Au nom de l'égalité

par Michel ROUX

Trois observations pour commencer.

1 - de nombreux exercices de probabilités sont fondés sur l'égalité

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$$

où A et B sont des événements ; par suite :

$$p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \overline{B}) ;$$

Ces trois démonstrations ont une particularité commune ; celle de déduire d'une égalité, une seconde égalité, la nature des objets de la conclusion n'étant pas nécessairement celle des objets de la prémisse.

Cette déduction n'est pas argumentée de façon explicite et est affirmée sans justification.

2 - pour prouver le théorème de la médiane dans un triangle ABC où I est le milieu de [BC], on utilise le fait que

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} \text{ implique } \overrightarrow{AB}^2 = (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB})^2.$$

De même, $\overrightarrow{AC} = \ldots$, $\overrightarrow{AC}^2 = \ldots$

3 - dans la démonstration de la formule de l'intégration par parties, l'égalité

$$u'v = (uv)' - uv'$$

permet d'obtenir

$$\int_a^b u'v = \int_a^b [(uv)' - uv'] ,$$

d'où le résultat connu.

Ainsi dans les exemples ci-dessus, il est sous-entendu que :

1 - une probabilité p étant définie sur un ensemble d'événements, si X et Y sont des événements égaux, alors $p(X) = p(Y)$;

2 - quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, si $\vec{u} = \vec{v}$, alors $\vec{u}^2 = \vec{v}^2$;

3) Si f et g sont deux fonctions continues et égales sur un intervalle fermé de bornes a et b, alors leurs intégrales entre a et b sont égales.

Est-ce à dire que dans les différentes notions abordées le résultat est connu ? Peut-être ; en tout cas, il n'est pas formulé et ne donne pas lieu à un *énoncé zéro*, préliminaire à toutes les autres propriétés.

Pour quelles raisons cet *énoncé zéro* n'est-il pas cité ? Parce qu'il semble naturel ?

Pourtant il est clairement donné lorsqu'il s'agit d'égalités entre nombres. Ainsi on peut lire : « quels que soient les nombres réels a, b, c si $a = b$, alors $ac = bc$ ».

Néanmoins, on ne voit pas : « quels que soient les nombres positifs a et b, si $a = b$, alors $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ ».

Ecrit ici lors d'une opération binaire sur les nombres (la multiplication), il est en revanche négligé pour les fonctions que sont la fonction probabilité, la fonction carré scalaire, la fonction intégration de a à b, la fonction racine carrée.

Dans tous les cas, on applique à deux objets égaux une fonction Φ.

Par conséquent l'*énoncé zéro* s'écrit de façon générale : soit Φ une fonction définie sur un ensemble E à valeurs dans un ensemble F. On a :

$$\forall x \in E, \forall y \in E, [x = y \Rightarrow \Phi(x) = \Phi(y)].$$

Propriété fondamentale de toute application. Axiome dans ce que BOURBAKI appelle une théorie égalitaire [*Théorie des ensembles*, chapitre 1, § 5] : « On appelle théorie égalitaire une théorie $\mathcal{T}$ dans laquelle figure un signe relationnel de poids 2 noté = et dans laquelle les schémas S1 à S7 fournissent des axiomes ; si T et U sont des termes de $\mathcal{T}$ l'assemblage = TU est une relation de $\mathcal{T}$ dite d'égalité. On la désigne par T = U »

Ici c'est l'axiome S6 que nous utilisons : « soient x une lettre, T et U des termes $\mathcal{T}$ et R(x) une relation de $\mathcal{T}$; la relation

$$(T = U) \Rightarrow (R(T) \Leftrightarrow R(U))$$

est un axiome ».

Par conséquent, si deux objets sont égaux, ils ont les mêmes propriétés. En l'occurence, leur image par une application Φ est la même.

Cet *énoncé zéro* est omniprésent dans mes activités mathématiques.

Donnons pour finir quelques autres exemples en vrac :

- sous certaines conditions, si deux fonctions f et g sont égales, alors $f' = g'$, $\lim f = \lim g$, $f - 1 = g - 1$;
- si deux sous-ensembles A et B d'un ensemble sont égaux, alors $A \cap C = B \cap C$;
- si deux propositions p et q sont équivalentes (on dit équivalentes et non pas égales), alors les propositions non p et non q le sont aussi.

Je laisse le soin au lecteur d'identifier la fonction Φ ailleurs, et de remarquer qu'elle est souvent injective, au nom de l'égalité...

LONGUEUR - AIRE - VOLUME

Le "*groupe de réflexion et de proposition pour les programmes de collège*" de l'APMEP a travaillé un an sur les difficultés rencontrées par les élèves avec les notions de grandeur. Ils ont traduit ce travail par un texte intitulé "Longueur - Aire - Volume". Ce texte a été plébiscité par le comité National de Juin dernier et va paraître dans un prochain bulletin vert. Il fait suite à d'autres publications de ce groupe de travail et qui ont été, elles aussi, publiées dans des bulletins verts : *Connaissances des Nombres*, *Calcul Numérique* (1992), *Constructions géométriques* (1993), *Calcul littéral* (1994).

Cette publication "Longueur - Aire - Volume", part du constat que les notions, d'une part de longueur et d'autre part d'aire et de volume sont loin d'être acquises en sixième. L'utilisation de formules prend trop souvent le pas sur l'acquisition des concepts et réduit le travail de l'élève à une tâche exclusive de calcul.

A la lecture des textes officiels, force a été de constater que la confusion au niveau des pratiques règne aussi dans le libellé des programmes.

Les tests d'évaluation sont souvent aussi, significatifs des objectifs d'enseignement, notamment à propos de ces notions. Et les évaluations nationales n'échappent pas à la règle. Mais depuis 1990 des questions de la DEP vont dans le sens des préoccupations de l'APMEP, en proposant des items sur le sens de l'aire autrement qu'à partir de l'utilisation d'un formulaire (par exemple ev 90 et 92 ex 36 et ev 92 ex 29). Les évaluations de l'APMEP depuis plusieurs années et à tous les niveaux de la scolarité ont essayé d'obtenir des informations sur les connaissances des élèves dans ce domaine. Ce texte propose des extraits de l'analyse de certains résultats, par exemple Evapm 5/88 p 11-14, Evapm 5/88 q 28-30, Evapm 3/92 i 29-33, Evapm seconde professionnelle 93 ex ii.b.

Afin de poursuivre la réflexion, plusieurs activités fort intéressantes nous sont proposées à la fin de ce document ; il faudrait certes les développer, mais elles vont dans le sens d'un enrichissement des exercices très classiques de reconstitution de figures, tangram, puzzles, pavages...