

CHANTIERS

de Pédagogie Mathématique

APMEP

Bulletin de la Régionale d'Ile-de-France
Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

Février 96
n° 90

AH ! QUEL TITRE !

Le poids des mots, le choc des photos dit la publicité d'un hebdomadaire... Le poids des mots, le choc des titres, semble être aussi la devise de certains journalistes... Il est vrai que le titre, c'est le vite lu, vite vu...

La science piégée par les maths..
En voilà un beau titre ! Et sur quatre colonnes dans *Le Monde*¹ s'il vous plaît ! Pas à la Une, d'accord, mais tout de même... Voilà de quoi racoler tous les lacuneux, les rancuniers, les trop-mathisés par leur passé scolaire, sans oublier les parents torturés, accablés, laminés, par rejets interposés.

Parmi les lecteurs ayant saisi ce

¹ Le Monde du 24 Novembre 95

SOMMAIRE

Le qualitatif s'oppose-t-il au quantitatif ?	2
La crise de l'intelligence .	3
Réponse de S. Baruk.....	5
Les angles en sixième ...	6
Au nom de l'égalité	7
A propos des nouveaux programme de l'élémentaire et de sixième.....	11
Journée régionale	12

titre du regard, combien liront l'article d'une demi-page l'accompagnant ? Et parmi eux combien liront le livre ainsi présenté ? Je dis bien *liront* et non *achèteront* ? *La défaite de Platon*, de Claude Allègre, est-il un panorama de l'avancée des sciences au vingtième siècle ou (au sens mathématique !) à travers cela un vieux règlement de compte ? Est-ce une vérité qui traverse le temps ou un constat conjoncturel qui, en tout état de cause, n'efface pas tout ce que les sciences doivent aux mathématiques ? A ces questions, je me garderai bien de répondre, il serait dommage de vous priver d'une lecture au demeurant passionnante...

Mais imagineriez vous l'*Auto-journal* titrant *L'automobile piégée par l'essence* ? Ce serait évidemment moins ambigu : chacun sait bien que si l'essence pose actuellement des problèmes de pollution, il serait tout de même difficile de faire avancer une voiture sans carburant ! C'est le grand nombre et la concentration qui posent problème : l'essence est victime du succès de la voiture ! Mais en ce qui concerne les mathématiques ainsi mises en cause, qui ouvrira un débat auprès des "capteurs de titres", celui-ci étant paru dans une presse grand public, c'est-à-dire non spécialisée ?

Tout cela étant dit, il nous appartient aussi de nous interroger sur le



rôle des mathématiques dans le système scolaire, sur l'évolution des contenus, sur la façon dont elles sont enseignées, sur la formation qu'elles apportent. Mais l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public n'a jamais attendu après les titres racoleurs pour le faire !

Sylviane GASQUET

Prix du numéro : 10 F. Abonnement : 30 F. (1 an, 4 numéros par an)

Directrice de la publication : Sylviane GASQUET

Rédaction : Hervé HAMON et Francis SLAWNY

A.P.M.E.P. 26, rue Duméril, 75013 PARIS - ☎ 45 35 43 05

Imprimé par A.F.G.L. 7, rue Euryal-Dehaynin, 75019 PARIS - ☎ 42 03 83 07

DÉBAT

Le qualitatif s'oppose-t-il au quantitatif ?

Depuis le précédent numéro, nous n'avons reçu qu'une contribution, que nous publions ci-dessous. Nous aimerions en recevoir d'autres ainsi que des réactions à celles qui ont été publiées.

BIRATELLE Hugues
Collège St-Louis
77127 LIEUSAIN

PENSEZ-VOUS FAIRE ENCORE DES DÉMONSTRATIONS ?

Au sein du collège où j'enseigne, nous travaillons en équipe et nous tenons à faire des démonstrations et à **apprendre** à en faire. J'estime qu'il est aussi important pour un élève de savoir son cours que de savoir raisonner.

La présentation hypothético-déductive d'une démonstration n'apprend pas à en faire. Lorsqu'on en lit une, rien n'indique par quels chemins est passé son auteur pour parvenir à l'établir. Eh bien patiemment, sur la durée, j'essaie, parfois avec succès, de le faire comprendre et d'expliquer qu'on ne démarre JAMAIS la recherche d'une démonstration en partant des hypothèses pour arriver à la conclusion. Procéder ainsi pour un professeur relève du mensonge. La recherche commence par une lecture répétée de l'énoncé, par la réalisation éventuelle d'une figure qui lui sert de support puis par une étude minutieuse des hypothèses et de la conclusion. Elle peut se poursuivre, du moins au collège¹, par une technique particulière consistant à *partir de la conclusion...* que je ne développerai pas plus et qui s'inspire d'un fascicule d'André ANTIBI intitulé "*Mathématiques et prestidigitation*" publié par l'IREM de Toulouse. J'applique cette méthode à partir de la 4^e, essentiellement en géométrie.

Un enseignement qui néglige un apprentissage de la démonstration est squelettique. Quand je "*pars de la conclusion*", j'entame avec mes élèves une véritable discussion : Quels outils utiliser ? Quel(s) théorème(s) a (ont) pour conclusion la propriété demandée ? C'est très formateur, la difficulté étant pour eux de

ne pas rédiger la démonstration en supposant d'abord la conclusion : nuance. Bien entendu, je tiens à rester raisonnable dans la distance qu'il peut y avoir entre les hypothèses et la conclusion. Si un élève peut parvenir en fin de 3^e en étant capable de chercher de cette façon, puis de REDIGER correctement une démonstration de cinq lignes, alors j'aurai atteint mon but.

Démontrer va bien au-delà de proposer un texte convenablement argumenté. Démontrer incite à prendre du recul, à observer, à décider ce qui est utile et ce qui ne l'est pas. Je peux paraître trop ambitieux et exigeant. Mais si un professeur ne l'est pas, il ne pourra l'attendre de ses élèves.

LES ÉLÈVES ET LES PROGRAMMES ONT CHANGÉ. ET LES PROFESSEURS ?

Certifié depuis 1992, il m'est difficile de donner une réponse à cette question. Ayant passé mon année de stage en lycée et entamant ma troisième année en collège, je constate néanmoins que peu d'entre nous tente de réfléchir sur ses pratiques, en s'attachant par exemple au bien fondé de son discours (je pense aux angles, aux longueurs, aux vecteurs, à la confusion permanente entre ce que j'appelle la géométrie abstraite et la géométrie des figures²).

Le temps des mathématiques modernes est révolu, on a tout enlevé (ou presque : les probabilités par exemple sont restées). Les programmes ont été refondus et certains professeurs aimeraient bien y retrouver quelques pincées de ces mathématiques-là parce qu'ils ont la nostalgie de cette époque. Ceux-là n'ont pas changé. D'autres ont tourné la page et se contentent de suivre "*ce que recommande l'inspection*" comme ils disent et chan-

gent en même temps que les programmes, parfois un peu aveuglément. Les professeurs n'ont pas réussi à modifier l'image qu'ils donnent d'eux-mêmes auprès des parents. Ceux-ci continuent de penser que si leur enfant ne réussit pas, alors c'est lui qui s'y prend mal et pas le professeur, alors que parfois...

COMMENT FAUT-IL ENSEIGNER LES MATHÉMATIQUES ?

Oui, il faut enseigner les mathématiques, sans hésitation. Mais en arêtant d'être frileux. Les programmes et leurs concepteurs le sont. Ils hésitent à vouloir introduire proprement les notions d'angles (de secteurs et de couples), de vecteurs, d'intégrale pour laquelle, comme le soulignent Jean-Marie ARNAUDIES et Henri FRAYSSE dans une des préfaces de leur Cours de mathématiques, "*en abusant d'énoncés sans preuve et sans hypothèses bien définies faute de notions précises, on en est arrivé à une intégrale-peau de chagrin*".

Si l'on suit le programme à la lettre le cours lui-même ne peut être que rabougri : l'exposé d'un minimum de théorie est impossible. Je n'entends pas revenir aux excès des mathématiques modernes où la théorie avait une trop grande place. Mais arrêtons de croire qu'un lycéen n'est pas capable d'un peu d'abstraction. Un exposé théorique de quelques propriétés de linéarité (applications affines et endomorphismes associés, vecteurs, intégrale) pour préparer à l'enseignement supérieur ne serait pas mal venu.

La frilosité est contagieuse et c'est bien dommage.

¹ Par la suite, d'autres façons de procéder viennent compléter la panoplie.

² Cf. *Espace et géométrie dans la scolarité obligatoire* par Marie-Hélène SALIN et René BERTHELOT, IREM de Bordeaux.

LECTURES

La crise de l'intelligence

de M. CROZIER (Interédition 95)

C'est bien la solution, mais rappelez-moi donc quel est le problème ? (Woody Allen)

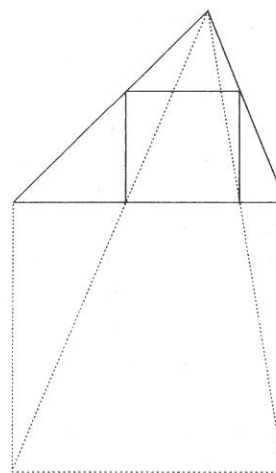
Confiné par les grèves, me voilà devenu par force rat de bibliothèque... Comment choisir parmi mes dernières lectures, celui qui recevra le prix des *Chantiers 90* ?¹ J'en avais la moustache fort perplexe lorsque, en cette soirée du 7 décembre, oyant d'une oreille semi attentive les sieurs Rocard et Madelin vantant leur dernier livre, je les découvre d'accord pour louer le sociologue Michel Crozier, et particulièrement son dernier ouvrage... Bizarre et dangereuse unanimité penserez-vous peut-être ? Il n'empêche, ce livre découvert en grignotant quelques pages au hasard, m'avait passionné le mois précédent, et si j'hésitais un peu à vous en parler, c'est qu'il n'est pas spécialement centré sur les mathématiques...

Pourtant, les profs de math peuvent-ils se désintéresser d'un livre qui nous dit d'emblée : « *Le problème du changement est d'abord celui du raisonnement* ». Puis plus loin : « *Investir dans l'intelligence, c'est viser le développement du futur. Cela constitue un effort considérable qui doit porter non sur le recrutement des meilleurs mais sur le modèle de formation et les institutions qui permettront aux hommes de raisonner autrement, d'aborder différemment les problèmes, de savoir aider les autres* ».

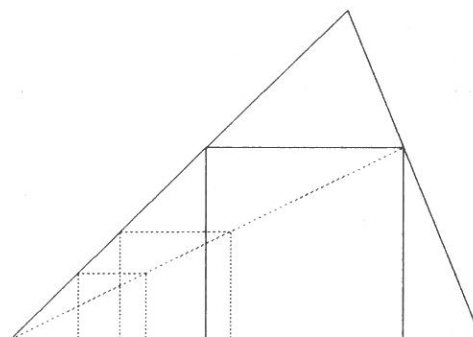
Que reproche donc Michel Crozier au mode de raisonnement actuel de nos élites, et en particulier aux formations dispensées dans nos grandes écoles ? Essentiellement ceci : « *La recherche de la solution domine sur la construction du problème* ». Or, « *le monde change de telle sorte que la part de l'exploration, du diagnostic et du choix de problème devient beaucoup plus importante que celle du choix de leur solution. (...) L'absurdité française, c'est de croire que la formation des ingénieurs comme machine à trouver des solutions est la bonne formule pour recruter des dirigeants qui auront surtout comme tâche de déterminer quels sont véritablement les problèmes* ». A l'ENA comme à Polytechnique « *s'établit ainsi, avant toute expérience sur le terrain, une relation forte entre une orientation encyclopédique, la priorité donnée aux solutions élégantes et un moule de logique conformiste difficile à ébranler* ».

La priorité donnée aux solutions élégantes... Comment ne pas se sentir un peu dans le colimath-heure de

classe ? Je repense à cet exercice si souvent posé dans les livres : comment inscrire un carré dans un triangle donné et dont la solution élégante – que, soit-dit en passant, nous n'avons pas toujours trouvée nous-mêmes, mais plutôt reçue en héritage mathématicoculturel – consiste à dessiner d'abord un carré *en dehors* pour le faire entrer *dedans* par une subtile homothétie...



On dit parfois que les mathématiques sont un art, mais ici quel art-naque vis-à-vis de nos élèves... Car en effet, on peut répondre à ce problème en dessinant *dedans*, des carrés qui satisfont presque toutes les contraintes... Puis en comprenant que le quatrième sommet *flottant* est toujours sur la même droite, et donc que cela permettra de déterminer le carré demandé...



Mais revenons à Michel Crozier : « *L'image des solutions dicte trop souvent le choix du problème. Il est tentant (...) d'adapter le problème à la solution* ».

¹ Vous ignoriez qu'il y eût un prix ? Moi aussi... Mais dans cette société de grande distribution, pourquoi pas nous aussi !

définie au préalable, au risque d'oublier le problème réel »². Me voici de nouveau en train de méditer sur notre pratique... N'abusons-nous pas un peu de ces exercices étudiés pour faire utiliser l'outil que nous venons de décrire en cours ?

Plus loin encore : « Pour moi, être prescriptif conduit quasi obligatoirement à l'échec. Quelque bonne solution que nous soyons éventuellement capables de démontrer, elle ne peut avoir d'effet que si les gens auxquels elle doit s'appliquer l'intériorisent ou s'en invente une autre en refaisant eux-mêmes le chemin qui y conduit. » Là j'ai irrésistiblement songé à nos séances de corrigé de problèmes... Quel effet ont-ils vraiment sur les élèves qui n'ont pas trouvé ? Plus ils sont impeccables, plus ils sont implacables pour l'élève. Devant cet étalage de clarté et de rigueur, de logique et de déduction, comment ne pas se reprocher de ne point l'avoir trouvé ? Comment ne pas se sentir bête ? Comment garder confiance ?

« L'homme-problème, que j'oppose à tous les messieurs-solutions qui répondent plus vite que leur ombre, est celui qui va, non pas apporter la connaissance, mais aidera à la faire émerger », dit encore Michel Crozier. Et nous, dans notre pratique, dans notre évaluation, c'est-à-dire essentiellement dans le choix de nos textes de contrôles, ne favorisons-nous pas les élèves-solutions ? Avec notre souci obsessionnel de pouvoir noter le plus objectivement et le plus également possible, n'avons-nous pas tendance à privilégier la solution téléguidée et unique ? « Ceux qui ont des qualités, essentielles pour l'avenir, de reconnaissance des problèmes, d'imagination et d'intuition se trouvent sinon écartés de tout poste important de responsabilité du moins fortement pénalisés dans leur future carrière », peut-on encore lire. Et dans notre monde scolaire, ne risquent-ils pas d'être écartés des sections scientifiques : pas assez efficaces pour trouver la solution prévue ! Trop lents pour suivre en première scientifique...

Je sens que certains lecteurs vont, de ce pas, partir acheter du grain empoisonné ou des pièges à rat pour m'expédier dans un monde dont on dit qu'il est meilleur...

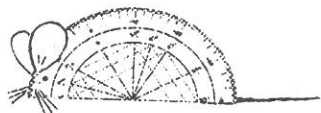
Pourtant il y a dans le livre de Michel Crozier de quoi nous reconforter aussi, nous les exécutants de base, nous qui souhaitons former les esprits malgré le filet des contraintes qui pèsent sur notre système scolaire, malgré le poids des exigences quantitatives laminant trop souvent le souci du qualitatif. « Le système fonctionne sur la primauté de la hiérarchie et de la

règle et sur le contrôle qui les font respecter mais en paralysant l'application », et l'administration omniprésente « gaspille des ressources humaines considérables et elle est de moins en moins bien adaptée à la réalité de notre monde. Ne pouvant tout contrôler, elle s'acharne à développer ses règlements, ajoutant la méfiance au contrôle et forçant tout le monde à l'irrégularité ».

« Dans une société moderne très complexe », on ne peut plus fonctionner sur « le modèle simpliste de la séparation des gens qui pensent et de ceux qui exécutent ». Et encore : « Pour progresser, il ne faut pas que le politique décrète ce qui doit être réalisé. Il faut approfondir la connaissance des systèmes humains réels, et dépasser la logique verticale de la commande soi-disant démocratique, en fait bureaucratique ».

Car tout rat-porteur que je sois, j'ai aimé la primauté de l'homme qui fonde ce livre. « L'aspect humain est trop souvent délaissé ; le connaître supposerait de réaliser des études de fond préalables, ce qui est inconcevable pour des décideurs qui ne s'attaquent aux problèmes que lorsqu'il y a urgence ». Connaître le système scolaire, ce n'est pas manier le sondage express ou le questionnaire par millier... Car « on apprend beaucoup plus par cent entretiens qualitatifs que par mille questionnaires traités par ordinateur. (...) Le sondage d'opinion est nécessairement superficiel puisqu'il considère les interviewés en dehors de leur champ de responsabilité sur des problèmes abusivement simplifiés pour qu'ils puissent être résumés par des réponses claires de type oui/non ». Et Michel Crozier de développer sa conception de l'entretien, de l'écoute : « L'écoute qui permet la communication d'abord, la compréhension et la réflexion ensuite, n'a rien à voir avec un sondage d'opinion ». L'important est que les personnes écoutées se reconnaissent ensuite dans la synthèse proposée par l'équipe sociologique. Pour pouvoir évoluer, il faut d'abord oser reconnaître l'état des lieux, l'état de soi..., se voir soi-même grâce à l'écoute de l'autre.

« La ressource rare sera de plus en plus la ressource humaine et ses qualités de compréhension, d'analyse, de capacité conceptuelle et d'esprit de recherche et d'innovation ». Les mathématiques peuvent participer à cette germination de la ressource humaine, de la maternelle à l'université. Nous sommes nombreux à le croire, nombreux à le vivre dans nos classes. Osons le dire et osons nous dégager des dérives techniciennes et technocratiques...



Le petit rat-porteur

² Clin d'oeil par ces temps de longue grève et de subtilité de mots pour partager dialogue, concertation, négociation... Michel Crozier écrit aussi, page 83 : « Le ministre de l'éducation construit aussi ses consultations à partir de la solution qu'il entend apporter ». Le ministre de l'éducation seulement ?

Réponse de Stella Baruk au petit rat-porteur

Dans le numéro précédent, le petit rat-porteur avait rendu compte d'une conférence de Stella Baruk. Nous avons reçu de sa part la mise au point suivante.

RAT-VAUDAGE...

L'éloge des précisions n'étant pas à faire ici, *En quête du juste*, et non "La quête", jouait sur "enquête" – comment "fonctionne le système" –, sur sa justesse, et sur le saint du jour : saint Juste.

Mon *archéologie de l'erreur* repose sur l'histoire scolaire d'un élève. Etre en 3^e ou au delà dans les années 91 à 94 – dates des copies examinées –, suppose d'avoir eu en CP et CE1 des manuels de "maths modernes", qui furent utilisés bien longtemps après que ces "maths" aient officiellement disparu ; l'"esprit" en est d'ailleurs toujours présent : exemple, *Istra, Elémentaire*, 1993, où des groupements par trois, ou par quatre, préparent la "base dix". De toute façon le "zéro-rien" est un invariant de l'école primaire et son "introduction" encore telle que je l'ai montrée.

C'est à dire (sans traits d'union !) *en mathématiques ou ailleurs* paru en 93 est un recueil

d'articles tous datés, qui met en perspective une *quête du sens*, dont la perte, en effet, ne date pas d'aujourd'hui. Le schéma fléché est bien de son temps, la citation "agaçante" sur "les professeurs" concerne un savoir historique, qui, en 79, n'avait pas vraiment cours.

Il me faut deux jours, au moins, avec les enseignants, pour poser les bases d'un enseignement du nombre – et donc du zéro ! – aux enfants. Pas étonnant que deux heures n'y suffisent pas ! Mais des livres sont en préparation : *Comptes pour petits et grands*, chez Magnard, conçu comme outil de travail pour le primaire ; *Pour une intelligence du nombre*, Seuil.

Stella Baruk

NDLR : 1 - Les traits d'union ajoutés à *C'est à dire* sont une initiative malheureuse survenue lors de la mise en page. Le petit rat-porteur n'y est pour rien.

2 - En ce qui concerne la datation des articles, le petit rat-porteur nous fait savoir qu'il a été piégé par la structure du livre qui fait que pour connaître la date de parution d'un ouvrage cité il faut parfois se reporter à une note de bas de page située plus de dix pages en arrière.

LES ENTRETIENS DE LA VILLETTE

Jeu 28, ven 29 et sam 30 mars 96

Thème de cette année : **LA MESURE**

Il s'agit de réfléchir sur les enjeux, les pratiques et les limites de la mesure suivant les domaines considérés.

On y trouvera des conférences plénières variées, allant de la mesure des objets physiques à la mesure dans le domaine des sciences sociales, en passant par les enjeux industriels de la mesure et les problèmes juridiques qui lui sont liés (par exemple, le rôle de "preuve" de la mesure), pour terminer sur une réflexion plus philosophique.

Rappelons aussi que ces journées comportent des ateliers très nombreux et le choix risque d'être difficile ! Voici quelques titres en préparation :

Quelle mesure pour le système éducatif
Mesure de la performance d'une entreprise
Mesure d'intelligence, mesure de compétence
Mesure de la qualité de l'air
Codage de données numériques et interprétations des mesures
Mesures cachées dans une voiture
Mesures et média

Plus de 50 titres sont proposés au comité d'organisation, où l'APMEP est représentée.

ÉCHANGES

Les angles en sixième

par Hugues BIRATELLE, collège S^t Louis à Lieusaint

Les programmes officiels actuellement en vigueur ainsi que le projet pour un nouveau programme en 6^e pour 1996 sont très ambigus sur la notion d'angle.

On y trouve, en tant que compétence exigible : « *reproduire un angle* ». Qu'est-ce que cela signifie ? Plus loin : « *utiliser, correctement, dans une situation donnée [le mot] angle* », puis « *construire, sans méthode imposée et sur papier blanc [...] la bissectrice d'un angle* ».

L'utilisation correcte de la notion d'angle est possible si on la fonde comme il faut :

- définir ce qu'est un secteur ;
- faire des manipulations visant à établir que deux secteurs sont superposables ou non ;
- définir la locution *avoir même angle*.

Mais ce point de vue ne peut pas être envisagé si l'on a recours à la *bissectrice d'un angle*¹. Cette locution impose de définir un angle comme un ensemble de points, ce qui n'est pas tenable². Un angle n'est en aucun cas une figure. L'expression *bissectrice d'un secteur* est plus appropriée. Bref, les programmes sont contradictoires.

S'agissant maintenant des ouvrages de mathématiques de collège, ils ne clarifient en rien la situation et véhiculent beaucoup de bêtises. Entre ceux-ci qui reprennent en fait l'idée que l'on se faisait des angles avant l'arrivée des mathématiques modernes et ceux relevant de cette époque, il existe un juste milieu que propose le groupe Géométrie de l'IREM de Bordeaux. Ses publications en la matière vont à l'encontre de nombre d'idées reçues. J'aimerais tant que les concepteurs de programmes s'inspirent de ces travaux,

notamment *Les angles de secteurs d'un plan*, récemment paru. On y apprend que l'angle nul et l'angle plat ne sont pas à considérer en tant qu'angles de secteurs... Quelle révolution ! Si on tente de structurer l'ensemble des angles pour pouvoir les additionner via $\mathbb{R}/180\mathbb{Z}$, cela donne :

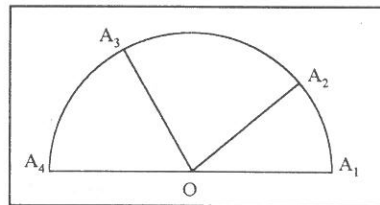
classe de 0 = classe de 180.

L'angle 180° n'existe donc pas. L'introduction de l'angle nul aboutit, du point de vue géométrique, à des incohérences. Enfin, signalons que tous les résultats classiques sont démontrés à l'aide des secteurs et de leurs mesures strictement comprises entre 0 et 180, les seuls dont on ait besoin. Enfin on pourra dire ce que l'on veut, mais la mise en place des secteurs dits *rentrants*, (qui correspondent aux *angles rentrants*) est parfaitement inutile.

Il est un domaine où l'angle 180° et les secteurs rentrants pourraient s'imposer : il s'agit des diagrammes semi-circulaires et circulaires. A la réflexion, il n'en est rien.

DIAGRAMMES SEMI-CIRCULAIRES

On doit dessiner des secteurs de disque représentant des pourcentages.



On a l'habitude de dire que 100 % est représenté par 180°. Celui-ci n'existant pas, voici comment on peut s'y prendre. Si on veut dessiner n secteurs ($n = 3$ sur la figure), alors

$$\sum_{i=1}^{n-1} \text{mes}(\widehat{A_i O A_{i+1}}) = 180.$$

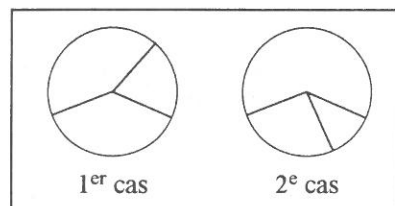
Donc 100 % correspond à 180 et 1 % à 1,8. On obtient ainsi les mesures des secteurs à dessiner.

DIAGRAMMES CIRCULAIRES

On doit dessiner des parties de disque dont certaines peuvent ne pas être des secteurs (les fameux *rentrants*). On ne peut pas dire que 100 % est représenté par 360° car :

classe de 0 = classe de 180
= classe de 360

(en considérant toujours $\mathbb{R}/180\mathbb{Z}$). 360° n'existant pas, on considère que 1 % correspond à 3,6. On classe ensuite les pourcentages à représenter par ordre croissant. A ce moment-là, de deux choses l'une : ou bien ils sont tous inférieurs à 50 %, ou bien il y en a un et un seul supérieur ou égal à 50 % (on élimine le cas pathologique où l'on aurait deux secteurs représentant chacun 50 %). Dans le premier cas, toutes les parties du disque sont des secteurs. Dans le second cas, on commence par dessiner tous les secteurs représentant les pourcentages strictement inférieurs à 50 %. La partie du disque restante représente le pourcentage supérieur ou égal à 50 %.



Ces considérations vont sûrement faire des vagues et c'est tant mieux.

Dernière remarque (relevée dans deux exercices [29 et 31] de l'évaluation de 6^e de 1995) : on y apprend qu'un angle droit a des côtés dont les longueurs varient d'un exercice à l'autre !

¹ Par contre, on ne parle jamais de la *médiane d'une longueur*.

² Voir *MOTS V* et *MOTS VII*, brochures APMEP n° 37 (1980) et n° 57 (1984).

ÉCHANGES

Au nom de l'égalité

par Michel ROUX

Trois observations pour commencer.

1 - de nombreux exercices de probabilités sont fondés sur l'égalité

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$$

où A et B sont des événements ; par suite :

$$p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B}) ;$$

Ces trois démonstrations ont une particularité commune ; celle de déduire d'une égalité, une seconde égalité, la nature des objets de la conclusion n'étant pas nécessairement celle des objets de la prémisse.

Cette déduction n'est pas argumentée de façon explicite et est affirmée sans justification.



2 - pour prouver le théorème de la médiane dans un triangle ABC où I est le milieu de [BC], on utilise le fait que

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} \text{ implique } \overrightarrow{AB}^2 = (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB})^2.$$

De même, $\overrightarrow{AC} = \dots$, $\overrightarrow{AC}^2 = \dots$

3 - dans la démonstration de la formule de l'intégration par parties, l'égalité

$$u'v = (uv)' - uv'$$

permet d'obtenir

$$\int_a^b u'v = \int_a^b [(uv)' - uv'] ,$$

d'où le résultat connu.

Ainsi dans les exemples ci-dessus, il est sous-entendu que :

1 - une probabilité p étant définie sur un ensemble d'événements, si X et Y sont des événements égaux, alors $p(X) = p(Y)$;

2 - quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, si $\vec{u} = \vec{v}$, alors $\vec{u}^2 = \vec{v}^2$;

3) Si f et g sont deux fonctions continues et égales sur un intervalle fermé de bornes a et b , alors leurs intégrales entre a et b sont égales.

Est-ce à dire que dans les différentes notions abordées le résultat est connu ? Peut-être ; en

tout cas, il n'est pas formulé et ne donne pas lieu à un *énoncé zéro*, préliminaire à toutes les autres propriétés.

Pour quelles raisons cet *énoncé zéro* n'est-il pas cité ? Parce qu'il semble naturel ?

Pourtant il est clairement donné lorsqu'il s'agit d'égalités entre nombres. Ainsi on peut lire : « quels que soient les nombres réels a, b, c si $a = b$, alors $ac = bc$ ».

Néanmoins, on ne voit pas : « quels que soient les nombres positifs a et b , si $a = b$, alors $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ ».

Ecrit ici lors d'une opération binaire sur les nombres (la multiplication), il est en revanche négligé pour les fonctions que sont la fonction probabilité, la fonction carré scalaire, la fonction intégration de a à b , la fonction racine carrée.

Dans tous les cas, on applique à deux objets égaux une fonction Φ .

Par conséquent l'*énoncé zéro* s'écrit de façon générale : soit Φ une fonction définie sur un ensemble E à valeurs dans un ensemble F . On a :

$$\forall x \in E, \forall y \in E, [x = y \Rightarrow \Phi(x) = \Phi(y)].$$

Propriété fondamentale de toute application. Axiome dans ce que BOURBAKI appelle une théorie égalitaire [*Théorie des ensembles*, chapitre 1, § 5] : « On appelle théorie égalitaire une théorie $\mathcal{T}$ dans laquelle figure un signe relationnel

de poids 2 noté $=$ et dans laquelle les schémas S1 à S7 fournissent des axiomes ; si T et U sont des termes de $\mathcal{T}$ l'assemblage $= TU$ est une relation de $\mathcal{T}$ dite d'égalité. On la désigne par $T = U$ »

Ici c'est l'axiome S6 que nous utilisons : « soient x une lettre, T et U des termes $\mathcal{T}$ et $R(x)$ une relation de $\mathcal{T}$; la relation

$$(T = U) \Rightarrow (R(T) \Leftrightarrow R(U))$$

est un axiome ».

Par conséquent, si deux objets sont égaux, ils ont les mêmes propriétés. En l'occurrence, leur image par une application Φ est la même.

Cet *énoncé zéro* est omniprésent dans mes activités mathématiques.

Donnons pour finir quelques autres exemples en vrac :

- sous certaines conditions, si deux fonctions f et g sont égales, alors $f' = g'$, $\lim f = \lim g$, $f - 1 = g - 1$;

- si deux sous-ensembles A et B d'un ensemble sont égaux, alors $A \cap C = B \cap C$;

- si deux propositions p et q sont équivalentes (on dit équivalentes et non pas égales), alors les propositions non p et non q le sont aussi.

Je laisse le soin au lecteur d'identifier la fonction Φ ailleurs, et de remarquer qu'elle est souvent injective, au nom de l'égalité...

LONGUEUR - AIRE - VOLUME

Le "groupe de réflexion et de proposition pour les programmes de collège" de l'APMEP a travaillé un an sur les difficultés rencontrées par les élèves avec les notions de grandeur. Ils ont traduit ce travail par un texte intitulé "Longueur - Aire - Volume". Ce texte a été plébiscité par le comité National de Juin dernier et va paraître dans un prochain bulletin vert. Il fait suite à d'autres publications de ce groupe de travail et qui ont été, elles aussi, publiées dans des bulletins verts : *Connaissances des Nombres*, *Calcul Numérique* (1992), *Constructions géométriques* (1993), *Calcul littéral* (1994).

Cette publication "Longueur - Aire - Volume", part du constat que les notions, d'une part de longueur et d'autre part d'aire et de volume sont loin d'être acquises en sixième. L'utilisation de formules prend trop souvent le pas sur l'acquisition des concepts et réduit le travail de l'élève à une tâche exclusive de calcul.

A la lecture des textes officiels, force a été de constater que la confusion au niveau des pratiques règne aussi dans le libellé des programmes.

Les tests d'évaluation sont souvent aussi, significatifs des objectifs d'enseignement, notamment à propos de ces notions. Et les évaluations nationales n'échappent pas à la règle. Mais depuis 1990 des questions de la DEP vont dans le sens des préoccupations de l'APMEP, en proposant des items sur le sens de l'aire autrement qu'à partir de l'utilisation d'un formulaire (par exemple ev 90 et 92 ex 36 et ev 92 ex 29). Les évaluations de l'APMEP depuis plusieurs années et à tous les niveaux de la scolarité ont essayé d'obtenir des informations sur les connaissances des élèves dans ce domaine. Ce texte propose des extraits de l'analyse de certains résultats, par exemple Evapm 5/88 p 11-14, Evapm 5/88 q 28-30, Evapm 3/92 i 29-33, Evapm seconde professionnelle 93 ex ii.b.

Afin de poursuivre la réflexion, plusieurs activités fort intéressantes nous sont proposées à la fin de ce document ; il faudrait certes les développer, mais elles vont dans le sens d'un enrichissement des exercices très classiques de reconstitution de figures, tangram, puzzles, pavages...

DANS NOS CLASSES

A propos des nouveaux programmes de l'élémentaire et de sixième

par Catherine BRUNET

Une présentation des lignes de force des nouveaux programmes de mathématiques de l'école et des programmes de sixième a été faite, le mercredi 8 novembre dernier, par Roland Charnay lors d'une journée des inspecteurs, à l'IUFM de Bonneuil. Roland Charnay est membre du groupe de travail des écoles et membre du groupe technique disciplinaire de mathématiques.

Avant de commenter les nouveaux programmes R. Charnay a donné quelques repères concernant les enseignants et les élèves de l'école élémentaire et du secondaire.

DES REPÈRES POUR LES ENSEIGNANTS

L'IMAGE DES MATHÉMATIQUES

Une enquête a révélé que chez les enseignants de CM2 et de sixième l'image des mathématiques est très semblable : les mathématiques sont d'abord synonymes de rigueur et sont avant tout un langage universel.

LES BUTS DE L'ENSEIGNEMENT

Les buts de l'enseignement des mathématiques apparaissent aussi très voisins chez les enseignants des deux cycles : d'abord la maîtrise du sens des opérations, ensuite savoir justifier un résultat, une démarche, avec toutefois pour les professeurs de sixième une certaine inflexion vers le développement de la rigueur et l'acquisition de méthodes de travail.

DES REPÈRES POUR LES ÉLÈVES

LE TRAVAIL ÉCRIT

Chez les élèves de sixième, le travail écrit est plus important et il possède un caractère *définitif* plus marqué qu'en CM2. Une enquête de l'INRP avait montré que la durée de l'écrit en classe augmente de façon significative, passant de 17 minutes

par séquence en CM2 à 23 minutes en sixième. L'*écrit-recherche* domine dans les deux classes, mais il y a davantage d'*écrit-copie* en sixième (environ 1/3).

Dans le cadre d'une liaison entre professeurs de CM2 et professeurs de sixième il serait intéressant d'entreprendre la comparaison d'écrits : les écrits soumis aux élèves, les écrits demandés aux élèves (ce qui se produit avec le professeur, ce qui est s'écrit dans les manuels, ce qu'écrivent les élèves eux-mêmes, par exemple les réponses à des exercices...). En s'attachant notamment à leur évolution, d'une classe à l'autre, d'un type d'enseignant à l'autre...

LA DIFFICULTÉ DE LECTURE DES ÉLÈVES

Dans le même cadre de réflexion, R. Charnay aborde le problème de la difficulté de lecture des élèves à ce niveau de leur scolarité. Pour lire un texte de mathématiques, il faut certes savoir lire un texte, mais il faut aussi avoir de bonnes connaissances en mathématique. Savoir lire n'est donc pas le seul préalable, la maîtrise de connaissances mathématiques est aussi un préalable à la bonne lecture d'un texte mathématique. Un travail sur l'articulation de ces deux compétences pourrait être entrepris.

UN MANQUE D'AUTONOMIE DES ÉLÈVES

Les enseignants de sixième attendent très souvent une certaine autonomie de la part des élèves entrant au collège, autonomie qu'ils semblent avoir acquise à l'école élémentaire. Or ils la trouvent insuffisante.

R. Charnay analyse ce manque d'autonomie comme en réalité une perte d'autonomie à ce moment charnière de la scolarité de l'enfant. A l'entrée en sixième, il s'établit un nouveau contrat entre l'élève et les professeurs, il y a de nouvelles habitudes à prendre et les nouveaux enseignants ont des attentes parfois très di-

verses. C'est donc une période où il y a perte d'autonomie car l'enfant se pose une foule de questions sur ses nouveaux droits, ses nouveaux devoirs, etc. Et il cherche ses repères.

Aussi il est important de comprendre que l'autonomie d'un enfant n'est pas acquise une fois pour toutes. Il faut la travailler à chaque niveau et ne pas la voir comme indépendante des attentes des enseignants du cycle suivant.

LES PROGRAMMES

Les programmes du primaire et du secondaire ne subissent pas de profonds changements. Les quelques changements qui existent, aident, en fait, la mise en place d'une transition école/collège et permettent de l'aborder de façon nouvelle.

Les objectifs généraux de ces programmes évoquent d'ailleurs des capacités voisines et les intentions affichées sont les mêmes.

Ces programmes insistent, en CM2, sur les méthodes de travail et, en sixième, sur le langage, le vocabulaire, les notations, la compréhension des textes.

LA RÉOLUTION DE PROBLÈMES

La fonction des problèmes dans l'apprentissage est quasi identique dans les deux programmes ; c'est une construction de l'apprentissage (en cycle 3 et en sixième) avec le rôle central des situations-problèmes. Ainsi la résolution de problèmes reste au centre des programmes des deux cycles.

Pourtant l'apprentissage par résolution de problèmes est en contradiction avec la notion de compétences exigibles telles qu'elles apparaissent dans le programme de sixième, remarque R. Charnay. Il y a en effet un véritable enjeu pour la formation lors de la résolution d'un problème incluant une démarche complexe.

Il faut, en effet, distinguer une démarche de construction – démarche lente et complexe –, d'une démarche d'évaluation de compétences, laquelle comporte une évaluation d'éléments pris isolément. Il faut donc rester très vigilant quant à une dérive sur les compétences évaluées isolément.

A propos de la résolution des problèmes, le texte du cycle 3 distingue :

- d'une part les problèmes de recherche, les situations-problèmes mettant l'accent plus sur l'acte de recherche que sur les connaissances à utiliser, valorisant ainsi l'acte méthodologique,

- d'autre part les compétences explicites propres à la résolution des problèmes.

Ces compétences n'apparaissent plus de la même manière dans les deux programmes : en sixième toutes les capacités exigibles sont exprimées en terme de contenus, alors qu'en CM2 elles sont exprimées en terme de méthodes.

CONTENU DES PROGRAMMES

LE CALCUL

On cherche aujourd'hui à moins développer la technique, la virtuosité dans les opérations. Néanmoins, la bonne maîtrise du calcul sur les nombres courants paraît indispensable, en sachant que le niveau de technicité doit rester très raisonnable. L'élève doit connaître de « façon intime » les nombres inférieurs à 100 et les relations entre eux, ce qui permet une mobilisation rapide dans des situations diverses et variées, dans des problèmes de proportionnalité, lors d'un calcul mental, etc.

Il n'est pas scandaleux d'avoir une pratique régulière du calcul mental. Ce calcul mental doit être conçu comme un calcul réfléchi, comme un lieu de créativité, un lieu de raisonnement, comme un moment où l'on travaille les propriétés implicites des opérations.

Rappelons aussi, que le sens des opérations n'est pas toujours bien acquis en début d'année de sixième. Par exemple, pour encore beaucoup d'élèves, la multiplication n'est perçue que comme une suite d'additions

réitérées et donc cette opération n'est pas mobilisable pour le calcul d'une aire, encore moins pour un dénombrement...

LA DIVISION EUCLIDIENNE

Sa maîtrise en fin de CM2 et en sixième est loin d'être assurée et son apprentissage se poursuit donc au collège. Les ardeurs des enseignants du cycle 3 dans ce domaine doivent être limitées...

Par contre il est essentiel d'encourager les maîtres à travailler sur le sens de la division. Il n'est pas par exemple interdit de faire résoudre des problèmes de division par des procédures individuelles ne faisant pas appel à la procédure experte (la division) afin d'en faire travailler le sens.

Une approche possible de la division peut s'inscrire dans l'étude des différentes procédures utilisées par les élèves en analysant la différence entre, d'une part les procédures personnelles (comment je me débrouille sans la procédure experte), donc des procédures mal reconnues, et d'autre part la procédure standard en sachant que derrière chaque procédure standard il doit y avoir des procédures personnelles. Il faut ainsi encourager l'élève à se construire ses propres bécquilles... La manière prioritaire de mettre en oeuvre la différenciation est de faire résoudre le même problème par tous les enfants.

Et dans le cas de la division, il y a du temps pour faire cela sans précipitation.

Il faut rester conscient du fait qu'encore beaucoup d'élèves ne sont pas autonomes face à un problème; ils cherchent souvent plus à trouver la méthode attendue par le professeur, à reconnaître l'environnement du problème qu'à comprendre le sens du problème posé. Ils ne sont pas alors centrés sur le problème mais sur son contexte, son environnement.

LES NOMBRES DÉCIMAUX

Le produit de deux nombres décimaux disparaît en CM2. Aussi les enseignants du collège vont avoir à gérer d'une part la technique (ce qui est relativement facile) et d'autre part le sens (ce qui l'est moins). Il va falloir installer, par l'étude de situations et de problèmes, une rupture de sens, ne

plus reconnaître la multiplication comme une réitération d'additions.

A l'école élémentaire, les enseignants perdent ainsi l'accès à la commutativité de la multiplication ; peut-on encore ainsi calculer l'aire d'un rectangle dans tous les cas ?

Mais là, la calculatrice est fort utile, elle permet de poser des opérations qu'on ne sait pas encore faire à la main car on n'a pas encore appris. Ainsi la calculatrice est un outil de plus pour travailler le sens des opérations.

LA PROPORTIONNALITÉ

Le programme du cycle 3 indique que les élèves doivent savoir reconnaître la proportionnalité dans des situations simples (échelle, pourcentage). Or pour reconnaître la proportionnalité, on a besoin de traiter des données et les indices sont alors, en fait, des connaissances à mobiliser. Il faut donc développer des procédures personnelles pour résoudre des problèmes et donc en fait on donne du sens, on fait fonctionner un outil sans étudier l'objet en lui même.

Aussi, les procédures personnelles développées chez les élèves sont liées aux propriétés de linéarité ou aux relations simples sur les nombres et s'appuient sur le raisonnement contextualisé. On arrive ensuite à une procédure experte (le passage à l'unité, la règle de trois...) procédure qui est mise en place au collège.

LA GÉOMETRIE

L'usage des lettres n'est pas au programme de l'élémentaire (même si c'est parfois vu) et donc cet usage n'est pas du tout familier à l'élève entrant en sixième. Aussi l'enseignant doit porter une grande attention à la désignation des objets géométriques car les élèves ne savent pas désigner les objets géométriques qu'ils côtoient.

En primaire, la géométrie est une géométrie expérimentale: les activités s'organisent autour de l'action sur les objets géométriques.

Au collège, l'étude est plus raisonnée et elle porte sur un ensemble de figures, répartie sur quatre ans et elle s'articule autour des transformations planes.

(Suite page 11)

Palais de la découverte

Avenue Franklin D. Roosevelt, 75008 PARIS

Mercredi 14 Février 1996, à 15 h

en salle de Cinéma (rez-de-chaussée)

Projection de

LA NOUVELLE ÉTOILE DU BERGER

Un film de

Jean-Pierre Bourguignon, François Tisseyre, Claire Weingarten

Un satellite artificiel traverse le ciel étoilé.

A sa fenêtre, un écrivain médite et s'interroge sur la présence de ce nouveau corps céleste dans le ballet universel. Il s'en confie à son ami mathématicien, qui va rassembler pour lui de nouveaux éléments de connaissance et de réflexion.

Visites chez l'Astronome, le Mathématicien, l'Ingénieur. Voyage à travers l'histoire des sciences où, du géocentrisme à l'héliocentrisme, le système des planètes a inspiré tant de représentations idéalisées, où les mathématiques ont joué un rôle essentiel. Avec Ptolémée, Copernic, Tycho Brahé, Kepler, Newton, autant de découvertes, de révolutions, de nouveaux mouvements de la pensée.

Le film insiste sur les apports de Lagrange, à l'origine d'importants développements mathématiques, et propose au spectateur de vivre le passage de notre espace à trois dimensions à "l'espace de mouvements elliptiques". Il souligne également le rôle de Poincaré, dont les travaux sont encore aujourd'hui d'une grande actualité.

Il s'agit surtout de donner une vue en perspective et de faire percevoir le mouvement des idées, dans lequel les mathématiques montrent qu'elles oscillent, par nature, entre l'utile et l'inutile, quitte à révéler quelque jour peut-être, l'adéquation d'un modèle ou la découverte d'un champ d'application.

Auteur scientifique : Jean-Pierre Bourguignon / École Polytechnique, IHES

Participation de : Bruno Morando / Bureau des Longitudes

Jean-Pierre Bourguignon / École Polytechnique, IHES

Jean Brette / Palais de la découverte

Huguette Conessa, François Laporte / CNES

Scénario, réalisation : François Tisseyre, Claire Weingarten / Atelier EcoutezVoir

Texte : Romain Weingarten

Production : Ecole Polytechnique - CNRS Audiovisuel - Imagiciel - 1995

Versions : Français / Anglais - 28 min - SECAM / PAL

Diffusion : CNRS Audiovisuel, 1, Place Aristide Briand, 92195 MEUDON Cedex

Tél : (1) 45 07 56 86 Fax : (1) 45 07 58 60

*La projection sera suivie d'un débat en présence de
Jean-Pierre Bourguignon, Jean Brette et François Tisseyre*

Entrée libre pour les membres de l'APMEP

(s'adresser à l'accueil)

(Suite de la page 10)

En primaire, on cherche à doter les élèves de compétences techniques avec les instruments (sauf rapporteur).

Et la quantité de vocabulaire est minimum, l'idée de définition n'est pas du ressort du primaire. On caractérise alors les objets de la géométrie sans les définir.

Aussi le programme du collège a pour objectif un travail de structuration, d'étude systématique et de démonstration.

LA MESURE

Toutes les compétences concernant les volumes (sauf capacité) et l'aire du disque disparaissent du programme de l'élémentaire. Et les commentaires du programme de sixième laissent à

penser que le sens de l'aire, la différence entre aire et périmètre est à reprendre. « On pourra s'appuyer sur des travaux donnant du sens à la notion d'aire pour constituer et utiliser un formulaire... »

Le travail sur les formules et leur apprentissage reste très limité à l'école élémentaire et les maîtres ne doivent pas hésiter à rompre avec l'exhaustivité...

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

Journée de la Régionale d'Ile-de-France

(ouverte à tous les enseignants de mathématiques de la région)

RENCONTRES ET ÉCHANGES MATHÉMATIQUES

Samedi 23 Mars 1996

**Lycée Rodin
19, rue Corvisart
PARIS 13^e**

9 h - 11 h : Ateliers

- traitement des difficultés rencontrées en classe : études de cas, échanges (les jeunes collègues y trouveront matière à réflexion)
- les angles (au collège et au lycée)
- liaison terminale-supérieur (les élèves ayant passé le bac S en 95 sont-ils préparés – en particulier en mathématiques – à poursuivre des études scientifiques ?)
- problèmes posés par l'apparition de la TI 92

11 h - 12 h : Assemblée générale de la régionale

- rapport d'activité
- rapport financier
- élection du comité
- projets pour la vie de la régionale
- questions diverses

12 h - 13 h 30 : Déjeuner (participation aux frais 50 F)

13 h 30 - 15 h 30 : Conférence d'André BELLAÏCHE

Exemple d'approche des mathématiques contemporaines

A travers un ou deux thèmes de son choix, en marge du corpus traditionnel, André BELLAÏCHE nous montrera les enjeux de la modélisation mathématique, notamment dans la vie sociale.

Sur le plan pédagogique, nous verrons comment on peut approcher les mathématiques dans un sens assez inhabituel dans l'enseignement français, c'est-à-dire en partant de leurs applications.

André BELLAÏCHE assure un UV "Introduction aux mathématiques contemporaines" destinée aux étudiants de lettres et sciences humaines à l'université Paris VII.

Page à photocopier et à afficher