cas concrets et de proposer de nouvelles bases pour les relations entre mathématiques et la société.

LE CONGRÈS 2002 DE LA SBPMEF

Le 28ème congrès de la SBPMef (équivalent belge de l'APMEP), se déroulera du mercredi 21 août au vendredi 23 août 2002 dans les locaux du CES St Vincent, Chaussée de Braine 22, à SOIGNIES (entre Bruxelles et Valenciennes).

En cette année 2002, le thème principal qui vous est proposé est :

"L'enseignement des mathématiques : de la connaissance à consommer à la curiosité intellectuelle, il y a de l'espace à occuper ! Comment ? Par quels moyens ? Avec quelles aides ?"

Du concret à l'abstrait ou de l'abstrait au concret, respect strict ou interprétation des programmes, l'élève " chaudron à remplir ou feu à allumer ", ... sont autant de sujets de réflexion qui peuvent animer nos journées.

Il n'est pas inutile de rappeler que la participation aux travaux de ces journées est **gratuite**. Il n'est, par ailleurs pas obligatoire d'assister à tous les moments du congrès. Il est en effet possible d'y participer pendant 1 heure, 1 demi-jour, 1 jour, ou … tout le temps, comme vous le désirez.

Nous pouvons déjà vous présenter un premier canevas (susceptible de modifications) :
Mercredi 21/08 : Exposés et ateliers, activités et visites culturelles, banquet.
Jeudi 22/08 : Exposés et ateliers, activités et visites culturelles, soirée libre.
Vendredi 23/08 : Exposés et ateliers, clôture, assemblée générale de la SBPMef.
Le programme détaillé de ces journées, des indications sur les contenus des interventions et les niveaux d'enseignement auxquels elles se rapportent paraîtront début juin 2002
Les personnes intéressées pourront recevoir ce fascicule "Spécial Congrès" en le réservant auprès du bureau de la SBPMef : Rue de la Halle 15, B-7000 Mons (tel/fax 065/373729), e-mail : sbpm@umh.ac.be

EQUIPEMENT INFORMATIQUE DES LYCÉES POUR LES MATHÉMATIQUES

Le groupe des mathématiques de l'Inspection générale de l'Éducation Nationale vient de rendre publique une proposition " minimale " d'équipement informatique pour l'utilisation des TICE dans la mise en œuvre des nouveaux programmes de mathématiques du lycée.
Ce texte (document Acrobat, 8 Ko) est téléchargeable sur le site www.eduscol.education.fr , rubrique " Disciplines et enseignements ", sous-rubriques " Mathématiques ", puis " Accompagnement " puis " Textes de référence ".

édito

Dans un de ses "Portraits acides et autres pensées édifiantes", Philippe Meyer (le chroniqueur de France Inter) écrit : "Un mauvais prof de maths, c'est un prof qui aime les maths. Un bon prof de maths, c'est un prof qui aime les élèves." A l'A.P.M.E.P, nous n'avons absolument rien contre le fait d'aimer les maths et "d'aimer" nos élèves. Sommes-nous de bons ou de mauvais profs ? Ne sommes-nous pas simplement des profs aimant se poser des questions quant aux contenus mathématiques et aux manières de les enseigner, et aimant faire partager de façon conviviale nos réussites, mais aussi nos inquiétudes ?
Pol Le Gall et moi-même serons les membres du comité régional qui solliciteront votre appui pour représenter la régionale Lorraine au comité national. Nous espérons avoir de nombreux avis à faire remonter (les groupes de discussion et les commissions régionales ont ce but).

Pourrait-on espérer que pendant les quatre années de notre mandat, on nous laisse le temps d'essayer et d'évaluer tout ce que se met en route ces temps-ci : nouveaux programmes à l'école primaire, itinéraires de découverte, classes à Projet Artistique et Culturel, évaluation en début de 5ème et suppression de celle en 2nde, lycées des métiers, nouveaux programmes en terminale... Nous réclamons du temps pour que nos élèves puissent s'approprier les notions et les méthodes de travail que nous leur proposons, ne pourrions nous pas demander également du temps pour nous approprier les réformes que nos ministres souhaitent mettre en place ?

François DROUIN

URGENT

AVIS DE RECHERCHE

Les professeurs stagiaires de mathématiques de l'I.U.F.M. de NANCY y organisent le 29 mai prochain une journée d'étude dont le thème sera "LES NOMBRES". Vous y serez cordialement invités. Conférences et ateliers sont prévus ce jour là ainsi qu'une exposition.

Pour l'heure, nous cherchons à enrichir cette exposition en présentant des panneaux qui auraient été réalisés par des classes de l'académie (1). Avez-vous connaissance d'une telle exposition, réalisée dans votre établissement ou un établissement voisin ?

Merci de nous communiquer d'éventuelles informations à ce sujet à l'adresse suivante : **vincent.dreux@free.fr**

En vous remerciant de votre collaboration,

Soraya Aïchouba, Stéphanie Flouret, Vincent Dreux.

(1) Exemples de thèmes : "les nombres et les civilisations", "les nombres et l'architecture", "les nombres et l'art", "les nombres et la géométrie", "l'histoire des nombres"…

CANDIDATURES AU COMITÉ NATIONAL

La Régionale de Lorraine a toujours fait preuve d'un investissement important dans l'activité nationale de l'APMEP : participation aux instances diverses (nombreux représentants au comité national, au bureau de l'association, dans les différentes commissions…) et organisation des journées nationales de Gérardmer en 1999.

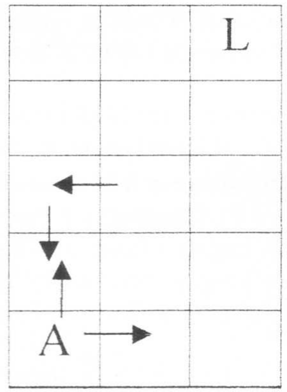
Elle est attachée au fait de disposer de représentants des adhérents lorrains dans les débats nationaux du comité.

Le Comité de la Régionale de Lorraine a ainsi désigné François Drouin (titulaire) et Pol Le Gall (suppléant), avec leur accord, comme candidats au mandat de représentants de la Régionale au Comité National.

Nous espérons que vous serez très nombreux à voter pour eux. Vous recevrez tous les documents à cet effet au cours du printemps.

Problème du timestre n°69
Le loup et l'agneau, proposé par Pol LE GALL

Dans la toute nouvelle et passionnante brochure de l'IREM de Lorraine " ***L'enseignement des probabilités au collège et au lycée : exemples européens et propositions*** ", on trouve un exercice en provenance du canton de Neuchâtel (CH) intitulé " Le loup et l'agneau ".



" Un agneau A et un loup L sont placés à deux angles opposés d'un quadrillage. En commençant par l'agneau, ils avancent à tour de rôle d'une case en suivant les flèches (vers la droite et vers le haut pour l'agneau, vers la gauche et vers le bas pour le loup). Pour décider de la direction à prendre, on joue avec un dé :

- L'agneau avance d'une case vers la droite si le dé indique un nombre pair, et d'une case vers le haut si le dé indique un nombre impair.
- Le loup avance d'une case vers la gauche si le dé indique un nombre pair, et d'une case vers le haut si le dé indique un nombre impair.

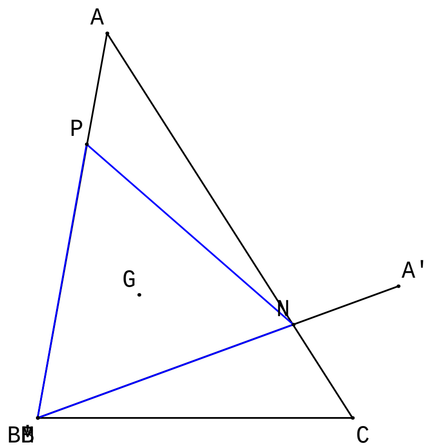
Si le loup et l'agneau arrivent dans la même case, le loup capture l'agneau… "

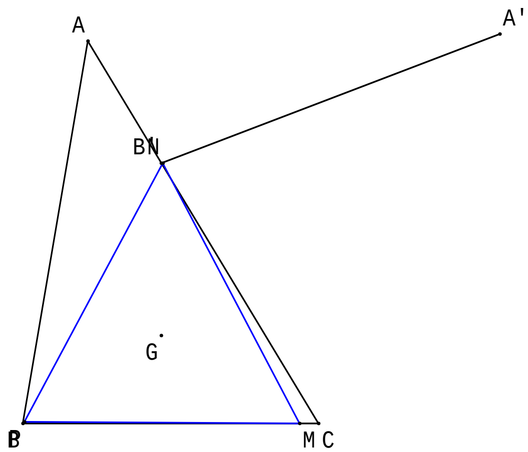
Le jeu suisse est proposé sur un quadrillage de 3×3.

Calculer la probabilité que le loup capture l'agneau sur un quadrillage de n×n cases. Donner un équivalent de cette probabilité quand n tend vers l'infini.

Envoyez le plus rapidement possible vos solutions, ainsi que toute proposition de nouveau problème, à

Pol LE GALL, 2 place du Chaussy, 57530 COURCELLES.



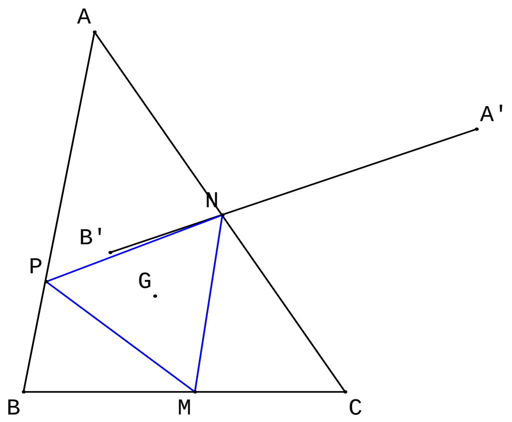


Problème du timestre n°67, proposé par Gabriel BORGÉ

Rappel de l'énoncé : Soit ABC un triangle quelconque. On veut y " inscrire " un triangle MNP, équilatéral, tel que M∈[BC], N∈[CA] et P∈[AB].
Quel est l'ensemble des centres de gravité de tous les triangles MNP possibles ?

Solution proposée par Pol LE GALL

On place le triangle tel que B soit l'angle le plus grand et A le plus petit.
La mesure de B est supérieure ou égale à 60°, celle de A est inférieure ou égale à 60°.
Soit M un point de [BC] pour lequel la construction est possible. Si on considère la rotation de centre M et d'angle –60°, le point N est l'intersection de [AC] et de l'image de [AB] par cette rotation.
On obtient ensuite le point P en complétant le triangle équilatéral.



On va démontrer que le point G parcourt un segment quand M prend toutes les positions possibles. Pour cela on va utiliser une méthode analytique mais en se dispensant des calculs.

Le point G est l'image de N par une similitude de centre M.
Si on se place dans un repère d'origine B, où M a pour coordonnées (t,0). Considérons que les points A et C ont pour coordonnées A(a,b) et C(0,1).
On peut déterminer l'équation de (AC) qui ne dépend pas de t, puis celle de (A'B') qui est du type : Ax+By= Ct car la pente de la droite ne dépend pas de M.
Le point N a donc des coordonnées qui sont des fonctions affines de t (résolution d'un système de Cramer pour lequel t n'intervient " qu'à droite ").
Donc le point G, obtenu comme image de N par une similitude de centre M aura également des coordonnées fonctions affines de t.
Par élimination de t entre les deux coordonnées, G est sur une droite ne dépendant que des points A, B, C.
Pour connaître les extrémités du segment parcouru, on considère les positions limites :
Le cas où M est en B et le cas où B' est sur (AC). (c'est pour cela que l'on a fait le choix de l'angle B supérieur à 60° et de l'angle A inférieur à 60°). *Figures page suivante.*

Il reste à voir si ce segment est quelque chose d'intéressant… c'est presque un segment de bissectrice.

RAISONNEMENT EN PROBABILITÉ

*Michel **BRISSAUD***
Lycée Jean Lurçat
88600 BRUYERES)

INTRODUCTION

L'enseignement des probabilités est considéré depuis longtemps par de nombreux professeurs de lycée comme manquant de rigueur. L'apparition des arbres de probabilités dans les programmes de terminale en 1998 (utilisés comme "outils de démonstration") et celle plus récente de l'énoncé "vulgarisé" de la loi des grands nombres dans les nouveaux programmes de première ne règlent pas le malaise, au contraire.

Pourtant, il est tout à fait possible de présenter un exposé "rigoureux", mais à condition d'avoir bien conscience que dans l'étude d'un phénomène aléatoire, il y a inévitablement une phase de raisonnement qui ne ressort pas de la déduction mathématique, mais qui se place dans le cadre d'une attitude scientifique, avec sa propre rigueur.

Ceci n'est pas toujours bien compris et il en résulte des confusions qui trainent dans l'enseignement des probabilité depuis des dizaines d'années ; il est grand temps d'en sortir.

Je me place pour la suite uniquement dans le cas étudié pour l'instant en lycée, où l'univers (ensemble des résultats possibles) est fini et je présente à la fin une façon simple d'aborder certaines situations élémentaires que l'on voudrait étudier dans l'enseignement secondaire.

LA THÈSE FONDAMENTALE DES PROBABILITÉS

La première question qui se pose lors de l'étude d'un phénomène aléatoire (ou plutôt d'un phénomène que l'on veut étudier avec la théorie des probabilités) est celui du choix de la loi de probabilité sur l'ensemble des résultats possibles.

Elle peut facilement être présentée avec le célèbre problème de la punaise (tombera-t-elle ou pas sur la tête ?). Si on fait plusieurs séries d'un "grand" nombre de lancers, on constate obtenir à chaque fois des fréquences voisines, ce qui n'est pas le cas pour quelques lancers. D'où on peut raisonnablement espérer obtenir encore des fréquences voisines si on refaisait une série d'un grand nombre de lancers. Ceci n'est évidement pas démontrable. C'est un énoncé (une thèse) accepté à la lumière de résultats expérimentaux réels. Et on prend alors comme probabilité une <u>estimation prévisionnelle</u> de cette fréquence espérée.

Ce point de vue permet d'introduire dès la classe de seconde la notion théorique de probabilité, même si on ne dispose pas des règles axiomatiques de calcul. On peut ensuite présenter plus clairement la simulation de quelques expériences avec un générateur de nombres pseudo-aléatoire.

Mais comment faire cette estimation de fréquence espérée?

DES STAT AUX PROBA : UN RAISONNEMENT INDUCTIF

La démarche qui permet de passer de résultats statistiques ou de considérations physiques (pièce équilibrée...) au choix d'une loi de probabilité n'est pas dans le domaine du raisonnement déductif du mathématicien.

Il s'agit d'un raisonnement inductif : on veut "poser" des hypothèses et non en déduire des conséquences. Ce raisonnement peut être guidé par des règles acceptées par l'ensemble de la communauté scientifique (on ne fera pas n'importe quoi, on n'ira pas consulter de voyante même extra-lucide !). On se trouve là dans la position du scientifique qui devra argumenter son choix et non pas le prouver logiquement, ce qui est impossible. En retour, le modèle étant choisi, des conséquences logiques issues de la théorie devront être confrontées de nouveau (si c'est possible) à la réalité.

On trouve ici tout simplement la "démarche scientifique" à laquelle les enseignants de mathématiques ne sont pas habitués. Dans la plupart des exercices traités au lycée, le modèle mathématique est contenu dans l'énoncé (tirage au hasard, dé équilibré, donc équiprobabilité, ce "donc" ne signifiant d'ailleurs pas une déduction mathématique). Cette phase de raisonnement est alors presque systématiquement occultée.

Dans le cas où on choisit la probabilité à partir de résultats statistiques, il faut remarquer aussi qu'il n'y a pas unicité du modèle mathématique. Ainsi avec le problème de la punaise, on peut prendre comme probabilité les fréquences observées lors de 100 lancers, mais on pourrait aussi bien la lancer 1000 fois.

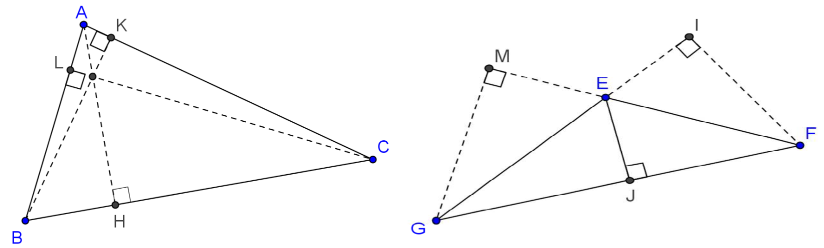
Ce sont d'autres constations expérimentales, plus compliquées car avec un autre niveau de paramètrage, qui montrent (mais ne démontrent pas) que le modèle sera meilleur avec 1000 plutôt qu'avec 100. Les nouveaux programmes de classe de seconde veulent aborder cet aspect à travers l'étude de la "fluctuation d'échantillonnage", sans déboucher sur la notion mathématique de probabilité qui n'est vue qu'en première.

ADÉQUATION THÉORIE - RÉALITÉ ET LOI DES GRANDS NOMBRES

Le choix des axiomes est fait évidemment pour avoir une théorie en accord avec la réalité observée, et il est facile de montrer aux élèves de lycée que la formule P(A $\cup$B) = ... s'inspire d'une relation semblable entre les fréquences à travers le raisonnement du scientifique qui dégage une loi générale à partir de l'étude de la réalité.

C'est la démarche du physicien par exemple avec la loi d'Ohm : issue de constatations expérimentales répétées, elles devient ensuite "axiome" dans une théorie de l'électricité.

What is big, grey, fast and have 16 wheels ?



In the triangles ABC and FEG, the heights are drawn. The following exercises are independent.
Two measures are given in each case and you are asked to calculate a third one.
Cross out the boxes that contain your answers.
When you finish, print the remaining letters in the boxes at the bottom of the page.
The lengths are in **cm** and the areas in **cm².**

1	BC = 4.7, AH = 3.6, area ?	**5**	AH = 9.3, area = 55.8, BC ?
2	AC = 4.2, BK = 3.5, area?	**6**	AB = 5.8, CL = 2.7, area ?
3	MG = 4.1, EF = 2.8, area ?	**7**	EG = 3.2, area = 2.24, IF ?
4	GF = 12.5, area = 15, EJ ?	**8**	EF = 5.6, area = 12.6, MG ?

ANSWERS

the	ame	ord	is	le	pha	us	nto
2.4	5.14	7.83	8.46	4.9	6.35	4.5	6.42
nro	pre	een	lle	rska	ave	onn	tes
5.2	7.35	5.74	10.7	11.52	12	1.4	3.16

NOTES DE LECTURE :

1- Tout d'abord une petite correction : la récente brochure intitulée dans le dernier Petit Vert (n°68, page 21) n'a pas pour titre "Calculs géométriques en 4ème" mais "**Calculs algébriques en 4ème**". Ce lapsus est finalement révélateur de son contenu car les interférences géométrie - calcul algébrique y sont nombreuses.

2- **LA VIE REVEE DES MATHS** (David Berlinski - Editions Saint-Simon)
Tel un roman, cet ouvrage nous parle avec humour de notre matière préférée et de ses grands créateurs. La géométrie y est peu présente, le titre en anglais "a tour of the calculus" nous en fait comprendre la raison : "calculus" se traduit par "calcul différentiel et intégral". De la droite réelle au calcul intégral en passant par l'étude des fonctions nous rencontrons avec bonheur ces notions que nous aimerions bien savoir expliquer à nos élèves avec autant de verve...

3- **LE DUO MATHS-ANGLAIS : Travaux croisés 4ème** (IREM de Lorraine)
Les auteurs avaient présenté leur travail lors de notre journée régionale en mars 2000 et depuis nous attendions l'édition de ce qui nous avait bien intéressé ce jour-là. Les appellations "Parcours Diversifiés" et "Travaux Croisés" sont passés à la trappe mais l'interdisciplinarité reste très présente dans les "itinéraires de découverte" mis en place dès la rentrée prochaine dans nos collèges. Non seulement le lecteur pourra faire découvrir à ses élèves ce qui, en anglais, est gros, gris, rapide et a 16 roues (voir page ci-contre), mais il pourra également trouver des propositions d'activités originales à faire en maths, en liaison avec le collègue d'anglais, ou à faire en anglais, en liaison avec le prof de maths... Nous ne pouvons que féliciter les auteurs pour l'originalité de leur démarche, en espérant l'apparition un jour de duos "maths-allemand", "maths-espagnol", "maths-italien"...

4- Le numéro de décembre 2001 des "**Cahiers de Science & Vie**" est consacré à René Descartes. Voici une bonne occasion de ne pas réduire aux "repères cartésiens" nos connaissances à propos de ce génie du XVIIème siècle.

5- Nous vous l'annonçons un peu en retard, mais vous ne l'avez sûrement pas manqué : **Sciences et Avenir** a sorti en novembre-décembre 2001 un numéro spécial intitulé "L'empire des probabilités : Dieu joue-t-il aux dés ?".

François DROUIN

Cette formule $P(A \cup B)$ = ... est bien un <u>axiome</u> de la <u>théorie</u> des probabilité : on a l'occasion ici d'expliquer ces deux termes aux élèves.

Mais il est utile aussi de contrôler ensuite les développements de cette théorie, c'est-à-dire les théorèmes établis, par rapport à la réalité observée. Ainsi, le théorème dit "loi des grands nombres" est rassurant à postériori, il conforte après coup dans l'idée que les axiomes des probabilités avaient été bien choisis, car il "colle" à des observations sur les fréquences. Plus précisément, il confirme la "justesse" de la schématisation théorique de la répétition d'une expérience aléatoire.

Mais il n'apporte pas la preuve de l'adéquation théorie - réalité : ceci n'est pas démontrable. Il s'agit d'une thèse qui ne s'énonce pas dans le cadre d'une théorie déductive, on ne peut la défendre que par une argumentation.

Et ce n'est pas ce théorème des grands nombres qui nous dit qu'il faut prendre pour probabilité une fréquence observée lors de la répétition d'un grand nombre d'expériences identiques, contrairement à ce que laissent entendre les nouveaux programmes de première. Ce théorème permet de valider la théorie des probabilités, mais il ne peut en aucun cas valider des constatations expérimentales !

On pourrait donner aux élèves l'énoncé suivant : "On constate expérimentalement qu'en répétant N fois une même expérience la dispersion sur les fréquences diminue quand N augmente".

C'est cet énoncé qu'il faudrait appeler "loi des grands nombres", et on peut en commentaire dire aux élèves que les développements de la théorie permettent de démontrer des théorèmes dits "des grands nombres" dont les énoncés sont cohérents avec les constatations expérimentales et qui laissent penser que cette théorie est en adéquation avec la réalité.

De même que lorsqu'on démontre que les 3 hauteurs d'un triangle sont concourantes, on a bien un énoncé cohérent avec les dessins, avec la réalité observée, qui permet de dire que la géométrie élémentaire est bien adéquate à la réalité observée à notre échelle.

La théorie peut être vue alors comme une "explication" de la réalité, c'est une construction intellectuelle mais, pour reprendre une expression à la mode, ce n'est que du virtuel !

INDÉPENDANCE : LES CONFUSIONS CONTINUENT

Il y a depuis lontemps confusion entre la notion d'indépendance entre événements et celle d'indépendance d'expériences aléatoires.

(Suite page 8)

Prenons l'exemple classique : 2 tireurs tirent sur une cible, l'un touche avec une probabilité de 0,3, l'autre de 0,6. Quelle est la probabilité qu'ils touchent tous les deux?

La probabilité de 0,3 est sans doute obtenue après une étude statistique sur les tirs du premier, pris isolément, de même que celle de 0,6. On peut supposer de plus que le résultat d'un tireur n'influe pas sur l'autre (ce qui nécessiterait un contôle statistique ou des précautions dans le protocole expérimental) .

Pour répondre à la question, il faudrait commencer par schématiser l'expérience "couplée" ; mais la notion de probabilité produit sur un produit cartésien est hors programme au lycée. Alors on dit aux élèves : faites un arbre de probabilité et vous verrez bien qu'en faisant des produits de proba, cela marche (on trouve la réponse attendue par le prof !). Mais je n'ai encore jamais trouvé dans un manuel de lycée une justification correcte de cette règle du produit des probabilité dans cette situation.

Dire que les événements "le tireur 1 touche" et "le tireur 2 touche" sont indépendants en probabilité est une <u>véritable escroquerie</u> tant qu'on n'a pas modélisé l'expérience "couplée" : cet exercice est donc infaisable proprement, tout comme les exercices classiques du genre "on tire à pile ou face pour choisir l'urne dans laquelle on prend une boule" que l'on explique souvent en faisant appel aux probabilité conditionnelles avant même d'avoir une probabilité ! Un autre exemple remarquable est celui du sujet du bac 1998 (le nombre de clients prenant de l'essence ...).

Il est pourtant tout à fait possible de justifier la règle du produit des probabilité dans un arbre, à condition de comprendre qu'elle ne se démontre pas ; elle relève du choix d'un modèle, elle se justifie par une argumentation scientifique, pas par une preuve mathématique. Et c'est tout à fait faisable au niveau de la classe de première, car cela ne fait pas appel aux notions d'événements indépendants et de probabilité conditionnelle.

D'autre part, dans l'expression "répétition d'expériences identiques et indépendantes", le mot "indépendantes" est mathématiquement inutile. Si les résultats d'une expérience influaient sur l'autre, elles ne seraient pas identiques. C'est en fait ici une expression dans un discours d'argumentation scientifique (et non mathématique) relatif au protocole expérimental : il faut remettre la carte, remélanger le jeu avant de retirer... On ne peut donc pas directement la relier à la notion d'indépendance d'événements comme on le lit dans de nombreux ouvrages.

J'indique ci-dessous une façon très simple et scientifiquement rigoureuse d'enseigner cette règle du produit des probabilité dans un arbre qui permet d'étudier de nombreuses situations intéressantes dès la classe de première.

Heureusement, Monsieur PEARSON (prononcer ‘personne’) est arrivé … Il a étudié de façon théorique la loi de probabilité de cette distance, et a dressé des tables (N.B. c'est justement parce qu'il a additionné les carrés et non les valeurs absolues qu'il a pu faire ces calculs). Lesquelles tables nous disent que, dans le cas qui nous intéresse (deux pièces), la probabilité que cette distance soit supérieur à 3,6 est d'à peine 5 %. Nous sommes obligés de lui faire confiance…

Le mathématicien ayant calculé, il nous reste à prendre une décision : il s'est produit un événement qui n'avait qu'une chance sur vingt de se produire. Si nous décidons que le hasard n'a pas pu intervenir seul (autrement dit, dire que la pièce d'un euro belge ne peut pas être equilibrée), nous prenons un risque : 5 % de chances de nous fourvoyer. Si nous ne voulons pas prendre un tel risque, nous ne conclurons pas (ou nous recommencerons l'expérience à une plus grande échelle). Et là, le mathématicien ne peut plus rien pour nous… C'est à l'utilisateur de prendre la décision, donc de prendre le risque..

J'espère que ces quelques lignes auront permis au lecteur non initié des arcanes de la statistique inférentielle d'en comprendre l'enjeu. C'est, pour les élèves, ce qu'il y a de plus difficile.

Jacques VERDIER

N.D.L.R. Pour terminer sur une note d'humour…
L'équipe britannique du *New Scientist* a refait l'expérience sur l'euro belge pour arriver à un résultat “ **exactement inverse** ” à celui des Polonais : si cela veut dire qu'ils ont obtenu 140 ‘PILE’ et 110 ‘FACE’, on aboutit, en cumulant les deux expériences, à 250 ‘PILE’ et 250 ‘FACE’, ce qui est pour le coup un événement extrêmement rare !

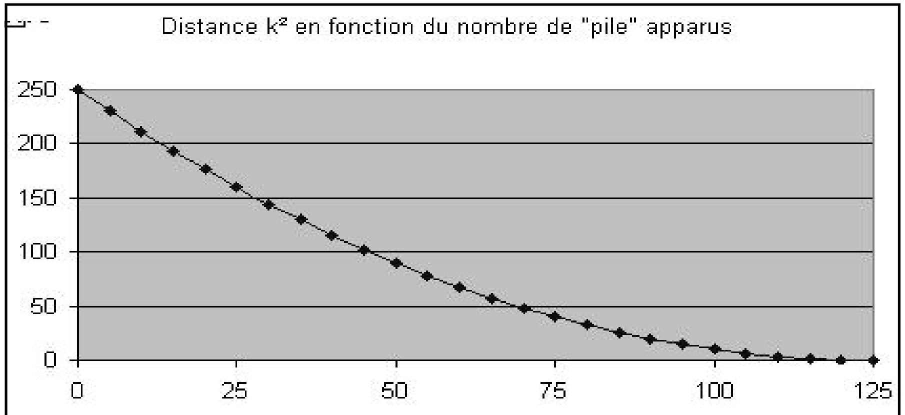
SÉMINAIRE DES ARCHIVES H. POINCARÉ

Les séances du séminaire ont lieu toutes les deux semaines, le mardi de 17 h 30 à 19 h 30, salle J 103, Campus de Lettres et Sciences Humaines, 23 boulevard Albert 1er à NANCY.
Nous avons noté :
2 avril 2002, **Intégrale fonctionnelle et probabilité** (Rémi léandre, Institut Elie Cartan)
14 mai 2002, **Mathématique et esthétique** (Caroline brocker, Archives

Pas si simple… J'ouvre une parenthèse. Au lieu de lancer une pièce, j'ai lancé un dé. 300 fois. En théorie, je devrais avoir 50 'AS', 50 'DEUX', 50 'TROIS', 50 'QUATRE', 50 'CINQ' et 50 'SIX'. En réalité, j'ai eu 42 'AS', 61 'DEUX', 58 'TROIS', 44 'QUATRE', 46 'CINQ' et 49 'SIX'. Pour compter l'écart " total ", j'ai envie de faire la somme des écarts (en valeur absolue, bien sûr) : 8 + 11 + 8 + 6 + 6 + 1 = 40. C'est ici parfaitement logique de faire la somme de **tous** les écarts. Fin de la parenthèse.

Malheureusement, les mathématiciens n'aiment pas les sommes de valeurs absolues, parce que ça ne donne jamais rien de bien calculable. Allez savoir pourquoi, ils préfèrent les sommes de carrés… Dans le cas de notre dé, cela donnerait : $8^2 + 11^2 + 8^2 + 6^2 + 6^2 + 1^2 = 323$. Dans le cas de nos pièces, $15^2 + 15^2 = 450$.
On se rend tout de suite compte qu'une telle façon de compter n'est pas satisfaisante : un même écart obtenu sur 40 lancers (5 'PILE' et 35 'FACE'), sur 250 lancers (110 'PILE' et 140 'FACE') ou sur 100 000 lancers (49 985 'PILE' 50 015 'FACE') n'a évidemment pas la même signification ! Le bons sens nous dit que ce dernier écart est proportionnellement bien plus faible. Nous allons donc " ***normer*** ", en rapportant chaque écart (au carré) à l'effectif théoriquement attendu. Dans le cas de la pièce, on attendait 125 'PILE' et 125 'FACE', nous allons donc diviser 15^2 par 125 et 15^2 par 125. Ce qui nous fait un écart de 3,6 au total. Cette mesure de l'écart porte un nom : c'est la " ***distance du Khi2*** "

Il est évident que si la pièce est 'parfaite', on a peu de chances d'avoir un grand écart (on a d'autant moins de chances que l'écart est plus grand). Le problème se reformule donc autrement : quelle est la probabilité, pour notre expérience (lancer 250 fois une pièce), que la distance du Khi2 observée soit supérieure à 3,6 ? Si cette probabilité est faible, on rejettera l'hypothèse de la pièce symétrique (en disant, en quelque sorte, " *il est fort peu probable qu'avec une telle pièce le hasard puisse nous donner un si grand écart* ").
Le problème est transformé, mais nous n'avons toujours pas la réponse…



Le graphique ci-dessus représente la distance du Khi2 en fonction du nombre de 'PILE' apparus. On peut y lire que, pour Nb(pile) = 110, k = 3,6.

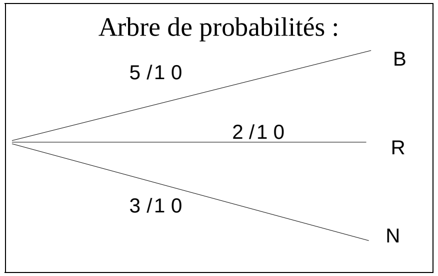
COMPOSITION D'EXPÉRIENCES ALÉATOIRES, EXPÉRIENCES INDÉPENDANTES

Il s'agit de construire un modèle mathématique en argumentant scientifiquement à partir de constatations statistiques. Je le présente d'abord à l'aide d'exemples très simples.

PRÉALABLE : RÉDUCTION D'UNE EXPÉRIENCE À UN SYSTÈME COMPLET D'ÉVÉNEMENTS, REPRÉSENTATION EN ARBRE

Dans une urne on a 5 boules blanches, 2 rouges et 3 noires. On tire au hasard une boule.

Un résultat possible est l'une des 10 boules. On les suppose équiprobables ("tirage au hasard"), les probabilité seront égales aux proportions de cas favorables par rapport aux cas possibles.



On note B : "elle est blanche", de même R et N. Les 3 événements B, R, N forment un système complet d'événements.

On peut alors réduire cette expérience à l'univers {B, R, N} avec les probabilité p(B) = 5/10, ...

COMPOSITION CONDITIONNELLE DE 2 EXPÉRIENCES

Étude d'un exemple d'école :

Expérience 1 : on lance un dé à 4 faces numérotées (dé tétraèdrique régulier, non truqué).

Expérience 2 : on tire une boule dans l'urne décrite ci-dessus.

Règle de composition : on lance le dé ; si on obtient 3, on tire dans l'urne, sinon on ne fait rien.

Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ?

Il faut d'abord schématiser l'expérience composée. Dessiner un arbre permet d'illustrer les différentes issues, mais comment calculer les probabilité ?

On peut prendre comme univers {1, 2, (3,B), (3,R), (3,N), 4} (c'est un système

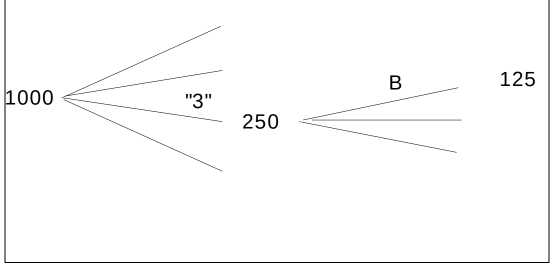
(Suite page 10)

complet d'événements).

Approche statistique : imaginons qu'on réalise un grand nombre de fois cette expérience composée, par exemple 1000 fois.

Dans environ 25% des cas, on obtiendra un "1".

Arbre statistique :



De même, dans environ 25% des cas, soit environ 250 fois, on aura un "3".

Dans ces 250 cas, on tire une boule, et on aura une blanche environ une fois sur deux (la probabilité de tirer une blanche dans cette urne est de 0,5).

On aura alors une blanche environ 125 fois, ce qui fait une fréquence dans l'expérience composée de 125/1000.

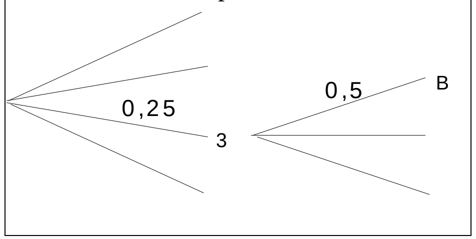
Cette fréquence peut s'obtenir aussi par le produit 0,25 x 0,5 (fréquence du 3 pour le dé x fréquence de B pour l'urne).

CHOIX D'UNE PROBABILITÉ : il est scientifiquement raisonnable de prendre une probabilité calculée avec une règle semblable à celle observée sur les fréquences.

On prendra alors pour l'expérience composée une probabilité p telle que :

$p(3, B) = p_1(3) \times p_2(B)$ en notant p_1 la probabilité relative au dé et p_2 celle relative à l'urne, et $p(1) = p_1(1)$...

Arbre de probabilités :



Remarques : On peut facilement étendre cette démarche et considérer la composition de plusieurs expériences. Cela permet d'aborder les tirages sans remise.

On justifie ainsi la représentation en arbre avec la règle du "produit sur un chemin", sans faire appel à la notion de probabilité conditionnelle qui ne pourrait être introduite qu'après avoir défini la probabilité sur l'univers.

COMPOSITION DE 2 EXPÉRIENCES INDÉPENDANTES

Exemple : 2 tireurs tirent sur une cible, l'un touche avec une probabilité de 0,3, l'autre de 0,6. Quelle est la probabilité qu'ils touchent tous les deux?

Vu l'énoncé, on suposera que la probabilité de toucher pour un tireur ne dépend

Pour la bonne compréhension du lecteur qui n'a jamais abordé les statistiques inférentielles (car c'est de cela qu'il s'agit), je commencerai par la dernière expérience, celle de la rédaction de *Libération* : 4 'PILE' contre 1 'FACE' en 5 coups. Cela fait quand même quatre fois plus de 'PILE' que de 'FACE' : cela semble très déséquilibré.
Même si on n'a jamais entendu parler de loi binomiale, on peut lister tous les événements qui peuvent se produire quand on lance 5 fois de suite une pièce : PPPPP, PPPPF, PPPFP, PPPFF, PPFPP etc. ; c'est facile, il y en a $2^5 = 32$. Parmi ces 32, il y en a 5 qui donnent exactement 4 'PILE' contre 1 'FACE' (PPPPF, PPPFP, PPFPP, PFPPP et FPPPP), soit cinq chances sur trente-deux que ce qui est arrivé se produise (en pourcentage, 15,6 % environ) : ce n'est pas beaucoup, mais ce n'est pas négligeable.
Mais en réalité, si l'on voulait savoir si la pièce avait plutôt une propension à tomber du côté 'PILE', il aurait fallu ajouter à notre liste l'événement PPPPP ; cette fois, cela fait six chances sur 32 (environ 18.7 %).
En y réfléchissant bien, ce qui nous intéresse n'est pas de savoir si la pièce tombe plutôt sur 'PILE' que sur 'FACE', mais si elle tombe plutôt d'un côté que de l'autre.
De la même façon que ci-dessus, on peut calculer les probabilités des quatre événements suivants :
P(4 'PILE' et 1 'FACE') = 5/32 ≈ 15,6 %
P(au moins 4 'PILE') = 6/32 ≈ 18,7 %
P(4 'FACE' et 1 'PILE') = 5/32 ≈ 15,6 %
P(au moins 4 'FACE') = 6/32 ≈ 18,7 %
Finalement, on en déduit que P(au moins quatre fois du même côté) = 12/32 ≈ 37,5%.
Tout cela avec une pièce supposée parfaitement symétrique (notons au passage que si la pièce n'avait pas été un 'modèle' de pièce symétrique, on n'aurait rien pu calculer du tout).
Finalement, l'événement “ au moins quatre fois du même côté ” n'est pas rare du tout quand on lance cinq fois de suite une pièce, puisqu'il a plus d'une chance sur trois de se produire. Autrement dit, s'il se produit, on ne pourra pas incriminer la pièce (en langage de statisticien, on ne pourra pas ***rejeter l'hypothèse*** que la pièce est 'parfaite').

Recommençons la même chose avec l'expérience de Gliszczynski et Zawadowski : quelle est la probabilité, en lançant 250 fois une pièce 'idéalement parfaite', d'obtenir au moins 140 fois le même côté ? Si cette probabilité est négligeable, on pourra sans prendre trop de risque, dire “ *Le hasard n'a pas pu donner ce résultat, donc la pièce est asymétrique* ”. Si cette probabilité n'est pas assez petite, on ne dira rien … ou on recommencera l'expérience 1 000 fois, comme voulaient le faire les journalistes de Libération.

Si jusque là, lecteur débutant, tu as tout compris, parfait…tu peux poursuivre.

Quelle est donc la probabilité qu'une pièce 'parfaite', lancée 250 fois, tombe au moins 140 fois du même côté ? Les choses ses compliquent bigrement, car il y a 2^{250} éléments dans la liste des issues possibles, ce qui est de l'ordre de 10^{75} : le calcul précédent est infaisable…

Nous allons prendre les choses autrement, et calculer “ l'écart ” entre ce qui a été observé (ici, 140 'FACE' et 110 'PILE') et ce qui était attendu (en théorie, 125 'FACE et '125 'PILE'). Première façon de compter l'écart : 15 (= 140 – 125). Deuxième façon de compter l'écart : 30 (15 pour les 'PILE' et 15 pour les'FACE'). J'en vois qui ricanent : s'il y a 15 d'écart pour 'PILE', bien sûr qu'il y en a 15 pour 'FACE'.

MATH & MEDIAS

On trouvera ci-dessous une brève extraite de libération, ainsi que les commentaires qu'elle a suscité. Merci d'envoyer tous extraits de presse qui vous paraissent intéressants et exploirables (notamment en classe) à jacquesverdier@free.fr

PLUTOT FACE QUE PILE ?

Cher Wim,

Tout avait si bien commencé, or voici que les scientifiques s'en mêlent. Une équipe de statisticiens polonais affirme que la pièce d'un euro a plus de chance de tomber côté face que côté pile. Tu mesures l'ampleur du problème. Nous faudra-t-il garder quelques francs - ou lires, marks, etc. -pour trancher les grandes questions, genre pile je fais la vaisselle, face tu t'y colles ? Pour l'heure, cette asymétrie n'a toutefois été démontrée que pour les pièces belges. Les mathématiciens Tomasz Gliszczynski et Waclaw Zawadowski ont procédé à 250 essais sur un euro frappé outre-Quiévrain. Résultat: 140 "face" (56 %) et 110 "pile" (44 %). La faute au roi Albert dont l'auguste profil orne le côté face des pièces belges. Le problème serait que la tronche d'Albert ne pèse pas assez lourd.

L'euro "français" sera-t-il impartial, lui, quand sonnera l'heure de la vaisselle ? La rédaction de *Libération* a procédé hier à sa propre campagne de tests. L'échantillon polonais de 250 essais nous semblant un peu limité, nous avons décidé de le porter à 1 000. Il en a résulté ce qui suit. Au cinquième essai, la pièce a roulé sous une armoire de forte carrure, et de ce fait indéplaçable. Nous en étions à quatre "pile" contre un "face". Puis une difficulté expérimentale a surgi : le propriétaire de la pièce a refusé de remettre la main à la poche, prétextant un urgent besoin de café et une bourse hélas ! plate. L'argument a été jugé recevable par les autres membres de l'équipe. C'est donc sur une base de cinq essais qu'il nous a fallu conclure : l'euro "français" est lui aussi biaisé.

Plus aguerrie sans doute, l'équipe de la revue britannique *New Scientist* est parvenue à refaire l'expérience sur l'euro belge. Pour arriver à un résultat exactement inverse à celui des Polonais.

(Libération, 7 janvier 2002)

A propos de cet article, voici quelques informations pour le statisticien " débutant ". Tout le problème est de savoir à partir de quel écart on peut décider, sans prendre trop de risque, que la pièce n'est pas " symétrique ". On comprend tout de suite que s'il y avait eu 215 'FACE' contre 35 'PILE', on aurait tout de suite pensé " Il y a quelque chose qui cloche dans cette pièce, elle n'est pas symétrique ". Si on avait eu 128 'FACE' contre 122 'PILE', on aurait pensé que, somme toute, le hasard aurait fort bien pu donner un tel résultat avec une pièce parfaitement symétrique. Mais 140 'FACE' contre 110 'PILE' … ça se discute peut-être.

pas du résultat de l'autre (sinon, il y aurait des indications dans l'énoncé !). Ceci sera traduit par une règle de composition qu'on peut qualifier ici d'inconditionnelle : le premier tireur tire et qu'il touche ou pas, le 2° tire aussi avec la même probabilité de 0,6 pour toucher. C'est dans cette situation qu'on peut parler d'expériences indépendantes (en un sens "mathématique" et plus seulement au niveau d'une description expérimentale).

Pour le premier tireur : T1 pour "il touche" et NT1 pour l'événement contraire. p_1 (T1) = 0,3.

Pour le deuxième : T2 pour "il touche" et NT2 pour l'événement contraire. p_2(T2) = 0,6.

La démarche énoncée ci-dessus sur le choix d'une probabilité reste évidemment valable, car on est dans une situation de composition d'expériences.

L'expérience composée se schématise alors par :
{(T1,T2), (T1,NT2), (NT1,T2), (NT1,NT2)} avec $p(T1,T2) = p_1(T1)\times p_2(T2)$...

Remarques : dans une représentation en arbre, l'indépendance des expériences se traduit par l'identité des 2 sous-arbres de 2° niveau. On retrouve la notion de probabilité produit sur un produit cartésien, qui permetrait une autre définition mathématique de la notion d'indépendance d'expériences, mais il n'est pas indispensable de l'évoquer au lycée.

RÉPÉTITION D'EXPÉRIENCES IDENTIQUES

Ce n'est qu'un cas particulier du précédent où on compose des expériences identiques (donc "indépendantes").

Ceci est donc abordable en classe de première sans se limiter à des cas d'équirépartition.

En classe de terminale, des considérations de combinatoire amènent facilement à la distribution binomiale.

ENONCÉ PLUS GÉNÉRAL :

Soit E1 une expérience réduite à {A1, ..., Ai, ...An} avec une probabilité p_1, et E2 une expérience réduite à {B1, ..., Bj, ...Bm} avec une probabilité p_2.

On considère la règle de composition suivante : On fait E1 ; pour un i fixé, si Ai est réalisé, on fait E2, sinon, on ne fait rien.

L'expérience composée pourra alors être représentée par {A1, ..., Ai-1, (Ai, B1), ... (Ai, Bm), Ai+1, ..., An} avec la probabilité p définie par :

pour tout k différent de i, $p(Ak) = p_1(Ak)$

pour tout j, $p(Ai, Bj) = p_1(Ai)\times p_2(Bj)$

(Suite page 12)

REMARQUES :

1) La démarche adoptée pour choisir la probabilité est la même que celle qui permet de poser en axiome la formule P(A u B) = ... à partir d'une relation observée sur les fréquences.

Une étude statistique laisse penser que c'est alors une "bonne" schématisation de l'expérience composée. Ceci n'est évidemment pas démontrable.

2) On pourrait être choqué par l'univers choisi : ses éléments ne semblent pas, en première lecture, de la même nature. Mais on peut les voir comme des listes de longueur 1 ou 2, et dans un tel ensemble, il y a évidemment possibilité de faire des réunions ou des intersections et de revenir au langage ensembliste ; mais le vocabulaire des événements est beaucoup plus commode. Les profs de math n'ont malheureusement pas l'habitude de manipuler de tels ensembles contrairement aux informaticiens qui ont souvent besoin d'utiliser des "structures de données" bien plus sophistiquées.

3) (Ai, Bj) pourrait être écrit "Ai suivi de Bj", à la rigueur "Ai et Bj", mais cela n'aurait aucun sens d'écrire une intersection entre Ai et Bj. Il ne faut pas voir la formule $p(Ai,Bj) = p_1(Ai)\times p_2(Bj)$ comme celle qui exprime l'indépendance probabiliste de deux événements $p(A\cup B) = p(A)\times p(B)$: ça n'a (presque) rien à voir.

CONCLUSION

Il serait donc tout à fait possible d'ajuster l'enseignement des probabilités ainsi :

1) en classe de seconde, introduire la notion de probabilité à partir d'études statistiques, pour ensuite aborder la simulation à l'aide de générateur de nombres pseudo-aléatoires.

2) en classe de première :

- compléter les études statistiques de seconde pour amener un énoncé d'une "loi des grands nombres" résultant de considérations expérimentales (laisser tomber l'énoncé vulgarisé du théorème des grands nombres qui est dans les programmes actuels).
- donner (en justifiant statistiquement) les règles de calcul des proba.
- présenter la composition d'expériences aléatoires, introduire l'indépendance d'expériences, la schématisation de la répétition d'une expérience.

3) en terminale, on peut introduire (à partir de résultats statistiques) la notion de probabilité conditionnelle, l'indépendance en probabilité d'événements et étudier la loi binomiale.

(Suite page 13)

(Suite de la page 12)

N.D.L.R. On peut contacter M. BRISSAUD : Michel.Brissaud@ac-nancy-metz.fr, et consulter son site personnel :
http://perso.wanadoo.fr/michel.brissaud/math/sommaire-math.html

◆

DERNIER RAPPEL !

Concours mathématique 2002

L'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (APMEP) de Lorraine propose, pour l'année scolaire 2001/2002, un concours intitulé "Concours mathématique 2002".
Ce concours, doté de prix pour une valeur de **383 €** (nombre palindromique tout comme l'année 2002, possédant de plus une symétrie axiale !), est ouvert aux établissements scolaires, classes, groupes d'élèves de l'académie de Nancy-Metz.

Pour y participer, les groupes d'élèves devront fournir une contribution consacrée au thème suivant " **Palindromes et symétries** ". Aucune piste n'est interdite quant au fond de la contribution ; la forme peut prendre divers aspects : production artistique, exposition, création de pages Internet, construction d'objets, restitution théâtrale…

Le cadre de réalisation de la contribution peut être : des parcours diversifiés, des travaux croisés ou itinéraires de découvertes, des travaux personnels encadrés, l'activité d'un club de mathématiques, ou une initiative ponctuelle.

Les productions devront être adressées pour le **15 mai 2002**, au plus tard, à :

APMEP
IREM - Faculté des Sciences
B.P.239
54506 VANDOEUVRE-CEDEX