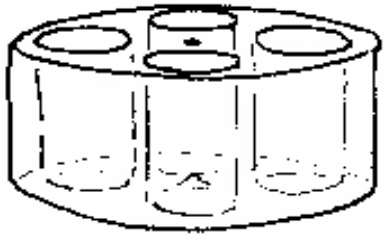
Problème du trimestre n° 62
Le tonneau polonais

Énoncé emprunté à Guy Hocquenghem (CNAM) qui le tient lui-même d'une mathématicienne polonaise Mme Krygowska qui elle-même...).

Envoyez vos solutions, ainsi que toute proposition de nouveau problème, à Pol LE GALL, 2 place du Chaussy, 57530 COURCELLES, e-mail pol.legall@free.fr

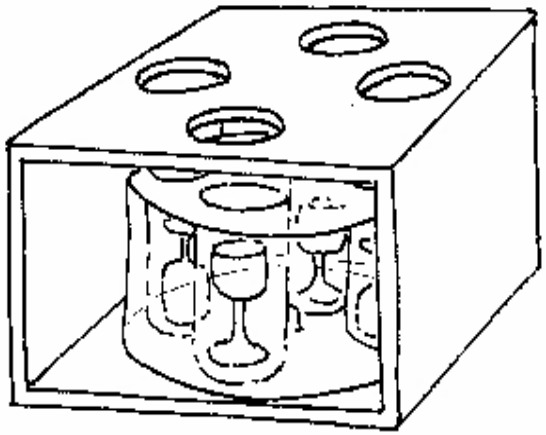
Une attraction foraine est constituée de la manière suivante :



Un plateau cylindrique en verre comportant quatre niches également cylindriques . Dans chacune de ces niches, le forain place un verre à pied, à l'envers ou à l'endroit, à l'insu du joueur.

Le forain place ensuite le tout à l'intérieur d'une caisse en bois, percée de quatre trous au dessus et ouverte du côté du forain.

Le forain voit donc dans quelle position est chaque verre.



Le jeu proposé est le suivant :

Appelons “tour” la suite d'actions suivante :

le joueur désigne deux des quatre trous.

le forain dispose ensuite le cylindre comme il le souhaite.

le joueur plonge les mains dans les deux trous choisis et fait ce qu'il veut des verres qu'il trouve au

fond : il les met à l'endroit ou à l'envers, change ou non l'orientation de chacun.

Si, suite à cette manœuvre, les quatre verres sont dans le même sens, le joueur a gagné et le forain le lui annonce.

Si les quatre verres ne sont pas dans le même sens, le forain le signale et on engage un autre “tour”.

Le joueur dispose de sept “tours”.

Existe-t-il une stratégie gagnante pour le joueur ?

(précisions : le forain voit toujours l'état de tous les verres, il n'a pas le droit de modifier leur position en cours de partie, il ne peut agir que sur la rotation du cylindre. Le joueur, lui, ne peut agir que sur la position des deux verres qui sont en face des trous qu'il a choisis, et il ne voit rien.)

ERRATUM
PETITE FORMULE PROBABILISTE UNITAIRE

Dans notre denier numéro, pages 7 et 8, une erreur typographique nous a fait écrire N_p et N_q au lieu de Np et Nq (produits de N par p et par q, et non N indice p ou N indice q). Rappelons que Np représentait le nombre total de boules blanches dans l'urne, et Nq le nombre de noires. Par exemple, la formule encadrée page 7 devait se lire :

$$P(k,n) = C_n^k \cdot \frac{Np^{[k]} \cdot Nq^{[n-k]}}{N^{[n]}}$$

Kosmanek

La même erreur se retrouvait dans le tableau de la page 9, où il fallait lire, par exemple à la dernière case : $kq\,\frac{N(N+1)(Np-k+1)}{(Np+1)^2(Np+2)}$.

Page 9, §4, au lieu de « convergence de la loi binomiale vers la loi hypergéométrique », lire « convergence de la loi hypergéométrique vers la loi binomiale ».

Autre erreur, au §5 de la page 9 (cas particuliers) : pour le troisième cas (k = 1 et p =1/N), lire U(N) au lieu de U(n).

Nous prions l'auteur, Edith KOSMANEK, et nos lecteurs, de bien vouloir nous en excuser.

Solution du problème du n°61

Proposé par Pol LE GALL, I.U.F.M. de Lorraine

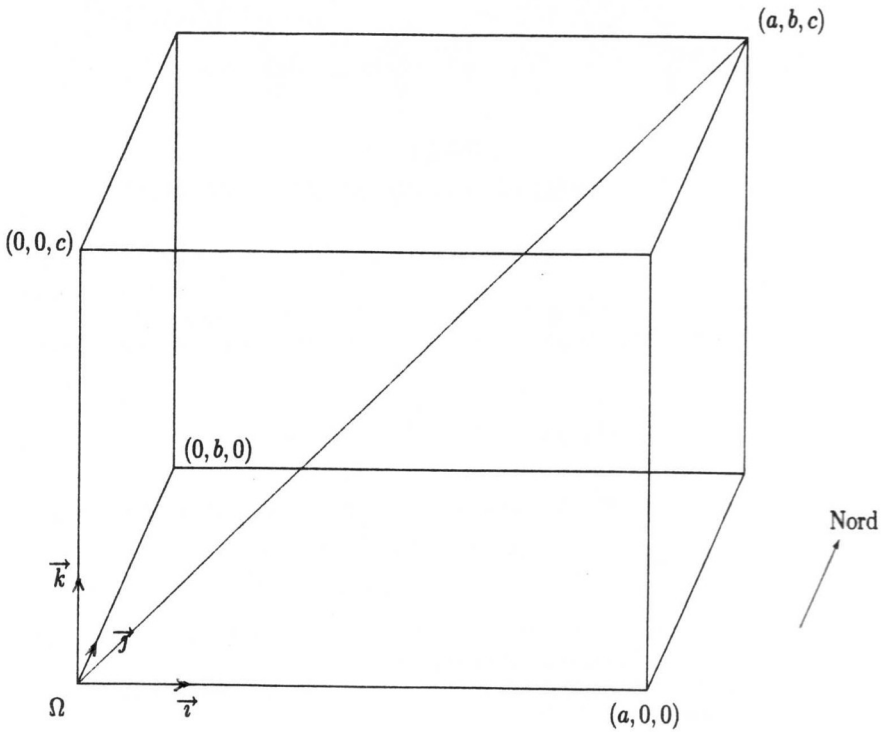
Une boîte de sucres contient des sucres. Boîte comme sucres sont des parallélépipèdes rectangles. Les dimensions respectives de la boîte et d'un sucre sont telles que l'on peut placer exactement *a* sucres dans une longueur de la boîte, *b* sucres dans une largeur et *c* sucres dans une hauteur, (*a,b,c*) entiers naturels non nuls.

Combien de sucres seraient traversés par un rayon laser qui transpercerait la boîte de sucres suivant sa plus grande diagonale ?

Plusieurs contributions sont parvenues : Jacques Verdier, François Pétiard, Richard Cherry, Christian Amet et l'auteur. Pour la première fois, deux solutions sont arrivées par internet ! Si les méthodes diffèrent légèrement, les résultats sont les mêmes : le nombre de sucres traversés est égal à :

$$a + b + c + pgcd(a,b,c) - pgcd(a,b) - pgcd(a,c) - pgcd(b,c).$$

Ci-dessous la solution de François Pétiard.



On munit la boîte d'un repère orthogonal évident : (Ω, ***i***, ***j***, ***k***) avec ***i*** dans le sens de la longueur de la boîte, ***j*** dans le sens de la largeur et ***k*** dans le sens de la hauteur, tels que le parallélépipède élémentaires soit un sucre.

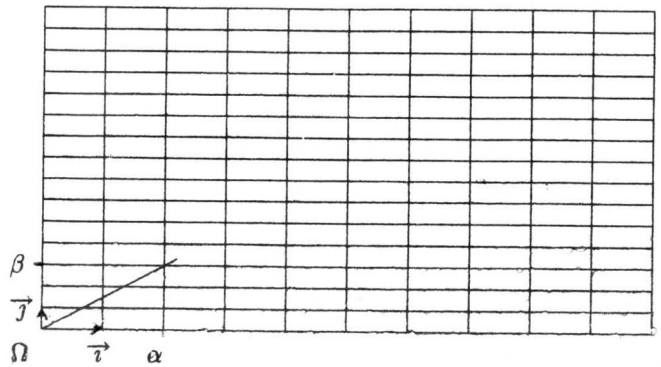
Considérons que des parois séparent tous les morceaux de sucre.
En comptant les parois de la boite, il y a donc a+1 parois verticales orientées Nord-Sud, b+1 parois verticales orientées Ouest-Est et c+1 parois horizontales.
Dès que la diagonale perce une paroi, c'est qu'elle quitte un sucre pour entrer dans un autre, donc le compteur de sucres traversés augmente de 1.
Il suffit donc de compter le nombre de parois traversées en allant d'un coin à l'autre.
Appelons Pa_i les points où la diagonale traverse les parois verticales Nord-Sud, Pb_i les points où la diagonale traverse les parois verticales Ouest-Est et Pc_i, les points où la diagonale traverse les parois horizontales. Le nombre cherché est donc :

$$\begin{aligned} N &= \mathrm{card}\left(\{Pa_i\} \cup \{Pb_i\} \cup \{Pc_i\}\right) \\ &= \mathrm{card}\left(\{Pa_i\}\right) + \mathrm{card}\left(\{Pb_i\}\right) + \mathrm{card}\left(\{Pc_i\}\right) \\ &\quad -\mathrm{card}\left(\{Pa_i\} \cap \{Pb_i\}\right) - \mathrm{card}\left(\{Pb_i\} \cap \{Pc_i\}\right) - \mathrm{card}\left(\{Pc_i\} \cap \{Pa_i\}\right) \\ &\quad +\mathrm{card}\left(\{Pa_i\} \cap \{Pb_i\} \cap \{Pc_i\}\right) \end{aligned}$$

La diagonale rencontre les parois verticales Nord-Sud en a points exactement, les parois verticales Ouest-Est en b points exactement et les parois horizontales en c points exactement (on ne compte évidemment pas le point de départ). Donc :

$$\begin{aligned} \mathrm{card}\left(\{Pa_i\}\right) &= a \\ \mathrm{card}\left(\{Pb_i\}\right) &= b \\ \mathrm{card}\left(\{Pc_i\}\right) &= c \end{aligned}$$

Les points de $\{Pa_i\} \cap \{Pb_i\}$ sont les points où la diagonale rencontre des arêtes verticales. Soit (α, β, γ) le premier tel point (hormis le point de départ). Alors, il est immédiat de voir que a est un multiple de α et b est **le même multiple** de β ; pour s'en persuader, il suffit de considérer la projection orthogonale sur le fond horizontal de la boite : la boite se projette sur le fond, la diagonale de la boîte se projette en diagonale du rectangle obtenu, les parois se projettent pour former un quadrillage du fond et les points de $\{Pa_i\} \cap \{Pb_i\}$ se projettent comme des intersections de ce quadrillage :



Le raisonnement consiste alors à dire que, si, par exemple, a n'est pas un multiple de α, en considérant la division euclidienne $a = \alpha p + r_1$ (avec donc $0 < r_1 < a$), alors la diagonale projetée passera aux intersections (α, β), (2α, 2β), ... ($p\alpha$, $p\beta$), puis (a, b), donc elle est la diagonale d'un rectangle de longueur r_1 et de largeur $b - p\beta$; pour des raisons de symétrie, la première intersection rencontrée aurait dû donc être le point (r_1, $b - p\beta$) ce qui est impossible puisque (α, β) est la première intersection rencontrée et que l'on a $r_1 < a$. Le raisonnement est évidemment le même sur b et le même raisonnement sert encore à démontrer que les multiples sont les mêmes (c'est-à-dire $\boldsymbol{a = \alpha p}$ **et** $\boldsymbol{b = \beta p}$). p est donc un diviseur commun à a et b.
C'est évidemment le plus grand diviseur commun, sinon, encore une fois, (α, β) ne serait pas la première intersection rencontrée par la diagonale puisque ce serait le point

$$\left(\frac{a}{\gcd(a,b)}, \frac{b}{\gcd(a,b)} \right)$$

Il y a donc **exactement pgcd(a, b) points dans $\{Pa_i\} \cap \{Pb_i\}$**.

Le même raisonnement conduit à :

Card($\{Pb_i\} \cap \{Pc_i\}$) = pgcd(b, c)
Card($\{Pc_i\} \cap \{Pa_i\}$) = pgcd(c, a)

Les points de $\{Pa_i\} \cap \{Pb_i\} \cap \{Pc_i\}$ sont les points où la diagonale passe par le point commun à une paroi verticale Nord-Sud, une paroi verticale Ouest-Est et une paroi horizontale. Soit (α, β, γ) le premier tel point (hormis le point de départ). Alors, il est immédiat de voir que a est un multiple de α, que b est **le même multiple** de β et que c est **encore le même multiple** de γ (en tenant le même genre de raisonnement que précédemment : si ce n'était pas vrai, on trouverait un pavé dont la diagonale de la boîte serait une diagonale et tel qu'au moins une de ses dimensions serait strictement plus petite que la dimension correspondante du pavé α, β, γ, ce qui est impossible).
De plus, toujours par le même raisonnement, on a $a = q\alpha$, $b = q\beta$ et $c = q\gamma$ avec q = pgcd (a, b, c).
Ce qui signifie que :

Card($\{Pa_i\} \cap \{Pb_i\} \cap \{Pc_i\}$) = pgcd(a, b, c)

Le nombre de sucres traversés est égal à

$$\boldsymbol{a + b + c - \text{pgcd}(a, b) - \text{pgcd}(b, c) - \text{pgcd}(c, a) + \text{pgcd}(a, b, c).}$$