L'ÉQUATION FONCTIONNELLE DE CAUCHY : UN OUTIL POUR RENDRE VISIBLE L'ORDRE EN ANALYSE ?

| PLANCHON* GAËTAN ET DURAND-GUERRIER** VIVIANE

Résumé | Dans cette communication, nous présentons les premiers résultats d'une expérimentation menée en 3e année de licence de mathématiques (parcours enseignement) visant à rendre visible le rôle de l'ordre en analyse autour de la résolution de l'équation fonctionnelle $f(x+y)=f(x)+f(y)$ dans différents ensembles de nombres et différentes classes de fonctions. Ceci s'inscrit dans la perspective de la seconde discontinuité de Klein visant à relier les mathématiques universitaires et les mathématiques du secondaire.

Mots-clés : didactique des mathématiques, épistémologie des mathématiques, équations fonctionnelles, ordre, double discontinuité de Klein

Abstract | In this paper we present the first results of an experiment carried out in the third year of a mathematics degree course (teaching path), which aims to show the role of order in analysis in solving the equation $f(x+y)=f(x)+f(y)$ in different sets of numbers and different classes of functions. This is in line with Klein's second discontinuity, which aims to link university mathematics with secondary school mathematics

Keywords: Didactics of mathematics, epistemology of mathematics, functional equations, order, Klein double discontinuity

I. INTRODUCTION

Pendant les études à l'université en France le rôle de l'ordre est souvent masqué, notamment en analyse : c'est par exemple le cas pour la définition de l'intégrale où l'utilisation de la notion de limite remplace la notion de borne supérieure ou encore par l'utilisation de théorèmes puissants dans les preuves (propriété des limites de fonctions par exemple). Nous faisons l'hypothèse que le bloc logos des praxéologies (Chevallard, 1999a, 2017) liées à l'ordre est insuffisamment travaillé à l'université, ce qui ne permet pas une transition réussie entre le secondaire et le supérieur (Winsløw, 2006). Comme le montrent les résultats de Branchetti et Durand-Guerrier (2023) les étudiants futurs enseignants de mathématiques éprouvent de grandes difficultés à penser les ensembles ordonnés comme des structures pouvant avoir certaines propriétés (être dense, discret, continu) ; ceci conduit les autrices à considérer qu'il est nécessaire de proposer des stratégies d'enseignement pertinentes afin de travailler ces concepts.

Dans cette perspective, nous faisons l'hypothèse que l'étude des équations fonctionnelles de Cauchy (Cauchy, 1821) peut permettre de mettre en évidence le rôle de l'ordre dans des preuves à l'interface entre analyse et algèbre (Durand-Guerrier & Planchon, 2024). Pour notre étude, nous avons retenu la première équation de Cauchy ($f(x+y)=f(x)+f(y)$). Le choix de cette équation est motivé d'une part par son importance en mathématiques à l'interface entre algèbre et géométrie (Cauchy, 1821, Hamel 1905, Banach, 1920, Sierpinski, 1920), et d'autre part par la possibilité de proposer des preuves faisant appel à la définition de la borne supérieure qui sont accessibles en début d'université. En outre, cette équation entretient des liens étroits avec la linéarité et la notion de proportionnalité (Bourgade et Durringer, 2024), qui sont abordées en France dès l'école primaire et au collège (Comin, 2002).

* IMAG, Univ Montpellier, CNRS, Montpellier – France – gaetan.planchon@umontpellier.fr

** IMAG, Univ Montpellier, CNRS, Montpellier – France – viviane.durand-guerrier@umontpellier.fr

Dans cette communication, nous présentons une expérimentation menée en 3e année de licence de mathématiques (parcours enseignement) à l'Université de Montpellier. L'objectif est de rendre visible différents aspects relatifs à l'ordre à travers une activité de résolution de l'équation fonctionnelle de Cauchy $f(x+y) = f(x) + f(y)$ dans différents ensembles de nombres et pour différentes classes de fonctions. La méthodologie générale de notre étude est celle de l'ingénierie didactique (Gonzales-Martin et al., 2014) : nous avons conduit dans un premier temps une analyse épistémologique qui, d'une part, nous a permis d'identifier les principales variables didactiques et de choisir leurs valeurs dans l'expérimentation et, d'autre part, de discuter en retour, à partir des productions des étudiants, de la pertinence de ces choix au regard des objectifs d'apprentissage. Cette étude s'inscrit dans le contexte plus large de l'étude de la double discontinuité de Klein (Kilpatrick, 2019) et de la mise en lumière des liens entre les mathématiques du supérieur et les mathématiques du secondaire.

Dans une première partie, nous présentons les principaux éléments de notre étude épistémologique comme contribution à notre analyse a priori. Dans une seconde partie, nous présentons notre organisation didactique, le contexte de notre expérimentation et la méthodologie d'analyse des données recueillies. Enfin, nous présentons les premiers résultats de nos analyses visant à évaluer la potentialité de cette activité à faire émerger différentes notions liées à l'ordre avant de la retravailler et l'expérimenter à plus grande échelle. Nous apportons des premiers éléments de réponses aux deux questions de recherche ci-dessous :

QR1 : Une situation construite autour de l'équation de Cauchy permet-elle a priori de contribuer à travailler le rôle de l'ordre en analyse dans la perspective de la seconde discontinuité de Klein ?

QR2 : Une telle situation permet-elle à des étudiants se préparant aux métiers d'enseignants du secondaire (3e année de licence ou master) de mobiliser leurs connaissances universitaires liées à l'ordre ?

II. ÉTUDE ÉPISTÉMOLOGIQUE

1. La solution de Cauchy (1821)

Dans le premier volume de son cours de l'école royale polytechnique intitulé Analyse algébrique, Cauchy (1821) consacre le chapitre V à la *Détermination de fonctions continues d'une seule variable propre à vérifier certaines conditions*, en commençant par les quatre équations fonctionnelles conservant ou échangeant la somme et le produit. Nous nous intéressons ici à la première de ces quatre équations : $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Comme le souligne Dhombres (1992), Cauchy n'est pas le premier à s'intéresser à ces quatre équations ; ce qui est nouveau, c'est la méthode employée d'abord pour la première équation, et ensuite appliquée aux trois autres. De fait, Cauchy (p. 105-106) commence par établir qu'étant donné un entier naturel m et une constante positive, a (sous-entendu réelle) une solution g de (1) vérifie $g(ma) = mg(a)$; il étend ensuite ceci au cas où m est un rationnel positif. Il étend finalement cette relation à un nombre quelconque (sous-entendu réel positif) par passage à la limite en utilisant la continuité de la fonction g (il s'est placé d'emblée dans la classe des fonctions continues) et en utilisant (implicitement) la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, puis en utilisant la parité, il montre que $g(0) = 0$ et que la relation s'étend aux réels négatifs. En choisissant 1 comme valeur de a, il conclut que les fonctions cherchées sont les fonctions linéaires.

Résolution par extensions successives des domaines de résolutions

Une autre approche possible pour résoudre cette équation consiste à la résoudre d'abord dans l'ensemble des entiers naturels, puis d'étendre successivement à l'ensemble des entiers relatifs, puis des rationnels, sans faire d'hypothèse au départ sur les propriétés des fonctions cherchées. Nous présentons cette méthode qui permet de mettre en lumière la nécessité de faire des hypothèses sur la fonction pour le passage de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$, et la possibilité d'envisager pour cela d'autres classes de fonctions que les fonctions continues.

On commence par établir que les fonctions cherchées sont linéaires sur l'ensemble des entiers naturels, puis en utilisant la parité, sur l'ensemble des entiers relatifs et enfin sur l'ensemble des rationnels : en utilisant que $g(m) = g\left(n\frac{m}{n}\right) = ng\left(\frac{m}{n}\right)$ et $g(m) = mg(1)$, on en déduit que $g\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n}g(1)$ pour m et n entiers relatifs, n non nul, autrement dit les fonctions cherchées sont des fonctions linéaires sur $\mathbb{Q}$.

Arrivé à ce point, il est manifeste que l'on ne peut pas étendre le procédé sans faire des hypothèses complémentaires sur les fonctions cherchées.

Il semble que Cauchy n'ait pas envisagé de résoudre ces équations fonctionnelles dans des classes autres que celles des fonctions continues. Ceci sera fait au début du 20e siècle par plusieurs mathématiciens dont Hamel (1905), Banach (1920) ou Sierpinski (1920).

Résolutions de l'équation dans l'ensemble des réels dans des classes de fonctions autres que la classe des fonctions continues

Hamel (1920) a démontré, en utilisant l'axiome du choix, l'existence des bases de $\mathbb{R}$ vu comme un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ (bases de Hamel). Une telle base est une famille de réels $(x_a)_{a\in A}$, telle que tout réel *x*, peut s'écrire de façon unique comme une combinaison linéaire finie de certains éléments de $(x_a)_{a\in A}$. C'est-à-dire que pour tout réel *x*, il existe un unique entier naturel n et une unique famille $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ de rationnels et une unique famille $x_{a_1}, \dots, x_{a_n}$ d'éléments de *A* tels $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_{a_i}$.

Ainsi, si on se donne une telle base et une famille quelconque de réels $(y_a)_{a\in A}$, alors l'application qui a tout réel $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_{a_i} \in \mathbb{R}$ associe $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_{a_i}$ (en particulier, pour tout $a \in A,\ y_a = f(x_a)$) vérifie bien l'équation de Cauchy. Par ailleurs, s'il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que, pour tout $a \in A, y_a = rx_a$, alors la fonction solution est continue et de la forme $x \mapsto rx$. S'il n'existe pas un tel réel *r*, alors il existe a et b dans A tels que $\frac{f(x_a)}{x_a} \neq \frac{f(x_b)}{x_b}$. Par suite, le graphe de *f*, c'est-à-dire l'ensemble $\{(x, f(x)),\ x \in \mathbb{R}\}$ contient la somme directe $\mathbb{Q}(x_a, f(x_a)) \oplus \mathbb{Q}(x_b, f(x_b))$ et donc le graphe de f est dense dans $\mathbb{R}^2$. Ceci prouve qu'il existe des solutions de l'équation de Cauchy discontinues : Hamel a montré que de telles solutions sont totalement discontinues.

Banach (1920) et Sierpinski (1920) se sont aussi intéressés à l'équation de Cauchy et ont démontré que les seules solutions définies et mesurables sur $\mathbb{R}$ de l'équation de Cauchy sont les fonctions continues. Banach s'appuie sur le théorème de Lusin[1] pour démontrer ce résultat. En fait, il montre que si une fonction est mesurable et solution du problème de Cauchy, alors elle est nécessairement continue. Le cas continu est celui traité par Cauchy, donc Banach en conclut que les seules fonctions mesurables sur $\mathbb{R}$ solution de l'équation de Cauchy sont celles de la forme $x \mapsto rx$. Sierpinski, quant à lui, n'utilise pas le théorème de Lusin[2]. En considérant une fonction *f*, définie sur $\mathbb{R}$, solution mesurable de l'équation de Cauchy, on introduit la fonction définie par $g(x) = f(x) - xf(1)$. Après avoir

[1] Toute fonction mesurable définie et presque partout finie dans [0,1] est continue, quand on néglige un ensemble de mesure inférieur strictement à ε, ε étant aussi petit que l'on veut (Sierpinski, 1922).

[2] En fait, sa démonstration repose sur le lemme suivant : Si deux ensembles mesurables linéaires P et Q sont de mesure positive, il existe un point p de P et un point q de Q tel que la distance entre p et q est rationnelle.

montré que cette fonction vérifie l'équation de Cauchy, et pour tout *r* rationnel, $g(r) = 0$, il en déduit que $g(x) = 0$ pour tout réel x : en effet, s'il existe un réel a tel que $g(a) \neq 0$, alors il existe deux réels x_1 et x_2 tels que $g(x_1) > 0$, $g(x_2) < 0$ et $x_1 - x_2$ est rationnel, ce qui est absurde. Ainsi, la fonction f est de la forme $x \mapsto ax$. On notera que, dans cette démonstration, Sierpinski n'a pas recours au résultat de Cauchy sur les solutions continues de l'équation fonctionnelle.

Résolution de l'équation de Cauchy dans la classe des fonctions monotones

Parmi les classes de fonctions pour lesquelles les solutions de l'équation sont nécessairement les fonctions linéaires se trouve la classe des fonctions monotones (Aczel & Dhombres, 1989). Cette classe, bien qu'incluse dans la classe des fonctions mesurables, nous intéresse tout particulièrement pour deux raisons. La première est sa présence dans le secondaire, notamment dans le cadre de l'étude des variations des fonctions. La seconde est la possibilité d'établir directement que la monotonie est une condition suffisante pour que les solutions soient nécessairement linéaires sans établir d'abord que les fonctions sont continues. Nous donnons trois preuves de ce type dans Durand-Guerrier et Planchon (2024), l'une s'appuyant sur la propriété des suites adjacentes, les deux autres sur la borne supérieure via la méthode des coupures.

En conclusion de notre étude épistémologique, nous considérons que l'équation fonctionnelle de Cauchy est un bon candidat pour mettre en lumière des liens entre les mathématiques universitaires et les mathématiques enseignées dans le secondaire en ce qui concerne les questions liées à l'ordre à travers différents aspects : propriétés de la relation d'ordre dans $\mathbb{R}$, continuité, monotonie, densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, complétude.

III. ÉTUDE EXPÉRIMENTALE

L'objectif de notre étude expérimentale est d'étudier les potentialités d'une activité portant sur la résolution de l'équation de Cauchy à mobiliser des connaissances universitaires liées à l'ordre sur $\mathbb{R}$ à travers la relation d'ordre et les notions de densité et de complétude. Pour répondre à nos questions de recherche, nous nous plaçons dans le cadre de l'ingénierie didactique décrite par Gonzales-Martin et al. (2014). Il s'agit ici de confronter l'analyse a priori et l'analyse a posteriori dans le cadre d'une réalisation didactique autour de la résolution de l'équation de Cauchy. L'étude épistémologique nous permet d'identifier deux variables didactiques : la classe de fonctions sur laquelle résoudre l'équation de Cauchy et le domaine de définition des fonctions. L'expérimentation a été conduite avec un groupe d'étudiant de 3e année de licence de mathématique, dans un module spécifique du parcours enseignement des mathématiques de l'Université de Montpellier. Dans le cadre de ce parcours, les étudiants suivent un module de 82 heures : « Compléments de mathématiques pour l'enseignement. » Dans ce module, l'objectif est de mobiliser des outils mathématiques déjà travaillés dans les premières années de licence en intégrant une importante activité de résolution de problème. Ainsi, les séances sont organisées autour de différents aspects de la résolution de problèmes : techniques de recherche en groupe, résolution partielle, questions liées à la preuve et communication des résultats.

Une étudiante et cinq étudiants ont participé à notre expérimentation et ont constitué librement deux groupes de trois. L'enseignant distribue alors l'énoncé ci-dessous.

On considère l'équation (dite de Cauchy) (E) d'inconnue f :

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Le but est de résoudre l'équation (E).

Vous formulerez des hypothèses sur le domaine de définition des fonctions, ainsi que de la classe des fonctions sur lequel vous résolvez l'équation.

Consignes : pendant 30 minutes, vous travaillerez individuellement à ce problème en écrivant, si possible, les questions que vous vous posez. Puis, pendant 1h, vous travaillerez par groupe de 3.
A l'issue de cette phase, chaque groupe viendra exposer ses questions et reponses éventuelles pour une discussion collective.

Figure 1 *– Fiche étudiant*

Un temps de travail individuel (30 minutes) est prévu, avant un temps de réflexion en commun, par groupe de 3, suivi d'un temps d'exposé au tableau. Le temps de travail individuel de 30 minutes correspond à une phase de dévolution, où chacun, individuellement, peut tenter de mettre en œuvre des techniques de résolution. La seconde phase en groupe a pour fonction de permettre aux étudiants du groupe de confronter les différentes techniques qu'ils ont mises en œuvre et d'expliciter éventuellement des éléments de logos (justification des techniques). La phase d'exposé devant le reste du groupe a vocation à faire formaliser les techniques, et les justifications qui vont avec.

Il y a deux variables didactiques mathématiques principales dans cette situation : le domaine de définition des fonctions (précisé, ou non précisé) et la classe des fonctions recherchées (précisée, ou non précisée). Dans les deux cas, nous avons choisi de ne pas les préciser dans la première partie de l'activité. Comme nous l'avons vu, selon le choix du domaine de définition, deux preuves différentes peuvent émerger. Pour les classes de fonctions, nous souhaitons voir si la classe des fonctions monotones est mobilisée ou non dans cette première phase. Les données analysées sont les productions des groupes ainsi que les enregistrements des discussions dans les groupes.

En arrivant en 3e année de licence, les étudiants ont déjà rencontré différentes techniques qui sont justifiées par la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ (par exemple pour démontrer les propriétés usuelles de la fonction exponentielle) et ont déjà été confronté au type de tâche : « Résoudre une équation fonctionnelle ». Ainsi, après avoir identifié le type de tâche, les étudiants pourront mettre en œuvre certaines techniques déjà vues à l'université, mais nous faisons l'hypothèse que les discussions sur la validité (ou non) des techniques proposées peut permettre de mettre en lumière le rôle de certaines notions liées à l'ordre.

IV. PREMIERS RÉSULTATS

1. Méthodologie d'analyse

Dans cette section, nous confrontons les productions et discussions des étudiants avec notre analyse épistémologique. Les données analysées sont les productions écrites des groupes ainsi que les enregistrements audios des échanges. Pour répondre à QR2, nous mobiliserons certains outils issus de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) : le rôle des ostensifs (Bosch et Chevallard, 1999) et la notion de praxéologie mathématique (Chevallard, 1999a). Dans les données analysées, nous relèverons certains ostensifs pouvant renvoyer à des praxéologies développées dans le cursus de licence, et nous décrirons les techniques mises en œuvre par les différents groupes, ainsi que les éléments technologiques mis en avant, ou au contraire, non identifiés par les étudiants.

Ce qui émerge de l'analyse des données

Les deux preuves mentionnées dans l'étude épistémologique apparaissent dans les productions des étudiants. La mention de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ est présente dans toutes les productions, ce qui n'est pas le cas d'hypothèses faites sur la fonction. En particulier, la monotonie n'est jamais spontanément mentionnée.

Le premier groupe a identifié la classe des fonctions linéaires comme étant un ensemble de solution. La définition d'une fonction linéaire renvoie à la définition dans l'enseignement supérieur (dans le cadre de l'algèbre linéaire) car ils ont cherché à montrer que si une fonction f est solution de l'équation de Cauchy sur $\mathbb{R}$, alors elle vérifie :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ \forall a \in \mathbb{R},\ f(ax + y) = af(x) + f(y).$$

Pour démontrer ce résultat, ce groupe a montré, comme Cauchy, que pour tout entier naturel n et pour tout réel x, on a $f(nx) = nf(x)$; puis qu'une fonction solution sur $\mathbb{R}$ est nécessairement paire, ce qui permet le passage à $\mathbb{Z}$. Le passage à $\mathbb{Q}$ n'est pas abouti et certains éléments des discussions montre le peu de disponibilité de techniques de travail dans $\mathbb{Q}$ pour certains étudiants

E1.1 : "Je voulais passer par les rationnels (...) je n'ai pas l'habitude de travailler avec les rationnels".

La question de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ est identifiée. Cependant, aucune hypothèse sur la fonction f n'est explicitée (continuité, monotonie, mesurabilité) dans les productions des étudiants du groupe et aucune n'apparaît pas dans les discussions collectives ; on ne trouve dans ces productions que l'expression "par densité...", comme dans l'exemple ci-dessous :

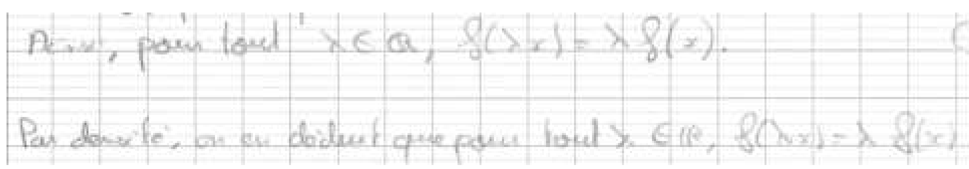

Figure 2 – *Extrait de la production de E1.1*

L'ostensif « par densité » paraît jouer le rôle d'une boite noire sans activer d'éléments théoriques sur la densité. Ainsi, le passage de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$ s'appuie uniquement sur la densité pour conclure à la linéarité des solutions dans $\mathbb{R}$, ce qui ne suffit pas, comme le montre l'existence de solutions discontinues (mentionnées dans notre étude épistémologique.). Nous faisons l'hypothèse qu'à l'université, les conditions de validité de preuves qui mobilisent la densité ne sont habituellement pas explicitées, si bien que celles-ci restent dans le topos de l'enseignant. Dans les données analysées, l'absence de considérations théoriques ne permet pas aux étudiants d'identifier la nécessité d'hypothèses supplémentaires sur la fonction : l'insuffisante mobilisation du logos des étudiants de ce groupe empêche la mise en œuvre d'une technique correcte pour la résolution de la tâche.

Dans *le deuxième groupe*, un des étudiants (E2.2) propose la preuve par extension successive en établissant que les solutions sont linéaires dans $\mathbb{N}$, puis dans $\mathbb{Q}$. Pour le passage de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$, il se place explicitement dans le cadre des fonctions continues et caractérise la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ par l'existence, pour tout réel, d'une suite de rationnels qui converge vers ce réel. Cette production, par contraste avec l'étudiant E1.1, illustre que l'identification d'une hypothèse supplémentaire pour la résolution de l'équation de Cauchy est articulée avec la mobilisation de la notion théorique de densité. Dans ce même groupe, l'étudiant E2.1 évoque explicitement la continuité comme condition nécessaire pour le passage à la limite.

Dans la première partie de l’activité, la classe des fonctions monotones n’apparait jamais comme une classe de fonctions à considérer, contrairement à la continuité qui, comme nous venons de le voir, est mentionnée par certains étudiants en lien avec la densité. Ceci pourrait paraître surprenant car les fonctions monotones jouent un rôle fondamental dans l’enseignement secondaire (étude du sens de variation des fonctions) et dans l’enseignement supérieur (convergence de suites, existence de limites). En revanche, dès que l’enseignant propose la résolution dans la classe des fonctions monotones, les propriétés de la relation d’ordre dans $\mathbb{R}$ émergent du travail des étudiants. L’étudiante E1.1 démontre (voir Figure 3.) que si une fonction *f* est solution de l’équation et croissante, alors *f* est linéaire (c’est à dire vérifie que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$). Pour cela, elle introduit pour un λ donné, deux suites adjacentes de rationnels qui convergent vers λ, et mobilise les différentes propriétés de corps ordonné de $\mathbb{R}$, autrement dit la compatibilité de l’ordre avec les opérations arithmétiques comme elle est travaillée dans le secondaire. Elle exploite également la monotonie de la fonction, en utilisant la conservation de l’ordre dans le cas de la composition avec des fonctions croissantes. La mobilisation de ces notions centrales dans l’enseignement secondaire s’inscrit dans la perspective de seconde discontinuité de Klein visée par cette activité.

Figure 3 – *Extrait de la production de E1.1*

Du point de vue de la *seconde discontinuité de Klein,* on note également qu’au moins un étudiant fait le lien entre la situation proposée, la notion de proportionnalité enseignée dans le secondaire (et même en fin de primaire) et la représentation graphique des fonctions linéaires, comme le montre l’extrait ci-dessous (E2.2), Figure 4. On trouve, dans cette production, différents ostensifs : la définition d’une fonction linéaire comme étant de la forme ax, la « droite passant par l’origine », et la « situation de proportionnalité ». Cela étant, un objectif de l’activité proposée : établir des liens avec des contenus du secondaires sont ainsi établis.

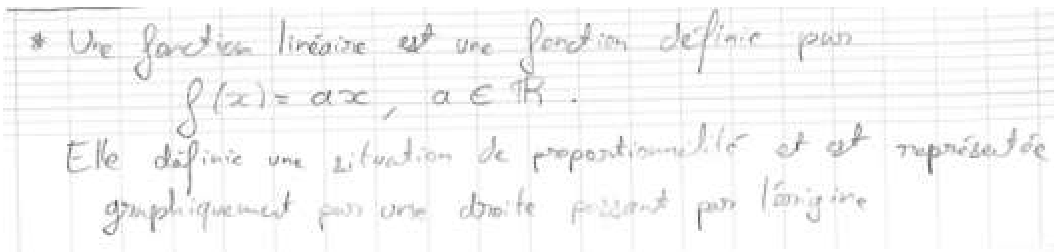
* Une fonction linéaire est une fonction définie par
$f(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$.
Elle définie une situation de proportionnalité et et représentée graphiquement par une droite passant par l'origine

Figure 4 *– Extrait de la production de E2.2*

V. CONCLUSION GÉNÉRALE

L'analyse épistémologique que nous avons présentée dans la première partie nous a permis d'identifier les potentialités de l'équation fonctionnelle de Cauchy pour travailler le rôle de l'ordre en analyse à travers différentes dimensions : la relation d'ordre, la compatibilité avec les opérations arithmétiques, la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ tous les deux munis de l'ordre standard, les propriétés de monotonie, continuité, mesurabilité des fonctions. Les premiers résultats de l'analyse des données confirment ces potentialités visibles dans les productions des étudiants (appel explicite à la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, travail sur la relation d'ordre et la compatibilité avec les opérations arithmétiques). Néanmoins, ces données donnent à voir une maitrise peu assurée des techniques de calculs dans $\mathbb{Q}$, une évocation de la densité sans discussion des conditions d'application ainsi que le fait que les fonctions monotones ne sont pas identifiées comme constituant une classe pertinente dans la résolution de cette équation fonctionnelle. La classe des fonctions continues reste encore mobilisée de manière implicite, comme si la continuité allait de soi, ce qui suggère qu'un travail spécifique sur l'étude de fonctions non continues serait nécessaire à l'université.

Cette expérimentation ouvre des perspectives dans l'étude de la seconde discontinuité de Klein en favorisant comme on l'a vu, des liens explicites entre des connaissances du secondaire et du supérieur. Le développement de praxéologies de Klein (Planchon, 2022, Planchon & Hausberger, sous presse), dans le cadre d'une Activité d'Étude et de Recherche (Chevallard, 1999b) en prenant comme objet d'étude cette équation fonctionnelle pourrait permettre aux étudiants de relier la notion de proportionnalité enseignée au collège avec les fonctions linéaires et les applications linéaires de l'enseignement supérieur en mobilisant les propriétés liées à l'ordre dans le corps ordonné des réels. L'identification des hypothèses formulées dans les situations de modélisation extra-mathématiques que l'on rencontre dans l'enseignement secondaire et au-delà pourraient dans certains cas être reliée aux solutions de l'équation fonctionnelle de Cauchy dans une classe de fonctions donnée (dans certaines situations, l'hypothèse de monotonie peut paraître plus naturelle que l'hypothèse de continuité).

RÉFÉRENCES

Aczel, J. et Dhombres, J. (1989). *Functional equation in several variables*. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9781139086578

Banach S. (1920) Sur l'équation fonctionnelle $f(x+y)=f(x)+f(y)$. *Fundamenta Mathematicae, 1*(1), 123-124. http://matwbn.icm.edu.pl/ksiazki/fm/fm1/fm1115.pdf

Bosch, M. et Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*(1), 77–124. https://revue-rdm.com/1999/la-sensibilite-de-l-activite/

Bourgade, J.-P. et Durringer, C. (2024). Klein's second discontinuity: the case of proportion theory. Dans A. S. González-Martin, G. Gueudet, I. Florensa et N. Lombard (dir.), *Proceedings of the Fifth Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics* (p. 569-577). Escola Univeristària Salesiana de Sarrià; Univ. Autònoma de Barcelona et INDRUM2024. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-04912386

Branchetti, L. et Durand-Guerrier, V. (2023). Secondary prospective teachers grappling with ordered dense or discrete denumerable number sets: a pilot study. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 43*(1), 47–86.

Cauchy, A.-L. (1821*). Cours d'analyse de l'école royale polytechnique. 1*[re] *partie : analyse algébrique*. Debure Frères.

Chevallard, Y. (1999a). Analyse des pratiques enseignants et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. Dans R. Noirfalise (dir.), *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques, Actes de l'Université d'été, 4-11 juillet 1998, La Rochelle - Charentes-Maritimes, Clermont-Ferrant*. IREM de Paris.

Chevallard, Y. (1999b). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*(2), 221–266.

Chevallard, Y. (2017). La TAD et son devenir : rappels, reprises, avancées. Dans G. Cirade, M. Artaud, M. Bosch, J.-P. Bourgade, Y. Chevallard, C. Ladage et T. A. Sierra (dir.), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société* (p. 27–65). https://citatd4.sciencesconf.org

Comin, E. (2002). L'enseignement de la proportionnalité à l'école et au collège. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *22*(2–3), 135–182. https://revue-rdm.com/2002/l-enseignement-de-la/

Dhombres, J. (1992). Le rôle des équations fonctionnelles dans l'analyse algébrique de Cauchy. *Revue d'histoire des Sciences, 45*(1), 25-50.

Durand-Guerrier, V. et Planchon, G. (2024). The study of functional equations to highlight the role of order in proof and proving at the interface between algebra and analysis. Dans A. S. González-Martin, G. Gueudet, I. Florensa et N. Lombard (dir.), *Proceedings of the Fifth Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics* (p. 95-104). Escola Univeristària Salesiana de Sarrià; Univ. Autònoma de Barcelona et INDRUM2024. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-04912386

González-Martín, A. S., Bloch, I., Durand-Guerrier, V. et Maschietto, M. (2014). Didactic situations and didactical engineering in university mathematics: cases from the study of calculus and proof. *Research in Mathematics Education, 16*(2), 117-134.

Hamel, G. (1905). Eine basis aller zahlen und unstetigen lösungen der funktional gleichung. *Mathematische Annalen, 60*(3), 459-462.

Kilpatrick, J. (2019). A double discontinuity and a triple approach: Felix Klein's perspective on mathematics teacher education. Dans H.-G. Weigand, W. McCallum, M. Menghini, M. Neubrand et G. Schubring (dir.), *The legacy of Felix Klein* (p. 215–226). Springer International.

Planchon, G. (2022). *Relations entre connaissances universitaires et connaissances enseignées dans le secondaire : la seconde discontinuité de Klein dans le cas de l'intégrale* [Thèse de doctorat, Université de Montpellier].

Planchon, G. et Hausberger, T (Sous presse). Developing Kleinian praxeologies: The case of the integral. *Recherches en Didactique des Mathématiques*.

Sierpinski, W. (1920). Sur l'équation fonctionnelle $f(x+y)=f(x)+f(y)$. *Fundamenta Mathematicae, 1*(1), 116-122. http://matwbn.icm.edu.pl/ksiazki/fm/fm1/fm1114.pdf

Sierpinski, W. (1922). Démonstration de quelques théorèmes fondamentaux sur les fonctions mesurables. *Fundamenta Mathematicae, 3*(1), 314-321. https://bibliotekanauki.pl/articles/1385869.pdf

Winsløw, C (2006). Transformer la théorie en tâches : la transition du concret à l'abstrait en analyse réelle. Dans A. Rouchier et I. Bloch (dir.), *Actes de la XIII[e] école d'été de didactique des mathématiques* (p 1-12). La pensée Sauvage.