

DANS NOS CLASSES : NOS ELEVES FACE A LA PROPRIETE DE PYTHAGORE

*Christian CHADUTEAU, c.chaduteau@ac-nancy-metz.fr
et François DROUIN, f.drouin@ac-nancy-metz.fr
Collège Les Avrils, 55300 SAINT MIHIEL*

A propos de la propriété de Pythagore, nos élèves de 4^{ème} ou de 3^{ème} ont la fâcheuse tendance à confondre théorème direct, réciproque et contraposée du théorème.

Si $AC = 6$, $BC = 8$, $AB = 10$, le triangle ABC est-il rectangle ?

Voici une copie d'élève :

Dans le triangle ABC, d'après le théorème de Pythagore

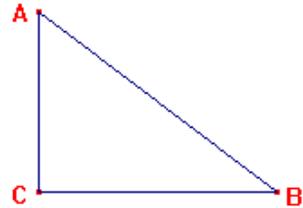
$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$AB^2 = 6^2 + 8^2$$

$$AB^2 = 100$$

$$AB = 10$$

Donc comme on trouve pareil pour AB, ABC est rectangle en C.



L'enseignant pense que l'élève n'a rien compris à la différence entre théorème direct et réciproque et mettra en grand à côté du travail de l'élève : “ erreur de raisonnement ”.

En est ce vraiment une, car changeons un petit peu (les changements sont indiqués en gras).

*Dans le triangle ABC **rectangle en C**, d'après le théorème de Pythagore*

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$AB^2 = 6^2 + 8^2$$

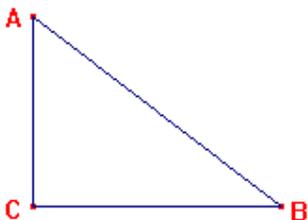
$$AB^2 = 100$$

$$AB = 10$$

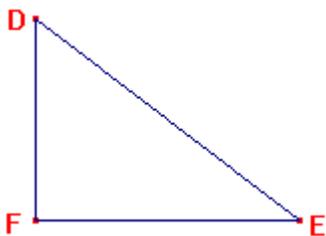
*Donc comme on trouve pareil pour AB, **notre triangle** ABC est rectangle en C.*

Que penser de cette copie ? Erreur de raisonnement ou mal rédigé ? Car en remplaçant “ *Donc comme on trouve pareil pour AB* ” par “ *d'après le troisième cas d'égalité des triangles* ”, cela devient carrément juste et bien rédigé.

Surprenant, n'est ce pas... Après un petit détour, nous allons essayer de comprendre ce qui se passe dans la tête de l'élève.



A côté de mon triangle de départ ABC de côtés $AC = 6$, $CB = 8$, $AB = 10$, je construis un triangle DFE **rectangle** en F, tel que $DF = 6$ et $FE = 8$. Cette fois-ci, je suis sûr que le triangle DEF est rectangle en F, je peux donc utiliser le théorème de Pythagore et trouver à l'aide de calculs très classiques $DE = 10$.



D'après le "troisième cas d'égalité des triangles", les triangles ABC et DEF ont leurs trois côtés égaux "chacun à chacun", ils sont donc égaux et leurs angles sont donc égaux "chacun à chacun". Par hypothèse, je sais que l'angle en F est droit, j'en déduis donc que l'angle en C est également droit.

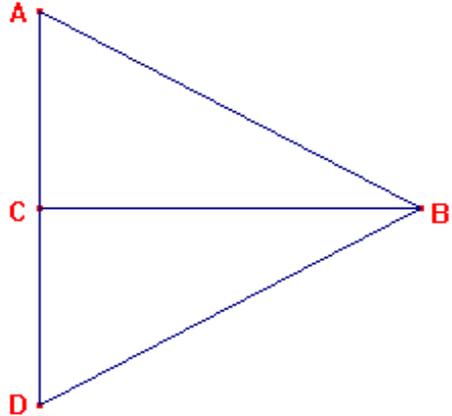
J'ai alors prouvé que le triangle ABC était rectangle sans utiliser la réciproque du théorème de Pythagore... Et de plus, le théorème direct a été utilisé...

N'y aurait-il pas dans la tête de nos élèves un cheminement semblable à celui décrit quelques lignes plus haut ? L'élève ne dessine pas deux triangles mais travaille avec deux triangles différents : celui proposé par l'exercice et celui qu'il imagine dans sa tête. Ils ont le même nom, mais comme il ne les utilise pas en même temps et cela ne pose pas de problème. Evidemment, parmi ses outils mathématiques ne figurent pas les cas d'égalité des triangles, mais ceux-ci semblent faire partie des "évidences" pouvant être mises en jeu lors de démonstrations (qui n'a pas entendu en classe des phrases comme "c'est le même triangle" ...).

Ces quelques remarques nous incitent à être très prudents et tolérants lors des confusions "théorème direct", "réciproque", "contraposée". Et pourquoi avoir fait disparaître les cas d'égalité des triangles de nos classes de collège ?

Revenons à notre exercice. L'enseignant fera au tableau (ou fera faire par ses élèves) une correction utilisant la réciproque du théorème de Pythagore (réciproque qu'il aura très certainement fait admettre à ses élèves...).

ABC est un triangle tel que $AC^2 + CB^2 = AB^2$. Je voudrais savoir si ce triangle est rectangle en C. Je construis le triangle CBD **rectangle** en C tel que $AC = CD$. D'après le théorème de Pythagore utilisé dans le **triangle rectangle CBD**, je peux affirmer que $CD^2 + CB^2 = DB^2$. Par hypothèse, je sais $AC = CD$. Je peux donc en déduire facilement $AB = DB$.

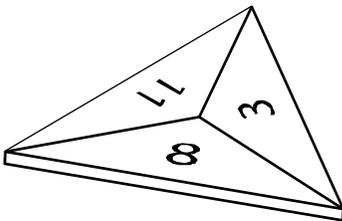


Les triangles ABC et CBD ont leurs trois côtés égaux chacun à chacun, après le troisième cas d'égalité des triangles, ces triangles sont égaux et leurs angles sont donc égaux 'chacun à chacun'. Le triangle CBD est, par hypothèse, rectangle en C. Je suis donc sûr que le triangle ABC est rectangle en C. J'ai donc démontré la réciproque du théorème de Pythagore en utilisant les cas d'égalité des triangles...

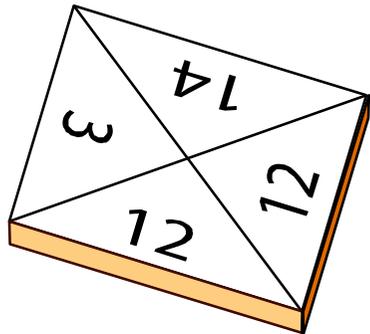
En utilisant ces cas d'égalité des triangles, nous pouvons déduire la réciproque du théorème de Pythagore du théorème direct... Ces cas d'égalité semblent assez intuitifs aux élèves, comprenons qu'ils ne saisissent pas le théorème direct et la réciproque comme deux choses vraiment différentes !

L'écriture de ces quelques lignes fait suite à plusieurs discussions en salle des profs et nous attendons vos réactions...

Figures pour le problème du trimestre
(voir page suivante)



triomino



tétramino