L'ENSEIGNEMENT DES NOMBRES RELATIFS AU GRÉ DE LEUR HISTOIRE

| GLIERE* ANDRÉ-JEAN

Résumé | Dans son *Esquisse d'un tableau historique des progrès de l'esprit humain*, Condorcet fait un parallèle entre les progrès des sciences et les progrès de l'art d'instruire, les premiers assurant les seconds et les seconds accélérant les premiers. Et il rajoute que cette influence réciproque continuelle doit être considérée comme une des principales causes du perfectionnement de l'espèce humaine. (Condorcet, p. 290). On ne pourrait mieux résumer l'histoire des quantités négatives et de leur mutation en nombres négatifs. Elle a laissé dans l'enseignement des mathématiques des marques indélébiles qui sont souvent ignorées des maîtres et à fortiori des apprenants.

Mots-clés : quantité, nombre, négatif, mesure, algébrique.

Abstract | In his work entitled *Esquisse d'un tableau historique des progrès de l'esprit humain* (Sketch for a Historical Picture of the Progress of the Human Mind), Condorcet draws a parallel between progress in science and progress in the art of educating. Indeed, scientific progress leads to advances in education, which in their turn accelerate scientific progress. In his eyes, such reciprocal and continuous influence must be considered as one of the main causes of the progress of the human species.(Condorcet, p.290). The history of negative quantities and of their mutation into negative numbers couldn't be summarised in more appropriate terms.

Keywords : Quantity, number, negative, measure, algebraic.

I. INTRODUCTION

Trois textes, très différents quant à leur style, mais très similaires quant à leur contenu, nous permettent d'emblée de mesurer à quel point l'histoire des nombres négatifs et leur enseignement sont intriqués. À notre avis, une bonne connaissance de ces liens facilite leur exposition par les maîtres et la compréhension de leurs règles opératoires par les élèves.

> L'histoire nous apprend qu'il a fallu du temps pour que les nombres négatifs s'imposent véritablement en tant que nombres […]. La transposition didactique de cette notion est délicate et explique les difficultés à appréhender en tant que nombres des objets définis « en dessous de 0 », alors même qu'ils sont utilisés dans la vie courante où l'on parle aussi bien d'une température de – 7 °C ou d'une profondeur de – 35 m que d'un bilan financier de – 400 euros […]. S'ils constituent une aide indéniable pour la compréhension de l'addition, le modèle gain-perte ou le modèle montée-descente peuvent constituer un réel obstacle à la compréhension de la multiplication de deux nombres, notamment s'ils sont tous les deux négatifs […]. Il n'est pas possible de trouver un modèle concret permettant d'illustrer la multiplication […]. Seule une pratique routinière de calculs additifs et soustractifs permet aux élèves de s'émanciper progressivement des contextes familiers, ce qui est un bon préalable à une bonne compréhension de la multiplication et de la division, dont les définitions ne peuvent être justifiées qu'à l'intérieur d'un cadre interne aux mathématiques. (Eduscol, p. 5-6).

Ces lignes proviennent des ressources 2016 du site d'éduscol, portail français d'information et d'accompagnement des professionnels de l'éducation, partie *Mathématiques* du cycle 4, chapitre *Nombres et calculs*, rubrique *Stratégies d'enseignement des nombres relatifs*.

> L'introduction conceptuelle des nombres relatifs a été un processus d'une lenteur surprenante. Elle a duré plus de mille cinq cents ans, depuis l'époque de Diophante jusqu'à nos jours ! Pendant tout cet intervalle, les mathématiciens maniaient les nombres relatifs ; mais ils n'en n'avaient qu'une compréhension partielle, avec d'étonnantes lacunes

* Professeur de classes préparatoires (ESEO, Angers) à la retraite, chercheur associé en histoire des mathématiques au laboratoire Jean Leray (Université de Nantes) – France – gaj.math@outlook.fr

> […]. Nombreux sont les enseignants qui ne soupçonnent pas que l'apprentissage de la règle des signes puisse comporter des difficultés. (Glaeser, p. 304-305).

Georges Glaeser commence ainsi son article *Épistémologie des nombres relatifs* en 1981.

> Suivant moi l'hypocrisie était impossible en mathématiques et, dans ma simplicité juvénile, je pensais qu'il en était ainsi dans toutes les sciences où j'avais ouï dire qu'elles s'appliquaient. Que devins-je quand je m'aperçus que personne ne pouvait m'expliquer comment il se faisait que : moins par moins donne plus […]. M. Chabert pressé par moi s'embarrassait, répétait sa leçon, celle précisément contre laquelle je faisais des objections, et finissait par avoir l'air de me dire : « Mais c'est l'usage, tout le monde admet cette explication. Euler et Lagrange, qui apparemment valaient autant que vous, l'ont bien admises ». […]. J'en fus réduit à ce que je me dis encore aujourd'hui : il faut bien que – par – donne + soit vrai, puisqu'évidemment, en employant à chaque instant cette règle dans le calcul, on arrive à des résultats vrais et indubitables. (Stendhal, p. 256).

C'est le constat amer que fait en 1835 Henri Beyle, alias Stendhal, dans *La vie d'Henri Brulard*.

Il ressort de ces trois textes que l'histoire des nombres négatifs n'a pas été un long fleuve tranquille et que leur enseignement n'est pas chose facile, même encore aujourd'hui. Entre approche concrète et définition formelle, l'enseignant doit naviguer à vue afin de faire franchir aux élèves les obstacles à leur compréhension. Dans sa démarche pédagogique, la connaissance de l'histoire de ces nombres nous paraît fondamentale. En témoin privilégié, il observera les difficultés qu'un certain nombre de géomètres des siècles passés a eues à les concevoir et à les intégrer au sein d'ensembles de nombres généralisant ceux de l'arithmétique. Il pourra alors se servir de ses observations pour éviter que les commençants du XXI^e siècle ne tombent dans les mêmes errements que leurs ainés des siècles passés.

Dans cet article, notre but est de proposer quelques pistes pour faciliter le passage du modèle concret au calcul formel dans l'enseignement. Ce passage a été historiquement long et douloureux. Il est celui des baguettes noires utilisées en Chine pour les nombres négatifs au 2^e siècle avant JC (Chemla, §. VIII) aux fausses solutions des équations algébriques de René Descartes. Il est celui des débits et des dettes du mathématicien indien Brahmagusta dans ses exercices comptables aux ordonnées négatives de Colin Maclaurin. Jusqu'au XVIII^e siècle, l'algèbre n'a toléré les quantités négatives que parce qu'elles étaient utiles au calcul. Leur interprétation géométrique ne palliait pas leur manque de statut. Il a fallu attendre 1867 pour que Hermann Hankel définisse formellement les nombres négatifs. (Glière, p. 562-710).

Dans un premier paragraphe, nous ferons un rapide état des lieux des difficultés rencontrées par les géomètres du XVIII^e siècle. Puis, à partir d'exemples choisis dans des traités du XIX^e siècle, nous montrerons comment le pouvoir généralisateur des nombres négatifs en algèbre pourrait être une porte d'entrée à leur introduction dans l'enseignement. Nous décrirons enfin deux modèles multiplicatifs originaux utilisés par les enseignants des siècles derniers. Ceux-ci pourraient être une alternative à l'exposé formel de la multiplication et de la règle des signes en vogue dans les ouvrages actuels, ou, à défaut, une source d'intérêt et d'inspiration.

II. QU'EST-CE DONC QUE LES QUANTITÉS NÉGATIVES ?

Un des plus illustres géomètres à s'être interrogé sur leur définition est le célèbre mathématicien, physicien et philosophe Jean Le Rond d'Alembert. Dans l'article *Négatif* qu'il écrit pour l'*Encyclopédie* dans les années 1750, il critique les définitions des quantités négatives en vogue à l'époque. La première qu'il réfute est : « Elles sont regardées comme plus petites que zéro, moindres que rien » (Alembert, p. 72).

Puisque le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, la proportion 1 : – 1 :: – 1 : 1 est exacte. Mais, conformément à la proposition 14 du livre V des Éléments d'Euclide (Euclide, p. 96) qui affirme entre autres que : $si\ \frac{a}{b} = \frac{c}{d}\ alors\ (a > c \Rightarrow b > d)$, l'égalité des deux rapports précédents $\frac{1}{-1} = \frac{-1}{1}$ entraine l'absurdité : 1 > – 1 implique – 1 > 1. La relation d'ordre appliquée aux quantités négatives semble fautive. Lazare Carnot dans la *Dissertation préliminaire* de sa *Géométrie de position* de 1803 s'insurge lui-aussi contre cette définition : « – 3 serait moindre que 2, cependant $(-3)^2$ serait plus grand que 2^2 […], le carré de la plus grande serait moindre que le carré de la plus petite, ce qui choque toutes les idées claires qu'on peut se former de la quantité. » (Carnot, p. IX).

En 1828, C.-V. Mourey dans son petit ouvrage intitulé *La vraie théorie des quantités négatives*, poussant jusqu'au bout la relativité des signes + et –, n'hésite pas à écrire : « Je suis convaincu qu'il est beaucoup plus avantageux, dans la pratique, de laisser à ce signe <, ainsi qu'à son inverse >, leurs significations plus petit que, plus grand que et de faire : – 1 > 0, – 2 > – 1, – 3 > – 2, etc. » (Mourey, p. 15).

Ainsi qu'on le constate, les inégalités sur les nombres négatifs ont posé de gros problèmes à certains savants, il n'est donc pas surprenant qu'elles en posent à nos élèves.

La seconde définition des quantités négatives, à savoir qu'elles sont le contraire des positives, doit être amendée car, selon d'Alembert, cette notion est sujette à de fréquentes exceptions. Il prévient que les quantités négatives ne sont pas toujours d'un côté opposé aux positives. (Alembert, p. 72). Il prend l'exemple d'une courbe donnée par l'équation :

$$y = \frac{aa}{a + b\cos.z}\ .$$

Dans le cas où $a > b$, le rayon y, correspondant à un angle z tel que $\cos z = -1$, est attendu *logiquement* dans une position directement contraire (en ligne droite) à celle d'un rayon correspondant à un angle z vérifiant $\cos z = 1$. C'est ce qui se passe réellement, donc *géométriquement*. Cependant, cette position paraît être en désaccord avec l'algèbre, puisque le rayon y a une valeur algébrique positive. Le désaccord n'est qu'apparent, explique d'Alembert, car la positivité de la valeur algébrique du rayon y confirme notre supposition logique, à savoir être en sens contraire. Dans le cas où $a < b$, en accord avec la géométrie et en désaccord apparent avec la logique, le rayon y, correspondant à un angle z vérifiant $\cos z = -1$, ne doit pas être pris du côté contraire à celui d'un rayon correspondant à un angle z vérifiant $\cos z = 1$, mais du même côté. Cette position est conforme à ce que dit l'algèbre. En effet la négativité de la valeur algébrique du rayon y indique une fausse position et une fausse supposition malgré le sens contraire indiqué par $\cos z = -1$. Sans les coordonnées polaires, et pour permettre à la géométrie et à l'algèbre de s'accorder, d'Alembert a recours à des arguments qui ne semblent pas le convaincre. (Glière, p. 31-35).

Enfin, la troisième définition qu'il évoque à peine : « comme exprimant des dettes », il la rejette d'un revers de la main parce qu'elle lui apparaît « trop bornée et, par cela seul, peu exacte ». D'Alembert lance alors un vibrant appel aux géomètres pour qu'ils éclaircissent la théorie des quantités négatives. L'algèbre avait en effet admis en son sein de dangereuses expressions, comme par exemple $a = -b$ qui posait à certains géomètres du XVIII^e siècle autant de problèmes que l'expression $\sqrt{x^2} = -x$ en pose à de nombreux élèves débutants du XXI^e.

III. LES NOMBRES NÉGATIFS AU SERVICE DE LA GÉNÉRALITÉ DE L'ALGÈBRE

L'histoire nous apprend que les mathématiciens ont mis des siècles à construire ce que nous demandons à nos élèves de comprendre en quelques années. Pour les aider dans leur apprentissage, il serait bon de justifier l'introduction des nombres négatifs en ne se limitant pas aux seules exemples de grandeurs concrètes douées de deux sens opposés. Leur exposé ne peut se réduire à un panachage de concret et d'abstrait, car on sait qu'il n'y a pas de modèle unifiant à la fois additif et multiplicatif. On trouve dans l'histoire des pistes intéressantes pour les introduire. Le pouvoir généralisateur de l'algèbre en est une, c'est-à-dire la capacité des quantités négatives à généraliser les formules. L'archétype des problèmes, dans lesquels les valeurs négatives permettent d'étendre la validité d'une formule, est sans doute le *Problème des deux courriers* exposé dès 1746 par Alexis Clairaut dans ses *Élémens d'Algèbre*. (Clairaut, p. 73-74). Elles généralisent la formule algébrique qui donne la distance nécessaire à un courrier pour en rattraper un autre, marchant dans le même sens que lui, au cas où les deux courriers vont à la rencontre l'un de l'autre. (Glière, p. 340-348). Les calculs dépassent les capacités moyennes d'élèves de collège. Nous nous limiterons donc à des exemples plus à leur portée.

1. *Une figure élémentaire*

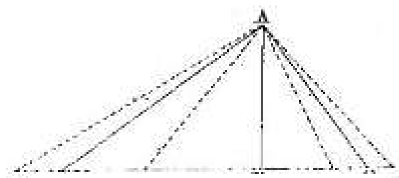


Figure 1 – *Triangle élémentaire*

Le premier exemple que nous considérons est donné par Carnot dans les premières pages de la *Géométrie de position*, lorsque celui-ci propose aux lecteurs le triangle élémentaire de la figure 1, censé illustrer parfaitement sa théorie de corrélation. Il s'agit d'un triangle ABC sur la base $[BC]$ duquel est abaissée la perpendiculaire $[AD]$. Il met en mouvement le point C. Le système primitif est celui où le point C est resté à droite du point D. Dans ce système, $CD = BC - BD$. L'égalité persiste tant que le point C ne franchit pas D. Le système est dit en corrélation directe. Si C se trouve à gauche de D, le nouveau système est dit en corrélation inverse et $CD = BD - BC$. La relation générale $AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$, obtenue en appliquant le théorème de Pythagore aux triangles rectangles ABD et ACD, devient en factorisant le second membre : $AB^2 - AC^2 = BC^2 - 2\,BC.CD$ dans le système primitif et $AB^2 - AC^2 = BC^2 + 2\,BC.CD$ dans le système en corrélation inverse. Le dédoublement de la formule d'Al-Kashi résulte, selon Carnot, de l'impossibilité des quantités négatives et, en particulier, des soustractions $a - b$ lorsque $a < b$. Sans mesure algébrique, il est inévitable. Il est à rapprocher de celui de la définition donnée au lycée du produit scalaire de deux vecteurs colinéaires $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$: $AB \times AC$ s'ils sont de même sens et $-AB \times AC$ s'ils sont de sens contraire.(Glière, p. 258).

À l'inverse, en 1853, dans son *Cours complet d'algèbre*, Adrien Guilmin écrit : « L'emploi des nombres négatifs permet donc de donner dans la même formule la solution d'un plus grand nombre de formules, c'est-à-dire, d'augmenter la généralité de cette formule, ce qui est éminemment conforme à l'esprit et au but de l'algèbre. » (Guilmin, p. 13).

Guilmin tire cette conclusion de l'exemple suivant très semblable au précédent et encore plus élémentaire : soit un mobile parcourant une distance a sur une ligne droite à partir d'un point A jusqu'à un point B, puis rebroussant chemin d'une distance b jusqu'à un point C. Il explique alors que la même formule $x = a - b$ donne à la fois la grandeur et le sens de la distance séparant les deux points A et C ou A et C'. (Glière, p. 531). Plus question de soustractions inexécutables comme chez Carnot. Vue la simplicité du propos, nos jeunes élèves n'auraient sans doute aucun mal à apprécier la pertinence de ces conclusions.

Figure 2 – *Un mobile sur une ligne droite*

2. *L'axe des temps*

Un second exemple est celui donné par Antoine-Augustin Cournot dans son ouvrage *De l'origine et des limites de la correspondance entre l'algèbre et la géométrie* paru en 1847. (Cournot, p. 45-50). Il part du constat que, pour calculer le temps écoulé entre deux évènements, lorsqu'on raisonne sur des dates arithmétiques comme c'est le cas dans l'échelle de temps avant JC et après JC ci-dessous, trois cas différents sont *a priori* à envisager.

Événements	*D'*	*C'*	*B'*	*A'*	*O*	*A*	*B*	*C*	*D*
Dates *t*	100	75	50	25	0	25	50	75	100

S'il s'agit de deux événements postérieurs à l'origine, de la date *t'* de l'événement le plus nouveau on retranche la date *t* de l'événement le plus ancien. Ainsi pour les événements *A* et *C* : *t'* – *t* = 75 – 25 = 50. S'il s'agit de deux événements antérieurs à l'origine, de la date *t* de l'événement le plus ancien on retranche la date *t'* de l'événement le plus nouveau. Ainsi pour les événements *C'* et *A'* : *t* – *t'* = 75 – 25 = 50. Enfin, s'il s'agit d'un évènement postérieur et d'un autre antérieur à l'origine comme les événements *A* et *C'*, on ajoute les deux dates : *t* + *t'* = 25 + 75 = 100. Trois formules sont donc nécessaires !

Par contre, lorsque l'on raisonne sur des dates positives et négatives suivant qu'elles se rapportent respectivement à des événements postérieurs ou à des événements antérieurs à l'origine, les calculs à effectuer obéissent à une seule règle : retrancher de la plus grande date la plus petite : *t'* – *t* = 75 – 25 = 50, *t'* – *t* = – 25 – (– 75) = 50, *t'* – *t* = 25 – (– 75) = 100.

Événements	*D'*	*C'*	*B'*	*A'*	*O*	*A*	*B*	*C*	*D*
Dates *t*	– 100	– 75	– 50	– 25	0	25	50	75	100

Une seule formule est cette fois nécessaire. Voilà une économie de moyens remarquable !

3. La relation de Chasles entre des mesures algébriques.

En 1844, Hermann Grassmann déclare dans la préface de son ouvrage *Die Ausdehnungslehre* qu'il s'habituait à voir dans les segments *AB* et *BA* des grandeurs opposées. Et de là résultait que, si *A*, *B* et *C* étaient trois points d'une droite, la relation AB + BC = AC était toujours vraie, même lorsque C était placé entre les deux autres points. Il ne dit pas s'il habituait ses élèves à voir de même. (Grassmann, p. 1). (Glière, p. 846).

En 1892, dans ses *Premières leçons d'algèbre élémentaire*, Henri-Eugène Padé propose de démontrer que la relation $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0$ est indépendante de la disposition des trois points alignés *A*, *B*, *C*. Il désigne par $\overline{AB}$ le nombre, positif ou négatif suivant l'orientation de la droite, correspondant au segment orienté de *A* vers *B* et de longueur *AB*. Ainsi $\overline{AB} + \overline{BA} = 0$. Il envisage les six dispositions possibles des trois points dans le sens positif à savoir : *ABC*, *ACB*, *BCA*, *BAC*, *CAB*, *CBA* et les six formules correspondantes sur les longueurs : *AC* = *AB* + *BC*, *AB* = *AC* + *CB*, *BA* = *BC* + *CA*, *BC* = *BA* + *AC*, *CB* = *CA* + *AB*, *CA* = *CB* + *BA*. Il traite les six cas. Par exemple dans le cas *BCA*, les segments *BA*, *BC* et *CA* étant tous de sens positif, *BA* = *BC* + *CA* implique $\overline{BA} = \overline{BC} + \overline{CA}$. En ajoutant $\overline{AB}$ à chaque membre, il obtient la relation recherchée : $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0$, autrement dit : $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ (Padé, p. 45-48). (Glière, p. 894-896).

Les trois exemples précédents, empruntés aussi bien à la géométrie qu'à l'algèbre ou qu'à la cinématique, sont à la fois élémentaires et instructifs. Ils montrent l'utilité des nombres négatifs au sein même de la mathématique. Leur introduction s'avère nécessaire pour généraliser les formules, étendre le champ de validité de celles-ci. N'est-ce pas cette propriété qui est en jeu dans la définition, si problématique pour nos jeunes élèves, de la valeur absolue $|x| = x$ si *x* est positif et $|x| = -x$ si *x* est négatif ?

IV. DEUX MODÈLES POUR LA MULTIPLICATION DES NOMBRES RELATIFS

En lisant les instructions officielles et en parcourant les livres de mathématiques des collégiens, nous constatons que la multiplication des nombres relatifs et, par suite, la règle des signes, sont introduites exclusivement de manière formelle. La permanence des règles opératoires, en particulier l'associativité, la commutativité et la distributivité, aurait sans doute réconcilié le jeune Henri Beyle avec les mathématiques. L'histoire ne peut le dire. Celle-ci enseigne cependant qu'avant la théorie pure des formes d'Hankel de 1867, et aussi après, d'autres voies ont été explorées par les auteurs d'ouvrages élémentaires pour introduire le produit de nombres relatifs. Nous voudrions exposer le modèle cinématique et le modèle vectoriel. À défaut d'un modèle concret unifiant, ils peuvent être en effet inspirants pour les enseignants.

1. *Le modèle cinématique*

Figure 3 *– Mouvement uniforme*

En 1853, Guilmin est un des premiers auteurs à justifier la règle des signes au moyen de la loi du mouvement uniforme. Parallèlement à l'apparition de celui-ci dans les textes officiels, le *Problème des deux courriers* disparait des ouvrages élémentaires. Un mobile parcourt la droite *X'X*, à partir du point *A* à l'origine des temps. Guilmin pose quatre questions : Où sera-t-il dans *t* heures si le mobile se meut dans le sens *X'X* ou s'il se meut dans le sens *XX'* ? Où était-il, il y a *t* heures, s'il se meut dans le sens *X'X* ou s'il se meut dans le sens *XX'* ? Les réponses aux quatre questions sont contenues dans la seule formule $x = v\,t$, à condition que la vitesse soit exprimée par un nombre positif si le mouvement a lieu dans le sens X'X et par un nombre négatif sinon, et qu'un temps futur soit exprimé par un nombre positif et un temps passé par un nombre négatif. Puisque les changements de sens des grandeurs sont synonymes de changements de signes des nombres qui les « mesurent », autrement dit puisqu'on assiste au transfert du sens des grandeurs au signe des nombres, les résultats obtenus précédemment sur les sens des trois grandeurs v, t, et x au cours de l'étude de la loi du mouvement uniforme se traduisent par des résultats sur les signes, résultats qui ne sont autres que les règles des signes. (Glière, p. 536-540).

En 1867, Jules Houël, dans sa *Théorie élémentaire des quantités complexes*, a également recours au mouvement uniforme pour étendre la multiplication des quantités arithmétiques aux quantités algébriques. Il propose une méthode pédagogique originale en quatre dessins :

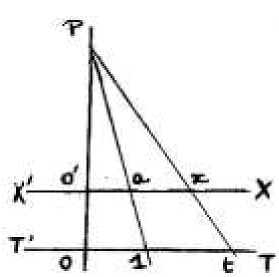


Figure 4 *– Dessin 1*

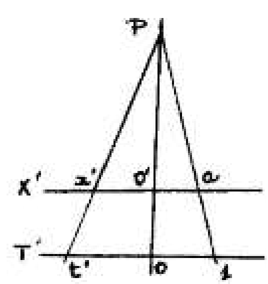


Figure 5 *– Dessin 2*

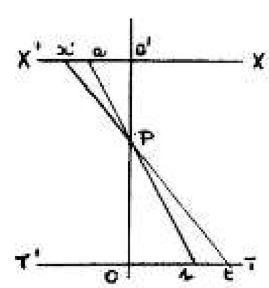


Figure 6 *– Dessin 3*

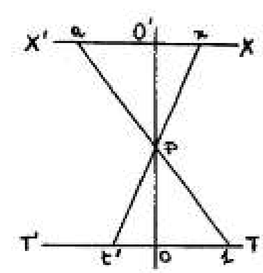
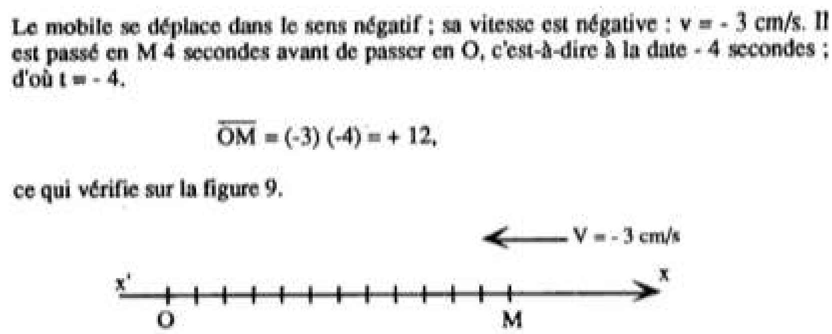


Figure 7 *– Dessin 4*

Le premier dessin correspond à la situation classique de proportionnalité entre l'espace absolu et le temps absolu $1 : t = a : x$ (l'élève reconnaîtra le théorème de Thales), traduite en algèbre par l'équation du mouvement uniforme $x = at$, où a est la distance parcourue par le mobile en une unité de temps. Celle-ci est conforme à la règle des signes : « + × + = + ». Dans le deuxième dessin, Houël considère les positions du mobile avant l'origine des temps. Le mobile est alors à une abscisse négative *x'* située à gauche de l'origine des espaces *O'*. Le segment représentant le temps *t'* se trouve nécessairement à gauche de l'origine des temps *O*, et le temps *t'* est aussi négatif. Le nombre *a* restant positif, l'équation du mouvement $x' = at'$ est conforme à la règle des signes : « + × – = – ». Dans le troisième dessin, le mouvement est dirigé en sens contraire de l'axe des distances et aussi de l'axe des temps. Puisque le temps *t* est resté positif et que *a* est négatif, la quatrième proportionnelle *x'* doit être négative. Ceci est confirmé à la fois par la construction et par la formule $x' = at$, qui respecte à nouveau la règle des signes : « – × + = – ». Enfin, le quatrième dessin montre que, si *a* et *t'* sont tous les deux négatifs, l'espace parcouru *x* avant l'origine des temps doit être porté à la droite de *O'*, et donc est positif. La règle des signes : « – × – = + » est vérifiée. Houël conclut que la construction de la multiplication des « grandeurs pourvues de signes de direction » conduit à la règle des signes de leur multiplication. (Houël, p. 22).

Dans la préface du livre de Padé de 1892 déjà cité, Jules Tannery fait un état des lieux particulièrement instructif de l'enseignement de la théorie des quantités positives et négatives. Il explique que les segments de droite portés par un axe orienté sont bien adaptés pour établir les propriétés des sommes algébriques et que, si l'on veut justifier les définitions adoptées pour la multiplication, les formules du mouvement uniforme sont toutes indiquées. Il montre sa volonté de trouver un compromis pédagogique entre la voie abstraite guidée par le principe de permanence des lois formelles et la voie concrète magnifiée par la loi du mouvement uniforme. (Glière, p. 866-871). Le modèle cinématique conseillé par Tannery sera utilisé jusqu'à la veille de la réforme des mathématiques modernes. En 1959, Maurice Monge y a recours dans son livre *Classe de quatrième classique et moderne*. Nous donnons à titre d'exemple le dernier des quatre cas considérés. (Monge, § 55).


Le mobile se déplace dans le sens négatif ; sa vitesse est négative : v = - 3 cm/s. Il est passé en M 4 secondes avant de passer en O, c'est-à-dire à la date - 4 secondes ; d'où t = - 4.

$$\overline{OM} = (-3)(-4) = +12,$$

ce qui vérifie sur la figure 9.

Figure 8 *– Le modèle cinématique en classe de quatrième*

Pourtant, de nombreux auteurs choisissent une multiplication abstraite et réduisent la loi du mouvement uniforme à une simple application des nombres négatifs. Leur choix est compréhensible. Les segments orientés d'une droite sont légitimes pour introduire l'addition des nombres relatifs, puisque la mesure algébrique est un homomorphisme additif, ainsi que le sous-entend déjà en 1896 Carlo Bourlet dans ses *Leçons d'algèbre élémentaire* en affirmant que la mesure algébrique de la résultante de plusieurs segments est égale à la somme des mesures algébriques de ces segments. (Bourlet, p. 14). Cependant, ils le sont beaucoup moins pour introduire la multiplication puisque la mesure algébrique n'est pas un homomorphisme multiplicatif. Le mouvement uniforme, certes séduisant pour justifier la règle des signes, peut apparaître comme un pis-aller pédagogique.

2. *Le modèle vectoriel*

Toutefois, ce pis-aller a le mérite d'avoir probablement conduit beaucoup d'auteurs français de la première moitié du XX[e] siècle à une autre méthode, celle de la multiplication d'un vecteur par un réel. Ceux-ci choisissent un modèle vectoriel pour représenter à la fois l'addition et la multiplication des nombres relatifs. De la multiplication externe des vecteurs par ces nombres, ils déduisent la multiplication interne des nombres algébriques.

Dans son *Algèbre à l'usage des élèves des classes de quatrième B à la première C* publié en 1903, Auguste-Clément Grévy adopte cette présentation. Il donne tout d'abord une définition naïve d'un vecteur comme une portion de droite parcourue dans un sens déterminé, puis celle de la somme de deux vecteurs obtenue en les plaçant bout à bout. Après cela, il prépare avec soin l'exposé de la multiplication. Tout d'abord, un vecteur unité étant choisi, il détermine la « mesure *a* d'un vecteur » comme le nombre (positif ou négatif) par lequel est multiplié le vecteur unité pour l'obtenir. Ensuite, il définit le produit d'un vecteur par un nombre, à savoir un vecteur de même sens si le nombre est positif, de sens contraire si le nombre est négatif, sa longueur étant le produit de la longueur du premier vecteur par la valeur absolue du nombre. Enfin, il procède à la transposition de la multiplication externe des vecteurs à celle interne des nombres algébriques en remplaçant les vecteurs par les nombres qui les mesurent, c'est-à-dire le mot sens par le mot signe et le mot longueur par les mots valeur absolue. (Grévy, p. 31-32). La transposition précédente est contenue dans la « pseudo-associativité » de la multiplication externe d'un espace vectoriel : $a.(b.\vec{\imath}) = (a \times b).\vec{\imath}$. Le produit des nombres *a* et *b* est alors le nombre qui « opère » sur le vecteur $\vec{\imath}$ de la même manière que *b* « opère » sur $\vec{\imath}$ et *a* sur $b.\vec{\imath}$. Les longueurs des vecteurs sont multipliées par les valeurs absolues des nombres et les sens des vecteurs sont ou non inversés suivant leurs signes. Le produit $a \times b$ est « l'opérateur composé *b* suivi de *a* ». (Glière, p. 971-983).

Jusqu'à la veille de la réforme des mathématiques modernes, la « théorie vectorielle » des nombres algébriques est utilisée. En 1959, dans son manuel *Mathématiques, classe de 4^e^*, Roland Maillard en propose un exposé exemplaire : vecteur, nombre relatif comme mesure algébrique de vecteur, succession des vecteurs et addition de nombres relatifs, relation de Chasles sur les vecteurs et sur les mesures algébriques, multiplication d'un vecteur par un nombre relatif et multiplication de deux nombres relatifs. (Glière, p. 951-954 et 984-986).

V. CONCLUSION

La réforme des mathématiques modernes a agi comme une rupture plus didactique qu'épistémologique. Le débat ne porte plus aujourd'hui sur l'existence ou non des quantités positives et négatives. Ces dernières, au même titre que les quantités complexes et les quantités infinitésimales, ont longtemps été considérées par les géomètres comme des objets indispensables au calcul mais d'essence mystérieuse. Ni la définition euclidienne du nombre comme multitude composée d'unités, ni celle utilisée par Newton comme rapport abstrait d'une grandeur à une autre de même espèce prise pour unité, ne convenaient. Elles ont cédé finalement la place aux nombres positifs et négatifs lorsque la théorie formelle de Hankel a admis ceux-ci dans un système de nombres et lorsque l'algèbre les a intronisés comme mesures algébriques de certaines grandeurs géométriques. La question aujourd'hui est de savoir à quel moment on doit passer du concret à l'abstrait. Danièle Coquin-Viennot se demande en 1985 dans un article publié dans *Recherches en Didactique des Mathématiques* si les programmes donnent assez de moyens abstraits pour enseigner la notion de nombre relatif et comment l'élève accroché à un modèle concret peut-il faire en douceur le passage du concret au formel. L'histoire spécifique de la mesure algébrique pourrait à ce propos être inspirante. (Glière, p. 898-964). La mesure algébrique d'un segment porté par un axe a été pour la première fois définie en 1896 par Carlo Bourlet comme le nombre algébrique qui a pour valeur absolue la longueur du segment et le signe + si le sens du segment est celui de l'axe et le signe – sinon. (Bourlet, p. 14).

Certes, l'enseignant a comme objectif que ses élèves acquièrent une pratique routinière des calculs additifs, soustractifs et multiplicatifs sur les nombres relatifs. Mais s'il veut donner du sens à son enseignement afin de susciter intérêt et motivation des apprenants, il peut l'enraciner dans l'histoire en le sortant d'une abstraction atemporelle, et, plus généralement, le raccrocher à des problématiques originelles et oubliées. Il importe alors pour l'enseignant de renouer les fils conducteurs rompus et de ré-amarrer ainsi ses propres apprentissages à la chaine logique des interrogations et des problèmes ancestraux oubliés. L'enjeu sera alors de forger, à partir des pratiques anciennes, des outils pédagogiques pertinents.

RÉFÉRENCES

Alembert, J. (1765). Article Négatif. Dans *Encyclopédie ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers par une société de gens de Lettres. Tome onzième.* (p. 72-74). Samuel Faulche.

Bourlet, C. (1896). *Leçons d'algèbre élémentaire*. Colin.

Carnot, L. (1803). *Géométrie de position*. Duprat.

Chemla, K. et Guo, S. (2005). *Les neuf chapitres : le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires*. Dunod.

Clairaut, A.-C. (1746). *Élémens d'Algèbre*. Guérin.

Condorcet, J.-A.-N. (III). *Esquisse d'un tableau historique des progrès de l'esprit humain*. Agasse.

Coquin-Viennot, D. (1985). Complexité mathématique et ordre d'acquisition : une hiérarchie de conceptions à propos des relatifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 6*, 133-192. https://revue-rdm.com/1985/complexite-mathematique-et-ordre-d/

Cournot, A. (1847). *De l'origine et des limites de la correspondance entre l'algèbre et la géométrie*. Hachette.

Euclide d'Alexandrie. (1994). *Éléments* (volume II, livres V à IX, Heiberg, trad. ; B. Vitrac, intro. et comm.). PUF.

Glaeser, G. (1981). Épistémologie des nombres relatifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 2*(3), 303-345.

Glière, A.-J. (2007). *Histoire et épistémologie des nombres négatifs de d'Alembert à nos jours, le passage des quantités aux nombres* [Thèse de doctorat inédite]. École doctorale de l'École des hautes études en sciences sociales.

Grassmann, H. (1994) *La science de la grandeur extensive ou l'Ausdehnungslehre* (D. Flament et B. Bekemeier, trad.). Blanchard.

Grévy, A. (1905). *Algèbre à l'usage des élèves des classes de 4e B à 1ere C et D (Programmes des 31 mai 1902 et 27 juillet 1905)*. Vuibert et Nony.

Guilmin, A. (1853). *Cours complet d'algèbre élémentaire, à l'usage des lycées et collèges et de tous les établissements d'instruction publique*. Durand.

Hankel, H. (1867). *Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Functionen in zwei Theilen. 1. Theil. Theorie der complexen Zahlensysteme insbesondere der gemeinen imaginären Zahlen*. Leopold Voss.

Houël, G.-J. (1867). *Théorie élémentaire des quantités complexes. Algèbre des quantités complexes*. Gauthier-Villars.

Maillard, R. (1959). *Mathématiques, classe de 4e*. Hachette.

Mourey, C.-V. (1861). *La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires, dédiée aux amis de l'évidence*. Mallet-Bachelier.

Padé, H.-E. (1892). *Premières leçons d'algèbre élémentaire, nombres positifs et négatifs, opérations sur les polynômes*. Gauthier-Villars.

Stendhal. (1955). *Œuvres intimes. Vie de Henry Brulard*. La Pléiade, Gallimard.

Tannery, J. (1892) Préface. Dans H.-E. Padé, *Premières leçons d'algèbre élémentaire, nombres positifs et négatifs, opérations sur les polynômes d'Henri-Eugène Padé* (p. V-XVIII). Gauthier-Villars.

SITOGRAPHIE

Eduscol. https://eduscol.education.fr/document/17245/download