Solution du problème n° 60

LES SIX MILLIARDIÈMES

Extraits d'un article d'Hervé LE BRAS paru dans LIBERATION du 08/10/99 :

Il y aura peut-être en effet six milliards d'hommes le 12 octobre prochain pendant quelques dixièmes de seconde (il naît en moyenne 3 enfants par seconde dans le monde), mais il peut y avoir plusieurs six milliardièmes humains qui ne garderont en outre ce rang que pendant quelques dixièmes de seconde. Pendant que trois personnes naissent dans le monde, il en meurt en effet en moyenne une. Si une naissance fait passer la population mondiale à 6 000 000 000 exactement, elle peut être suivie immédiatement par un décès, ce qui fait retomber la population à 5 999 999 999 personnes. Qu'une nouvelle naissance survienne alors, et on aura un second six milliardième humain. Cette oscillation de la natalité et de la mortalité peut se répéter.

Le problème est le suivant : combien pouvait-on espérer qu'il y ait eu de six milliardièmes humains ; en d'autres termes, si on appelle X la variable aléatoire correspondant aux nombres de six milliardièmes tels que définis par Hervé LE BRAS dans son article, quelle est l'espérance mathématique de X ?

Ce problème a donné lieu à diverses explorations : expérimentale par simulation sur calculatrice de la part de Jacques Verdier et Daniel Vagost, et théorique de la part d'Aimé Fuchs, professeur à l'Université Louis Pasteur de Strasbourg. Ce dernier a démontré ce que les deux autres avaient constaté et conjecturé, à savoir que le nombre de six milliardièmes humains suivait une loi géométrique de paramètre 1/2, et donc que l'espérance cherchée valait 2.

Voici la démonstration d'Aimé Fuchs.

J'adopte le modèle d'un cheminement aléatoire pour lequel, à chaque expérience, on associe soit un vecteur montant (avec la probabilité $p = \frac{3}{4}$), soit un vecteur descendant (avec la probabilité $q = \frac{1}{4}$). Le cheminement commence à l'origine (0,0) et l'on suppose que les expériences sont indépendantes. Désignons par (n, S_n), $n \in \mathbb{N}$, le point atteint après n expériences. S_n est l'ordonnée de ce point à la date n, de sorte que $6000000000 + S_n$ représente le nombre d'habitants sur la planète à la date n.

Nous nous intéressons à la variable aléatoire X qui représente le nombre d'intersections du cheminement aléatoire et de l'axe des abscisses (l'origine comprise).

Etudions l'événement "Premier retour à zéro" consistant en le fait que le cheminement aléatoire, partant de l'origine, retourne pour la première fois à zéro. Cet événement peut ne pas se réaliser, il est essentiellement aléatoire. Désignons par r sa probabilité. Pour la calculer, il convient d'introduire la variable aléatoire T : "temps de retour à zéro" qui représente le nombre d'expériences qu'il faut effectuer pour que le cheminement aléatoire, partant de l'origine, retourne pour la première fois à zéro. (Il convient de remarquer que T peut être infini.)

Notons à présent le point important de la démonstration :

L'événement "Premier retour à zéro", de probabilité r, se réalise si et seulement si le "temps de retour à zéro", donc T, est fini, donc si et seulement si l'événement $\{T<+\infty\}$ se réalise.
On aura donc $P(\{T<+\infty\}) = r$.

A partir de là, il est aisé de déterminer la loi de probabilité de X :
L'événement $\{X=1\}$ se réalise si et seulement si, après l'origine, il n'y a plus de retour à zéro,
d'où $P(\{X=1\}) = 1-r$.
L'événement $\{X=2\}$ se réalise si et seulement si, après l'origine, il se produit un retour à zéro, mais plus de retour par la suite, d'où $P(\{X=2\}) = r(1-r)$.
De façon générale, l'événement $\{X=k\}$, $k \geq 1$, se réalise si après l'origine, il se produit k-1 retours à zéro, mais plus de retour à zéro ensuite, d'où $P(\{X=k\}) = r^{k-1}(1-r)$. Ceci indique que X suit une loi géométrique de paramètre r, son espérance est :

$E(X) = \sum_{k>0} kP(X=k) = (1-r) \sum_{k>0} kr^{k-1} = \frac{(1-r)}{(1-r)^2} = \frac{1}{1-r}$. Il reste à calculer r.

Considérons l'événement $E_n=\{S_n = 0\}$: "retour à zéro à la date n".
Posons $u_0 = 1$ et $u_n = P(E_n)$, $n \geq 1$.
On a $u_{2n+1} = 0$ car il ne peut il y avoir de retour à zéro après un nombre impair d'expériences.
On a $u_{2n} = C_{2n}^{n}p^nq^n$: sur les 2n expériences, il y en a n dans chaque sens, c'est à dire n naissances et n décès, et il y a C_{2n}^{n} manières d'ordonner ces 2n événements.

Considérons l'événement F_n "retour à zéro pour la première fois à la date n", on a :
$F_n = \{S_1 \neq 0, \ldots S_{n-1} \neq 0, S_n = 0\}$. F_n est l'événement consistant en le fait que, partant de l'origine, le cheminement aléatoire recoupe l'axe des x pour la première fois à la date n.
Posons $f_0 = 0$ et $f_n = P(F_n)$, $n \geq 1$.
(Le calcul explicite de f_n est compliqué, mais on n'en a pas besoin.)

Notons que la suite (f_n) peut être considérée comme la loi de probabilité de la variable aléatoire T, qui prend ses valeurs dans $N^*U\{+\infty\}$. La quantité $P(\{T<+\infty\}$ qui nous intéresse est alors donnée par :

$P(\{T<+\infty\}) = \sum_{n>0} f_n = f$.

D'autre part, on a : $u_n = \sum_{k=1}^{n} f_k u_{n-k}$, $n \geqslant 1$, autrement dit, la suite (u_n) est le produit de convolution des suites (f_n) et (u_n).

Démontrons le :
L'événement E_n est la réunion de n événements disjoints A_k : "le premier retour à zéro se produit à la date $k \in \{1,2,\ldots n\}$ puis après n-k nouvelles expériences on arrive à un nouveau retour à zéro".

Fonctions génératrices de (u_n) et de (f_n).

$$U(s) = \sum_{n>=0} u_n s^n = \sum_{n>=0} C^n_{2n}(pq)^n s^{2n}$$

Or $C^n_{2n} = (-4)^n C^n_{-1/2}$ donc $U(s) = \sum_{n>=0} C^n_{-1/2}(-4pqs^2)^n = (1 - 4pqs^2)^{-1/2}$

La fonction génératrice de f_n est : $F(s) = \sum_{n>=0} f_n s^n$

Reprenons le résultat : $u_n = \sum_{k=1}^{n} f_k u_{n-k}$, et prenons la fonction génératrice de chacun des deux membres de cette égalité :

- au premier membre, il y a la suite (u_n), $n>0$, avec le terme $u_0 = 0$, on a $\sum_{n>0} u_n s^n = U(s)-1$.
- au second membre figure la convolution des suites (f_n) et (u_n), la fonction génératrice est $F(s)U(s)$ (théorème connu).

On a donc $U(s) - 1 = F(s)U(s)$, donc $F(s) = 1 - \frac{1}{U(s)} = 1 - \sqrt{1 - 4pqs^2}$

calcul de $f = P(\{T<+\infty\})$:

$f = \sum_{n>0} f_n = F(1) = 1 - \sqrt{1 - 4pq}$ d'où, $P(\{T<+\infty\}) = 1 - \sqrt{1 - 4pq}$, d'où pour $p = \frac{3}{4}$ et $q = \frac{1}{4}$,

$r = P(\{T<+\infty\}) = \frac{1}{2}$.

La loi de probabilité de X est donc $P(X=k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$ et $E(X) = 2$.

Problème du trimestre n°61

Proposé par Pol LE GALL, I.U.F.M. de Lorraine

Une boîte de sucres contient des sucres. Boîte comme sucres sont des parallélépipèdes rectangles. Les dimensions respectives de la boîte et d'un sucre sont telles que l'on peut placer exactement *a* sucres dans une longueur de la boîte, *b* sucres dans une largeur et *c* sucres dans une hauteur, (*a,b,c*) entiers naturels non nuls.

Combien de sucres seraient traversés par un rayon laser qui transpercerait la boîte de sucres suivant sa plus grande diagonale ?

Envoyez vos solutions, ainsi que toute proposition de nouveau problème, à

Pol LE GALL, 2 place du Chaussy, 57530 COURCELLES