Solution du problème n°63

proposé par Pol Le Gall, IUFM de Metz

Prenons un spaghetti de longueur L. Découpons le aléatoirement en quatre segments. Soit X la longueur du plus grand des quatre segments.

Considérons le spaghetti découpé, dont on a rangé les quatre morceaux du plus grand, de longueur x, au plus petit de longueur t. Soient x, y, z et t les longueurs des quatre segments, tels que $x\ y\ \ z\ t$.
La somme des longueurs des quatre segments est donnée, c'est la longueur L du spaghetti.
Un découpage est donc caractérisé par la donnée du triplet (x,y,z), donc du point de coordonnées M (x,y,z) dans un repère.
On a :

$$\begin{cases} x+y+z+t=L \\ x \geq y \geq z \geq t \geq 0 \end{cases}$$

Cherchons l'ensemble des points M qui vérifient ces conditions.
On a :

$$\begin{cases} L-x-y-z \geq 0 \\ z \geq L-x-y-z \\ y \geq z \\ x \geq y \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} x+y+z \leq L \\ x+y+2z \geq L \\ y \geq z \\ x \geq y \end{cases}$$

Ces contraintes définissent l'intérieur du tétraèdre de sommets A(L, 0, 0), B(L/2, L/2, 0), C(L/3, L/3, L/3), D(L/4, L/4, L/4).
Nous postulons que tous les points ont autant de chances d'être atteints. (Mais nous attendons avec impatience l'avis de Gilberte Pascal sur cette affirmation..)
Dès lors la valeur moyenne de x est l'abscisse du centre de gravité du tétraèdre, à savoir :

$$\frac{1}{4}\left(L+\frac{L}{2}+\frac{L}{3}+\frac{L}{4}\right)=\frac{25}{48}L \approx 0,521L$$

<u>Remarques</u>:

1) Une autre solution, plus calculatoire, consisterait à calculer la fonction de répartition de la variable, à en déduire la densité et à calculer les intégrales appropriées.
Pour calculer cette fonction de répartition, on peut considérer que les nombres x, y, z et t sont les coordonnées barycentriques d'un point dans le repère constitué par les sommets d'un tétraèdre régulier de hauteur L. La contrainte "max(x, y, z, t)<u" définit un solide intérieur au tétraèdre, la probabilité de l'événement "max(x, y, z, t)<u" est le rapport du volume de ce solide au volume du tétraèdre. Il faut considérer deux cas de figure, car selon que u> ou u<, le solide n'a pas la même forme (octaèdre et tétraèdre tronqué).

2) Si nous essayons de simuler l'expérience, nous constatons que l'énoncé manque de précision sur la manière de couper le spaghetti.

Diverses procédures seraient en effet possibles :

1. on peut couper le spaghetti en deux, puis couper chacun des deux morceaux en deux.
2. on peut couper un morceau, le poser, puis couper un bout du reste, le poser, puis couper en deux le reste.
3. on peut choisir au hasard successivement trois nombres dans l'intervalle]0 ; L[, considérer le spaghetti comme orienté et marquer les points dont les abscisses sont ces trois nombres sur le spaghetti, puis couper.
4. couper le spaghetti en deux, tirer au sort un des deux morceaux que l'on recoupe en deux, tirer au sort l'un des trois morceaux que l'on recoupe en deux.
5. on peut mélanger deux des procédures précédentes..

Ces procédures ne sont pas toutes équivalentes. On peut s'en convaincre en modélisant l'opération de tronçonnage de spaghetti sur EXCEL.

La première technique laisse présager une moyenne d'environ : 0,5670 (50 simulations de 1000 expériences)

La seconde technique : 0,6343 L (50 simulations de 1000 expériences)

La troisième : 0,5216L (50 simulations de 1000 expériences)

La quatrième : 0,631 L (50 simulations de 1000 expériences).

Il semble donc, après avoir brisé 150000 spaghettis virtuels non cuits, que la troisième procédure soit celle qui correspond au résultat trouvé. Autrement dit, que l'hypothèse d'équiprobabilité du choix d'un point de l'intérieur du tétraèdre soit équivalente au choix de ce modèle expérimental. On peut évidemment retourner l'argument en considérant que le choix des autres modèles ne respecte pas l'équiprobabilité des dits points du tétraèdre.

Problème du trimestre n°64

(d'après un énoncé d'Elizabeth Busser paru dans Le Monde cet été)

Sur la planète Caoutchouc, deux escargots sont amoureux l'un de l'autre. Ils habitent à 100 mètres l'un de l'autre, de part et d'autre d'une prairie. Ils décident de se rejoindre. Chaque jour, chaque escargot avance de 10 m. Malheureusement chaque nuit, pendant que les deux escargots sommeillent, la planète caoutchouc se dilate : la largeur de la prairie augmente de 100 mètres, uniformément répartis. Ainsi les escargots, distants de 100 m le premier matin, de 80 m le premier soir, se trouvent-ils distants de 160 m le second matin, car la prairie mesure maintenant 200 m de large, et car le chemin parcouru a aussi augmenté pendant la nuit.

Les escargots se rejoindront-ils ? Si oui, au bout de combien de jours ? Si non,

JOYEUX NOEL ET BONNE