

COMMENT DÉVOLUER AUX ÉLÈVES LE TRAVAIL DE MATHÉMATISATION HORIZONTALE ?

| CHANET* PIERRE

Résumé | À partir d'observations d'élèves français et d'une volonté de leur permettre de mettre du sens en situation de résolution de problème, nous avons présenté un dispositif de situation extra mathématique ouverte (en vidéo), dans le but de questionner les processus d'enseignement-apprentissage de la modélisation. Nous avons exploré spécifiquement l'étape de mathématisation horizontale, un des enjeux majeurs, souvent invisibilisé, du processus de modélisation.

Mots-clés : modélisation, mathématisation horizontale, problème extra-mathématique, dévolution

Abstract | Based on observations of French pupils and a desire to enable them to make sense of problem-solving situations, we presented an open-ended extra-mathematical situation (in video), with the aim of questioning the teaching-learning processes of modelling. We specifically explored the horizontal mathematization stage, one of the major, and often invisible, issues in the modelling process.

Keywords: Modeling, horizontal mathematization, extra-mathematical problems, devolution

I. VERS UNE COMPRÉHENSION DE LA MODÉLISATION

1. *Constat sur le terrain*

Quand j'étais élève, je ne comprenais pas ce que je faisais en mathématiques. Dès que j'ai débuté ma formation d'enseignant, je me suis particulièrement intéressé à la résolution de problème, puisqu'elle permet aux élèves de s'approprier les compétences et connaissances mathématique tout en y mettant du sens. Durant ma dizaine de stages dans les classes, j'ai remarqué qu'un certain nombre d'élèves rencontrait des difficultés relevant de la modélisation en résolution de problèmes.

Ces constats, couplés à mon expérience personnelle en tant qu'élève et aux enseignements didactiques dispensés durant ma formation, m'ont amené à m'interroger sur les moyens qui permettraient d'amener les élèves à dépasser eux même ces difficultés.

En échangeant avec une collègue, nous nous sommes rendu compte que nous avions des questionnements professionnels sensiblement identiques. Ainsi, nous avons fait le choix de joindre nos efforts dans le cadre de nos recherches, pour ensuite effectuer nos propres expérimentations, afin de les comparer.

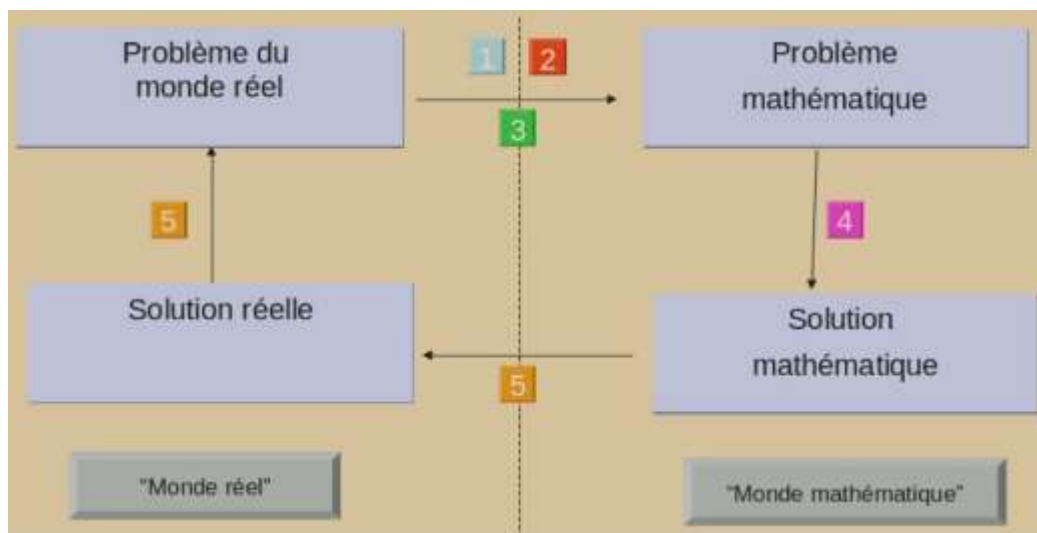
2. *De la modélisation à la mathématisation*

Pour débiter nos recherches, il nous a semblé essentiel de clarifier la notion de modélisation. En tant que jeunes enseignants nous nous sommes rapprochés des programmes français de cycle 2 et 3, que nous avons croisé avec l'ouvrage « Représentation des problèmes et réussite en mathématiques : un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement » (Julo, 1995). Ainsi, nous avons admis que la modélisation mathématique est un processus de la démarche scientifique dont la fonction principale est d'appréhender le monde qui nous entoure : « on modélise pour apporter, d'une manière ou d'une autre, une solution à un problème identifié comme tel » (Ibid. p.63). La modélisation a donc « un véritable intérêt du point de vue de la résolution du problème » (Ibid. p.66), puisqu'elle contribue à

* Circonscription de Sarcelles-Nord de Saint-Brice-sous-Forêt – France – pierre.chanet@ac-versailles.fr

« structurer la représentation d’une autre manière : par la simplification ». (Ibid. p.74). Toutefois, il nous a semblé nécessaire d’affiner cette première approche pour mieux comprendre les enjeux de la modélisation dans la résolution de problèmes.

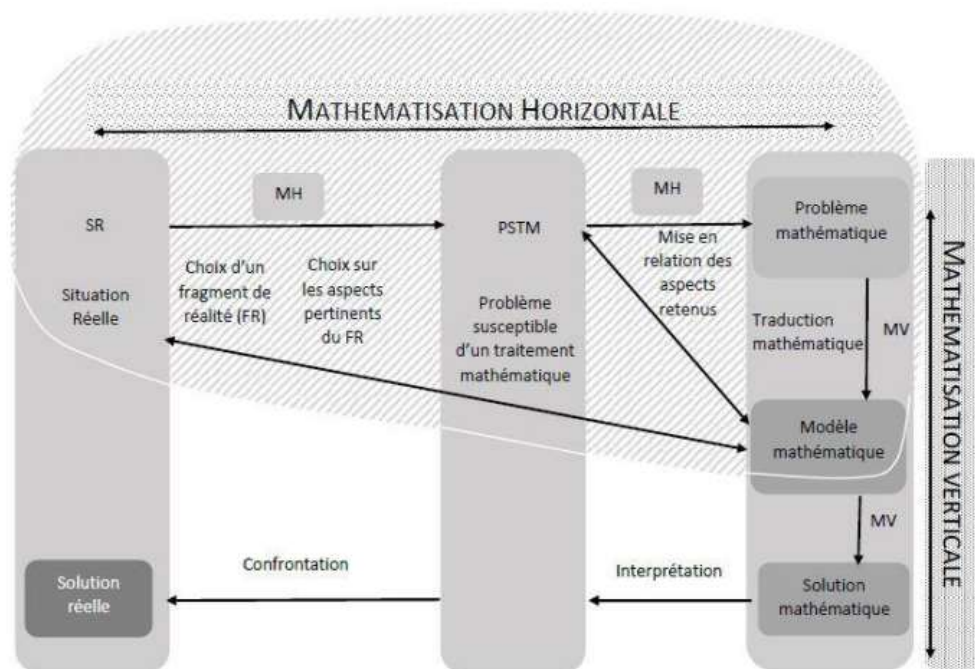
Nous nous sommes alors dirigés vers le Programme International pour le Suivi des Acquis des élèves (PISA) qui explicite davantage le processus de la modélisation via le schéma suivant :



(Source : OECD, 2013, p. 38)

Figure 1 – Le cycle de la modélisation de PISA

Cependant, les étapes décrivant le passage du monde réel au monde mathématique ne nous ont pas suffisamment éclairé sur la manière de passer de la situation réelle, au monde mathématique. C’est ainsi que nous nous sommes rapprochés des travaux de thèse de Yvain-Prébiski (2018), qui détaillent davantage les différentes étapes et enjeux de la modélisation à travers le schéma du cycle de modélisation mathématique suivant :



(Source : Yvain-Prébiski, 2018, p. 109)

Figure 2 – Schéma du processus de modélisation

Ce schéma nous a permis d'identifier les différentes étapes pour mener à l'élaboration d'un modèle mathématique, et notamment l'aspect horizontal et vertical de la mathématisation, en jeu dans l'activité de modélisation mathématique :

« La mathématisation horizontale qui relève de la modélisation mathématique pour passer de la situation réelle au monde mathématique et la mathématisation verticale qui relève du traitement mathématique d'un problème mathématique ». (*Ibid.*, p. 73-74)

Nous avons alors retenu que la mathématisation horizontale est un processus qui permet de rendre une situation extra-mathématique accessible par un traitement mathématique. Ce travail implique de faire des choix dans le contexte réel (fragments de réalité, éléments de contexte, grandeurs). Ces choix, qui relèvent d'hypothèses simplificatrices, vont permettre de « transformer » le problème, a priori non mathématique, en un problème mathématique. Une fois ce problème mathématique identifié (qui peut ne pas être unique selon Yvain-Prébiski), il s'agit d'élaborer un modèle mathématique pour le résoudre.

Néanmoins, « les aspects horizontaux et verticaux de la mathématisation ne doivent pas être considérés de manière indépendante », puisqu'il faut « prendre en compte leurs articulations au sein du processus de modélisation » (Yvain-Prébiski, 2018, p. 80-81).

Ainsi, d'après Yvain-Prébiski, les difficultés des élèves pour passer d'un problème issu du monde réel au monde mathématique, relèvent principalement de la mathématisation horizontale.

Mais alors : comment dévoluer aux élèves le travail de mathématisation horizontale, constitutif de la modélisation mathématique de problèmes issus du quotidien ?

3. Le choix du problème

Nous nous sommes alors interrogés sur la nature des problèmes proposés aux élèves français, afin d'identifier ceux qui favoriseraient un travail de mathématisation horizontale. Notre questionnement

étant associé à des situations de la vie quotidienne, nous nous sommes dirigés vers des travaux proposant des problèmes ayant des contextes extra-mathématiques. Nous avons alors étudié les travaux de Burgermeister et Dorier (2013) qui définissent les problèmes extra-mathématiques comme des problèmes dans lesquels « l'un des domaines est non mathématique (on dira souvent réel ou concret) et l'autre mathématique. » (p.11). Ces auteurs ont affiné cette définition générale en la déclinant selon la typologie suivante :

- « Niveau 1 : les deux systèmes sont donnés mais la tâche des élèves est cantonnée dans l'un des deux.
- Niveau 2 : les deux systèmes sont donnés et la tâche des élèves implique les deux.
- Niveau 3 : un seul système est donné et la construction du second est à la charge des élèves. » dans lequel, un système est mathématique ou non. (Ibid. p.12).

En nous appuyant sur les travaux d'Yvain-Prébiski, nous nous sommes orientés vers les problèmes de niveau 3, qui proposent une situation réelle, à partir de laquelle l'élève devra faire des choix, des hypothèses, en sélectionnant des éléments du réel pour parvenir à une traduction, à un modèle mathématique. Ce type de problème met l'élève dans une posture de chercheur dans la mesure où il favorise « le potentiel d'investigation des élèves dans la démarche de modélisation » (Ibid. p.12).

Mais quels problèmes extra-mathématiques de niveau 3 choisir pour dévoluer aux élèves le travail de la mathématisation horizontale ?

Il fallait alors sélectionner une ressource qui serait, si possible, institutionnelle et qui regrouperait des problèmes extra-mathématiques de niveau 3, au sens de Burgermeister et Dorier (2013). Nous avons donc retenu la plateforme Educabagnols, qui propose des problèmes extra-mathématiques de niveau 3, relevant également des problèmes ouverts en vidéo ; c'est à dire une catégorie de problèmes initiant les élèves à la démarche scientifique, en les invitant à faire des essais, à conjecturer, à tester, puis à prouver.

Une hypothèse s'est alors dessinée : **un problème de type ouvert et extra mathématique de niveau 3 favorise un travail relevant de la mathématisation horizontale.**

Nous allons maintenant rapidement présenter l'expérimentation et la méthodologie fad'analyse mise en place dans le but de mettre à l'épreuve cette hypothèse

II. EXPÉRIMENTATION ET MÉTHODOLOGIE D'ANALYSE

1. Présentation de l'expérimentation

L'expérimentation s'est déroulée, pour des raisons pratiques, dans la classe de 22 élèves de CM2 accueillant mon stage d'observation et de pratique accompagnée de deuxième année de Master. L'enseignante titulaire de la classe a été sollicitée pour mettre en place le problème de la grande roue¹ extrait de la plateforme Educabagnols, qui relève donc des problèmes de type ouvert et extra mathématique de niveau 3. La seule consigne qu'elle a reçu était de concevoir et de mettre en place les séances nécessaires pour que les élèves de sa classe traitent le problème de la grande roue, qui a été décrit comme ayant un fort potentiel pour faire travailler la modélisation aux élèves. À partir de cette commande, l'enseignante a prévu de mettre en place le problème vidéo de la grande roue sur trois séances durant lesquelles les élèves travaillent en groupe :

- Une première séance de découverte

¹ <https://www.educabagnols.net/videomathspub/CM1-CM2/showNiveau>

- Une deuxième séance de résolution
- Une troisième séance de mise en commun

2. *Choix de la méthode de recueil des données*

Le corpus de données recueilli afin de valider, d'invalidier ou de nuancer l'hypothèse, englobe des données de différentes natures.

Il regroupe des données récoltées en amont de l'expérimentation (essentiellement basées sur les pratiques déclarées par l'enseignante) :

- Un questionnaire envoyé par mail à l'enseignante afin de cerner son profil ainsi que le milieu de l'expérimentation.
- Les fiches de préparations conçues par l'enseignante pour chaque séance.

Il y a aussi des données récoltées lors de l'expérimentation (essentiellement basées sur les pratiques effectives de l'enseignante) :

- Des captations audios d'interactions entre les différents acteurs de la classe (échanges inter-élèves/entre les élèves et la professeure) récoltées via un micro fixe (situé au milieu de la classe) et deux micros mobiles (circulant dans la classe)
- Des captations vidéo de l'enseignante, prises lors de chacune des séances à l'aide d'une caméra fixe et d'une caméra mobile circulant au sein de la classe.

3. *Choix de la méthode d'analyse des données recueillies*

Dans l'optique d'exploiter au mieux les différentes données recueillies en amont et durant la mise en place du problème de grande roue, nous avons choisi de retenir la méthodologie d'ingénierie didactique de Michèle Artigue (1988).

La méthodologie d'ingénierie didactique est un processus comprenant « quatre phases : la phase 1 des analyses préalables, la phase 2 de la conception et de l'analyse a priori des situations didactiques de l'ingénierie, la phase 3 de l'expérimentation et enfin la phase 4 de l'analyse a posteriori et de l'évaluation. » (Artigue, 1991, p.6).

Il a fallu cependant l'adapter à notre expérimentation, puisque même si nous avons sélectionné le problème, c'est un tiers qui a eu à concevoir et à mettre en place la séquence d'enseignement. Ainsi, les analyses a priori se sont basées sur les pratiques déclarées par cette enseignante sur ses fiches de préparation, et les analyses a posteriori sur les pratiques effectives lors des séances de l'expérimentation. La confrontation entre analyse a priori et a posteriori vise à comparer la mise en place effective du problème avec les constructions théoriques abordées au début de cette présentation.

III. RÉSULTATS ET PERSPECTIVES

1. *Résultats*

Durant les séances de découverte et de résolution, les élèves ont donc formulé des questions et des choix, qui leur permettent d'élaborer un modèle à partir de la situation initiale du problème. L'ensemble de ces données ont été retranscrites et rangées dans des tableaux via les catégorisations établies durant l'analyse a priori. En voici un extrait :

E= énoncé (numéro de l'intervention)

Tableau 1 – Extrait de la synthèse des questions formulées par les élèves lors des deux premières séances

E	Questions sur l'ancrage dans le réel ou grandeur non pertinente	Questions portant sur le choix de fragments de réalité et de grandeurs pertinentes	Questions permettant la mise en place d'un modèle ou d'un traitement mathématique
Séance 1			
1	« C'est où ça ? »		
32		« La question c'est dans combien de temps tu descendras ? »	
32			« Combien de temps dure un tour ? »
44			« Combien de temps dure un tour ? »
44		« Dans combien de temps elle descendra ? »	
60	« On peut modifier leurs prénoms ? »		

Ces tableaux ont permis de faciliter la lecture des données obtenues. Ainsi, lors des expérimentations, les élèves ont principalement énoncé des questions portant sur des fragments de réalité et des grandeurs pertinentes. Certaines d'entre elles ont d'ailleurs été récurrentes, comme : « Dans combien de temps elle descendra ? » ou encore : « Qui a raison entre la femme ou l'homme ? »

D'autres questions permettant la mise en place de traitements mathématiques sont également ressorties plusieurs fois, comme : « Combien de temps dure un tour ? » ou bien : « Combien de minutes dure un tour ? »

La récurrence de ces différents types de questions dans les propos des élèves les fait apparaître comme nécessaires à la compréhension de la situation de la grande roue, et à la transformation de ce problème extra-mathématique en un problème mathématique. Ces questions suggèrent également que les élèves ne se sont pas limités à une simple traduction mathématique du problème, mais qu'ils se sont appropriés la situation initiale, pour ensuite questionner les choix de fragments de réalité et les grandeurs pertinentes à mobiliser, afin d'établir des modèles mathématiques. D'ailleurs, les choix effectués par les élèves à la suite de leurs questionnements confirment cette tendance.

Lors de la première séance, les élèves ont principalement formulé des choix a priori, confirmant donc qu'ils se sont d'abord appropriés la situation du problème, en se basant sur leurs expériences vécues. Néanmoins, les élèves semblent avoir saisi la nécessité de faire des hypothèses simplificatrices à partir de la situation de la grande roue pour pouvoir envisager un modèle et une résolution mathématique, puisque durant la deuxième séance, ils se sont davantage orientés vers des choix relevant des mathématiques, liés à des procédures de résolution qui s'inscrivent également dans le monde des mathématiques. Par ailleurs, sur l'ensemble de l'expérimentation, les élèves ont fait très peu de choix basés sur des considérations ancrées dans le réel, ce qui tend également à confirmer qu'ils ont mis de côté leurs questions portant sur des considérations ancrées dans le réel en ayant saisi la nécessité de faire des choix/hypothèses simplificatrices, afin de modéliser la situation initiale du problème et d'envisager une résolution par traitement mathématique.

Ainsi, après avoir recueilli et mis en regard les différentes données, les procédures mobilisées par les élèves, les questions et les choix qu'ils ont formulés, il ressort qu'une majorité d'entre eux se sont appropriés le contexte extra-mathématique du problème afin de le rendre accessible à un traitement mathématique.

Il apparaît alors que l'hypothèse est validée puisque la majorité des élèves de CM2 ont questionné le contexte de la situation de la grande roue, pour ensuite faire des choix et hypothèses simplificatrices permettant de traiter mathématiquement ce problème de type ouvert et extra mathématique de niveau 3.

Ainsi, au terme de cette recherche qui détaille l'ensemble des données recueillies, **un problème de type ouvert et extra mathématique de niveau 3 favorise chez une majorité d'élève un travail relevant de la mathématisation horizontale.**

2. Perspectives

Le cadre de cette présentation ne permettait de résumer qu'une des deux hypothèses de recherche. La deuxième, intimement liée à la première, traite de la posture enseignante lors de la mise en place d'un problème comme celui de la grande roue. Je vous invite donc à lire l'entièreté de mon travail bientôt disponible sur Dumas, si le sujet vous intéresse.

D'autre part, l'achèvement de mes recherches de fin d'étude n'est pas vécu comme une fin, mais plutôt comme le début d'une démarche réflexive, qui m'a d'ailleurs conduit, dans une volonté d'enrichir mes connaissances sur cette thématique, à intégrer le projet *Léa*² « Mathématisation de problèmes concrets en vidéo » co-porté par Sonia Yvain-Prébiski ([Mathématisation de problèmes concrets en vidéos \(MaPcv\) — LéA \(ens-lyon.fr\)](#)). Ce projet de recherche collaborative porte sur l'étude du dispositif Educabagnols (dont est issu le problème de la grande roue) sur les pratiques d'enseignement et de formation à la modélisation mathématique, ainsi que sur le rôle des acteurs dans un processus collaboratif. Au sein de ce dispositif, les problèmes vidéo restent assez ouverts afin de permettre des modélisations en fonction des choix opérés par les élèves. L'objectif visé est de relever des contraintes, des leviers à la mise en œuvre d'un tel enseignement, afin de dégager des éléments d'analyse sur l'évolution des pratiques professionnelles des différents acteurs.

RÉFÉRENCES

- Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 281-308.
- Artigue, M. (1991). Ingénierie didactique en mathématiques. *Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes*, (5), 1-22.
- Burgermeister, P.-F. et Dorier, J.-L. (2013). La modélisation dans l'enseignement des mathématiques en Suisse romande. *Petit x*, (91), 5-24.
- Julo, J. (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques : un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement*. Presses universitaires de Rennes.

² Le projet Léa mathématisation de problèmes concrets en vidéos (MAPCV) est une recherche-action autour de la résolution de problèmes concrets posés sous forme vidéo pour travailler la modélisation mathématique (<https://ife.ens-lyon.fr/lea/le-reseau/les-differents-lea/mathematisation-de-problemes-concrets-en-videos-mapcv>).

Organisation for Economic Co-operation and Development [OECD]. (2013). *PISA 2012. Assessment and analytical framework mathematics, reading, science, problem solving and financial literacy*. <http://www.oecd-ilibrary.org/docserver/download/9603051e.pdf?expires=1503160581&id=id&accname=guest&checksum=0FC6A3AA70C4AB2F526F533DA7339200>

Yvain-Prébiski, S. (2018). *Étude de la transposition à la classe de pratiques de chercheurs en modélisation mathématique dans les sciences du vivant. Analyse des conditions de la dévolution de la mathématisation horizontale aux élèves* [Thèse de doctorat, Université Montpellier]. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01956661v1/document>