Problème di trimestre n°66

proposé par Richard Chéry, collège de Pagny sur Moselle

Considérons les dominos du commerce : il s'agit de rectangles partagés en deux avec de part et d'autre de la séparation deux nombres i et j de points vérifiant : $0 \leq i \leq j \leq 6$. Il y a 28 dominos différents.
On trouve dans le commerce des triominos, triangles équilatéraux partagés en trois avec des nombres i, j, k vérifiant $0 \leq i \leq j \leq k \leq n$ (n=5 pour le jeu du commerce).
Combien y a-t-il de triominos différents pour n donné ?
De même combien y a-t-il de tétraminos différents pour n donné ($0 \leq i \leq j \leq k \leq l \leq n$) ?
Que deviennent ces nombres si on invente de nouveaux triominos et tétraminos en considérant que deux pièces sont différentes si elles ne sont pas image l'une de l'autre par rotation ?

N.B. Voir figures en bas de la page précédente

Envoyez vos solutions, ainsi que toute proposition de nouveau problème, à
Pol LE GALL, 2 place du Chaussy, 57530 COURCELLES

SOLUTION DU PROBLÈME N°65

Combien existe-t-il de nombres entiers dont l'écriture décimale satisfait aux deux conditions suivantes : elle ne contient pas de zéro et la somme des chiffres vaut 54 ?

Ce problème a inspiré de nombreux lecteurs car nous avons reçu plusieurs réponses, émanant de Renaud DEHAYE (Lycée Boutet de Monvel, Lunéville), Dominique ISLER (Lycée Charles Jully, Saint Avold), Denis PÉPIN (Lycée Margueritte, Verdun), François PÉTIARD (Université de Besançon), Daniel VAGOST (IUT de Metz), Jacques VERDIER (Lycée de Tomblaine).

La plupart des solutions reposent sur la mise en évidence de la suite récurrente (a_k) vérifiant :

- pour k de 1 à 9, $a_k = 2^{k-1}$

$$pour\ k > 9,\ \ a_k = \sum_{i=1}^{9} a_{k-i} = \sum_{i=k-9}^{k-1} a_i$$

La relation de récurrence provient du constat que un nombre dont la somme des chiffres est k s'écrit soit :

* 1 suivi d'un nombre dont la somme des chiffres est k-1 ; il y en a a_{k-1} ;
* 2 suivi d'un nombre dont la somme des chiffres est k-2 ; il y en a a_{k-2} ;
* ....
* 9 suivi d'un nombre dont la somme des chiffres est k-9 ; il y en a a_{k-9}.

Le calcul explicite nécessiterait la résolution d'une équation du neuvième degré. Tous les auteurs des réponses ont préféré opter pour un recours à un calcul informatique. Divers outils (MAPLE ([1]), EXCEL, calculatrices) ont donc été convoqués.
On obtient ainsi : a_{54} = 8 608 264 049 883 616 .

Renaud Dehaye parvient au même résultat avec une toute autre méthode :
"*Soit P le polynôme $X+X^2+X^3+X^4+X^5+X^6+X^7+X^8+X^9$. Si on met P à la puissance n, le coefficient de X^{54} correspond au nombre de façons d'écrire 54 comme somme de n nombres compris entre 1 et 9. Ce coefficient est non nul pour n compris entre 6 et 54.*"
Il suffit donc de calculer ainsi le nombre de manières d'écrire 54 comme somme de 6 nombres, puis de 7, … puis de 54, en déterminant les coefficients de X^{54} dans P^6, P^7, … P^{54}.
Renaud Dehaye utilise ensuite Maple ([2]) pour calculer la somme de ces coefficients quand n décrit {6,..,54} et obtient instantanément la réponse.

Daniel Vagost fait remarquer que EXCEL donne 8 608 264 049 883 620, donc 4 de trop, tandis que la TI83 égare 116 solutions !

Denis Pépin fait remarquer qu'en base 3 la relation de récurrence conduirait à une suite de Fibonacci. Il s'insurge, par ailleurs, implicitement contre le centralisme nancéen de l'énoncé et fournit les réponses correspondant aux autres départements :
a_{55} = 17 199 565 259 466 848, a_{57} = 68 662 758 804 285 312 et a_{88} = 1 430 144 195 078 022 647 191 176 832.
(Rajoutons pour François Pétiard que a_{25} = 16 499 120.)

([1])
```
> u:=proc(n) option remember; if n<0then 0 elif n=0 then 1 else
  convert([seq(u(n-k),k=1..9)],'+'); fi end:
  > u(54);
```

([2])
```
> poly:=(t+t^2+t^3+t^4+t^5+t^6+t^7+t^8+t^9);
  > liste:=seq(coeff(poly^i,t,54),i=6..54);
> sum(liste[i],i=1..49);
```