FORMATION MATHÉMATIQUE UNIVERSITAIRE DES FUTURS ENSEIGNANTS AU SECONDAIRE : DISCONTINUITÉS DANS LES TECHNIQUES DE RÉSOLUTION RELATIVES À LA COMBINATOIRE

| MORCOS* JONATHAN ET GONZÁLEZ-MARTÍN** ALEJANDRO

Résumé | Cet article présente les résultats d'une analyse des techniques de résolution de tâches de combinatoire dans des manuels universitaires et guides de l'enseignant au secondaire dans l'optique d'étudier la formation mathématique des futurs enseignants. Nous observons un lien quant à l'utilisation fréquente de la règle du produit, mais aussi des ruptures comme le fait que certaines techniques utilisées dans les manuels au secondaire ne sont pas présentées dans les manuels universitaires, ce qui peut avoir des impacts sur la formation mathématique universitaire pour l'enseignement.

Mots-clés : Mathématiques universitaires dans la formation des enseignants, combinatoire, analyse de manuels, Théorie Anthropologique du Didactique (TAD), seconde discontinuité de Klein

Abstract | This paper presents some results from the analysis and comparison of techniques employed to solve combinatorics tasks in textbooks used in the training of prospective teachers and in secondary textbooks. We observe consistency in the frequent use of the multiplication principle in both samples, but also some inconsistencies, primarily that certain techniques present in secondary education are not covered in university textbooks, which could have an impact on teacher training.

Keywords: University mathematics for prospective teachers, combinatorics, textbook analysis, Anthropological Theory of the Didactic (ATD), Klein's second discontinuity

I. INTRODUCTION

La formation mathématique universitaire des futurs enseignants au secondaire est un enjeu d'actualité de la recherche en didactique des mathématiques. Plusieurs futurs enseignants considèrent leurs cours de mathématiques universitaires comme déconnectés et peu pertinents par rapport à leur profession (Biza et al., 2022). Des ruptures entre les pratiques mathématiques universitaires et celles au secondaire génèrent un phénomène de discontinuité dans le transfert des apprentissages en mathématiques universitaires à l'enseignement au secondaire (Klein, 1908/2016). Afin d'améliorer la formation mathématique des futurs enseignants, il importe de favoriser les points de connexion entre ces niveaux d'enseignement (Wasserman et al., 2023).

En parallèle, l'enseignement de contenus relatifs à la combinatoire — la branche des mathématiques qui s'intéresse à l'énumération et au dénombrement d'ensembles discrets d'objets (Sandefur et al., 2022) — suscite également un intérêt accru récemment. Bien que la combinatoire présente plusieurs difficultés pour les élèves, documentées par la littérature scientifique, l'intégration de tâches de ce domaine mathématique dans les cursus scolaires au secondaire est associée à plusieurs bénéfices potentiels (Sandefur et al., 2022) ; par exemple, l'intérêt marqué des élèves envers ces tâches, les possibilités de raisonnement mathématique profond qu'elles promeuvent et leurs applications possibles en probabilité et en informatique. Or peu de connaissances scientifiques existent à propos de la formation concernant la combinatoire reçue par les enseignants (Lockwood et al., 2020). En particulier, la littérature manque de travaux sur comment les enseignants sont outillés pour faire face

* Université de Montréal — Canada — jonathan.morcos@umontreal.ca

** Université de Montréal — Canada — a.gonzalez-martin@umontreal.ca

aux difficultés de leurs élèves et sur si les cours suivis à l'université s'avèrent pertinents ou non à cet égard.

Le projet de maitrise du premier auteur (Morcos, 2025) s'intéresse simultanément à ces deux enjeux en cherchant à identifier les liens et les ruptures dans les pratiques mathématiques relatives à la combinatoire au secondaire et à l'université. Ce faisant, nous souhaitons étudier la possible discontinuité à laquelle font face les futurs enseignants lors du transfert de leurs apprentissages universitaires en combinatoire vers l'enseignement de cette dernière au secondaire. Dans le présent article, nous nous concentrons sur les techniques de résolution proposées à l'université et au secondaire pour solutionner des tâches relatives à la combinatoire.

Lamanna et al. (2022) s'intéressent aux techniques de résolution en combinatoire employées par des élèves du secondaire. Ils identifient six techniques : 1) l'énumération (aussi appelée la liste ordonnée) ; 2) le diagramme en arbre ; 3) le recours aux règles de la somme, du produit ou du quotient ; 4) la formule de dénombrement ; 5) la référence à un problème équivalent ; et 6) la subdivision en problèmes de plus petites dimensions. Lamanna et al. (2023) notent que des futurs enseignants tendent à se tourner vers une stratégie d'application de formules de dénombrement pour solutionner des tâches de combinatoire, ce qui appelle à une étude du rôle de la formation universitaire à cet égard en raison du risque de limiter la richesse du raisonnement combinatoire développé chez les futurs enseignants et potentiellement aussi, conséquemment, chez leurs élèves. Ces deux éléments nous amènent à questionner l'organisation des contenus de combinatoire autant à l'université qu'au secondaire afin d'identifier les liens entre les techniques de résolution employées ou, dans le cas contraire, des éléments de discontinuité qui pourraient nuire au transfert d'apprentissages universitaires des futurs enseignants vers leur enseignement au secondaire. Nous formulons notre question de recherche comme suit : *Quels sont les liens et ruptures dans les techniques de résolution relatives à la combinatoire présentées dans la formation mathématique universitaire des futurs enseignants au secondaire et dans l'enseignement au secondaire ?*

II. CADRE THÉORIQUE

Nous nous appuyons sur la Théorie anthropologique du didactique (TAD, Chevallard, 1999) afin d'étudier les pratiques mathématiques relatives à la combinatoire à l'université et au secondaire. Ce choix d'approche nous permet de considérer ces deux ordres d'enseignement comme deux institutions distinctes : en parallèle d'une transposition didactique du *savoir savant* au *savoir à enseigner* au sein de ces institutions (Chevallard, 1985), ces dernières imposent des contraintes qui façonnent les manières d'organiser et d'enseigner les contenus (Winsløw et al., 2014). Ces contenus s'en trouvent donc relatifs à l'institution qui les transmet, et le « même » savoir (ici, la combinatoire) peut en fait être abordé de façon très différente en fonction des institutions didactiques où il est utilisé (ici, les cours de mathématiques universitaires dans la formation des futurs enseignants et l'enseignement des mathématiques au secondaire). La TAD est utilisée dans plusieurs autres cas d'études de la formation mathématique des futurs enseignants. Par exemple, Planchon (2022) s'appuie sur cette approche théorique pour analyser les pratiques relatives à l'intégrale aux niveaux universitaire et préuniversitaire et développer un dispositif permettant aux futurs enseignants de prendre conscience des liens et ruptures entre celles-ci afin d'exploiter efficacement leurs apprentissages universitaires pour l'enseignement de l'intégrale. De même, Bourgade et Durringer (2024) répertorient les pratiques relatives à la proportionnalité au secondaire afin d'orienter efficacement la formation des enseignants à cet égard grâce aux outils proposés par la TAD. Nous rejoignons donc un courant de recherche existant à propos du phénomène de discontinuité entre les cours de mathématiques universitaires et l'enseignement au secondaire, et nous nous intéressons spécifiquement aux techniques de résolution relatives à la combinatoire à partir des constats posés par Lammana et al. (2022) et Lammana et al. (2023).

Ainsi, dans cet article, nous cherchons à étudier en particulier une des quatre composantes des contenus de combinatoire, soit les techniques de résolution. De fait, la TAD propose de décomposer le savoir selon les tâches proposées (*T*), les techniques (τ) suggérées pour les résoudre, les justifications (appelées technologies, θ) qui supportent le bloc pratique $[T, \tau]$ nommé *praxis*, et les théories (Θ) qui assurent la validité des explications données (Winsløw et al., 2014). Au sens de la TAD, le quadruplet $[T, \tau, \theta, \Theta]$ forme une praxéologie. Dans le cadre de cet article, nous avons choisi de nous concentrer spécifiquement sur les techniques de résolution des tâches pour trois raisons : 1) cela nous permet d'amorcer un travail d'adaptation des concepts théoriques de Lamanna et al. (2022) au cadre théorique que nous mobilisons dans notre étude (ce qui nous permet en retour d'approfondir les connaissances scientifiques concernant les techniques de résolution en combinatoire ; nous discutons de cela dans la conclusion) ; 2) cela donne une vision globale du travail réalisé même si l'espace de présentation pour ce faire est limité dans le cadre de cet article ; 3) nos analyses préliminaires nous ont amenés à constater que la comparaison des groupements en termes de techniques permet de mettre en lumière des liens et des ruptures entre les institutions que nous étudions. Les analyses de données sont encore en cours ; nous poursuivons le travail afin d'approfondir les constats présentés dans cet article et de les bonifier en considérant les praxéologies complètes qui se rattachent aux techniques discutées ici. De fait, en plus d'une analyse des techniques de résolution, nous sommes bien sûr également intéressés à comprendre le lien entre ces dernières et les autres composantes du savoir, entre autres les tâches associées à chaque technique de résolution. Ces résultats additionnels font et feront l'objet d'autres publications.

III. MÉTHODOLOGIE

Nous souhaitons étudier les techniques relatives à la combinatoire suggérées à l'université et au secondaire. Pour ce faire, nous analysons les manuels de référence des cours de mathématiques universitaires traitant de la combinatoire dans la formation des futurs enseignants (MU) et des manuels scolaires et guides de l'enseignant approuvés par le Ministère de l'Éducation pour l'enseignement au secondaire (MS) : MU1) Rosen (2002) ; MU2) Ross (2014) ; MS1) Miloudi et al. (2008) ; MS2) Guay et al. (2008) ; MS3) Ledoux et al. (2008). Les références complètes de ces manuels sont disponibles ici. Cette approche méthodologique est cohérente avec d'autres travaux adoptant une posture institutionnelle afin de questionner le savoir à enseigner au sein d'une ou plusieurs institutions (p.ex., González-Martín et al., 2013).

Nous procédons selon un processus d'analyse mixte (L'Écuyer, 1990), c'est-à-dire que le cadre théorique et les techniques de résolution décrites par Lamanna et al. (2022) nous servent de guides dans le processus d'analyse sans pour autant restreindre la création de nouvelles catégorisations. Nous ciblons les sections des manuels qui introduisent la combinatoire, même si cette dernière peut ensuite être utilisée dans d'autres sections ou chapitres. Cela nous permet d'étudier les praxéologies introduites formellement dans les MU et dans les MS afin de voir si et comment les futurs enseignants sont outillés pour l'enseignement de la combinatoire au secondaire. Nous nous intéressons au chapitre consacré à la combinatoire dans MU1, à l'exception des sections sur son utilisation en probabilités discrètes, et à toutes les sections du premier chapitre de MU2, dédié à la combinatoire. Dans les MS, la combinatoire est présentée dans le chapitre des probabilités ; nous nous concentrons sur les contenus liés au dénombrement dans chacune des tâches. La Figure 1 montre un exemple d'analyse des données. Le premier auteur a réalisé une phase initiale d'analyse des données, puis le deuxième auteur a réalisé cette même tâche de manière indépendante. Des points de tension mineurs entre les deux analyses ont été corrigés. Les résultats présentés découlent d'analyses qui sont encore en cours ; les conclusions de cet article permettront d'aiguiller les prochaines phases d'analyse des données.

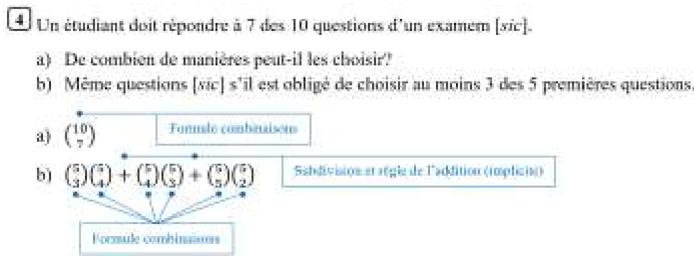


Figure 1 – *Exemple d'analyse des techniques de résolution de tâches de MU2 (p. 26 et 549)*

IV. ANALYSE DES RÉSULTATS

1. Les techniques de résolution présentées au niveau universitaire

Les deux MU analysés sont organisés similairement : les chapitres traitant de dénombrement sont découpés en sections introduisant chacune un type de tâche et une technique de résolution. Une section de tâches variées faisant appel à plusieurs techniques présentées précédemment est aussi incluse à la fin du chapitre de MU2. Dans chaque section des deux manuels (à l'exception de la dernière de MU2), une première tâche sert d'exploration des contenus traités dans la section, puis une technique de résolution est présentée. Le nombre de tâches suivant chaque présentation d'une technique varie considérablement d'une section à une autre. Au total, nous recensons 47 tâches solutionnées dans MU1 et 40 dans MU2. Le Tableau 1 (colonnes bleues) compile les occurrences des techniques dans chacun des MU. Ces derniers ne présentent pas tout à fait les mêmes contenus de combinatoire. Entre autres, MU1 discute du principe d'inclusion-exclusion[1], de tirages avec remise (avec ou sans ordre, c'est-à-dire autant pour des permutations que des combinaisons d'objets) et du principe des nids de pigeon[2], tandis que MU2 discute quant à lui des coefficients multinomiaux et consacre une section indépendante au calcul du nombre de solutions d'équations à valeurs entières[3]. Toutefois, ces contenus peuvent être considérés comme « avancés » dans l'introduction des principes de combinatoire. Alors, au vu de notre objectif de comparer les techniques de résolution à l'université et au secondaire, nous n'approfondissons pas notre analyse des tâches qui emploient ces techniques.

Dans 16 des 47 tâches (34,0 %) de MU1 et 21 tâches des 40 (52,5 %) de MU2, nous observons l'emploi de la règle du produit. Cette technique permet de résoudre une tâche en une étape ou elle est utilisée avec une ou plusieurs autres techniques de résolution. Par exemple, la subdivision en problèmes de plus petites dimensions est généralement jumelée à la règle du produit ; c'est le cas dans 3 des

[1] « Lorsqu'on peut accomplir deux tâches simultanément, on ne peut utiliser le principe de la somme pour compter le nombre de façons d'effectuer l'une des deux tâches. En additionnant le nombre de façons d'effectuer deux tâches, on obtient un surdénombrement, puisque les façons d'effectuer les deux tâches sont comptées deux fois. Pour compter correctement le nombre de fois qu'on peut faire l'une des deux tâches, on additionne le nombre de façons d'exécuter chacune des deux tâches et on soustrait le nombre de façons de faire les deux tâches. » (MU1, p. 224)

[2] « Si $k+1$ objets ou plus sont rangés dans k boîtes, alors il y a au moins une boîte qui contient deux objets ou plus. » (MU1, p. 230) ; et sa forme généralisée : « Si N objets sont rangés dans k boîtes, alors il y a au moins une boîte qui contient au moins $\lceil N/k \rceil$ objets. » (MU1, p. 231)

[3] « Il y a $\binom{n-1}{r-1}$ vecteurs distincts à composantes entières et positives satisfaisant à la relation $x_1+x_2+\cdots+x_r=n$; $x_i>0,\ i=1,2,\ldots,r$. […] Il y a $\binom{n+r-1}{r-1}$ vecteurs distincts à composantes entières et non négatives satisfaisant à la relation $x_1+x_2+\cdots+x_r=n$. » (MU2, p. 15)

4 tâches de MU1 et dans 11 des 14 tâches de MU2 faisant appel à la technique de subdivision. Dans ces cas, la règle du produit permet de séquencer la démarche en étapes de résolution ; elle sert d'organisation et de structure à la démarche.

Tableau 1 – *Occurrences des techniques de résolution dans les MU et MS*

Techniques		MU1	MU2	MS1	MS2	MS3
Énumération/liste ordonnée		5	2	8	8	13
Diagramme en arbre		2	0	4	4	17
Règle de combinatoire	Somme	6	8	10	4	0
	Produit	16	21	16	14	12
	Quotient	0	4	0	0	1
Formule de dénombrement	Principe d'inclusion-exclusion	1	0	0	0	0
	Principe des nids de pigeon	9	0	0	0	0
	Permutations	3	8	0	0	2
	Arrangements	0	0	0	0	2
	Combinaisons	5	14	0	1	1
	Théorème du binôme	3	2	0	0	0
	Permutations avec remise	0[4]	0	0	0	2
	Combinaisons avec remise	3	0	0	0	0
	Permutations d'objets partiellement indiscernables	0	4	0	0	0
	Distribution d'objets dans des boîtes	0[6]	0	0	0	0
	Coefficients multinomiaux	0	4	0	0	0
	Solutions d'équations à valeurs entières	0	2	0	0	0
Référence à un problème équivalent		3	8	2	1	4
Subdivision en problèmes de plus petites dimensions		4	14	4	2	0
Essai-erreur		0	0	3	0	0
Grille	Bidimensionnelle	0	0	2	1	1
	Multidimensionnelle	0	0	1	0	0
Généralisation à partir d'un plus petit problème		0	0	2	2	1

De plus, les formules de dénombrement occupent une place importante dans les MU. Elles sont utilisées afin de solutionner 23 des 47 tâches (48,9 %) de MU1 et 31 des 40 tâches (77,5 %) de MU2. Les manuels présentent ces formules sous la forme de théorèmes, ce qui semble accentuer leur importance. Ces analyses permettent de donner un contexte aux observations de Lamanna et al. (2023) concernant la tendance des futurs enseignants à recourir aux formules de dénombrement pour résoudre des tâches de combinatoire : cette tendance s'exprime également dans les pratiques institutionnelles liées à la formation des enseignants, représentant un possible facteur d'influence pour les pratiques que mobilisent ensuite les étudiants/futurs enseignants.

Dans un autre ordre d'idée, la règle du quotient (la division du total des possibilités par le nombre de cas d'équivalence) n'est explicitement présentée dans aucun des deux MU, et ce, malgré qu'elle soit employée (implicitement) dans MU2. Pourtant, le dénombrement de « trop » de cas pour ensuite diviser par les cas d'équivalence afin d'obtenir le nombre final de possibilités est une méthode de

[4] Une formule est donnée, mais aucune solution à une tâche dans le chapitre analysé ne l'emploie.

dénombrement qui peut s'avérer efficace (Lockwood et Reed, 2020). De même, bien que l'addition de cas distincts afin de déterminer le nombre total de possibilités soit utilisée à 8 reprises (20 % des tâches) dans MU2, la règle de la somme n'y est pas présentée explicitement ; elle est utilisée de manière implicite et sans justification. Quant à MU1, nous remarquons qu'il traite une même formule, $\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$, comme technique de résolution pour deux types de tâches : pour les permutations d'objets indiscernables et pour la distribution d'objets dans des boites (voir Morcos et González-Martín, 2025b, pour plus de détails à ce sujet). Ainsi, il semble que des justifications données à l'emploi de certaines techniques dans les MU et ces dernières en elles-mêmes ne sont pas évidentes. Dans les cas où ces contenus sont enseignés au secondaire, cela pourrait empêcher les enseignants de développer un discours justificatif rigoureux et approprié.

MU1 présente aussi la technique du diagramme en arbre, mais n'y a recours que pour deux tâches. Il ne donne pas d'explication à propos des contextes d'utilisation de cette technique. Les tâches proposées semblent être des cas où l'application directe d'une formule n'est pas possible en raison des contraintes inhérentes au dénombrement souhaité (c'est-à-dire, la situation étudiée ne correspond pas parfaitement à l'un des types de tâches identifiés dans le manuel), mais cela n'est pas justifié explicitement. Qui plus est, l'absence de cette technique dans MU2 suggère que peu d'accent est mis sur cette technique au niveau universitaire. De même, les deux MU ont recours 7 fois à l'énumération et 10 fois à la référence à un problème équivalent, en particulier pour le dénombrement des façons d'obtenir « au moins » un certain résultat (il est alors possible de dénombrer les cas où cette contrainte n'est pas respectée, puis de les soustraire au total des possibilités), mais sans présentation explicite de ces techniques.

2. Les techniques de résolution présentées au niveau secondaire : liens et ruptures

Alors que les MU introduisent de manière systématique la technique de résolution proposée pour chaque type de tâches, les MS présentent plutôt les techniques de résolution dans une seule section (à caractère technique), puis emploient l'une ou l'autre des techniques sans justifications théoriques additionnelles dans les résolutions de tâches. Nous recensons 28 tâches solutionnées dans MS1, 23 dans MS2 et 39 dans MS3. Le Tableau 1 (colonnes vertes) compile les occurrences des techniques dans les MS. Comme dans les MU, la règle du produit occupe une place importante des techniques de résolution employées, un élément de continuité entre les pratiques à l'université et celles au secondaire : 16 des 28 tâches (57,1 %) de MS1, 14 des 23 tâches (60,9 %) de MS2 et 12 des 39 tâches (30,8 %) de MS3 y ont recours. Nous notons également que MS3 suggère de s'appuyer sur le diagramme en arbre (une technique très présente dans ce manuel) pour construire un raisonnement semblable à la règle du produit, par exemple : « Quelques élèves pourraient avoir de la difficulté à dégager une façon de calculer le nombre de codes possible. Au besoin, leur suggérer de construire un arbre de probabilités. » (p. 333). Nous développons ce constat dans Morcos et González-Martín (2025a).

Concernant les formules de dénombrement, un constat nuancé semble émerger. En effet, MS1 ne présente aucune formule de dénombrement, MS2 a recours une seule fois à une formule (afin de calculer des combinaisons, quoique le manuel ne classe pas les tâches selon cette terminologie), tandis que MS3 utilise cette technique de dénombrement dans 6 de ses 39 tâches (15,4 % ; une des tâches emploie deux formules — permutations et arrangements — dans la même résolution). Ainsi, cette technique est nettement moins employée dans les MS que dans les MU, ce qui représente une rupture qui pourrait nuire à la pertinence des cours de mathématiques universitaires pour la formation des futurs enseignants. De fait, cela suggère que les pratiques universitaires s'appuient sur un certain type de technique (les formules de dénombrement) dans une plus grande proportion que ce qui pourrait être requis pour l'enseignement au secondaire.

L'absence de formules de dénombrement dans MS1 et MS2 a une autre conséquence notable sur les techniques de résolution employées : nous constatons que dans ces deux manuels, la règle du produit est parfois utilisée dans des contextes de combinaisons (4 tâches dans MS1 et 3 tâches dans MS2). Or les combinaisons sont par définition une séquence non ordonnée d'objets tandis que la règle du produit tient compte d'un ordre de sélection, ce qui représente d'ailleurs une difficulté pour plusieurs élèves (Lockwood et Purdy, 2020). Dans MS1 et MS2, les tâches de probabilité, dans lesquelles la réponse attendue est de la forme $\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$, permettent de calculer un rapport qui peut ou non tenir compte de l'ordre, peu importe le contexte initial dans la tâche, en autant que le choix d'ordre ou non soit le même entre le numérateur et le dénominateur. Par exemple, MS1 inclut la tâche suivante : « [Une] formation est offerte sur une base volontaire : 12 femmes et 16 hommes s'y sont inscrits. Virginie choisit au hasard quatre personnes parmi les volontaires pour constituer le premier groupe. Quelle est la probabilité que ce groupe soit formé uniquement d'hommes ? » (p. 411). La résolution proposée est $\frac{16}{28} \cdot \frac{15}{27} \cdot \frac{14}{26} \cdot \frac{13}{25} = \frac{43\,680}{491\,400} = \frac{4}{45}$. Ce faisant, le manuel tient implicitement compte de l'ordre des individus des groupes (A-B-C-D et A-B-D-C, par exemple, sont considérés comme distincts). Nous estimons qu'il s'agit d'une rupture entre les pratiques à l'université et au secondaire, puisque cela indique qu'entre ces deux niveaux d'enseignement, d'une part la technique proposée pour résoudre un même type de tâche (les combinaisons) n'est pas semblable et d'autre part la règle du produit est utilisée dans des conditions différentes (à l'université, seulement quand l'ordre importe ; au secondaire, avec ou sans ordre selon d'autres manipulations dans la résolution). Il n'est toutefois pas évident via l'analyse des manuels de comprendre comment cette rupture peut être perçue par les futurs enseignants ni comment elle influence l'apprentissage des contenus de combinatoire qui y sont liés ; nous explorons davantage ces questionnements à l'aide de résultats d'entretiens avec des futurs enseignants dans Morcos et González-Martín (2025a).

Nous notons une autre rupture dans les pratiques relatives à des techniques de résolution présentées aux deux niveaux d'enseignement : la subdivision en problèmes de plus petites dimensions est habituellement jumelée à la règle du produit dans les MU alors qu'elle est plutôt associée à la règle de la somme dans 5 des 6 tâches qui y font appel dans MS1 ou MS2. On divise le problème en différents « cas distincts » plutôt qu'en étapes, ensuite additionnés pour obtenir le total de possibilités. Cela montre un décalage dans l'organisation des contenus relatifs à la technique de subdivision. Là encore, une analyse de ce cas spécifique pourrait permettre de comprendre l'impact de cela sur les pratiques enseignantes et sur les apprentissages possibles.

Finalement, nous remarquons que les MS introduisent quelques techniques de résolution qui ne sont pas traitées dans les MU. Nous avions déjà soulevé ce possible enjeu précédemment (Morcos et González-Martín, 2024), et les analyses et résultats du présent article permettent de systématiser ce constat. Entre autres, dans 5 tâches des MS (2 dans MS1, 2 dans MS2 et 1 dans MS3), les explications fournies pour la résolution proposée incluent l'idée de commencer avec une petite quantité d'objets, puis d'augmenter ce nombre jusqu'à étudier la situation complète[5]. Ce faisant, les élèves peuvent

[5] Par exemple, MS3 « [suggère] aux élèves de refaire le problème avec un nombre restreint de personnes et de costumes, par exemple, trois, et de se servir d'un arbre de probabilités » (p. 353), puis ce manuel trace les diagrammes en arbre pour un choix d'un objet par une personne (1 possibilité), puis de deux objets par deux personnes (2 possibilités), puis trois objets par trois personnes (6 possibilités), et quatre objets par quatre personnes (24 possibilités), et conclut en proposant de « demander aux élèves d'évaluer à combien devrait s'élever le nombre de résultats si le nombre de personnes et de costumes était porté à 5, à 6, à 7, etc. » (p. 354).

reconnaitre la régularité qui se développe et prendre conscience de la structure sous-jacente au calcul de dénombrement. Cette technique est la « généralisation à partir d'un plus petit problème », qu'étudie Lockwood (2015). Cette dernière s'intéresse aux différents moyens d'employer cette technique dont deux apparaissent dans nos données : 1) utiliser des plus petits problèmes pour faciliter l'énumération des cas possibles, et 2) énumérer de façon systématique de plus petits problèmes afin de détecter des régularités et généraliser une solution. Plus récemment, Lehmann (2022) reprend cette idée via l'heuristique du « modeling the general on the particular » (p. 1060). Il conclut que cette technique peut s'avérer efficace pour permettre aux élèves du secondaire d'explorer une tâche de combinatoire, puis de produire un algorithme pour résoudre la tâche. Notre analyse montre que cette technique fait partie des suggestions proposées par des manuels au secondaire, mais pas à l'université. De plus, nous recensons deux techniques dans MS1 absentes de tous les autres manuels. D'une part, une grille multidimensionnelle, c'est-à-dire un tableau à double-entrée dont chaque case est elle-même divisée en cas possibles, sert de technique de dénombrement pour une tâche qui comporte plus de deux étapes (voir l'Annexe 1). D'autre part, MS1 inclut quelques tâches qui admettent plusieurs solutions pour lesquelles la technique suggérée est de procéder par essai-erreur, par exemple : « […] les élèves peuvent décider d'enlever des aliments ne contenant pas cette vitamine, ajouter des aliments qui en contiennent, ou encore remplacer les aliments sans vitamine D par d'autres qui en contiennent. La contrainte de conserver au moins 150 combinaisons différentes amène les élèves à découvrir qu'ils ne peuvent pas enlever plus d'un aliment dans la colonne "Légumes et fruits" ou plus d'un aliment dans la colonne "Viandes et substituts". » (MS1, p. 355) Individuellement, ces techniques ne sont pas nécessairement très fréquentes dans les MS, mais globalement, 10 des 90 tâches au total (11,1 %) ont recours à au moins une de ces techniques, qui ne sont pourtant pas présentes dans les MU. Cela montre de possibles lacunes dans la formation des futurs enseignants : ces derniers pourraient ne pas être outillés à l'enseignement de certaines techniques de résolution utilisées au secondaire.

V. CONCLUSION

Les contributions de cet article s'expriment sur quatre plans. De prime abord, nos analyses répertorient des techniques de résolution présentées aux niveaux universitaire et secondaire pour des tâches de combinatoire, des résultats pertinents pour la didactique de la combinatoire et qui bonifient la classification proposée par Lammana et al. (2022) en identifiant certaines techniques que ces auteurs n'avaient pas observées dans leur étude. Ce faisant, nous contribuons également à l'argumentaire selon lequel les tâches de combinatoire favorisent des réflexions et actions mathématiques riches en recensant de vastes possibilités de techniques de résolution.

Toutefois, nous notons une tendance du niveau universitaire à avoir principalement recours aux formules de dénombrement, ce qui limite ces potentialités à ce niveau d'enseignement. Les pratiques relatives à la combinatoire observées dans les MU semblent fortement axées vers l'application d'une règle ou d'une formule. La formation des futurs enseignants se base sur cette approche ; cela aide à comprendre les observations de Lammana et al. (2023) concernant les stratégies principalement employées par ces derniers à la suite de leur passage à l'université.

À l'inverse, dans les manuels au secondaire, nous notons la présence de techniques variées, dont certaines ne sont pas présentées dans les manuels universitaires (essai-erreur, grille bidimensionnelle ou multidimensionnelle et généralisation à partir d'un plus petit problème). Cela soulève des questionnements quant à la formation en combinatoire des enseignants : certains contenus du secondaire liés à la combinatoire pourraient ne pas être vus à l'université, présentant le risque que la formation mathématique universitaire ne permette pas d'être adéquatement outillé pour l'enseignement de ces contenus au secondaire. Cela pourrait aussi contribuer au sentiment négatif des futurs enseignants à l'égard de leurs cours universitaires.

Finalement, nous identifions des ruptures entre les MS et les MU dans l'utilisation de la subdivision en problèmes de plus petites dimensions ainsi que dans les techniques employées pour le calcul de combinaisons. Cet article permet d'identifier ces points de ruptures et d'explorer leurs manifestations dans les manuels scolaires, mais nos analyses sont limitées quant à la compréhension de ces enjeux. Nous comptons poursuivre notre travail afin d'étudier ces situations, entre autres en menant des entretiens auprès des futurs enseignants.

Remerciements

Ce projet est financé par le Conseil de recherches en sciences humaines (CRSH – #766-2024-1117) et par les Fonds de recherche du Québec (FRQ) – Secteur Société et Culture (# 343978).

Références

Biza, I., González-Martín, A. S. et Pinto, A. (2022). 'Scaffolding' or 'filtering': A review of studies on the diverse role of calculus courses for students, professionals and teachers. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *8*(2), 389-418. https://doi.org/10.1007/s40753-022-00180-1

Bourgade, J.-P. et Durringer, C. (2024). Klein's second discontinuity: the case of proportion theory. Dans A. S. González-Martín, G. Gueudet, I. Florensa et N. Lombard (dir.), *Proceedings of the Fifth conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics (INDRUM2024)* (p. 569-578). Escola Univeristària Salesiana de Sarrià; Univ. Autònoma de Barcelona et INDRUM.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné*. La Pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*(2), 221-266. https://revue-rdm.com/1999/l-analyse-des-pratiques/

González-Martín, A. S., Giraldo, V. et Souto, A. M. (2013). The introduction of real numbers in secondary education: An institutional analysis of textbooks. *Research in Mathematics Education*, *15*(3), 230-248, http://dx.doi.org/10.1080/14794802.2013.803778

Klein, F. (1908/2016). *Elementary mathematics from a higher standpoint. Volume I: Arithmetic, algebra, analysis.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-662-49442-4

Lamanna, L., Branchetti, L. et Bolondi, G. (2023). Combinatorial reasoning in problem solving strategies: A pilot study with pre-service teachers. Dans P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmer, K. Gosztonyi et E. Konya (dir.), *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)* (p. 964-971). Alfréd Rényi Institute of Mathematics et ERME.

Lamanna, L., Gea, M. M. et Batanero, C. (2022). Do secondary school students' strategies in solving permutation and combination problems change with instruction? *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *22*(3), 602-616. https://doi.org/10.1007/s42330-022-00228-z

L'Écuyer, R. (1990). *Méthodologie de l'analyse développementale de contenu : méthode GPS et concept de soi.* Presses de l'Université du Québec.

Lehmann, T. H. (2022). Making sense of algorithms in discrete mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *20*(5), 1057-1077. https://doi.org/10.1007/s10763-021-10180-3

Lockwood, E. (2015). The strategy of solving smaller, similar problems in the context of combinatorial enumeration. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *1*, 339–362. https://doi.org/10.1007/s40753-015-0016-8

Lockwood, E. et Purdy, B. (2020). An unexpected outcome: Students' focus on order in the multiplication principle. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *6*, 213–244. https://doi.org/10.1007/s40753-019-00107-3

Lockwood, E. et Reed, Z. (2020). Defining and demonstrating an equivalence way of thinking in enumerative combinatorics. *The Journal of Mathematical Behavior*, *58*, article 100780. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100780.

Lockwood, E., Wasserman, N. H. et Tillema, E. S. (2020). A case for combinatorics: A research commentary. *The Journal of Mathematical Behavior*, *59*, 1-15. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100783

Morcos, J. (2025). *La formation mathématique des enseignants au secondaire. Une analyse praxéologique des contenus liés à la combinatoire au secondaire et dans la formation mathématique des futurs enseignants : liens et ruptures* [Mémoire de maitrise, Université de Montréal].

Morcos, J. et González-Martín, A. S. (2025a). Implications for teacher training of inconsistencies between university and secondary textbooks regarding the multiplication principle. Dans C. Cornejo, P. Felmer, D. M. Gómez, P. Dartnell, P. Araya, A. Peri et V. Randolph (dir.), *Proceedings of the 48th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME48), 28 juillet au 2 aout 2025, Santiago, Chili* (p. 123-130). IGPME. https://www.igpme.org/wp-content/uploads/2025/07/PME48_GeneralContributions_ISSN_3081-0833.pdf

Morcos, J. et González-Martín, A. S. (2025b). Permutations with indistinguishable objects: inconsistencies in the university mathematics training of prospective secondary teachers. Dans M. Bosch, G. Bolondi et S. Carreira (dir.), *Proceedings of the Fourteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME14), 4-8 février 2025, Bozen-Bolzano, Italie.* ERME.

Morcos, J. et González-Martín, A. S. (2024). Tertiary mathematics for prospective secondary teachers: the case of combinatorics. Dans A. S. González-Martín, G. Gueudet, I. Florensa et N. Lombard (dir.), *Proceedings of the Fifth conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics (INDRUM2024)* (p. 709-710). Escola Univeristària Salesiana de Sarrià; Univ. Autònoma de Barcelona et INDRUM.

Planchon, G. (2022). *Relations entre connaissances universitaires et connaissances enseignées dans le secondaire : la seconde discontinuité de Klein dans le cas de l'intégrale* [Thèse de doctorat, Université de Montpellier]. https://theses.fr/2022UMONS081

Sandefur, J., Lockwood, E., Hart, E. et Greefrath, G. (2022). Teaching and learning discrete mathematics. *ZDM Mathematics Education*, *54*(4), 753-775. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01399-7

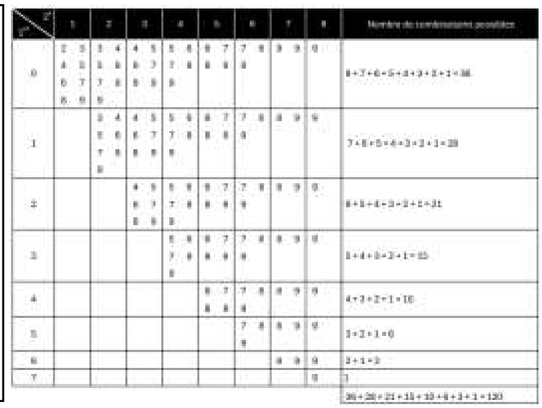
Wasserman, N. H., Buchbinder, O. et Buchholtz, N. (2023). Making university mathematics matter for secondary teacher preparation. *ZDM Mathematics Education*, *55*(4), 719-736. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01484-5

Winsløw, C., Barquero, B., De Vleeschouwer, M. et Hardy, N. (2014). An institutional approach to university mathematics education: from dual vector spaces to questioning the world. *Research in Mathematics Education*, *16*(2), 95-111. https://doi.org/10.1080/14794802.2014.918345

ANNEXE 1

Une loterie fait deux tirages quotidiens à l'aide de bouliers contenant 10 boules numérotées de 0 à 9.

Le premier tirage génère un numéro de trois chiffres à l'aide de trois bouliers différents. […] Détermine la probabilité que […] les chiffres formant le numéro gagnant soient tous différentes et par ordre croissant.



[illegible]	1	2	3	4	5	6	7	8	Nombre de combinaisons possibles
0	2 3 4 5 6 7 8 9	3 4 5 6 7 8 9	4 5 6 7 8 9	5 6 7 8 9	6 7 8 9	7 8 9	8 9	9	8+7+6+5+4+3+2+1=36
1		3 4 5 6 7 8 9	4 5 6 7 8 9	5 6 7 8 9	6 7 8 9	7 8 9	8 9	9	7+6+5+4+3+2+1=28
2			4 5 6 7 8 9	5 6 7 8 9	6 7 8 9	7 8 9	8 9	9	6+5+4+3+2+1=21
3				5 6 7 8 9	6 7 8 9	7 8 9	8 9	9	5+4+3+2+1=15
4					6 7 8 9	7 8 9	8 9	9	4+3+2+1=10
5						7 8 9	8 9	9	3+2+1=6
6							8 9	9	2+1=3
7								9	1
									36+28+21+15+10+6+3+1=120

Figure 2 – *Tâche de dénombrement à trois étapes dans MS1 (p. 421) et résolution proposée en utilisant une grille multidimensionnelle (p. 423)*