Problème du trimestre, n°68

Quelques Lorrains sont allés au congrès de la SBPMef (Société Belge des Professeurs de Mathématiques d'expression française). Ils en sont revenus enchantés (ce qui n'est pas un scoop, mais plutôt une habitude…).
Le thème du congrès étant " Situations-Problèmes " (voir Petit Vert n°66 page 27), les organisateurs l'ont agrémenté en proposant chaque jour l'énoncé d'un problème. Ces énoncés étaient accompagnés de la note qui suit : " Nous sommes intéressés de voir **comment** vous résolvez ce problème ! ". Nous vous ci-dessous les trois énoncés. Envoyez vos solutions avant la fin des vacances de Noël à Pol LE GALL (2 place de Chaussy, 57530-COURCELLES, pol.legall@free.fr) qui transmettra.

<u>Énoncé du mardi</u> : Existe-t-il un triangle dont les mesures des angles (en degrés) sont des entiers naturels en progression géométrique ?

<u>Énoncé du mercredi</u> : Un triangle ABC est rectangle en A. a, b, c sont les longueurs de ses côtés opposés respectivement à A, B, C. Un carré C1 a son sommet en A et ses trois autres sommets sur chacun des 3 côtés du triangle ; un carré C2 a deux sommets sur l'hypoténuse et ses deux autres sommets sur les côtés de l'angle droit. Quelle relation relie a, b et c si les aires de C1 et C2 sont égales ?

<u>Énoncé du jeudi</u> : les angles B et C d'un triangle mesurent respectivement 30° et 50°. Le point D de [AB] est tel que AD = AC. Démontrer que AB = DC.

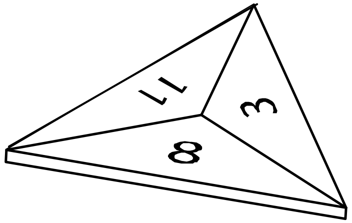
SOLUTION DU PROBLÈME N°66

proposé par Richard Chéry, collège de Pagny sur Moselle

Considérons les dominos du commerce : il s'agit de rectangles partagés en deux avec de part et d'autre de la séparation deux nombres i et j de points vérifiant : 0 £ i £ j £ 6. Il y a 28 dominos différents.
On trouve dans le commerce des triominos, triangles équilatéraux partagés en trois avec des nombres i, j, k vérifiant $0 \leq i \leq j \leq k \leq l \leq n$. (n=5 pour le jeu du commerce).
Combien y a-t-il de triominos différents pour n donné ?
De même combien y-a-t-il de tétraminos différents pour n donné ? ($0 \leq i \leq j \leq k \leq l \leq n$.)

Que deviennent ces nombres si on invente de nouveaux triominos et tétraminos en considérant que deux pièces sont différentes si elles ne sont pas image l'une de l'autre par rotation ?

Des solutions de Jacques Verdier, François Pétiard et Richard Beczkowski.



Ce dernier établit de plusieurs manières le nombre de p-minos en faisant abstraction de la contrainte géométrique, à savoir du rôle des isométries. Puis il calcule le nombre de nouveaux p-minos engendrés par la prise en compte de cette contrainte. (l'intégralité de la solution de Richard Beczkowski est téléchargeable sur le site de la régionale).
Jacques Verdier distingue les différents cas.

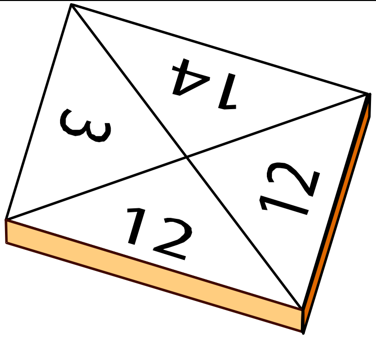
Il y a trois types de triminos : (n+1) avec un seul nombre, A(n+1,2) avec deux nombres et 2C(n+1,3) avec trois nombres car il faut tenir compte de l'orientation. Ce qui fait en tout :
$n+1 + n(n+1) + (n+1)n(n-1)/3 = (n+1)(n^2+2n+3)/3$

Il y a sept types de tétraminos :
- n+1 tétraminos avec un seul nombre.
- C(n+1,2) avec deux nombres représentés chacun deux fois, croisés.
- C(n+1,2) avec deux nombres représentés chacun deux fois, non croisés.
- A(n+1,2) avec deux nombres dont l'un présent dans trois cases.
- (n+1)A(n,2) avec trois nombres : l'un présent deux fois dans deux cases contiguës.
- (n+1)C(n,2) avec trois nombres : l'un présent deux fois dans deux cases opposées.
- 6C(n+1,4) avec quatre nombres différents.

Au total, nous obtenons : $(n+1)(n^3+3n^2+4n+4)/4$ tétraminos différents.

D'où l'application numérique :

n	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
dominos	10	15	21	28	36	45	55	66
triminos	24	45	76	119	176	249	340	451
tétraminos	70	165	336	616	1044	1665	2530	3696



Rappel : Problème du trimestre, n°67

Soit ABC un triangle quelconque. On veut y “ inscrire ” un triangle MNP, équilatéral, tel que M∈[BC], N∈[CA] et P∈[AB].
Quel est l’ensemble des centres de gravité de tous les triangles MNP

Aucune solution à ce problème ne nous étant parvenue à ce jour, nous vous donnons encore deux mois pour envoyez vos solutions, ainsi que toute proposition de nouveau problème, à

Pol LE GALL, 2 place du Chaussy, 57530 COURCELLES