Avis de recherche

Alain Bougeard

Rappel de l'Avis de Recherche

On considère un polygone régulier à n *côtés. Comment construire* n−1 *demi-droites qui partent d'un même sommet et partagent le polygone en* n *parties d'aires égales ?*

Dans le numéro précèdent je faisais miroiter la possibilité d'une industrialisation du découpage des polygones réguliers en parties de même aire par l'utilisation d'outils de GeoGebra. Les outils sont là mais le découpage reste semi-industriel seulement…

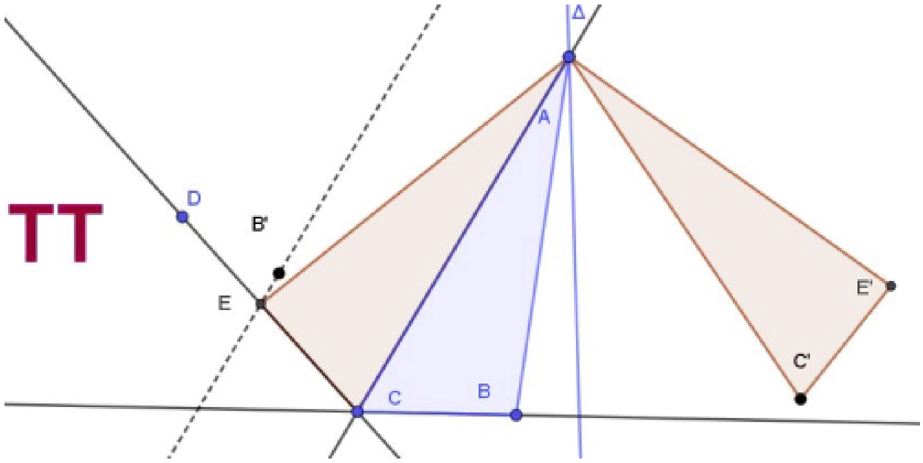
Outils de découpage

La longue expérimentation précédente sur les cas particuliers a permis de mettre au point des process (Ouais ! n'oublions pas que maintenant nous sommes dans le monde industriel qui préfère le franglais au latin) permettant d'automatiser la construction des parties cherchées qui sont toutes des triangles (T) ou des quadrilatères (Q) sauf la dernière qui peut avoir plus de côtés.

Donc ayant construit les triangles de départ (qui différent selon la parité du polygone), il s'agit de construire les suivants. On doit donc pour cela posséder 4 outils permettant de passer d'un triangle à un triangle (**TT**) ou à un quadrilatère (**TQ**) et d'un quadrilatère à un triangle (**QT**) ou à un quadrilatère (**QQ**).

Pour ceux qui ne sont pas familiers de la fabrication des outils dans GeoGebra et que ça intéresse je vais proposer un exemple sur l'un d'entre eux et donner quelques indications pour les autres.

Fabrication de l'outil TT



1re étape : Faire la construction dans GeoGebra

La construction n'a pas besoin de se faire sur le polygone régulier. Au contraire une construction "hors contexte" permet de mieux comprendre ce que sont les objets d'un outil.

Nous partons d'un triangle ABC et nous voulons construire un triangle ACE de même aire, avec E sur [CD] le côté suivant du polygone.

La construction est simple : construire B′ symétrique de B par rapport à [AC] et E intersection de (CD) avec la parallèle à (AC) passant par B′. Évidemment E ne convient que si CE ⩽ CD.

Pour fignoler j'ai ajouté un axe Δ qui sera l'axe de symétrie du polygone et le triangle AC′E′ symétrique de ACE par rapport à Δ. J'ai aussi ajouté un texte **TT** qui servira d'icône à l'outil.

N'oubliez pas d'enregistrer soigneusement la construction et une image de l'icône.

2e étape : Enregistrer l'outil

Cliquer sur "outils" puis sur "créer un nouvel outil" : GeoGebra vous demande, dans un premier et deuxième onglets, de définir les objets finaux puis les objets initiaux.

- Initial : c'est ce qu'il faut pour construire le figure : ici 4 points (A, B, C et D) et une droite (Δ)
- Final : c'est ce que nous voulons faire apparaître : ici le triangle ACE (auquel il faut ajouter le point E) et le triangle AC′E′ (auquel il faut ajouter les points C′ et E′ mais ce n'est pas obligatoire).

Enfin le 3e onglet : Nom et Icône

- Nom de l'outil : j'ai choisi TT
- Nom de la commande : le même
- Aide pour l'outil : Indiquer qu'il faut cliquer sur 4 points (DANS L'ORDRE) et une droite.
  Cochez la case "Visible dans la barre d'outils"
- Icône : vous pouvez aller chercher l'image de l'icône que vous avez enregistrée

Vous devez alors cliquer sur fin pour créer votre outil mais attention il ne sera pas encore enregistré : pour cela il vous faudra ouvrir "Outils" et cliquer sur "Gérer les outils..." puis choisir "enregistrer" ce qui vous permettra de retrouver votre outil (sous la forme d'un .ggt) si vous l'avez perdu mais surtout de l'exporter où vous voulez.

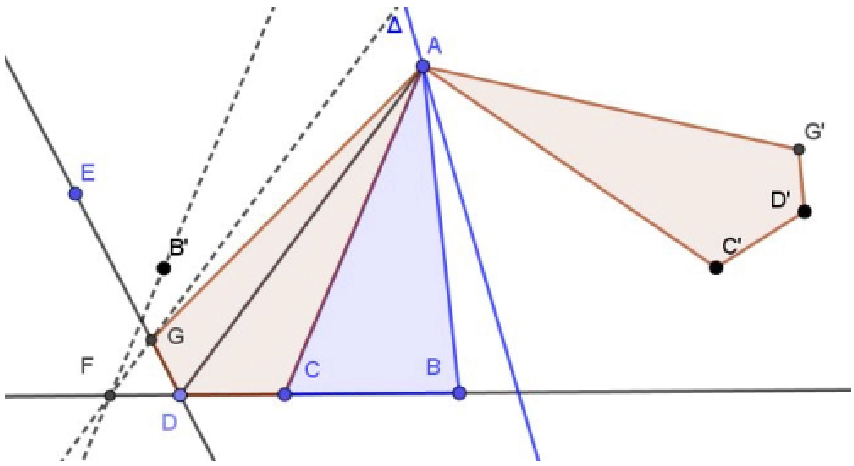
3e étape : Insérer l'icône dans la barre d'outils

C'est en principe très simple à condition que GeoGebra ne se montre pas trop capricieux...

En principe dans le Dossier "Outils" il suffit de cliquer sur "Barre d'outils personnalisée..." et d'utiliser les 4 boutons : Insérer, Retirer, Monter, Descendre pour mettre vos icônes à la place voulu dans la barre. On finit par y arriver ! Et n'oubliez pas de cliquer sur "appliquer" en bas à droite avant de fermer sous peine de devoir tout recommencer.

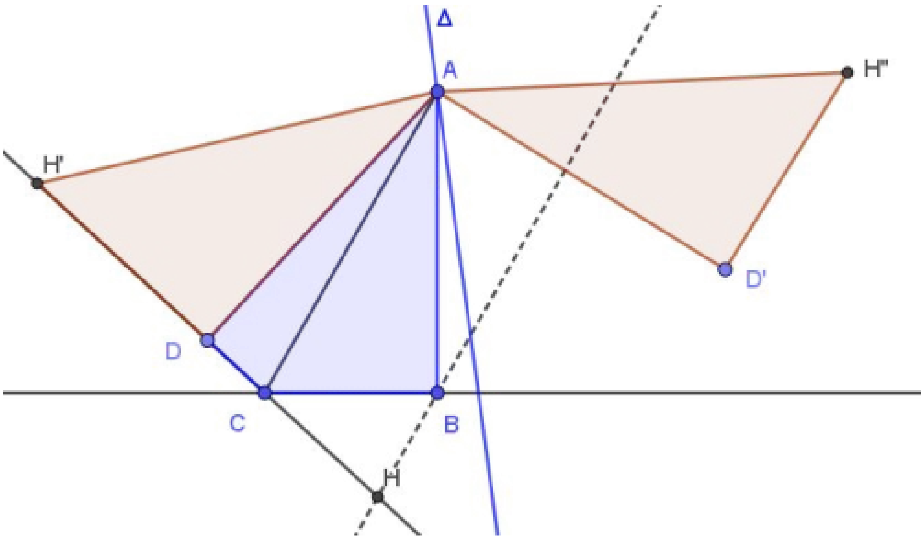
En cas de problème vous pouvez toujours "Restaurer la barre d'outils par défaut"et recommencer.

Fabrication de l'outil TQ



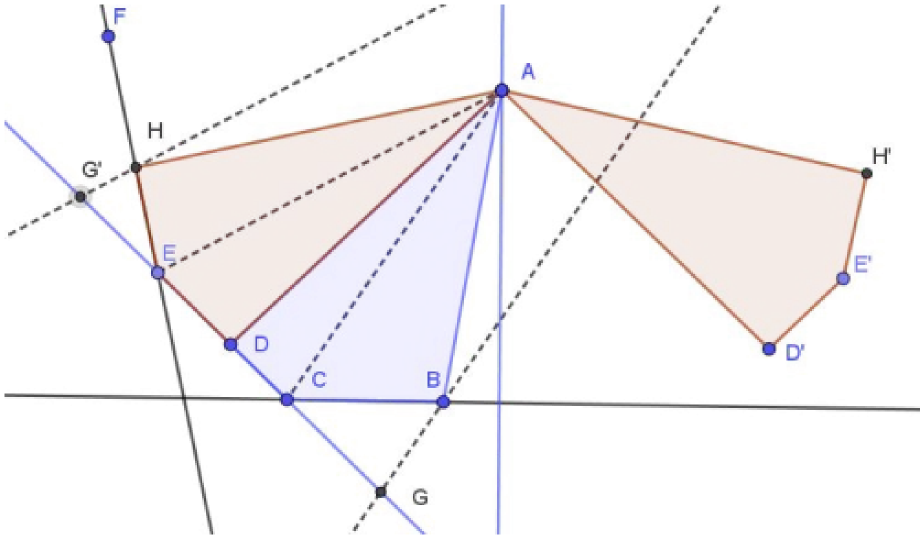
Les objets initiaux sont 5 points,ABC pour le triangle D et E pour les sommets suivants du polygone, et la droite Δ.
Les objets finaux sont les deux quadrilatères ACDG et A′C′D′G′ son symétrique.
Pour construire le point G il faut d'abord construire le symétrique B′ de B par rapport à [AC], puis mener la parallèle à [AC] passant par B′ qui coupe (CB) en F (Les triangles ACB′ et ACF ont donc même aire) et enfin mener par F la parallèle à [AD] passant par F qui coupe (ED) en G (les triangles ADF et ADG ont dont même aire) ce qui prouve que ABC et ACDG ont même aire.
Enfin on construit AC′D′G′.
Et on passe à l'enregistrement de l'outil **TQ**.

Fabrication de l'outil ***QT***



La construction de **QT** est la plus simple :
•Objets initiaux : 4 points A, B, C et D du quadrilatère et la droite
•Objets finaux : les deux triangles ADH′ et AD′H″
On construit d'abord H intersection de (DC) avec la parallèle à (AC) passant par B (le triangle AHD à même aire que le quadrilatère ABCD) puis l'on prend le symétrique H' de H par rapport à D, pour obtenir un point sur le côté suivant. S'il n'y est pas on utilisera l'outil suivant **QQ**.
Et bien sûr on passe à l'enregistrement de tout cela.

Fabrication de l'outil ***QQ***



La construction de l'outil **QQ** commence exactement comme celle de QT(projection de B sur (DC) parallèlement à [AD] en G puis G′ son symétrique par rapport à D) mais cette fois-ci G′ n'appartient plus au côté [DE] et il faut le projeter sur le côté suivant parallèlement à (AE) en H pour obtenir un quadrilatère ADEH de même aire que celui de départ.
Donc nous avons comme objet initiaux 6 points (4 sommets du quadrilatère ABCD) et 2 points E et F des sommets suivants du polygone et une droite Δ et comme objets finaux les 2 parallélogrammes ADEH et AD′E′H′.

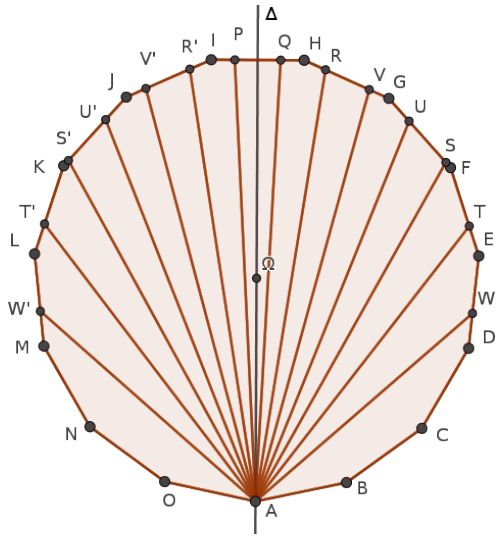
Mise en œuvre des outils

Maintenant il faut utiliser ces outils pour partitionner les polygones réguliers en distinguant le cas pair du cas impair puisque le démarrage est différent.

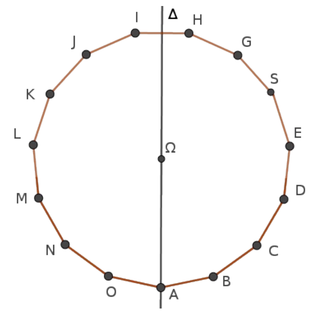
Cas du polygone impair

L'animation ci-dessous de GeoGebra illustre le "process".

Pour voir cette animation GeoGebra, cliquez sur l'image suivante :



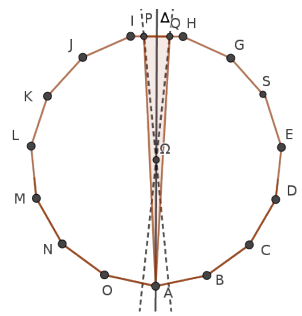
On considère un polygone à 2n+1 côtés de centre Ω, A le sommet choisi et Δ l'axe de symétrie. Dans ce qui suit, on prend n = 7.



étape 1

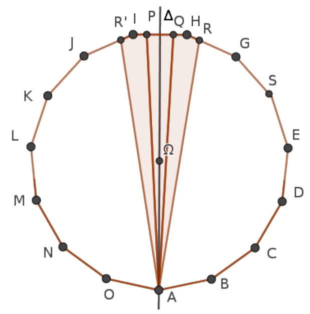
La construction du premier triangle APQ a été expliquée dans le numéro précédent (On trace les parallèles passant par Ω aux côtés [LM] et [ED] qui donnent les points P et Q).

À partir de là nous allons construire les triangles ou quadrilatères suivants (et leurs symétriques) en utilisant l'outil adapté à choisir parmi **TT**, **TQ**, **QT** ou **QQ**.



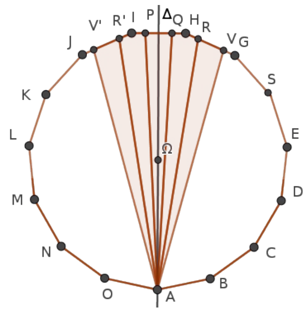
étape 2

Nous partons du triangle APQ et nous choisissons l'outil **TQ** (car QH < PQ) et nous obtenons le quadrilatère AQHR.



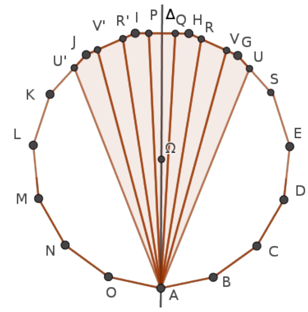
étape 3

À partir du quadrilatère AQHR nous pouvons employer l'outil **QT** qui nous donne le triangle ARV car V appartient à [RG].



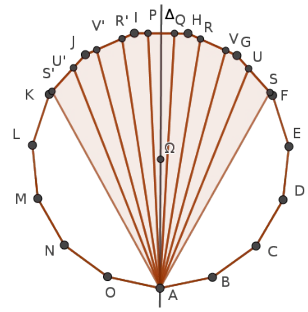
étape 4

À partir du triangle ARV nous devons employer l'outil **TQ** (car VG < RV) et nous obtenons le quadrilatère AVGU.



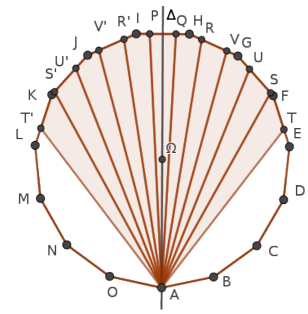
étape 5

À partir du quadrilatère AVGU nous employons l'outil **QT** à titre expérimental (si le point S n'appartenait pas au segment [UF] nous emploierions **QQ**) . Nous obtenons le triangle AUS.



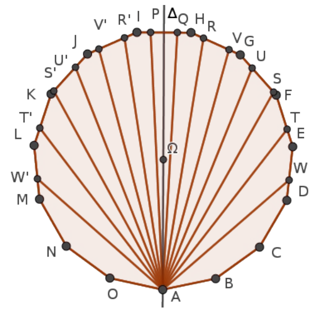
étape 6

À partir de ce triangle USA l'outil **TQ** s'impose et donne le quadrilatère ASFT.



étape 7

À partir du quadrilatère ASFT nous ne pouvons employer l'outil **QT** car le sommet du triangle serait largement en dehors du segment [FE]. Nous devons donc employer l'outil **QQ** qui nous donne le quadrilatère ATEW qui est le dernier car nous avons déjà 13 parties.

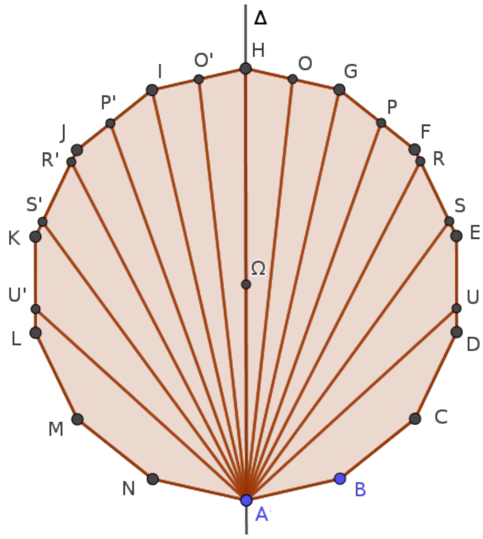


Donc les dernières seront le pentagone AWDCBA et son symétrique AQNMW'.

Cas du polygone pair

Exposé simplifié avec des explications à minima.

On considère un polygone à 2n côtés de centre Ω, de sommet choisi A et d'axe de symétrie Δ. Avec n = 7, on a la figure suivante :



Comme démontré dans le numéro précédent les quatre premières parties sont les triangles AHO et AOG (O milieu de [HG]) et leur symétrique AHO′ et AO′I.
Ensuite le triangle AOG se transforme en triangle AGP par **TT** qui se transforme en quadrilatère APFR par **TQ** lequel se transforme en triangle ARS par **QT** qui lui même se transforme en quadrilatère ASEU par **TQ** lequel est le dernier des transformés et le pentagone AUDCBA est donc la dernière partie restante.

Bien sûr GeoGebra nous permet de vérifier l'égalité des aires dans sa partie algèbre.

Est-ce industriel ?

Le process industriel (moderne) serait d'avoir la figure du polygone à n côtés, le point A choisi et un bouton sur lequel il suffirait d'appuyer pour déclencher la fabrication automatique de la partition en n parties de même aire.

On en est encore loin. Les outils existent mais il faut construire les premiers triangles manuellement (en envisageant 2 cas selon que n est pair ou impair), choisir soi-même les outils pour construire les autres parties, décider de s'arrêter à n−2 parties et construire à la main les 2 derniers polygones.

Est-ce possible avec GeoGebra ? En tout cas cela dépasse mes compétences. Peut-être que parmi nos lecteurs se trouvera-t-il un spécialiste de GeoGebra qui décidera de relever le défi !

Un peu de fantaisie pour finir

Les outils créés peuvent s'affranchir du polygone régulier et vivre leur propre vie pour créer des figures plus fantaisistes.

Cliquer ici pour expérimenter