LES SUITES NON NUMERIQUES DANS LE PROGRAMME D'ETUDE ET LE POTENTIEL DE DEVELOPPEMENT DE LA PENSEE ALGEBRIQUE CHEZ LES ELEVES DE LA MATERNELLE A LA DEUXIEME ANNEE DU PRIMAIRE AU NOUVEAU-BRUNSWICK

| BANKOUSSOU-MABIALA* EDWARD ET FREIMAN** VIKTOR

Résumé | Cet article explore le potentiel des suites non numériques à motif répété dans le développement de la pensée algébrique chez les élèves à travers une analyse du programme d'étude de la maternelle à la deuxième année du primaire du Nouveau-Brunswick. Nous basons notre analyse sur la théorie des représentations sémiotiques proposée par Duval (1995) comme cadre de référence.

Mots-clés : Régularités, pensée algébrique, suite non numérique, programme d'étude

Abstract | This article explores the potential of non-numeric repeated pattern sequences in the development of algebraic thinking among primary school students through an analysis of the curriculum from kindergarten to second grade in New-Brunswick. We base our analysis on the theory of semiotic representations proposed by Duval (1995) as a reference framework.

Keywords: Pattens, algebraic thinking, non-numerical sequence, curriculum

I. INTRODUCTION : CONTEXTE ET PROBLÉMATIQUE

Depuis plusieurs décennies, les chercheurs et les acteurs du terrain de l'éducation font le constat que le passage de l'arithmétique à l'algèbre pose des problèmes aux élèves (Freiman et Lee, 2004 ; Marchand et Bednarz, 1999). Ces constats ont amené les chercheurs à questionner l'approche curriculaire de l'enseignement de l'algèbre après l'arithmétique (Carpenter et al., 2003 ; Kieran 2014). Aux États-Unis, un groupe de travail du National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) nommé Algebra Working Group (1995), a mis en évidence les problématiques majeures de l'introduction de l'algèbre de manière traditionnelle (après l'arithmétique) : d'isoler les concepts d'algèbre des autres branches des mathématiques, de mettre l'accent sur les habiletés techniques et de ne pas insister sur la compréhension du symbolisme algébrique. Les débats au sujet des difficultés en algèbre ont donné lieu à un grand mouvement mondial visant à renouveler l'enseignement de l'algèbre et c'est ce qui a donné naissance au courant Early Algebra ou Algèbre avant le symbolisme (lettre) (Bronner, 2015) avec l'idée d'introduire les éléments de l'algèbre tôt lors du parcours scolaire (dès le primaire).

Les travaux de Early Algebra ont d'ailleurs influencé les curriculums des mathématiques à l'école primaire aux É.-U. et d'autres pays. Cette tendance n'est pas isolée puisque l'on constate des orientations qui vont dans le même sens au Canada, notamment le programme actuel en mathématiques du Nouveau-Brunswick (N.-B), Canada, qui introduit le volet « Régularités et algèbre » dès la maternelle depuis l'an 2000 (Freiman et coll., 2012). Les recherches de Polotskaia et coll. (2023) ciblent le développement de la pensée algébrique à l'aide d'une approche équilibrée (ADÉ) qui fait l'objet d'un projet, en cours depuis 2023, qui se déroule au Québec (QC), en Ontario (ON) et N.-B.

* Université de Moncton – Canada – eeb7988@umoncton.ca

** Université de Moncton – Canada – viktor.freiman@umoncton

Cette approche, employée dans une école du QC, vise à favoriser une compréhension plus profonde et holistique des structures additives et des propriétés des opérations d'addition et de soustraction, au-delà de leur simple application arithmétique. Enfin, le but de ce projet est d'étudier la possibilité d'harmoniser l'apprentissage de l'arithmétique avec le développement de la pensée algébrique chez les élèves dès le début de leur scolarité formelle, donc, d'éliminer la transition entre l'arithmétique et l'algèbre à l'école secondaire.

Faisant partie de ce projet, notre communication porte spécifiquement sur l'enseignement et l'apprentissage de régularités de la maternelle à la deuxième année du primaire (M-2) étant donné le manque de recherches avec les jeunes enfants sur ce sujet dont aucune au N.-B. (francophone). Le but de la communication est de présenter les premiers résultats d'analyse du programme d'étude dans le contexte néobrunswickois francophone (la province est bilingue avec la présence du secteur anglophone) pour ressortir les éléments qui caractérisent le développement de la pensée algébrique en M-2.

Le programme d'étude sert de guide pour les concepteurs des manuels et pour les enseignants. Ces derniers justifient leurs choix pédagogiques en grande partie par l'interprétation qu'ils se font des programmes d'études (Larguier, 2019). Pour ce qui concerne le développement de la pensée algébrique dès le primaire, une bonne compréhension des structures du programme qui visent ce développement, permet ainsi de mieux comprendre le potentiel de développement de la pensée algébrique dès le primaire (Squalli et al., 2020 ; Jeannotte et al., 2022 ; Larguier, 2019).

Pour Afonso et Mc Auliffe (2019), l'algèbre constitue une grande composante des mathématiques du lycée, leurs résultats montrent que les jeunes apprenants, lorsqu'ils ont la possibilité, ont le potentiel de penser algébriquement, ce qui suggère que la pensée algébrique doit être développée au fil du temps et commencer tôt dans le parcours scolaire. Cependant Anwandter Cuellar et al. (2018) estiment que la plupart des travaux sur la pensée algébrique ont été réalisés chez les enfants dont l'âge varie entre 7 ans et plus où dans cet intervalle d'âge, les connaissances arithmétiques sont toujours à la base d'une pensée algébrique. Il est donc important de mener des recherches qui explorent comment la pensée algébrique se développent chez les plus jeunes élèves de moins de 7 ans. Dans le contexte de l'enseignement des mathématiques au N.-B. francophone, à notre connaissance, il n'existe aucune étude à date sur le développement de la pensée algébrique en début du primaire (M-2) et, en général, on trouve peu d'études pour ces niveaux scolaires d'où notre intérêt d'examiner comment la pensée algébrique se développe pendant les premières années de scolarité (M-2) et quels types d'activités (tâches) y contribuent.

Notre analyse du programme d'étude se penchera sur le contenu de la partie pratique et théorique en lien avec le concept de suites non numériques. En ce qui a trait à la partie théorique, nous allons prêter une attention particulière aux résultats d'apprentissage spécifiques (RAS) qui apparaissent dans le programme, et ce, en nous basant sur les différents registres de représentation utilisés (Duval, 1995). Nous considérons que les RAS jouent un rôle important dans le programme. C'est la raison pour laquelle nous pensons que l'analyse de cette partie du contenu du programme pourrait apporter des éléments de réponse à notre question de recherche qui est la suivante. Comment se caractérise la pensée algébrique dans le domaine régularités et algèbre du programme d'étude ?

II. CADRE CONCEPTUEL

Dans cette section, le but est d'apporter un éclairage théorique à la problématique suivante : comment se caractérise la pensée algébrique dans des situations d'analyse de suites non numériques au primaire ? Nous allons donc identifier de situations ou types de tâches favorisant le développement de la pensée algébrique au primaire en s'appuyant sur de nombreux travaux de recherche. Qu'entend-on par pensée algébrique ?

La structure et les relations mathématiques sont au cœur de la pratique du développement précoce de la pensée algébrique, en particulier, les pratiques de généralisation, de représentation, de justification et de raisonnement à l'aide de relations mathématiques (Blanton et al., 2011), mais on peut aussi utiliser des nombres et des mots pour exprimer des transformations arithmétiques en terme général (Britt et Irwin, 2011). Pour Kieran (2022), la multi-dimensionnalité du développement précoce de la pensée algébrique se situe sur la pensée analytique, la pensée structurale et la pensée fonctionnelles : La pensée analytique consiste à opérer sur une inconnue, de travailler avec des quantités indéterminées, elle englobe la réflexion sur le signe d'égalité et l'équivalence, résolution des équations sans utiliser le symbolisme et la résolution des équations en utilisant le symbolisme (Bednarz et Janvier, 1996 ; Radford, 2012). La pensée structurale se concentre principalement à voir les relations, les propriétés et la structure des nombres, des opérations et des expressions (Squalli 2002). La pensée fonctionnelle s'intéresse à chercher des expressions et le raisonnement à propos des relations entre des quantités qui varient et elle permet de rendre explicite de manière générale la relation sous-jacente de la fonction donnée au moyen d'un certain type de représentation conventionnelle ou non conventionnelle (Carraher and Schliemann, 2007 ; Radford, 2012). Toutefois, la pensée analytique et la pensée structurale sont deux dimensions du développement précoce de la pensée algébrique qui sont toutes enracinées dans la perspective de l'arithmétique généralisée où le nombre est l'objet mathématique de base (Kieran, 2022). Ce qui revient à dire que ces deux dimensions peuvent être regroupées dans la dimension unique et plus générale de la pensée relationnelle. Cependant, la troisième dimension de la pensée algébrique précoce est ancrée dans la perspective fonctionnelle, où la fonction est l'objet mathématique de base. La généralisation est un point de chevauchement de ces trois dimensions. Ainsi, la généralisation est un aspect de la plupart des études sur l'algèbre précoce, quelle que soit la dimension qui prédomine dans le cadre théorique du chercheur (Kieran, 2004 ; Squalli, 2002 ; Radford, 2012). D'autres recherches (Vlassis et Demonty, 2002) mettent en lumière l'intérêt de problèmes de généralisation pour développer la pensée algébrique.

Pour le cas des jeunes enfants, les auteurs concentrent leurs recherches sur l'exploration des habiletés des élèves à généraliser et à exprimer la généralité (Mulligan et Mitchelmore, 2009 ; Papic et al., 2011). Etant donné que les activités sur les suites au préscolaire n'impliquent pas toujours de nombres, les chercheurs mentionnent que les généralisations effectuées à ce niveau sont issues d'une pensée préalgébrique (Papic et al., 2011). D'où il est donc intéressant d'examiner les composantes de ces dimensions de la pensée algébrique qui ne s'appuient pas nécessairement sur un travail basé sur les nombres (Polotskaia et al., 2024).

Plusieurs chercheurs soutiennent bien de promouvoir les activités sur les suites dès le plus jeune âge, étant donné que nombre d'entre eux créent spontanément des suites au cours de leurs jeux libres, autrement dit plusieurs élèves ont ce potentiel de façon naturelle (Fox, 2005). Les jeunes enfants travaillent tous régulièrement avec des suites à motif répété (Rittle-Johnson et al., 2015). À l'âge de 3 ans, les enfants remarquent et complètent des suites à motif répété simples alternés AB (par exemple, une chemise à rayures rouges et vertes) et remarquent ces suites dans les chansons (Sarama et Clements, 2009). De 4 à 7 ans, les enfants élargissent leurs connaissances des suites à motif répété pour inclure des motifs de base de plus en plus complexes (par exemple, ABB, AABB, ABC) et des tâches de création de suites à motif répété de plus en plus exigeantes (Papic et al., 2011, Sarama et Clements, 2009). Dans le but de conceptualiser la suite, Mulligan et ses collaborateurs (2009) ont introduit le concept de Awareness of Mathematical Pattern and Structure (AMPS). Ce concept se base sur deux composantes : une cognitive (c'est-à-dire la connaissance de la structure de la suite) et une métacognitive (c'est-à-dire la tendance à rechercher des suites et à les analyser). D'où notre intérêt au processus cognitif propre à l'activité mathématique telle que conceptualisé par Duval (1995) dont l'approche sémiotique sera notre cadre d'analyse.

Pour Duval (1995), les mathématiques sont un domaine particulièrement sensible aux questions sémiotiques : en effet les objets mathématiques sont par essence théoriques, ils sont perceptivement et instrumentalement inaccessibles, ils ne sont « visibles » que par leurs représentations sémiotiques, leurs signes. Selon Duval (2005), les représentations sémiotiques internes aux mathématiques, de nature symbolique, s'organisent en systèmes sémiotiques (ou registres sémiotiques), définis notamment par des règles organisatrices à partir d'éléments de base. Duval distingue deux types de transformation de représentations sémiotiques : l'un qui correspond à utiliser les possibilités de transformation propres à chaque registre et l'autre qui consiste à un changement de registre de représentation. C'est le second type de transformation qui se révèle être le plus difficile et le plus déroutant pour les élèves.

Le traitement est une activité qui conduit à la transformation d'une représentation en une autre sans changer de système sémiotique. On dispose des règles d'expansion (différentes des règles de conformité) dont l'application donne une représentation de même registre que la représentation de départ. Selon Duval (1995, p. 39), le traitement est une activité qui est interne au registre de représentation ou à un système de départ. La conversion est une transformation d'une représentation en une représentation d'un autre registre. Contrairement au traitement, la conversion est une activité qui est externe par rapport au registre de la représentation de départ. Duval (1995, p. 43) considère que les règles de conversion ne sont pas les mêmes selon le sens dans lequel le changement de registre est effectué.

Dans l'activité sur les suites, diverses représentations sont utilisées pour transformer des objets relevant, soit du domaine concret (petits cubes, etc.), soit des mathématiques. En ce qui concerne le concept de suite non numérique à motif répété, nous nous intéressons, dans la présente recherche, aux systèmes sémiotiques (système de signe figuratif et système de signe verbal). Nous allons donc analyser ces systèmes à travers leurs modes de représentation dans le programme d'étude du N.-B. pour montrer en quoi ils peuvent soutenir le développement de la pensée algébrique de jeunes élèves.

III. ANALYSE DU PROGRAMME D'ÉTUDE M-2

La première étape de notre analyse a porté sur le repérage des représentations présentes dans le programme d'étude dans le domaine régularités et algèbre. Au sens de Duval, nous avons alors relevé les registres : (1) langage naturelle (RL) : système de signes verbaux, langue naturelle (des mots, des phrases, etc.) ; (2) figural/ schéma (RS) : des schémas à l'échelle, des représentations spontanées figurales, des suites avec des dessins, etc.

Selon (MEDPENB, 2016), le programme d'étude en mathématiques du N.-B. (Francophone) englobe cinq domaines en lien avec le contenu de formation : nombres et opérations, régularités et algèbre, géométrie, mesure et traitement de données. Les résultats d'apprentissage spécifiques (RAS) découlant de ces domaines sont les mêmes de la maternelle à la 2e année. Le contenu de chaque domaine, étant regroupé autour du résultat d'apprentissage général (RAG), est structuré en deux parties à savoir les résultats d'apprentissage spécifiques (RAS) et les directives pédagogiques et stratégies d'enseignement qui suggèrent les approches didactiques pour atteindre les RAS.

Ainsi, les élèves de la maternelle à la 2^{e} année du primaire sont amenés à travailler sur les suites non numériques comportant des figures géométriques à motif répété et celles comportant des motifs croissants (RS). Afin de répondre à notre questionnement, nous allons donc analyser les résultats d'apprentissage spécifiques (RAS) du domaine régularités et algèbre du programme d'étude de la maternelle à la 2e année du primaire, en nous basant sur l'approche théorique de Duval (1995). Cette approche nous semble pertinente, car elle analyse en profondeur le rôle des représentations sémiotiques dans la construction de concepts mathématiques. Pour l'économie de l'espace, nous nous limitons aux suites à motif répété, c'est ce type de suite qui est examiné tout au long de niveaux M-2. Cette analyse étant encore préliminaire, elle sera, par la suite, élargie en considérant les RAS liés aux suites à motif croissant et aux relations (équations) qui apparaissent dans le programme dès la 2e année, ainsi qu'aux liens avec le domaine nombres et opérations. Ce dernier, bien qu'ancré dans l'arithmétique, est également reconnu par les chercheurs comme domaine pouvant promouvoir l'émergence de la pensée algébrique (Squalli et al., 2011).

Dans notre analyse du programme de la M-2, nous avons cherché à identifier les registres sémiotiques en examinant les directives pédagogiques et stratégies d'enseignement liées aux RAS sur les suites non numériques à motif répété. Le tableau ci-dessous (figure 1), nous donne les types de taches et leurs instructions que la recherche propose et celles que l'on a identifié dans le programme d'étude.

Les RAS du programme de la maternelle introduisent l'exploration des concepts de base associés à l'étude des régularités par le biais du triage et de la classification des objets en fonction d'attributs comme la couleur, la forme, la taille, la texture et la fonction. Ce vocabulaire de base développé lors des différentes activités de triage, de classification permettra à l'enfant de parler des différentes régularités que ce dernier peut observer dans son environnement ou dans des suites non numériques. Le programme souligne également de profiter de l'étude des suites pour introduire l'ordre des éléments (le premier, le deuxième, etc.) dans une suite en fonction de leur position. La représentation des régularités par des suites non numérique à motif répété fait partie des résultats d'apprentissage spécifiques dès la maternelle. Le programme recommande l'utilisation d'une diversité de matériels et de situations pour représenter des régularités par des suites. Le programme ajoute également que des contextes en géométrie (RS) peuvent appuyer l'exploration et la représentation des régularités. Au sens de Duval (1995), le programme utilise plusieurs représentations sémiotiques pour introduire les régularités à l'aide de suites. Pour Duval, la diversité de ces représentations sémiotiques constitue une extension de la capacité cognitive de la pensée, car les systèmes de représentations sémiotiques différents offrent des possibilités de transformations ou d'opérations qui sont totalement différentes.

Types de tâches (proposées par la recherche)	Copier et dupliquer (Clement et Sarama, 2014)	Créer (Papic et al. 2011)	Etendre (Rittle-Johnson et al. 2013)	Généraliser (Traduire) (Luken, 2016)	Identifier le motif de la suite (Rittle-Johnson et al., 2013)	Reconnaitre (Sternberg et Larson, 1976)	Comprendre (Kidd et al., 2013)
Questions (instructions)	Faire la même suite	Faites une suite avec des blocs	Quel élément vient ensuite?	Faites la même suite en utilisant différents matériaux	Quelle est la plus petite partie de la suite qui se répète ?	Quelle suite est la même ?	Quel élément manque-t-il?
Première rencontre dans le programme d'étude	**Maternelle**	**1ère année**	**1ère année**	**1ère année**	**1èreannée**	**1èreannée**	**2ème année**

Figure 1 – *Tâches proposées par la recherche et celles identifiées dans le programme d'étude*

Pour montrer la diversité de situations pour représenter des régularités dans le programme d'étude, la suite non numérique de la figure 2 peut etre représenté par la suite cercle triangle cercle traingle… Dans ce cas, l'élève doit censer faire le transfert entre la représentation d'une suite en utilisant les couleurs et celle en utilisant les figures géométriques ou de sons de musique. Donc ici, au sens de Duval, la conversion est un phénomène de traduction ou de codage car elle permet le passage entre représentations d'un registre (figural/ shéma) dans un autre registre.

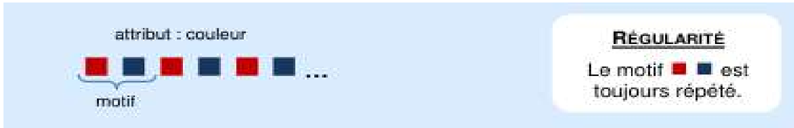

Figure 2 – *Exemple d'une suite non numérique à motif répété simple* (MENB, 2016, p. 40)

Les résultats d'apprentissages spécifiques du programme de la pemière année du primaire continuent sur l'exploration approfondie des régularités. Comme une continuité aux RAS de la maternelle, le programme introduit pour la première fois la notion de structure d'une suite et recommande de travailler sur la diversité de strctures (AB, ABC, ABB, etc) (voir figure 3). Pour montrer l'interet de travailler sur la structure d'une suite, l'idée est de formaliser un modèle en utilisant des lettres pour unifier le traitement entre deux représentations sémiotiques d'un meme objet mathématique (une suite) (voir figure 3). Il nous semble que le but de l'apparition de structure codée avec les lettres dans la figure 3 est d'amener l'élève à l'idée de la modélisation, de la construction d'une sorte de bijection (la correspondance terme à terme) entre l'ensemble de termes de la suite et celui de lettres utilisées, mais le programme d'étude ne donne aucun indice à propos. Le vocabulaire de base sur les suites s'élargit avec les mots terme et rang de la suite.

Figure 3 – *Exemple d'une suite non numérique à motif répété* (MENB, 2016, p. 38)

Dans l'exemple ci-dessous, la représentation est celle d'un cœur (de couleur rouge et bleu) et la procédure consiste à y ajouter d'autres coeur de manière à obtenir chaque fois le meme motif.

A travers les différentes structures de la suite, ces représentations apparaissent bien comme des registres sémiotiques puisqu'elles sont le lieu d'un *traitement* spécifique (la suite de la figure 3 et la suite →→↑→→↑→→↑... ont la meme structure (AAB)) et d'une *conversion* (les sons étant une situation pour représenter des régularités, la suite aigu aigu grave aigu aigu grave (RL) devrait permettre normalement de dire également qu'il sagit de la suite de la figure 3). Comme le recommande la recherche, le RAS mentionne également que les élèves doivent développer leurs compétences sur l'analyse de la structure d'une suite en la prolongeant, en expliquant le motif répété et en créant de nouvelles suites dans le but de les expliquer (voir figure 1). Mais toute fois, ni les directives pédagogiques ni les stratégies d'enseignement du programme ne précise comment prolonger une suite à motif répété. Les RAS font également mention de la généralisation d'une suite à motif répété au sens de Luken (2016), qui est perçue comme une forme de traduction de la meme suite en utilisant différents matériaux tout en gardant sa structure(voir figure 4).

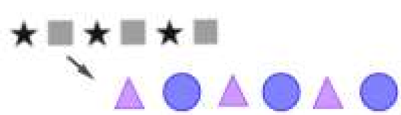

Figure 4 – *Exemple de généralisation d'une suite non numérique à motif répété*

Les RAS du programme de la deuxième année sont une continuité des RAS du programme de la maternelle et de la première année. En 2 ème année, les suites non numériques à motif répété doivent se complexifier et faire appel à différentes structures (voir figure 5). En se référant à la recherche, la complexité d'une suite non numérique à motif répété dépend du nombre d'éléments qui composent son motif. Autrement dit, la compréhension d'une suite dont la structure est AB est plus facile que celle dont la structure est AAB (Close et Glennon, 1977). Donc la structure ABBC de la suite de la figure 5 est plus complexe à analyser que la structure AAB de la suite de la figure 3. Pour ce qui concerne le niveau de difficulté entre les taches sur les suites, il y a un consensus entre les chercheurs que la tâche la plus facile, à savoir copier la suite, qui est gérable dès l'âge de trois ou quatre ans, et la tâche la plus difficile, à savoir l'identification du motif de la suite, qui peut rester difficile même pour les enfants de neuf ans (Warren et Cooper, 2007).

Figure 5 – *Exemple d'une suite non numérique à motif répété* (MENB, 2016, p. 37)

Il ressort de notre analyse du domaine régularités et algèbre du programme, la présence de quelques composantes pour développer les habiletés de la pensée algébrique : Prolonger/Représenter des suites non numériques à motif répété. Le rôle du raisonnement algébrique dans l'exploration des suites est important. Pour Papic et al. (2011), une compréhension de chaque suite est un type de généralisation dans le sens qu'elle implique une relation qui est partout la même. Ainsi la généralisation la plus simplifiée aux suites à motif répété peut être considérée comme une réflexion algébrique, ce qui implique que la pensée algébrique serait accessible aux enfants dès le préscolaire. L'accent est mis sur l'exploration de régularités à partir de suites non numériques à motif répété; la progression d'un niveau à l'autre se tourne autour de la complexité qui augmente (Jeannotte et Squalli, 2022). Les mécanismes didactiques de cette progression ne sont toutefois pas clairement explicités dans le programme d'étude. La question est - comment la continuité en termes de développement de la pensée algébrique pourrait être reconstruite ? Le programme ne le précise pas.

La reconnaissance et l'analyse des suites fournissent une base pour le développement de la pensée algébrique, offrant aux enfants l'opportunité d'observer et de verbaliser des généralisations, ainsi que de les enregistrer symboliquement (Warren et Cooper, 2007).

IV. CONCLUSION

Pour ce qui est de l'étude des régularités, souvent vue comme une approche pour introduire l'algèbre, elle peut aussi être associée au domaine de l'arithmétique. En effet, il est possible d'étudier les suites sans généraliser de façon algébrique en restant dans le domaine calculatoire et en s'intéressant davantage à la recherche d'une unique réponse qu'à la structure de la relation. L'étude des suites en elle-même ne suffirait pas à initier les élèves à la pensée algébrique, c'est la façon de les traiter qui est importante. Donc, travailler la pensée algébrique au primaire ne signifie pas nécessairement introduire un symbolisme conventionnel ou ni même de nouveaux contenus, mais constitue davantage une manière différente d'approcher les mathématiques. Le contenu mathématique du programme d'étude est donc riche de notions qui favorisent le développement de la pensée algébrique. De la maternelle à la 2e année du primaire, le contenu du programme initie les élèves à identifier les régularités dans les suites non numérique à motif répété, mais en s'appuyant plus sur les suites non numériques, ce qui révèle du programme une tendance contraire à la conception opérationnelle (arithmétique) pour développer la pensée algébrique. Cette initiation se fait de façon progressive, en partant d'une suite bien définie, l'élève doit identifier la régularité et être capable de prolonger cette suite. Après il faut également faire appel à diverses situations pour représenter des régularités et profiter de l'occasion pour éveiller les cinq sens de l'élève (les sons, les motifs que l'on observe, les mouvements que l'on fait, la texture d'objets que l'on touche, etc.).

RÉFÉRENCES

Afonso, D. et Mc Auliffe, S. (2019). Children's capacity for algebraic thinking in the early grades. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, *23*(2), 219-232. https://doi.org/10.1080/18117295.2019.1661661

Anwandter Cuellar, N. S., Lessard, G., Boily, M. et Mailhot, D. (2018). L'émergence de la pensée algébrique au préscolaire : les stratégies des élèves concernant la notion d'équivalence mathématique. *Revue des sciences de l'éducation de McGill*, *53*(1), 146-168. https://doi.org/10.7202/1056287ar

Bednarz, N. et Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem solving tool : Continuities and discontinuities with arithmetic. Dans N. Bednarz, C. Kieran et L. Lee (dir.), *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching* (p. 115-136). Springer.

Blanton, M. L. et Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. Dans J. Cai et E. Knuth (dir.), *Early algebraization* (p. 5–23). Springer.

Boily, M., Polotskaia, E., Lessard, G. et Anwandter Cuellar, N. S. (2020). Les suites non numériques et le potentiel de la pensée algébrique chez les élèves du préscolaire. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation, 22*(1), 11–35. https://doi.org/10.7202/1070023ar

Bower, C. A., Zimmermann, L., Verdine, B. N., Pritulsky, C., Golinkoff, R. M. et Hirsh-Pasek, K. (2021). Enhancing spatial skills of preschoolers from under-resourced backgrounds: A comparison of digital app vs. concrete materials. *Developmental Science, 25*(1), article e13148. https://doi.org/10.1111/desc.13148

Britt, M. S. et Irwin, K. C. (2011). Algebraic thinking with and with-out algebraic representation: A pathway for learning. Dans J. Cai et E. Knuth (dir.), *Early algebraization* (p. 137–159). Springer.

Bronner, A. (2015). Développement de la pensée algébrique avant la lettre. Apport des problèmes de généralisation et d'une analyse praxéologique. Dans L. Theis (dir.), *Actes du colloque EMF 2015 « Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage », 10-14 octobre 2015, Alger, Algérie* (p. 247-264).

Carraher, D. W. et Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. Dans F. K. Lester (dir.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (p. 669–705). Information Age.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.

Duval R. (2006). Transformations de représentations sémiotiques et démarches de pensée en mathématiques. Dans J.-C. Rauscher (dir.), *Actes du XXXII^{e} Colloque COPIRELEM, Strasbourg, IREM* (p. 67-89).

Fox, J. (2005). Child-initiated mathematical patterning in the pre-compulsory years. Dans H. L. Chick et J. L. Vincent (dir.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Melbourne, Australie* (Vol. 2, p. 313-320). PME.

Freiman, V. et Lee, L. (2004). *Tracking primary students' understanding of the equality sign*. International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Freiman, V., Richard, P. et Jarvis, D. (2012). Enseignement de mathématiques au Nouveau-Brunswick (secteur francophone). Dans J.-L. Dorier et S. Coutat (dir.), *Actes du colloque EMF2012 « Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle », 3-7 février 2012, Université de Genève, Suisse* (SPE3, p. 1761–1780). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Jeannotte, D. et Squalli, H. (2022). Le développement de la pensée algébrique dans les programmes de l'Ontario : quel potentiel et quelle trajectoire visée? *Revue Québécoise de Didactique des Mathématiques, Thématique 2*(Tome 1), 34-58. https://doi.org/10.71403/fp396345

Kaput, J. J. (1998). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum. Dans National Council of Teachers of Mathematics, Mathematical Sciences Education Board, & National Research Council (dir.), *The nature and role of algebra in the K-14 curriculum: Proceedings of a National Symposium* (p. 25-26). National Academies Press.

Kidd, J., Carlson, A., Gadzichowski, M., Boyer, C. E., Gallington, D. et Pasnak, R. (2013). Effects of patterning instruction on the academic achievement of 1st-grade children. *Journal of Research in Childhood Education, 27*(2), 224–238. https://doi.org/10.1080/02568543.2013.766664

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator (Singapore), 8*(1), 139–151.

Kieran, C. (2014). *What does research tell us about fostering algebraic thinking in arithmetic*? National Council of Teachers Mathematics. http:www.nctm.org/news/content.aspx?id=42315

Larguier, M. (2019). Le développement de la pensée algébrique dans le curriculum officiel en France et au Québec. *Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, *21*(4).

Marchand, P. et Bednarz, R. (1999). L'enseignement de l'algèbre au secondaire : une analyse des problèmes présentés aux élèves. *Bulletin de l'Association mathématique du Québec*, *XXXIX*(4), 30-42.

Ministère de l'éducation du Nouveau-Brunswick. (2000). *Programme d'études, Mathématiques, 1re en 4 année*. Direction des services pédagogiques.

Mulligan, J. et Mitchelmore, M. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal*, *21*(2), 33–49. https://doi.org/10.1007/BF03217544

Papic, M. M., Mulligan, J. T. et Mitchelmore, M. C. (2011). Assessing the development of preschoolers' mathematical patterning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *42*(3), 237-268. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.42.3.0237

Polotskia, E., Anwandter-Cueuillard, N., Savard, A. et Robert, V. (2024, juillet). *Learning routes for algebraic thinking in preschool* [Rapport de recherche]. PME.

Radford, L. (2012). On the development of early algebraic thinking. *PNA*, *6*(4), 117–133.

Rittle-Johnson, B., Fyfe, E., McLean, L. et McEldoon, K. (2013). Emerging understanding of patterning in 4-year-olds. *Journal of Cognition and Development, 14*(3), 376-396.

Sarama, J. et Clements, D. H. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. Routledge.

Squalli, H., Mary, C. et Marchand, P. (2011). Orientations curriculaires dans l'introduction de l'algèbre : cas du Québec et de l'Ontario. Dans J. Lebeaume, A. Hasni et I. Harlé (dir.), *Recherches et curriculums : le cas de l'enseignement des mathématiques, sciences et technologie* (p. 65-78). De Boeck.

Squalli, H. (2015). La généralisation algébrique comme abstraction d'invariants essentiels. Dans L. Theis (dir.), *Actes du colloque EMF2015 « Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage »* (p. 346-356).

Squalli, H., Bronner, A., Larguier, M. et Adihou, A. (2020). Cadre d'analyse des raisonnements dans la résolution de problèmes algébriques de type partage inéquitable. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation, 22*(1), 36-62.

Squalli, H. et Jeannotte, D. (2024). Un modèle praxéologique de référence de la pensée algébrique élémentaire. *Revue Québécoise de Didactique des Mathématiques, Thématique 2*(Tome 2), 66-101. https://doi.org/10.71403/wwwy4e62

Squalli, H., Oliveira, I., Bronner, A. et Larguier, M. (2020). *Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début du secondaire. Recherches et perspectives curriculaires*. Livres en ligne du CRIRES. https://lel.crires.ulaval.ca/oeuvre/le-developpement-de-la-penseealgebrique-lecoleprimaire-et-au-debut-du-secondaire-recherches

Sternberg, L. et Larson, P. (1976). The development of pattern recognition ability in children. *Contemporary Educational Psychology, 1*(2), 146–156. https://doi.org/10.1016/0361-476X(76)90019-9

Warren, E. et Cooper, T. J. (2007). Repeating patterns and multiplicative thinking: Analysis of classroom interactions with 9 year old students that support the transition from known to the novel. *Journal of Classroom Instruction, 41*, 7-11.