ÉTUDE DE LA CONNAISSANCE DE LA THÉORIE DES GROUPES DE FUTURS ENSEIGNANTS DU SECONDAIRE FRANÇAIS

| ROLLAND* AGATHE

Résumé | Cet article examine les difficultés en théorie des groupes rencontrées par de futurs enseignants de mathématiques du secondaire. L'étude, basée sur un questionnaire rempli par seize étudiants s'apprêtant à devenir enseignants, révèle des problèmes variés. Les résultats montrent que ces étudiants seront difficilement en mesure d'utiliser des notions de théorie des groupes pour enrichir leur pratique d'enseignement, soulignant une discontinuité entre les mathématiques universitaires et celles du secondaire.

Mots-clés : Théorie des groupes, seconde discontinuité de Klein, difficultés d'apprentissage, formation des enseignants

Abstract | This article examines the difficulties in group theory encountered by future secondary school mathematics teachers. The study, based on a questionnaire completed by sixteen students preparing to become teachers, reveals a variety of problems. The results show that these students will find it difficult to use group theory concepts to enrich their teaching practice, highlighting a discontinuity between university mathematics and secondary mathematics.

Keywords: Group theory, Klein's second discontinuity, learning difficulties, prospective teachers training

I. INTRODUCTION

En France, les étudiants qui se destinent à enseigner les mathématiques dans le secondaire complètent le plus souvent une licence de mathématiques, durant laquelle ils suivent en général un cours d'introduction à la théorie des groupes. Des éléments de cette branche de l'algèbre abstraite figurent aux programmes des deux concours de recrutement des enseignants de mathématiques du secondaire public[1], le CAPES[2] (Certificat d'aptitude au professorat de l'enseignement du second degré) et l'agrégation.

Du point de vue des étudiants, ce contenu mathématique peut sembler éloigné de leurs futures pratiques enseignantes (Zazkis et Leikin, 2010). De plus, des recherches ont montré que la théorie des groupes est difficile pour les étudiants de licence (Lajoie, 2000 ; Melhuish, 2015). Parmi les travaux consacrés à cette théorie, aucun n'a pris en compte le devenir professionnel des étudiants. Cette communication étudie donc les difficultés en théorie des groupes rencontrées par des étudiants s'apprêtant à devenir enseignants de mathématiques dans le secondaire. L'objectif est de documenter la transition entre la posture d'étudiant et celle d'enseignant du secondaire, connue dans la littérature sous le nom de « seconde discontinuité de Klein » (Klein 1908/2016).

Cette communication est tirée d'un mémoire de recherche (Rolland, 2023) et présente un questionnaire. Le but était d'identifier les difficultés rencontrées par les futurs enseignants du

* LDAR (EA4434) Université Paris Cité – France – agathe.rolland@etu.u-paris.fr

[1] Elèves âgés de 11 à 18 ans.

[2] Pour les programmes du CAPES externe 2023, voir https://media.devenirenseignant.gouv.fr/file/capes_externe/23/1/p2023_capes_ext_mathematiques_1426231.pdf Pour ceux de l'agrégation, voir https://media.devenirenseignant.gouv.fr/file/agreg_externe/14/3/p2023_agreg_ext_math_1428143.pdf

secondaire vis-à-vis de certaines notions de théorie des groupes. Quelles notions en lien avec les groupes semblent suffisamment bien maîtrisées pour servir de levier dans la formation des enseignants, ou au contraire nécessiteraient d'être consolidées ?

II. OUTILS THÉORIQUES

1. APOS (Action, Processus, Objet, Schéma)

La théorie APOS, développée par Asiala et ses collègues (1996), repose sur l'hypothèse selon laquelle un individu appréhende graduellement les mathématiques en construisant des *actions*, *processus* et *objets* mentaux, puis en les organisant en *schémas*. Ce cadre théorique me semble pertinent pour analyser les réponses au questionnaire, dans la mesure où il a été développé pour rendre compte de l'apprentissage des mathématiques dans le supérieur.

Pour les auteurs, l'apprentissage d'un concept mathématique débute par une conception en tant qu'*action*. Une action transforme des objets en d'autres objets à l'aide d'une suite d'opérations. Cette transformation est perçue par l'individu comme étant externe, c'est-à-dire qu'il ne peut effectuer la transformation qu'à l'aide d'indications externes qui lui donnent les étapes à effectuer. Par exemple, dans le cas des opérations binaires, un individu a une conception action de l'opération s'il n'est capable de l'effectuer qu'à condition de pouvoir appliquer une formule explicite (Brown et al., 1997, p. 191). Melhuish et Fagan (2018, p. 33) introduisent la conception E-O-E (Élément-Opération-Élément) des opérations binaires. Il s'agit d'une conception en tant qu'action : l'opération est l'action entre deux éléments.

Après avoir répété l'action et y avoir réfléchi, l'individu peut l'internaliser. Elle devient un *processus*, indépendant d'indications externes, contrôlé par l'individu. Toujours dans le cas des opérations binaires, l'individu conçoit que l'opération prend deux variables en entrée, les transforme, et renvoie quelque chose en sortie. Le processus peut ensuite être « encapsulé » pour former un *objet*. L'individu passe alors d'une conception dynamique (« ça fait quelque chose ») à une conception structurelle (« c'est quelque chose »). Par exemple, l'individu reconnaît que plusieurs opérations binaires peuvent être définies sur le même ensemble, et que leurs propriétés varient suivant l'ensemble considéré (Brown et al., 1997). Enfin, un *schéma* est un ensemble cohérent d'actions, de processus, d'objets et d'autres schémas qui, pour l'individu, sont liés entre eux. La notion de schéma est proche de celle de concept image de Tall et Vinner (1981), avec en plus l'exigence de la cohérence entre les éléments qui composent le schéma (Dubinsky et Mcdonald, 2002).

2. Concept image et concept définition

La notion de concept image, définie par Tall et Vinner (1981), va me permettre de distinguer la définition formelle d'un concept, et la définition personnelle qu'un étudiant se construit. Le concept image correspond à l'interprétation subjective qu'un individu se fait d'un concept. Il peut contenir tout ou partie d'une définition formelle, une définition personnelle, des exemples, des représentations mentales, des mots, des symboles, etc. Contrairement aux schémas définis précédemment, il ne s'agit pas nécessairement d'un ensemble cohérent.

Un concept définition peut être *formel*, s'il s'agit de la définition d'une notion acceptée par la communauté mathématique, ou bien *personnel*, si la définition a été reconstruite par l'étudiant.

III. MÉTHODOLOGIE

1. Contexte

J'ai fait passer mon questionnaire à seize étudiants de première année de master MEEF (Métiers de l'Enseignement, de l'Éducation et de la Formation), qui se préparent au métier d'enseignant de mathématiques du secondaire, et en particulier au CAPES de mathématiques. Les étudiants inscrits dans cette formation ont donc tous pour objectif d'enseigner les mathématiques dans le secondaire. La formation dure deux ans, et combine des cours de mathématiques, pédagogie, didactique, psychologie de l'éducation, des stages en milieu scolaire, un travail de recherche, ainsi qu'une préparation au concours.

Pour intégrer cette formation, les étudiants doivent être titulaires d'une Licence[3] ou d'un diplôme équivalent. Tous les étudiants ayant complété le questionnaire étaient titulaires d'une licence de mathématiques. En particulier, ils ont tous suivi un cours de théorie des groupes dans leur cursus, majoritairement en troisième année (11/16)[4]. La plupart des étudiants ayant validé ce cours (14/16), je m'attends à ce que les notions de base en théorie des groupes soient relativement assimilées et présentes à leurs esprits.

Le questionnaire a été diffusé durant le mois de décembre 2022, avant que des rappels sur la théorie des groupes ne soient faits. De tels rappels ne sont pas systématiques dans tous les Masters MEEF, et ils peuvent être faits aussi bien en première qu'en deuxième année de Master. J'ai donc préféré diffuser mon questionnaire avant, afin d'être sûre que les réponses soient liées à des connaissances acquises en Licence, et non à des rappels récents.

Les étudiants ont eu une heure pour le compléter, sous la surveillance d'un enseignant, afin de contrôler qu'ils n'aient pas recours à des notes de cours ou à une aide extérieure. Il leur a été précisé que le questionnaire était anonyme et ne constituait pas une évaluation notée, et les tentatives de réponse partielle ou informelle ont été encouragées.

2. Présentation du questionnaire

Dans sa thèse, Melhuish souligne que bien que quelques chercheurs aient tenté de définir ce que sont les notions fondamentales d'un cours d'introduction à la théorie des groupes, ils ne s'accordent pas entre eux (2015, p. 49).

À l'université, en France, il n'existe pas de programme officiel. Des comités locaux d'enseignants-chercheurs divisent le savoir à enseigner en modules et en établissent de brèves descriptions. L'enseignant-chercheur qui donne le cours bénéficie donc d'une large marge de manœuvre. Un moyen de s'approcher du savoir enseigné est de s'appuyer sur des polycopiés de cours. Il ne s'agit cependant pas du savoir véritablement enseigné, car il peut exister des différences avec ce que l'enseignant aura effectivement dit ou écrit dans l'amphithéâtre.

J'ai donc choisi de comparer trois polycopiés de cours de L3, issus de trois enseignants chercheurs de trois universités différentes : *Algèbre : le grand combat*[5], de Grégory Berhuy (Université Grenoble-Alpes, 2017), *Introduction à la Théorie des Groupes*, de Paul Lescot (Université de Rouen, 2021), ainsi que

[3] Premier cycle universitaire, d'une durée de trois ans.

[4] Parmi les cinq étudiants restants, un a suivi un cours de théorie des groupes en deuxième année, et les quatre autres affirment qu'ils en ont suivi un mais ne savent plus en quelle année.

[5] Il s'agit bien d'un polycopié de cours, et non de son ouvrage portant le même titre, beaucoup plus complet, qui a été composé à partir de polycopiés.

la première partie d'*Algèbre linéaire et théorie des groupes*, de Pierre-Louis Montagard (Université de Montpellier (2019)). Je fais l'hypothèse que si une notion théorique ou une technique est présente dans chacun de ces trois polycopiés, c'est qu'il est également enseigné dans la majorité des cours de Licence portant sur la théorie des groupes, et qu'il appartient donc à un savoir commun partagé par les étudiants de Licence de mathématiques français. Cet ensemble de notions théoriques et de techniques constitue donc la référence de ce que signifie pour moi dans ce contexte la théorie des groupes.

J'ai restreint cette liste de notions en m'appuyant sur le programme de l'écrit 1 du CAPES, qui porte sur du contenu mathématique, et sur un ensemble de notions identifié dans une recherche précédente qui apparaît de façon sous-jacente dans les programmes du secondaire (Rolland, 2024). Les notions retenues sont les suivantes : loi de composition interne, associativité, commutativité, groupe, sous-groupe, relation d'équivalence, classes d'équivalences, groupe ($\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, +), (iso)morphisme de groupe, ordre d'un élément, groupe cyclique, ordre d'un groupe, groupe des racines quatrièmes de l'unité, isométrie, groupe des isométries du plan.

Le questionnaire était destiné à être diffusé à des étudiants lors d'un cours, et devait être faisable en une heure. J'ai donc fait le choix d'exclure les théorème du questionnaire, car leur restitution se base davantage sur la mémorisation que la compréhension. Afin d'en évaluer la compréhension, il aurait fallu pouvoir les mettre en œuvre dans la résolution de problèmes, ce qui aurait été trop long. Les questions étaient donc composées de définitions, qui avaient pour but de contrôler le sens que les étudiants associaient aux notions, suivies de demandes d'exemples ou de mises en jeu des notions sur de petits exercices.

Le questionnaire était composé de quatorze questions. Dans cette communication, je ne vais en présenter que quatre.

IV. ANALYSE A PRIORI

1. *Considérons la loi interne * définie sur $\mathbb{R}$ par* $a * b = \frac{1}{3}(a+b)$. *Cette loi est-elle associative ?*

Lajoie souligne que certains étudiants qu'elle a interrogés dans le cadre de sa thèse confondent les propriétés d'associativité et de commutativité (2000, p. 115-117). Je cherche donc à déterminer s'il en va de même pour mes sujets. Cette question est inspirée par un questionnaire conçu par Melhuish (2018, p. 32). La question d'origine portait sur la moyenne de *a* et de *b*, mais je l'ai modifiée afin d'éviter que les étudiants n'aient recours à leur sens commun.

Melhuish et Fagan font état de difficultés similaires chez les étudiants qui ont complété leur questionnaire à choix multiple (2018). En effet, parmi les quatre réponses possibles, vingt étudiants en « *mathematics education* » sur quatre-vingt-trois (24,1 %) ont choisi « Oui, car $\frac{1}{2}(a+b) = \frac{1}{2}(b+a)$ ». Je m'attends donc à obtenir des réponses semblables.

De plus, vingt-huit étudiants (33,7 %) ont choisi la réponse « Oui, l'addition (et la multiplication) sont associatives, donc * l'est aussi ». Ces étudiants ont une conception conservative de l'associativité : si deux opérations ont cette propriété, alors leur combinaison l'a également. Je m'attends à obtenir des réponses qui mettent en lumière cette conception.

Enfin, pour répondre à cette question, il est nécessaire d'effectuer une substitution. En France, les étudiants ne sont pas spécifiquement entraînés à ce type de tâche, car les substitutions sont des « savoirs transparents », c'est-à-dire qu'ils sont perçus comme allant de soi par les enseignants (Constantin, 2021). Ici, il est nécessaire de se rappeler de la formule $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, (a * b) * c = a * (b * c)$, puis être capable de substituer $\frac{1}{3}(a + b)$ à $a * b$, et finalement de voir $\frac{1}{3}(a + b)$ comme un seul élément. Une seconde substitution est nécessaire, mais cette fois dans l'expression $a * b = \frac{1}{3}(a + b)$. Les étudiants doivent être en mesure de reconnaître que *a* prend la valeur $\frac{1}{3}(a + b)$ tandis que *b* prend la valeur *c*. Cette seconde substitution pourrait être source de confusions.

2. *(ℝ, ×) et (ℤ*, +) sont-ils des groupes ?*

Cette question a pour but de faire varier les notions d'éléments neutre et inverse, afin de déterminer si les étudiants les distinguent. (ℝ, ×) n'est pas un groupe, car 0 n'est pas inversible. Le fait que 0 soit l'élément neutre pour l'addition pourrait entraîner des confusions entre les deux notions. (ℤ*, +) n'est pas non plus un groupe, car il n'y a pas d'élément neutre.

3. *Définir ce qu'est une isométrie*

L'objectif de cette question est de mettre en lumière la définition personnelle que les étudiants ont de la notion d'isométrie, afin d'éclairer les réponses à la question suivante. Plusieurs définitions sont possibles ; en particulier une isométrie du plan est une transformation géométrique qui conserve les distances entre deux points, telles que les translations, les symétries axiales et les rotations. L'ensemble des isométries du plan, muni de la loi de composition, forme un groupe. Cette notion figure au programme du CAPES.

4. *Soit (H, ∘) le groupe des isométries du plan qui conservent un triangle équilatéral donné. Quels sont ses éléments ? La loi ∘ est-elle commutative ? Justifiez.*

Cette question répond à deux objectifs. D'une part, déterminer si les étudiants sont familiers du groupe des isométries du plan, d'autre part, mettre en jeu la notion de commutativité. En comparant les réponses obtenues à la première question, j'espère pouvoir identifier de potentielles confusions avec la notion d'associativité.

Les éléments de (H, ∘) sont l'identité, les trois réflexions d'axe les médiatrices des côtés du triangle, la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ et la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et de centre, le centre de gravité du triangle. La loi ∘ n'est pas commutative. En effet, soient ABC un triangle équilatéral orienté dans le sens horaire, s_A la réflexion d'axe la médiatrice passant par A et r la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$. Alors s_A ∘ r(B) = s_A(C) = B et r ∘ s_A(B) = r(C) = A. Donc s_A ∘ r ≠ r ∘ s_A, d'où la non-commutativité de loi ∘.

V. RÉSULTATS

1. *Considérons la loi interne * définie sur ℝ par* $a * b = \frac{1}{3}(a + b)$. *Cette loi est-elle associative ?*

Treize étudiants sur seize ont essayé de répondre à cette question, huit d'entre eux ont donné une réponse correcte en justifiant. Un étudiant répond « Non » en précisant que $(a * b) * c \neq a * (b * c)$, sans détailler. Quatre étudiants concluent que la loi est associative, et donnent des justifications variées, que je reproduis ci-après.

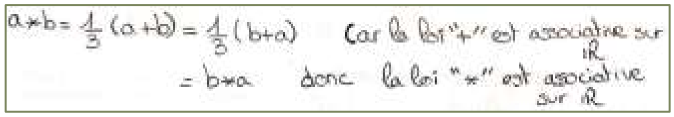

Figure 1 *– Réponse de E6 à la question 1*

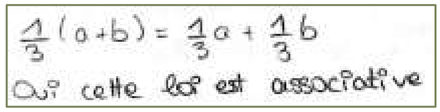

Figure 2 *– Réponse de E2 et E3 à la question 1*

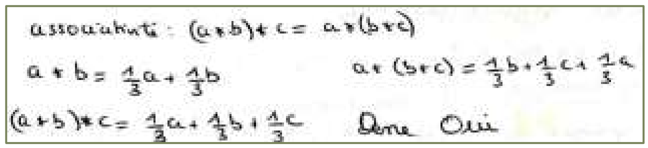

Figure 3 *– Réponse de E10 à la question 1*

L'étudiant E6 (Figure 1) paraît confondre l'associativité avec la commutativité, en accord avec les recherches susmentionnées. Pour E2 et E3 (Figure 2), l'opération en jeu est la multiplication par $\frac{1}{3}$. Il se pourrait que pour ces étudiants, être associatif signifie « pouvoir ôter les parenthèses ». L'étudiant E10 (Figure 3) énonce la propriété d'associativité avant de commencer les calculs. Elle est incorrecte, car les quantificateurs sont absents, mais cela est suffisant pour voir que son concept définition personnel est proche du concept définition formel, c'est-à-dire que sa définition correspond globalement à celle partagée par la communauté mathématique. Cependant, il a du mal à réaliser la substitution. Cela peut être dû au fait que ce type de tâche est rarement rencontré dans le secondaire en France, et parce que cet étudiant n'a pas souvent été amené à manipuler des opérations binaires composées de deux opérateurs. Cet étudiant semble avoir une conception E-O-E des opérations binaires : $\frac{1}{3}a$ et $\frac{1}{3}b$ sont des éléments, combinés par l'opérateur +. L'opération semble donc ici conçue comme une action entre deux éléments.

Si je retrouve bien certaines conceptions des lois binaires observées par Melhuish dans sa thèse, cela reste mineur. La moitié des étudiants semblent connaître la définition de l'associativité, et sont capables de la faire fonctionner avec une opération qui n'a pas une structure de type E-O-E.

2. ($\mathbb{R}$, ×) et ($\mathbb{Z}$, +) sont-ils des groupes ?*

Treize étudiants sur seize ont répondu à la première partie de la question, et quatorze à la seconde. Seuls sept étudiants justifient pourquoi ($\mathbb{R}$, ×) n'est pas un groupe, tandis que treize le font pour ($\mathbb{Z}$*, +). Six étudiants n'ont donc pas vu que 0 n'est pas inversible dans ($\mathbb{R}$, ×). Cependant, il semble qu'ils distinguent clairement les notions de neutre et d'inverse, et que ($\mathbb{Z}$, +) soit un groupe qui leur est familier.

3. Définir ce qu'est une isométrie.

Onze étudiants sur seize ont répondu à cette question, et cinq d'entre eux ont donné une réponse correcte. Parmi eux, un seul donne un exemple. Les exemples sont davantage présents dans les réponses des étudiants qui n'ont pas une définition générale du concept d'isométrie.

Six étudiants ont donné une réponse partielle ou erronée. Deux d'entre eux semblent avoir associé l'idée de conservation à celle d'isométrie. En effet, pour E9, une isométrie est une « application qui conserve », tandis que pour E8 il s'agit d'une « transformation qui conserve les propriétés, par exemple une symétrie ou une homothétie ». La symétrie conserve par exemple les distances, et l'homothétie conserve les angles.

Un étudiant définit les isométries comme « une transformation, par exemple symétrie, rotation, translation ». Il est donc en mesure de donner des exemples d'isométries, mais sans parvenir à identifier leur propriété commune.

Pour E2 et E3, une isométrie est simplement une symétrie. Il est à noter que tous les étudiants qui donnent des exemples d'isométries citent les symétries. Il semble donc que cette transformation particulière soit bien ancrée dans leur concept image.

Pour E14, une isométrie est « une opération qui transforme tous les éléments d'un groupe ». Cet étudiant semble confondre les notions d'isométrie et d'action de groupe. Si les isométries forment bien un groupe, celui-ci agit sur les points d'un espace géométrique, pas sur les éléments d'un groupe. Cet étudiant fait peut-être une confusion avec l'action par translation d'un groupe sur lui-même, qui transforme effectivement tous les éléments d'un groupe. Cette erreur est sémiotique : les translations sont des isométries, mais leur interprétation diffère selon le contexte. Dans le cas des isométries du plan, il s'agit d'une transformation géométrique qui préserve les distances, tandis que dans le cas des actions de groupes, il s'agit d'une transformation algébrique, sans lien nécessaire avec un espace affine euclidien.

Cinq étudiants semblent donc connaître une définition d'isométrie. Cependant, il n'est pas certain que dans leur concept image, cette définition soit associée à des types d'isométries. Quatre autres étudiants sont en mesure de citer des exemples d'isométrie, mais sans pouvoir dire ce que ces exemples ont en commun.

4. *Soit (H, ∘) le groupe des isométries du plan qui conservent un triangle équilatéral donné. Quels sont ses éléments ? La loi ∘ est-elle commutative ? Justifiez.*

Le taux de réponse à cette question est particulièrement faible. En effet, seuls quatre étudiants ont écrit quelque chose. De plus, aucun d'eux n'a fait de dessin. Le taux de réponse aurait peut-être été plus important si le dessin d'un triangle équilatéral avait été fourni. Cela aurait pu inciter les étudiants à chercher les axes de symétrie et les rotations qui laissent le triangle invariant. De plus, il s'agissait de la dernière question du questionnaire ; certains étudiants ont peut-être manqué de temps pour y répondre.

L'étudiant E14 liste correctement les éléments de H. Il semble donc que cet étudiant sache que les rotations et les symétries sont des isométries, ce qui n'était pas évident d'après sa réponse à la question précédente, où il affirme qu'« une isométrie est une opération qui transforme tous les éléments d'un groupe ». Il répond ensuite que la loi est commutative, sans justification. Son erreur peut être due à une difficulté à composer une réflexion avec une autre transformation. En effet, dans leurs travaux, Veith et Bitzenbauer (2022, p. 14) soulignent que cela est source d'erreur pour leurs étudiants. Pour certains étudiants, l'axe de symétrie est « attaché » au sommet dont la transformation porte le nom. Ainsi, pour eux, l'axe de symétrie de s_A devrait toujours passer par le sommet A, ce qui signifie que l'axe est également sujet à des transformations. Cette conception de la composition des rotations conduit à penser que la loi de composition est commutative.

Pour E11, les éléments de H sont « $\{id, r_{\frac{2\pi}{6}}, r_{\frac{4\pi}{6}}\}$ et les translation [sic] » Il semble donc que les rotations soient bien ancrées dans son concept image du groupe des isométries du triangle équilatéral, mais pas les symétries. Il affirme que le groupe est « commutatif », sans justifier.

Pour E8, les éléments de H sont les « Translation / symetrie / homotethie [sic] ». Il fait donc peut-être une confusion avec le groupe des isométries du plan. Il semble en aller de même pour E10, pour qui les éléments de H sont les « symetrie, reflexion, rotation [sic] ».

E9 n'a pas répondu à la question, mais a dessiné une accolade sous la question portant sur la commutativité, et a écrit « $s * t = t * s$? » Il semble donc que la définition de la commutativité ne soit pas claire pour lui. Il en va peut-être de même pour d'autres étudiants ; j'aurais donc pu m'assurer qu'ils savaient de quoi il s'agit en leur demandant une définition, ou en les encourageant à souligner les termes des énoncés dont ils ne connaissaient pas la signification dans l'ensemble du questionnaire. Il est probable que les trois étudiants qui ont répondu à la question sans justifier possèdent un concept image de la commutativité contenant autre chose que la définition attendue.

Il apparaît donc que les étudiants ne sont pas du tout familiers du groupe des isométries du triangle équilatéral. Puisque seuls trois d'entre eux ont essayé de déterminer si la loi est ou non commutative, et qu'ils ont tous répondu « oui » sans justifier, les réponses ne permettent pas de mettre en lumière d'éventuelles confusions entre associativité et commutativité.

VI. CONCLUSION

Les étudiants qui ont répondu à mon questionnaire ont à la fois des représentations erronées et solides de certaines notions de théorie des groupes apparaissant dans les programmes des concours de recrutement d'enseignants. La moitié des étudiants semblent connaître la définition de l'associativité et sont capable de l'appliquer à une opération binaire qui n'a pas une structure de type E-O-E. Dès lors, leurs connaissances des propriétés des opérations binaires pourraient servir de point d'appui pour un cours de type « capstone ». Attirer l'attention des étudiants sur ces propriétés, expliquer qu'elles ne sont pas transparentes pour les élèves du secondaire et donner des outils pour travailler ces propriétés en classe pourrait enrichir les pratiques enseignantes.

Bien que certains étudiants n'aient pas reconnu que 0 n'est pas inversible dans ($\mathbb{R}$, x), ils ne semblent pas confondre les propriétés d'identité et d'inversibilité. De plus, ils paraissent familiers du groupe ($\mathbb{Z}$, +), qui pourrait être utilisé comme exemple paradigmatique pour un cours « capstone ». La structure de ce groupe pourrait servir de point d'appui pour comparer différentes stratégies d'introduction des nombres négatifs dans le secondaire.

Les étudiants semblent peu familiers du concept d'isométrie, et en particulier des isométries du triangle équilatéral. Les isométries du plan euclidien sont cependant enseignées dans le secondaire. Il paraît donc nécessaire de revisiter ces notions dans la formation des enseignants.

RÉFÉRENCES

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. et Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. Dans J. Kaput, A. Schoenfeld, E. Dubinsky et T. Dick (dir.), *CBMS issues in mathematics education* (Vol. 6, p. 1-32). American Mathematical Society. https://doi.org/10.1090/cbmath/006/01

Berhuy, G. (2017). *Algèbre : Le grand combat* [Cours de L3 Mathématiques]. Université Grenoble Alpes.

Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E. et Thomas, K. (1997). Learning binary operations, groups, and subgroups. *The Journal of Mathematical Behavior*, *16*(3), 187-239. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(97)90028-6

Constantin, C. (2021). La substitution, points de vue écologique et sémiolinguistique. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. Revue internationale de didactique des mathématiques*, (26), 157-194. https://doi.org/10.4000/adsc.1118

Dubinsky, E. et Mcdonald, M. A. (2002). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. Dans D. Holton, M. Artigue, U. Kirchgräber, J. Hillel, M. Niss et A. Schoenfeld (dir.), *The teaching and learning of mathematics at university level* (Vol. 7, p. 275-282). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-306-47231-7_25

Klein, F. (2016). *Elementary mathematics from a higher standpoint. Volume I: Arithmetic, algebra, analysis* (G. Schubring, trad.). Springer Berlin Heidelberg. (Ouvrage original publié en 1908)

Lajoie, C. (2000). *Difficultés liées aux premiers apprentissages en théorie des groupes*. Université Laval.

Lescot, P. (2021). *Introduction à la Théorie des Groupes* [Cours de L3 Mathématiques]. Université de Rouen.

Melhuish, K. (2015). *The design and validation of a group theory concept inventory.* Portland State University. https://doi.org/10.15760/etd.2487

Melhuish, K. et Fagan, J. (2018). Connecting the group theory concept assessment to core concepts at the secondary level. Dans N. Wasserman (dir.), *Connecting abstract algebra to secondary mathematics, for secondary mathematics teachers* (p. 19-45). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-31999214-3_2

Montagard, P.-L. (2019). *Algèbre linéaire et théorie des groupes* [Cours de L3 Mathématiques]. Université de Montpellier, Faculté des Sciences, Département de Mathématiques.

Rolland, A. (2023). *La théorie des groupes au prisme de la seconde transition de Klein* [Mémoire de M2, Université Paris Cité]. http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/Memoire_Rolland.pdf

Rolland, A. (2024, juin 10). *Uncovering group theory in French secondary school curricula* [Communication]. 5th conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics, Barcelone.

Tall, D. et Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151-169. https://doi.org/10.1007/BF00305619

Veith, J. M. et Bitzenbauer, P. (2022). What group theory can do for you: From magmas to abstract thinking in school mathematics. *Mathematics*, *10*(5), article 703. https://doi.org/10.3390/math10050703

Zazkis, R. et Leikin, R. (2010). Advanced mathematical knowledge in teaching practice: Perceptions of secondary mathematics teachers. *Mathematical Thinking and Learning*, *12*(4), 263-281. https://doi.org/10.1080/10986061003786349