Problème du trimestre n°65

Combien existe-t-il de nombres entiers dont l'écriture décimale satisfait aux deux conditions suivantes : elle ne contient pas de zéro et la somme des chiffres vaut 54 ?

Envoyez toutes vos solutions, ainsi que toute proposition de problème, à
Pol LE GALL, 2 place du Chaussy, 57530 COURCELLES

SOLUTION DU PROBLÈME N°64

Sur la planète Caoutchouc, deux escargots sont amoureux l'un de l'autre. Ils habitent à 100 mètres l'un de l'autre, de part et d'autre d'une prairie. Ils décident de se rejoindre. Chaque jour, chaque escargot avance de 10 m. Malheureusement chaque nuit, pendant que les deux escargots sommeillent, la planète caoutchouc se dilate : la largeur de la prairie augmente de 100 mètres, uniformément répartis. Ainsi les escargots, distants de 100 m le premier matin, de 80 m le premier soir, se trouvent-ils distants de 160 m le second matin, car la prairie mesure maintenant 200 m de large, mais le chemin parcouru a aussi augmenté pendant la nuit. Les escargots se rejoindront-ils ? Si oui, au bout de combien de jours ? Si non, pourquoi ?

Plusieurs réponses (Renaud Dehaye, François Pétiard, Jacques Chauné, Philippe Fevotte) qui aboutissent à la même conclusion : oui les escargots se rejoindront ! Philippe Fevotte indique joliment "*une fois n'est pas coutume, la divergence de la série harmonique va rapprocher les amoureux et annuler la différence*". Ci dessous la solution de François Pétiard.

Appelons D_n la distance séparant les deux escargots à la fin du n^e jour et calculons les premiers termes :

A la fin du premier jour (n = 1) : $D_1 = 100 - 20$.

A la fin du deuxième jour (n = 2) : Toutes les distances ont été multipliées par

$$\frac{100+100}{100} = 2$$

et les escargots ont fait 20 m dans la journée, donc :

$$D_2 = (10-20)\cdot\ 2 - 20 = 100\cdot\ 2 - 20\cdot\ 2\cdot\ \left(1+\frac{1}{2}\right).$$

A la fin du troisième jour (n = 3) : Toutes les distances ont été multipliées par

$$\frac{200+100}{200} = \frac{3}{2}$$

et les escargots ont fait 20 m dans la journée, donc :

$$D_3 = \left[100\times 2 - 20\times 2\times\left(1+\ \frac{1}{2}\right)\right]\cdot\ \frac{3}{2} - 20 = 100\cdot\ 3 - 20\cdot\ \cdot 3\ \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$$

Hypothèse de récurrence : au rang n ($n \geq 1$),

$$D_n = 100n - 20n\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\right)$$

Au matin du $(n+1)^e$ jour, toutes les distances ont été multipliées par

$$\frac{100n+100}{100n} = \frac{n+1}{n}$$

, puis les escargots ont fait 20 m dans la journée, donc :

$$\begin{aligned}D_{n+1} &= D_n \cdot \frac{n+1}{n} - 20 \\ &= \left[100n - 20n\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\right]\cdot\frac{n+1}{n} - 20 \\ &= 100(n+1) - 20(n+1)\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right) - 20 \\ &= 100(n+1) - 20(n+1)\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)\end{aligned}$$

L'hypothèse de récurrence est donc vérifiée au rang n+1 ; comme elle est vraie au rang 1, elle est donc vraie pour tout entier n ≥ 1 :

La distance séparant les deux escargots au bout de n jours est égale à

$$D_n = 100n - 20n\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$$

Il faut donc regarder si cette distance peut devenir nulle, soit :

$$100n - 20n\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 5 - \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right) \geq 5$$

Ceci est bien évidemment possible puisque $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p} = +\infty$.

Un petit calcul simple montre que, pour n = 82,

$$\sum_{p=1}^{82}\frac{1}{p} = \frac{44139711531918\ 267142140\ 457\ 772\ 773}{8845597978580177157\ 715301537899\ 200} < 5$$

Alors que, pour n = 83,

$$\sum_{p=1}^{83}\frac{1}{p} = \frac{3372\ 441655127\ 796364812512959533039359}{734184\ 632\ 222154\ 704\ 090370\ 027\ 645633600} > 5$$

Les deux escargots amoureux se rejoignent le 83^e^ jour.