

UN PARCOURS DIFFÉRENCIÉ INCLUSIF S’APPUYANT SUR DES RÉSULTATS EN DIDACTIQUE CONCERNANT L’AIRE DU RECTANGLE

| DE VARENT* CHARLOTTE

Résumé | Nous proposons une forme d’inclusion passant par l’identification de difficultés mathématiques et la mise en place d’un parcours personnalisé. Pour cela, nous nous appuyons sur une séquence d’enseignement de la mesure d’aire en classe de CM2 (10-11 ans). Celle-ci est déclinée selon trois niveaux de différenciation, en fonction de difficultés géométriques et liées au changement de cadre entre géométrie et formules. Des passerelles sont proposées selon que les progrès de l’élève lui permettent ou non de rejoindre le cursus « classique ».

Mots-clés : aire, unités de mesure, géométrie, algèbre, pavage

Abstract | We propose a form of inclusion based on the identification of mathematical difficulties and the implementation of a personalized program, through a teaching sequence on area measurement in the CM2 class (10-11 years old). The sequence is broken down into three levels of differentiation according to difficulties related to geometry and to the change of framework between geometry and formulas. Bridges are proposed, depending on whether or not the pupil is able to join the “traditional” curriculum, depending on his or her progress.

Keywords: Area, units of measurement, geometry, algebra, rectangle paving

I. INTRODUCTION

Nous proposons une forme d’inclusion passant par l’identification de difficultés mathématiques et la mise en place d’un parcours personnalisé. Nous prenons l’exemple d’une séquence d’enseignement de la mesure d’aire en classe de CM2 (10-11 ans, 5^e année). L’inclusion (Organisation des Nations unies pour l’éducation, la science et la culture, 2020) et la notion de retard scolaire peuvent prendre plusieurs formes (Dessertine, 2004). Nous abordons ici l’inclusion en classe classique et entière par la proposition d’un travail adapté à tous les élèves, qu’ils aient des besoins éducatifs particuliers (BEP) ou non. Nous nous plaçons dans le cadre d’une réflexion théorique sur la manière de réaliser des séquences inclusives en classe entière en nous appuyant sur des résultats de didactique. Nous proposons une séquence (théorique) différenciée d’enseignement de l’unité de mesure d’aire et des formules de l’aire du rectangle. Celle-ci est déclinée selon trois niveaux de différenciation, en fonction de difficultés préalablement observées lors d’un pré-test. Cette différenciation vise à proposer des modalités adaptées aux difficultés des élèves et réalistes, tout en gardant certains objectifs communs (à la classe classique) concernant l’apprentissage du mesurage et des grandeurs. Nous croisons des travaux ayant montré des difficultés liées à la visualisation de l’espace en deux dimensions (2D) avec des travaux sur la transition entre les cadres géométrique et algébrique. Des passerelles sont proposées à plusieurs stades de la séquence, si les progrès de l’élève lui permettent de rejoindre le cursus classique. Ainsi, l’inclusion passe ici aussi par le fait de réinterroger régulièrement le besoin, pour l’élève, de rester dans un parcours différencié et de remettre en question la pertinence mathématique de ce parcours (Roiné, 2009 ; Sensevy et al., 2006, Toullec-Théry, M., et Nédelec-Trohel, I., 2006).

Nous posons en conséquence deux questions de recherche. QR1 : est-il possible de proposer une séquence différenciée adaptée aux difficultés des élèves, du point de vue de la visualisation de l’espace et/ou de la transition de la géométrie aux formules ; qui permette de créer des passerelles vers le progrès

* LDAR – France – charlotte.de-varent@cyu.fr

pour les élèves qui auraient des difficultés, mêmes durables ? QR2 : la séquence pourrait-elle permettre, en proposant un diagnostic basé sur les difficultés mathématiques et un type de travail qui soit basé sur des objectifs de compétences partagées (en partie au moins) avec le groupe classe et des passerelles, une bonne inclusion des élèves à besoins particuliers ? Nous proposons d'adresser ici une partie de la QR1 en construisant une séquence différenciée qui permette potentiellement de favoriser des passerelles¹. Suite à cette étape nous mettrons en place dans un second temps (non adressé ici) une expérimentation, puis nous engagerons une réflexion sur l'adaptabilité de la séquence à des contextes variés d'enseignement spécialisé. Nous replacerons enfin cette recherche dans le travail qui a été réalisé sur les définitions des pratiques mathématiques inclusives.

1. *Type d'inclusion considéré*

Roiné (2014, p. 13) rappelle le risque de rester dans le paradigme d'interprétation de l'échec scolaire. Cela consiste à assigner à certains élèves des caractéristiques cognitives distinctes des autres, alors même que la notion d'élève en difficulté « ne correspond à aucune définition cohérente et suffisamment stable pour parler d'une catégorie précise d'élèves ». La conséquence serait de réaliser une analyse erronée des paramètres qui concourent à son échec scolaire. En conséquence, nous ne nous appuyons pas sur des propositions de travail sur la cognition des élèves en difficulté. Sans remettre en question ici leur utilité, nous nous plaçons du point de vue des savoirs disciplinaires. Nous proposons d'aborder les difficultés mathématiques par la didactique des mathématiques, autant du point de vue de l'observation de ces difficultés que de celui des remédiations apportées. Ainsi, nous ne nous chargeons pas ici d'aider une catégorie d'élèves rencontrant une difficulté diagnostiquée ; nous partons plutôt du constat de difficultés mathématiques à travers un pré-test. En effet, les difficultés abordées pourraient théoriquement affecter chaque élève à un moment de sa scolarité. Parmi ces difficultés, nous réalisons que certaines peuvent être durables pour une minorité d'élèves à BEP. L'inclusion proposée ici passe par la possibilité de s'y adapter, tout en réinterrogeant régulièrement le besoin pour l'élève — qu'il soit identifié comme rencontrant des difficultés cognitives ou non — de rester dans le parcours différencié proposé, en fonction des résultats obtenus tout au long de la séquence.

L'objectif est aussi d'éviter que chaque élève (identifié à BEP ou non) soit cantonné à des exercices annexes ne proposant ni passerelle ni point commun avec l'apprentissage du groupe classe. Il s'agit donc d'une certaine forme d'inclusion *dans les savoirs*. De plus, du point de vue de l'enseignant, nous considérons qu'il n'est pas possible de déterminer si les difficultés rencontrées par l'élève sont temporaires ou définitives. Nous prôtons donc ici une forme prudente d'inclusion qui vise à ne pas catégoriser définitivement un élève. Par ailleurs, des exercices s'avèrent plus complexes que d'autres pour tous les élèves et posent ainsi davantage de problèmes à certains élèves déjà fragilisés. Cela se produit indépendamment de difficultés cognitives, attentionnelles ou liées au contrat didactique, par exemple ici, dans le cadre des transitions entre géométrie et formules.

L'analyse des résultats aux évaluations nationales de 6^e indique en effet qu'en comparaison des autres collégiens, les élèves de SEGPA² ne sont pas différents des autres élèves d'un point de vue didactique. Certes leurs résultats sont plus faibles que ceux des élèves scolarisés en classe ordinaire, mais les épreuves échouées sont les mêmes pour tous les élèves. Si les élèves de SEGPA échouent à tel ou tel type d'exercice, ce n'est pas tant parce qu'ils seraient plus déficitaires dans la compréhension des consignes, le traitement de l'information ou les capacités d'attention (entre autres explications potentielles) que parce que ces exercices sont plus difficiles que les autres. (Roiné, 2014, p. 27)

¹ La séquence sera testée en classe en avril 2025.

² Section d'enseignement général et professionnel adapté qui accueille les jeunes de la 6^e à la 3^e présentant des difficultés scolaires importantes, sans handicap identifié.

Il s'agit donc d'une inclusion dynamique et non passive (Toullec-Théry et Marlot, 2013), qui permet de questionner la possibilité de rejoindre régulièrement le cursus ordinaire, et qui s'intéresse aussi aux nœuds épistémologiques (Artigue, 1989) comme la transition du calcul d'aire additif dans le cadre géométrique aux formules liées à la multiplication. Si certaines difficultés se révélaient durables, en raison de troubles cognitifs par exemple, une partie des objectifs d'apprentissage concernant les grandeurs, qui peuvent être atteints sur les longueurs sans passer par les aires et sa spécificité bidimensionnelle seraient proposés.

2. Difficultés et travaux pris en compte pour l'élaboration de la séquence

Nous distinguons ici des difficultés qui seront passagères et d'autres persistantes. Il ne s'agit pas d'assigner les difficultés persistantes à un certain type d'élève. Nous considérons que les difficultés que nous allons présenter peuvent être rencontrées par tous les élèves et que pour certains elles seront persistantes, qu'ils présentent ou non un trouble des apprentissages. Notre étude se fonde, d'une part, sur la caractérisation de nœuds qui rendent difficile l'accès à certaines notions mathématiques à tous les élèves, sans doute encore davantage aux plus faibles. Nous considérons que ces nœuds sont souvent liés à l'appréhension d'un concept lors de changements de cadre (ici, lors du passage entre la géométrie et l'algèbre). Ainsi, nous utilisons pour construire la séquence, le résultat d'une analyse de manuels scolaires présentée dans de Varent (2023). Nous y avons analysé la façon dont le centimètre carré est introduit dans treize manuels de CM2 (suivant les programmes français). Nous nous étions appuyée sur une analyse épistémologique d'exercices mathématiques historiques mobilisant des systèmes non métriques, sur une analyse des programmes actuels ainsi que sur une synthèse de travaux en didactique concernant le savoir à transposer pour analyser ces manuels. Nous avons ainsi constitué une grille d'analyse. Nous nous appuyons ici sur les résultats de cette analyse. Nous soulignons également dans cette analyse le fait qu'une partie des préconisations de didactique, contrairement à d'autres travaux, ont moins pénétré les manuels scolaires français. Ils semblent cependant nécessaires pour la compréhension de la mesure d'aire et nous les incluons dans l'expérimentation.

D'autre part, nous étudions des difficultés liées à la conception de l'espace en 2D, qui ont été décrites par Outhred et Mitchelmore (1992, 1996) qu'ils ont par ailleurs notées comme durables pour une partie des élèves. Nous prenons en compte ces difficultés pour construire un parcours différencié.

L'introduction classique de l'aire en cycle 3

Dans de Varent (2023), nous avons analysé l'introduction de la mesure d'aire dans treize manuels scolaires de CM2 (10-11 ans). Dans les programmes, il est demandé de travailler dans un premier temps sur le concept indépendamment de sa mesure, à l'aide de comparaisons directes (en confrontant, par exemple, l'aire de deux surfaces par découpage et recollement). Dans un deuxième temps, il est suggéré de procéder à des comparaisons indirectes à l'aide d'une unité de mesure intermédiaire de forme donnée, ce que nous retrouvons dans les treize manuels étudiés. Dans un troisième temps, il est préconisé (Éduscol, 2016, pp. 2-3) d'introduire la mesure de la grandeur à l'aide d'unités de mesure standard, dans tous les manuels. Ces recommandations s'appuient sur une distinction entre la grandeur, la mesure de la grandeur et l'objet dont elle est une caractéristique, en accord avec Perrin-Glorian (1990). À ce stade de la programmation, des activités comme le calcul de l'aire d'une même surface avec deux unités de mesure différentes sont proposées aux élèves. Elles permettent de distinguer l'aire de la mesure exprimée avec un nombre (valeur numérique de la mesure ; Comité commun pour les guides en métrologie, 2012, p. 13) et une unité donnée (Perrin-Glorian, 1990). La plupart des manuels proposent également des activités liées à la distinction entre surface et aire, par exemple l'introduction de figures de même aire mais ayant différentes formes, une mesure d'aire par encadrement ou des exercices visant la distinction entre l'aire et le périmètre.

L'unité de mesure d'aire prend ensuite la forme d'un carré, souvent un carreau du quadrillage dessiné en arrière-plan. Nous appellerons « pavage » la représentation qui permet le comptage de carrés sur la surface pour en mesurer l'aire. Dans les manuels, il est demandé d'exprimer le nombre d'unités d'aire (de forme carrée) que l'on peut compter sur la figure. La mesure d'aire est donc toujours liée à l'addition, ne prenant en compte que la dimension 2 (il faut se repérer dans le plan). Le mesurage est constamment perceptible : l'élève doit comprendre qu'il y a report d'un étalon. Il doit compter les unités de mesure d'aire reportables sur la figure (des carrés) comme il le faisait juste avant avec des unités de mesure non conventionnelles. Les additions qui portent sur les nombres sont encore associées à la juxtaposition de figures. Compter ces carreaux amène théoriquement l'élève à utiliser ensuite les multiplications côté par côté pour le carré et longueur par largeur pour le rectangle, et lui permet, à nouveau théoriquement, de dégager la formule.

Les difficultés prises en compte

Dans les manuels, l'introduction de l'unité de mesure d'aire conventionnelle (le centimètre carré) semble moins uniformisée. Premièrement, la transition entre addition itérée et multiplication pour le compte des carrés- cm^2 du pavage du rectangle n'est pas toujours explicitement demandée. La multiplication s'avère pourtant nécessaire pour la généralisation et l'introduction de la formule. Secondement, seuls trois manuels amènent l'élève à faire le lien entre le nombre de centimètres carrés du côté du rectangle et le nombre de centimètres, explicitant ainsi le lien entre la mesure du côté et le pavage, ce qui permet de comprendre la formule. Ce résultat nous amène à supposer que les élèves risquent de ne pas donner du sens à la formule ou d'oublier la notion de mesurage liée au pavage, au profit de représentations géométriques erronées. Cela rejoint le constat que les élèves ont des difficultés à donner du sens aux formules d'aires du rectangle et du carré, et à ne pas généraliser leur utilisation à d'autres figures, comme le triangle. L'étude réalisée montre ainsi que la question de la bidimensionnalité, de l'unité de mesure et du mesurage dans les transitions entre géométrie et formules représente un enjeu important.

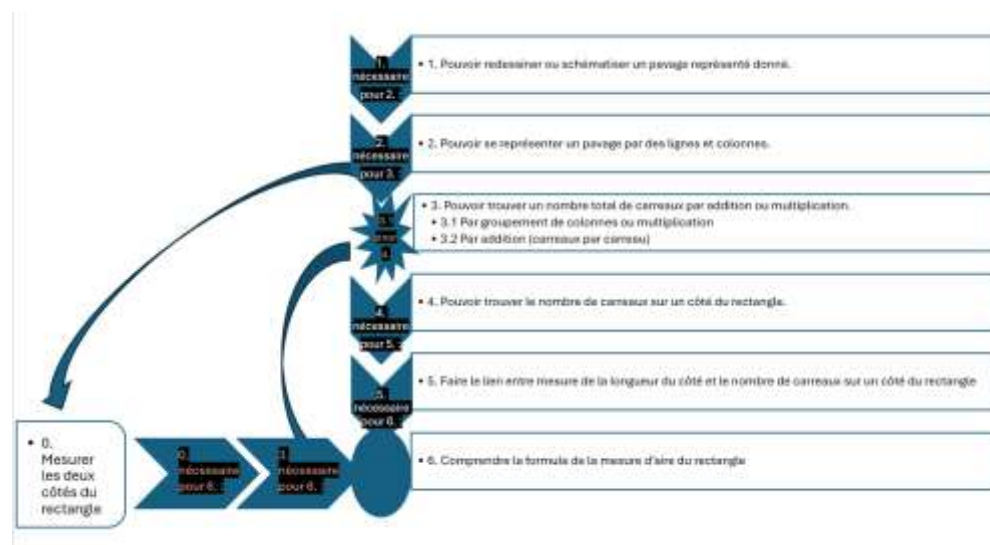


Schéma 1 – Étapes de compréhension nécessaires basées sur Outhred et Mitchelmore

L'ensemble des points sur lesquels il est demandé aux manuels de se prononcer conduit à une grande variété de pratiques à partir de l'introduction du centimètre carré. Par ailleurs, nous constatons que les propositions de Perrin-Glorian (1990) qui portent sur les relations bidimensionnelles et l'unité de mesure d'aire standard ne semblent pas avoir été intégrées dans les manuels scolaires. Nous

rappelons en annexe (tableau 2) certaines de ces pistes qui visent à renforcer la compréhension fine du mesurage dans un cadre bidimensionnel et nous les incluons dans la séquence testée en classe. Outhred et Mitchelmore (1992) ont remarqué que les élèves éprouvaient des difficultés lors de l'introduction de la mesure d'aire. Ils ont noté des phases nécessaires pour pouvoir lui donner du sens. Ils ont réalisé leur étude sur 155 élèves scolarisés dans quatre écoles issues d'un milieu socio-économique moyen de Sydney, en années 1 à 4 (6-7, 7-8, 8-9 et 9-10 ans).

Ils montrent que dessiner un rectangle pavé (carrelé avec des lignes et colonnes), même en ayant un modèle sous les yeux, est une activité problématique (50 % de réussite). Le point critique, selon eux, est de considérer le pavage d'unités carrées comme des groupes de lignes et de colonnes, ce qui est corroboré par Battista, et al., (1998). Sans cela, il s'avère impossible de comprendre le lien avec les longueurs des côtés du rectangle ou la multiplication. Les résultats confirment que les élèves qui ne se représentent pas la structure d'un pavage par des lignes et des colonnes sont en général incapables de déterminer le nombre d'éléments du pavage par multiplication ou comptage de groupes de lignes ou de colonnes. En effet, aucun des élèves qui ont dessiné le pavage comme des carreaux individuels n'a utilisé la multiplication, alors que la majorité des enfants qui ont dessiné des pavages structurés ont déterminé le nombre de carreaux par comptage de groupe de colonnes ou multiplication. Les résultats liés au mesurage semblent aussi fortement associés au dessin. Seuls les élèves qui ont dessiné des pavages structurés à l'une des étapes de l'entretien ont mesuré les côtés des rectangles. Par ailleurs, la capacité à déterminer le nombre de carreaux de chaque côté du rectangle a été observée seulement chez les élèves qui multipliaient les dimensions ou groupaient par lignes ou colonnes et dessinaient des grilles structurées ou partiellement structurées.

Il est évident, par ces résultats, que les jeunes enfants n'interprètent pas automatiquement les quadrillages en matière de lignes et de colonnes, et que cela pourrait entraver leur apprentissage de la mesure d'aire [...]. (Outhred et Mitchelmore, 1992, p. 200-201) [Traduction de l'auteur]

Outhred et Mitchelmore (1996) distinguent cinq principes qui définissent des niveaux d'apprentissage (p. 96) : 1. La couverture du rectangle par pavage est inadéquate, avec des trous, des juxtapositions ou une taille de l'unité de mesure qui n'est pas constante. 2. L'élève tente de couvrir correctement toute la surface du rectangle, mais il éprouve des difficultés à faire congruer ou à systématiser son étalonnage. 3. L'élève réalise qu'un pavage formé d'unités congruentes donne une couverture systématique de la surface, mais ne détecte pas la relation avec les côtés du rectangle. 4. L'élève voit la relation du pavage avec les côtés du rectangle, mais ne prend en compte qu'un côté du rectangle. 5. L'élève mesure les deux côtés du rectangle ou marque les unités de mesure sur les deux côtés. Cette étape semble essentielle pour utiliser une unité de mesure carrée plus compliquée, qui mesurerait par exemple 2 cm de côté. Lorsqu'il est demandé d'estimer le nombre d'unités de mesure qui peuvent couvrir le rectangle avec la règle (si l'unité de mesure n'est pas dessinée), 14 % des élèves mesurent une dimension du rectangle et estiment l'autre. Ils marquent les unités de mesure le long de la règle. Un seul de ces élèves réussit à trouver le nombre exact. Au contraire, 26 % des élèves mesurent les longueurs des deux côtés du rectangle et 85 % d'entre eux trouvent la bonne réponse. Quelques-uns utilisent la multiplication des mesures de longueur, et les autres marquent physiquement les unités de mesure sur les deux côtés. L'étude rappelle que la plupart des élèves d'année 1 n'arrivent pas au niveau 2, mais que certains des élèves d'année 2 y parviennent. *Seulement un quart des élèves d'année 3 et trois quarts des élèves d'année 4 atteignent le niveau 4 ou 5.* La multiplication n'apparaît pas cruciale pour la compréhension informelle de la mesure de l'aire du rectangle, « bien qu'elle soit bien sûr essentielle pour la compréhension de la formule » (Outhred et Mitchelmore, 1996, p. 96). Les auteurs notent que la recherche a mis l'accent sur les principes 1 et 4, et soulignent l'importance du principe 3 qui est le suivant : le nombre d'unités de chaque côté doit pouvoir être trouvé spontanément en mesurant les

longueurs. Ce principe apparaît comme négligé en recherche. « Il peut sembler évident aux adultes que les nombres dans la grille dépendent des mesures du côté, mais ce n'est clairement pas évident pour les élèves ». (Outhred et Mitchelmore, 1996, p. 96)

Le point suivant s'avère important pour que notre travail de différenciation soit efficace : ils font le lien entre cette capacité et celle de mesurer à la règle. Ils montrent que la mesure à la règle n'est pas automatiquement comprise comme correspondant à l'évaluation du nombre d'espaces de 1 cm. Or, cet aspect s'avère essentiel pour relier le nombre d'unités carrées à la longueur du côté, notamment si le carré ne fait pas 1 cm de côté (Outhred et Mitchelmore, 1996, p. 97). Rogalski (1984) rappelle par ailleurs le lien entre l'acquisition de la bidimensionnalité et le plan, l'espace apparaissant comme précurseur dans la construction de la bidimensionnalité, mais le plan étant une étape clé (p. 7). Nous résumons, dans la figure 1, en Annexe, les éléments nécessaires à la compréhension de la formule de l'aire du rectangle. Pour les enfants qui n'ont pas de problèmes d'apprentissage, les niveaux de mesure et de comptage sont liés à l'âge. *Cela n'est toutefois pas le cas des enfants en difficulté* : beaucoup d'entre eux dessinent des pavages et mesurent un côté correctement, mais ils comptent les pavages carreau par carreau en faisant souvent des erreurs.

En conséquence de ces études, nous choisissons de distinguer les groupes suivants : le groupe 2 correspond aux élèves rencontrant des difficultés durables (encore présentes en CM2) avec l'espace 2D, pour schématiser un pavage ou se représenter un pavage par des lignes et des colonnes. Le groupe 3 rassemble les élèves ayant des difficultés durables à trouver un nombre total de carreaux par multiplication. Le groupe 4 réunit les élèves cumulant ces deux premières difficultés. Le groupe 1 correspond aux élèves ne présentant pas ces difficultés. Pour les élèves de CM2 ayant du mal à faire le lien entre le nombre de carreaux et le côté du rectangle, ou entre la mesure de la longueur du côté et le nombre de carreaux d'un côté du rectangle, nous proposons, puisque cette difficulté est attendue et classique, des activités à l'ensemble du groupe. Nous proposons une séquence qui vise l'acquisition des principes 1 à 3 par les élèves ayant des difficultés. La séquence doit favoriser l'acquisition des principes 4 et 5 par tous les groupes. Nous avons en effet montré que seulement trois manuels favorisaient ces derniers. Si les principes 4 et 5 ne sont malgré tout pas atteints en fin de séquence, nous proposons un travail sur les longueurs visant l'acquisition de la notion de mesurage par report. Cela favorise ensuite la compréhension du lien entre mesure de longueur et mesure d'aire. En annexe, nous rappelons les activités qui favorisent la compréhension profonde des liens entre mesure de longueur et mesure d'aire, proposées par Perrin-Glorian (1990).

3. Séquence différenciée : de la géométrie aux formules

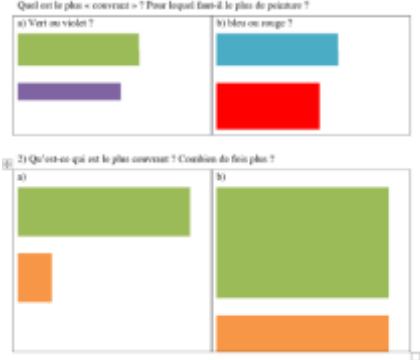
Pour cette séquence (présentée en Annexe), nous nous appuyons sur les relations de nécessité décrites dans la figure 1, sur les cinq principes décrits par Outhred et Mitchelmore (1992, 1996) et sur les résultats de l'analyse des manuels pour proposer des adaptations en fonction des résultats d'un pré-test qui sera ensuite proposé aux enseignants sous forme d'évaluation diagnostique³. Nous décrivons, dans le tableau, la manière dont un élève peut travailler un objectif lié à la mesure avec la règle même s'il n'a pas acquis l'un des principes. Par ailleurs, nous suggérons des passerelles pour permettre aux élèves en difficulté — si la difficulté ciblée se révèle éphémère — de rejoindre les autres niveaux. Nous situons cette séquence avant la mesure d'aire du rectangle avec un carreau et après des exercices (usuels en CM2) de rappel du travail réalisé en CM1 (4^e année) : comparaison indirecte des aires par

³ L'évaluation visera à identifier les connaissances mathématiques des élèves pour ainsi pouvoir offrir à chacun un enseignement adapté à ses connaissances.

découpage-recollement, mesure d'aire par l'addition, via l'utilisation d'une unité de mesure d'aire non standard. Le pré-test doit permettre de déterminer les 4 groupes et donc balayer tous les principes.

Tableau 1 – Séquence sur l'aire

	Groupe 1 (classique)	Groupe 2 (difficultés en 2D)	Groupe 3 (sans multiplication)	Groupe 4 (G2 et G3)
Définition du groupe	Les principes 1, 2 et 4 sont acquis.	Les principes 1 et 2 ne sont pas acquis mais la multiplication l'est.	Les principes 1 et 2 sont acquis mais pas la multiplication.	Les principes 1 et 2 ne sont pas acquis et la multiplication non plus.
<u>Séance</u> de révision des prérequis	Ce groupe fait un autre travail (décroché).	Retour sur les principes 1 et 2. Les élèves de ce groupe ont du mal à couvrir le rectangle par pavage. Nous proposons en annexe des étapes intermédiaires (rectangle ligné, coloriage de « translations progressives de déformations compensées sur carrés ») et le travail proposé par Chambris (voir tableau en Annexe).	Retour sur la multiplication et son lien avec la représentation sous forme de tableau. Par exemple, à travers les boîtes de chocolat et la représentation commutative (6x4 ou 4x6) dans J'apprends les maths CE1 (2008, p. 88-89) ou le lien entre multiplication, addition itérée et quadrillage associé dans J'apprends les maths CE1 (2008, p. 90, voir Annexes).	Retour sur 1 et 2 et sur la multiplication et son lien avec la représentation sous forme de tableau.
Séance 2	Principes 4 et 5	Principes 4 et 5 Si 1 et 2 peuvent être acquis : révisions et principe 5. Puis, retour dans G1 avec objectif 1. Si 1 et 2 toujours pas acquis : objectif 2.	Si la multiplication est acquise : principes 4 et 5 Puis, retour dans G1 avec objectif 1. Sinon : objectif 3.	Si 1 et 2 peuvent être acquis ainsi que la multiplication : révisions des principes 4 et 5. Puis, retour dans G1 avec objectif 1. Si l'un des 2 est acquis : voir une des colonnes précédentes. Si 1 et 2 toujours pas acquis et la multiplication n'est pas acquise : objectif 4.

Séance de découverte	Objectif 1 Mesurage en dimensions 1 et 2	Objectif 2 Mesurage en dimension 1	Objectif 3 Mesurage en dimensions 1 et 2	Objectif 4 Mesurage en dimension 1
	Principe 5 Le nombre d'unités de chaque ligne et colonne doit être déterminé depuis les longueurs et côtés du rectangle. Cela amène à dégager la formule. Utilisation de : La grille effacée dans J'apprends les maths CM2 (2008, p. 75) > Voir le tableau en Annexe.	Par exemple, (re)faire l'activité de construction de la règle pour la voir comme un outil permettant de compter le nombre de fois qu'une unité de mesure de longueur est reportée, plutôt qu'un numéro au bout d'une ligne graduée. C'est a priori abordé en cycle 2 et nécessaire pour comprendre le lien entre mesure des côtés du rectangle et compte de carreaux, donc pour comprendre la formule de calcul d'aire. (Voir le tableau en Annexe).	Voir Chambris⁴ 	
Réinvestissement Remédiation	Application de la formule.	Travail de géométrie pour acquérir 1 et 2.	Travail sur la multiplication.	Travail de géométrie pour acquérir 1 et 2. Travail sur la multiplication (suite).

Après cette séquence, nous prenons en compte la partie des travaux de Perrin-Glorian (1990) qui nous semble, d'après notre analyse, avoir été la moins intégrée dans les manuels scolaires. Nous distinguons quatre objectifs (un par colonne) que nous présentons dans le tableau 2 en Annexe. Nous présupposons une deuxième évaluation diagnostique, à la fin de la première séquence, afin de reformer les groupes en fonction des difficultés encore constatées ou surmontées à l'issue du premier travail. Ce travail peut être réalisé à une période différente de la première séquence, afin de laisser plus de temps à la remédiation concernant l'espace 2D ou la multiplication.

⁴ Dans son commentaire sur les projets de programmes, Chambris (2024, p. 11) rappelle l'importance du raisonnement multiplicatif. Elle propose d'insister sur les étapes suivantes, qu'elle juge indispensables pour travailler à la fois sur le sens de la multiplication et la visualisation du tableau en fonction à la fois de cases (pavage) et de lignes et colonnes. Selon Chambris, il faut que l'élève voie ces problèmes de façon unidimensionnelle, pour qu'il puisse ensuite les voir de façon bidimensionnelle. Il y a donc selon son point de vue, l'aire unidimensionnelle et l'aire bidimensionnelle.

II. CONCLUSION

L'inclusion que nous proposons est spécifique, car elle s'appuie sur des résultats en mathématiques, obtenus lors du pré-test, pour constituer des groupes de besoin. Ainsi, tous les élèves doivent pouvoir travailler sur un ou plusieurs objectifs d'apprentissage communs au groupe classe (en mobilisant ou non la bidimensionnalité suivant les possibilités de l'élève). Nous prenons ainsi en compte les nuances proposées par Roiné (2014) concernant une classification par remédiation uniquement cognitive, ou encore le fait de n'aborder les difficultés que par les aspects de contrat didactique ou attentionnel. Nous essayons, en effet, de prendre en compte les difficultés qui peuvent se poser d'un point de vue à la fois géométrique et d'un point de vue lié au mesurage dans un contexte bidimensionnel, en croisant notre étude de manuels avec les travaux de Perrin-Glorian (1990), Outhred et Mitchemore (1992, 1996). Par ailleurs, nous proposons des passerelles qui permettent de réinterroger régulièrement la possibilité qu'un élève ait dépassé ses difficultés au cours de la séquence, pour éviter qu'il ne soit associé définitivement à un niveau, sans que cela ne soit requestionné régulièrement. Cette séquence peut être adaptée à des dispositifs particuliers puisqu'il suffit de s'appuyer sur l'évaluation diagnostique qui sera fournie et d'en déduire le parcours à adopter. La mise en œuvre en classe, en revanche, semble complexe pour l'enseignant, qui doit réaliser deux évaluations diagnostiques et des évaluations continues pour juger si le groupe reste pertinent pour l'élève, ainsi qu'assurer la gestion d'une séquence longue avec un programme chargé. Ce point sera à réévaluer après l'expérimentation en classe et se place dans le débat plus large des conditions offertes aux enseignants pour qu'ils puissent mettre en œuvre la différenciation et l'inclusion. Nous avons proposé une séquence différenciée selon quatre niveaux de différenciation. Ceux-ci permettent une inclusion des élèves ayant des difficultés durables qu'ils soient ou non scolarisés dans des dispositifs spécifiques. La spécificité de ce type d'inclusion est que nous proposons des passerelles afin de réinterroger régulièrement la possibilité que l'élève ait dépassé ses difficultés. Si ces dernières ne peuvent être surmontées, nous conservons certains objectifs communs concernant l'apprentissage du mesurage et des grandeurs. Nous espérons éviter, de cette façon, de proposer uniquement des activités totalement décrochées aux élèves à BEP, voire à visée essentiellement cognitive. Les élèves risqueraient de ne suivre la classe que dans un univers parallèle, sans passerelle possible, en tout cas sur le plan des apprentissages.

RÉFÉRENCES

- Artigue, M. (1989). Épistémologie et didactique. *Cahier de DIDIREM*, 3, 1-29.
- Comité commun pour les guides en métrologie. (2012). *Vocabulaire international de métrologie – concepts fondamentaux et généraux et termes associés (VIM)* (Publication n° JCGM 200 :2012).
- Dessertine, D. (2004). [Compte rendu du livre *L'« échec scolaire » : histoire d'un problème public*, par B. Ravon]. *Revue d'histoire de l'enfance « irrégulière »*, (6), 308-310. <https://doi.org/10.4000/rhei.119>
- de Varent, C. (2023). La mesure entre géométrie et formules : l'aire du rectangle en CM2 – analyse de manuels scolaires. *Grand N*, (112), 25-63. <https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/grand-n/consultation/numero-112-grand-n/2-la-mesure-entre-geometrie-et-formules-l-aire-du-rectangle-en-cm2-analyse-de-manuels-scolaires-1387480.kjsp?RH=1708448823811>
- Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche [MEESR]. (2016). *Grandeurs et mesures au cycle 3*. <https://eduscol.education.fr/document/16513/download>
- Organisation des Nations unies pour l'éducation, la science et la culture [Unesco]. (2020). *Rapport mondial de suivi sur l'éducation : inclusion et éducation : tous, sans exception*. <https://doi.org/10.54676/BIEV1074>

- Outhred, L. et Mitchelmore, M. (1992). Representation of area: A pictorial perspective [Représentation de l'aire : une perspective picturale]. Dans W. Geeslin et K. Graham (dir.), *Actes de la 16^e conférence PME* (vol. 2, p. 194-201). International Group for the Psychology of Mathematics Education.
- Outhred, L. et Mitchelmore, M. (1996). Children's intuitive understanding of area measurement [La compréhension intuitive de l'aire chez les enfants]. Dans L. Puig et A. Gutiérrez (dir.), *Actes de la 21^e conférence PME* (vol. 3, p. 312-319). International Group for the Psychology of Mathematics Education.
- Perrin-Glorian, M.-J. (1990). L'aire et la mesure. *Petit x*, (24), 5-36. <https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/petit-x/consultation/numero-24-petit-x/1-l-aire-et-la-mesure--567643.kjsp>
- Rogalski, J. (1984). *Acquisition de la bidimensionalité (combinatoire, espace, mesure) chez les élèves d'âge scolaire et préscolaire* [Thèse de doctorat, Université Paris VII]. HAL theses. <https://theses.hal.science/tel-01267409/>
- Roiné, C. (2009). *Cécité didactique et discours noosphériens dans les pratiques d'enseignement en SEGPA : une contribution à la question des inégalités* [Thèse de doctorat, Université de Bordeaux 2]. Theses.fr. <https://theses.fr/2009BOR21629>
- Roiné, C. (2014). L'élève en difficulté : retours sur une psychologisation du social. *La nouvelle revue de l'adaptation et de la scolarisation*, 66(2), 13-30. <https://doi.org/10.3917/nras.066.0013>
- Sensevy, G., Toullec-Théry, M. et Nédelec-Trohel, I. (2006). À propos de l'enseignement des mathématiques en adaptation et intégration scolaire : une étude de cas comparative en regroupement d'adaptation. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 26(3), 151-206.
- Toullec-Théry, M. et Marlot, C. (2013). Les déterminations du phénomène de différenciation didactique passive dans les pratiques d'aide ordinaire à l'école élémentaire. *Revue française de pédagogie*, (182), 41-54. <https://doi.org/10.4000/rfp.3998>

ANNEXES

Séquence qui a été menée en classe entière

La séquence mentionnée ici comme différenciable a d'abord été expérimentée en classe entière et présentée comme des révisions. Voici les étapes de la séquence qui a été menée.



Figure 1 – Étapes des expérimentations en classe

Séquence de révisions à visée inclusive – Cycle élémentaire

Étape 1 : Travail sur la prise en compte des lignes et colonnes grâce aux tableaux

Les élèves apprennent à lier les entrées et les sorties : chaque case devient le résultat d'une prise en compte à la fois des lignes et des colonnes. Ce travail est réalisé via des jeux du commerce et des représentations de plus en plus abstraites.



Figure 2 – Jeux sur les tableaux issus du commerce



Figure 3 – Abstraction de la multiplication en tableau

Étape 2 : Introduction à la multiplication par l'organisation en tableau

Les élèves renforcent la notion de multiplication sur tableau à travers la prise en compte des lignes et colonnes de façon aidée via la représentation en paquets (Noums, J'apprends les maths). Cette étape demande d'identifier le lien entre le nombre de lignes, de colonnes, et le résultat du produit. Elle permet de revoir la structuration du raisonnement multiplicatif et d'inciter à éviter l'addition itérée lorsque la formule sera introduite.

Étape 3 : Prise en compte des deux dimensions du rectangle

Les élèves renforcent l'observation des dimensions du rectangle via le coloriage de translations progressives de déformations⁵ et des comparaisons d'aires qui demandent petit à petit de prendre en compte longueur et largeur à la fois (proposition de C. Chambris).

⁵ <https://fr.tessellations-nicolas.com/methode.php>

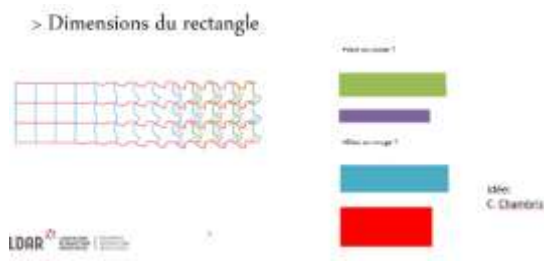


Figure 4 – Prise en compte des dimensions du rectangle



Figure 5 – Mesure par report⁶

Étape 4 : Mesure par report

Les élèves revoient la mesure (de longueur ici) par report afin de construire une représentation plus concrète des grandeurs. Ils reportent une unité de mesure (allumette) puis construisent une règle. Cette approche permet de faire le lien entre la répétition d'une unité (mesure) et la règle.

Items différenciables

Exemples de propositions pour les items mentionnés dans le tableau 1 - Séquence 1.

Tableau 2 – Propositions de Perrin-Glorian classées en fonction de nos objectifs

1.1 Travail sur le mesurage en dimension 1, favorisant aussi le principe 3 Cette étape permet de travailler sur la notion de mesure par report d'une unité pour les élèves qui ne pourraient pas travailler en dimension 2 (Outhred et Mitchelmore, 1992). Cela permet de voir la règle comme un outil permettant de compter le nombre de fois qu'une unité de mesure de longueur est reportée, plutôt qu'un numéro au bout d'une ligne graduée. Elle est nécessaire pour comprendre le lien entre mesure des côtés du rectangle et compte de carreaux, donc pour comprendre la formule de calcul d'aire.  Diapositive issue de la formation des futurs enseignants du premier degré, ESPE de Paris 2018	1.2 Travail visant à favoriser les principes 3, 4 et 5 et à déduire la formule – pour les élèves ayant acquis ou retravaillé sur la multiplication Exercice pour faire le lien entre le nombre de centimètres sur la longueur et le nombre de centimètres carrés. Dans cette phase, l'élève peut comprendre explicitement pourquoi il est possible d'utiliser la formule. Le pavage semi-effacé assure le besoin pour l'élève de mesurer la longueur avec la règle.  La grille effacée dans J'apprends les maths CM2 (2008, p. 75) La lecture de 16 cm sur la règle, lui permet d'imaginer les 16 carreaux du pavage de la première ligne. En mesurant la hauteur, il pourra imaginer le nombre de lignes. La formule apparaît ainsi comme un raccourci : je peux multiplier « longueur $\times$ largeur » plutôt que de quadriller, parce que le nombre de centimètres me donne le nombre de cm^2 sur une ligne ou colonne.
--	--

⁶ Exemple : formation de l'ESPE de Paris, règle de *J'apprends les maths*.

1.3 Exemple de travail de remédiation sur les principes 1 et 2.

Les élèves de ce groupe ont du mal à couvrir le rectangle par pavage ; il y a des trous, des juxtapositions ou une taille de l'unité de mesure qui n'est pas constante ; ou l'élève tente de couvrir correctement toute la surface du rectangle, mais il a des difficultés à faire congruer ou systématiser son étalonnage. Outhred et Mitchelmore (1996) montrent que ces points sont nécessaires pour voir le pavage comme des lignes et colonnes et pouvoir non seulement compter le nombre de carreaux au total mais aussi mesurer les côtés du rectangle et comprendre pourquoi le faire.



Du rectangle vierge à paver vers une première étape déjà lignée

Outhred et Mitchelmore ont montré qu'il était difficile de couvrir un carré par report, utilisant ou non la règle (tâches MT1 et MT2), en lien avec des élèves qui ne voient pas le pavage du point de vue des lignes et colonnes. Nous proposons de donner dans un premier temps un étalon unité carré tangible ainsi qu'un rectangle dont les lignes ou les colonnes sont tracées. Ainsi le geste de l'élève le conduit d'une part à reporter effectivement une unité tangible, mais par ailleurs à s'appuyer sur les lignes pour créer un pavage lui-même, donc à voir le rectangle ligné comme pavable.

La méthode de coloriage de « translations progressives de déformations compensées sur carrés » semblerait aussi pouvoir permettre de se représenter plus fortement le pavage en termes de lignes (la déformation amène le regard sur la ligne, ici).



Translations progressives de déformations compensées sur carrés.

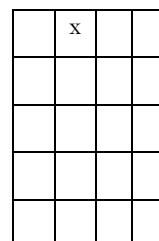
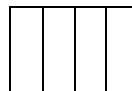
Nous nous inspirons du travail (de la théorie et de son exercice pratique) de Chambris (voir colonne de droite) pour proposer ces étapes qui nous semblent être proches de sa démarche.

1.4 Travail de remédiation sur la multiplication et le lien au tableau

Pour les élèves n'ayant pas fait le lien entre multiplication et quadrillage, il semble possible de proposer des activités issues de manuels de cycle 2 en remédiation. Voir par exemple : Multiplication et commutativité dans J'apprends les maths CE1 (2008, p. 88-90).

Étape 1/ Faire réaliser aux élèves que le fait de prendre 4 fois des boîtes de 5 cases remplies d'un chocolat peut se traduire par un ensemble de 4 colonnes. La boîte de chocolat est l'unité considérée, qui est prise 4 fois. La colonne a bien un sens épistémologique dans ce modèle, et représente les boîtes.

Les lignes n'ont pas de sens épistémologique dans ce modèle, ce sont les cases qui en ont. Ainsi, un travail en amont sur le positionnement (i,j) dans un tableau pourrait être facilitant pour la seconde étape. L'étape 2 est nécessaire pour faire le lien entre la conceptualisation de la multiplication, le pavage, les colonnes (boîtes de chocolat) et les lignes (qui n'ont de sens que pour donner une indication de position de la case).



Étape 2/ Faire réaliser aux élèves que, par exemple, le chocolat 1 de la boîte 2 se trouve sur la case positionnée en (2,1). C'est-à-dire entrer dans un raisonnement bidimensionnel qui prend en compte les lignes.

Certaines propositions (en italique) semblent accessibles à travailler en classe entière, puisqu'il est possible de travailler à partir du pavage sans travailler la prise en compte des lignes et colonne (aspect unidimensionnel en 2D). Nous ne les précisons pas ici. Pour les autres, qui impliquent l'aspect bidimensionnel, des modifications devront être proposées pour les groupes 2, 3 et 4. Les propositions sont numérotées sans notion de difficulté.

	Détacher la mesure du pavage	Distinction entre aire et surface	Relations entre l'aire de l'unité de mesure et la mesure de l'aire de la surface	Bidimensionnalité
1	<i>Proposer aux élèves une aire qui n'est pas mesurable avec les carrelages qui sont mis à leur disposition.</i>	<i>Travailler sur la conservation ou non de l'aire par transformation.</i>	Créer un tableau pour exprimer que toute aire mesurée avec une unité u peut être exprimée avec n'importe quelle unité en relation avec u .	Travailler sur la relation entre l'aire et les dimensions des côtés en fonction du pavage mis à disposition, et la variation de l'aire du rectangle en fonction des côtés.
2	<i>Travailler sur différents pavages possibles pour une même surface.</i>	<i>Travailler sur la distinction entre surface et aire pour l'unité de mesure elle-même.</i>	<i>Travailler sur les correspondances entre unités légales.</i>	Pointer les différences et les relations entre aires et longueurs. Travailler sur la relation entre les dimensions du rectangle et l'aire, ainsi que l'agrandissement.
3	<i>Travailler sur l'encadrement.</i>			Donner des consignes visant à discuter les erreurs suivantes : « un carré de côté 0,5 cm est un demi-centimètre carré » et « un parallélogramme d'aire 1 cm^2 a tous ses côtés de longueur 1 cm ».