LE RÔLE DES PRATIQUES MATHÉMATIQUES DANS L'ÉVOLUTION DE L'ACTIVITÉ COLLECTIVE DE RÉSOLUTION DE TÂCHES MATHÉMATIQUES ROUTINIÈRES

| BARABÉ* GENEVIÈVE

Résumé | Ce texte explore comment la résolution collective de tâches routinières peut déclencher le déploiement de pratiques mathématiques en classe. La mise en œuvre collective de ces pratiques mathématiques, en retour, génère de nouveaux problèmes à résoudre en classe. Ancré dans la théorie de l'enaction, ce texte empirique veut mettre en lumière l'intérêt d'étudier l'activité mathématique sur un plan collectif pour explorer les nouvelles possibilités mathématiques qui peuvent en émerger.

Mots-clés : pratiques mathématiques, résolution de problèmes, enaction, activité collective, tâches routinières

Abstract | This paper explores how the collective resolution of routine tasks can trigger the deployment of mathematical practices in the classroom. In turn, the collective implementation of these practices generates new problems to solve in class. Grounded in the cognitive theory of enaction, this empirical paper aims to highlight the value of studying mathematical activity from a collective perspective to explore the new mathematical possibilities that may emerge from it.

Keywords: Mathematical practices, problem-solving, enaction, collective activity, routine tasks

I. CONTEXTE

La résolution de problèmes occupe une place centrale dans l'activité des mathématiciens, faisant de celle-ci une avenue privilégiée pour permettre aux élèves de développer une pensée mathématique à l'image de celle des mathématiciens (Schoenfeld, 2020). Pour plusieurs chercheurs, l'intérêt de la résolution de problèmes à l'école réside dans l'engagement des élèves dans des pratiques mathématiques, c'est-à-dire des actions mathématiques telles qu'expliquer, justifier, valider, conjecturer, exemplifier, ou encore généraliser (e.g. Lampert 1990 ; Schoenfeld, 2020). Ces pratiques mathématiques constituent un élément clé de la pensée mathématique, telle que la décrit Schoenfeld (*Ibid.*). Les travaux de recherche sur la résolution de problèmes soulignent, depuis toujours, l'importance de proposer de bonnes tâches mathématiques (e.g. Liljedahl et Cai, 2021). Par leur construction, ces tâches favorisent une activité mathématique authentique chez les élèves, les incitant à mobiliser de telles pratiques mathématiques. Ce texte veut illustrer que la résolution *collective* de tâches routinières – dont la résolution repose principalement sur l'application technique de procédures connues – peut également placer les élèves dans une activité mathématique authentique dans laquelle ils déploient une diversité de pratiques mathématiques. Il se veut une invitation à s'intéresser au déploiement de la pensée mathématique à un niveau collectif et en contexte d'exploitation de tâches routinières en classe.

1. L'enaction et l'étude d'une activité collective

L'enaction (e.g. Maturana et Varela, 1992) met en exergue le rôle des inter-actions entre un individu et son environnement dans le déploiement des connaissances. Cette insistance sur les mots « inter » et « action » veut accentuer le fait que, du point de vue de l'enaction, la connaissance est conçue comme

* Université de Montréal – Canada – Genevieve.Barabe@umontreal.ca

une action accomplie par celui qui connait, et pointe vers le rôle fondamental de l'environnement dans l'émergence de chaque action (Kieren, 1995). Selon l'enaction, l'environnement et l'individu sont toujours en inter-action créant une compatibilité mutuelle qui permet leur fonctionnement respectif. L'environnement agit comme un déclencheur de changements chez l'individu et, réciproquement, celui-ci agit comme un déclencheur de changements pour l'environnement. Ces inter-actions et changements se mobilisent dans une boucle d'influence mutuelle où chacun influence l'autre dans son évolution. Cette dynamique amène à s'intéresser à la classe, enseignant et élèves, non pas comme une collection d'individus qui agissent les uns à côté des autres, mais comme une collectivité qui avance en ré-actions les uns avec les autres et où les actions des uns ouvrent de nouvelles possibilités d'action pour la collectivité (*Ibid.*). Ces inter-actions, alors, ont le potentiel de faire émerger de nouveaux objets ou phénomènes qu'un individu à lui seul n'aurait pas généré. C'est dans une telle perspective collective que ce texte s'inscrit.

II. CONSIDÉRATIONS MÉTHODOLOGIQUES

Les données de cette étude proviennent d'un projet de recherche portant sur l'activité mathématique des élèves en contexte de résolution de problèmes mené dans des classes de 5^{e} année (10-11 ans), 6^{e} année (11-12 ans) et de 2^{e} secondaire (13-14 ans) (voir Proulx, 2018 pour plus de détails). Dans ce projet, des séances de classe, enregistrées sur vidéo, ont été réalisées en suivant une structure qui s'inspire de celle de Douady (1994): le chercheur-enseignant (CE) propose une tâche oralement ou par écrit, puis laisse aux élèves un certain temps de résolution ; ils sont ensuite invités, en plénière, à partager leurs idées et stratégies, et celles-ci sont notées au tableau ; d'autres stratégies sont ensuite sollicitées, et elles sont finalement comparées et discutées. À tout moment, le CE et les élèves peuvent enrichir la discussion par de nouvelles idées, questions ou commentaires. Les tâches utilisées dans ces séances étaient sélectionnées par les enseignants eux-mêmes, à partir de leurs manuels scolaires. Elles peuvent être qualifiées de routinières, car les notions, procédures ou stratégies mathématiques pour les résoudre avaient déjà été enseignées, et parfois même depuis plusieurs années. Quelques exemples de tâches utilisées dans ces séances sont: « Estime la somme de : 152 496 + 608 947. *5^{e} année.* », « Combien donnent 202 ÷ 4? *6^{e} année* », et « Résoudre 2x + 3 = 5. *2^{e} secondaire* ».

L'analyse de ces séances sous l'angle des pratiques mathématiques déployées collectivement a mis en évidence une diversité de pratiques mathématiques ayant fait évoluer les tâches routinières, comme veut l'illustrer l'exemple suivant.

III. EXEMPLE D'UNE SÉANCE

Dans la classe de 5^{e} année de madame Josiane, la tâche routinière suivante est proposée à résoudre :

46, 81, 70, 106

Quels nombres sont divisibles par 2 ?

Figure 1 – *Énoncé de la tâche de divisibilité par 2*

La résolution collective de cette tâche routinière a duré une cinquantaine de minutes à travers lesquelles la collectivité a mis en avant différentes pratiques mathématiques. Leur déploiement a stimulé la mise en œuvre d'autres pratiques mathématiques qui, ensemble, ont contribué à faire émerger différents *problèmes mathématiques collectifs*. Un problème mathématique collectif est un problème mathématique qui émerge d'une activité collective, de manière contingente à celle-ci, et qui présente une incertitude pour la collectivité qui alors s'engage à la surmonter (Barabé, soumis). Dans cette séance, la collectivité s'est penchée sur les problèmes mathématiques collectifs suivants, qui ont émergé à travers les inter-actions en classe :

1. Peut-on vérifier si chaque chiffre est divisible pour savoir si le nombre complet l'est ?
2. Comment peut-on y arriver avec 106 ? Comment peut-on décomposer 106 ? Qu'est-ce que le 10 dans 106 ?
3. Si les décompositions sont divisibles, est-ce que le nombre aussi l'est ?
4. Dans quels cas un nombre pair divisé par 2 donne-t-il un nombre impair ?

Le premier problème mathématique collectif est survenu alors qu'une stratégie reposant sur la divisibilité de chaque chiffre composant le nombre est *expliquée*. Cette stratégie propose que comme 4 et 6 sont chacun divisible par 2, le nombre complet l'est aussi. La *validation* de cette stratégie amène la collectivité à se pencher d'une manière générale sur la vraisemblance de la stratégie qui alors devient le premier problème mathématique collectif sur lequel elle se penche. Différentes *explications, justifications et exemples* sont donnés par la collectivité pour le résoudre ce qui l'amène à vouloir utiliser cette stratégie avec le nombre 106. Une *argumentation* mathématique prend alors place puisque la collectivité est mitigée sur la validité de la stratégie pour ce nombre précisément. La Figure 2 suivante présente ce moment de la séance, sous la forme d'une vignette, ainsi que son analyse en termes de pratiques mathématiques :

Pour débuter, Paul propose le nombre 46 comme réponse. Le CE lui demande d'expliquer sa réponse. Paul explique que comme le 4 se divise en deux et que le 6 aussi, alors 46 est divisible par 2. Le CE demande aux autres élèves ce qu'ils en pensent.	Demande d'explication Explication Demande de validation
Marie dit qu'elle aurait divisé par 2 pour obtenir 23. Le CE indique qu'il s'agit d'une autre façon de faire et reformule les deux stratégies proposées :	Explication
CE : Dans la première stratégie, on s'intéresse au 4 et ensuite au 6, on va s'y intéresser, mais, en ce moment, ce que tu proposes c'est que 46 c'est aussi 23 + 23, c'est ça?	Explication
Marie : Bien, je diviserais.	Explication
CE : Oui, 46 ÷ 2 = 23. Comme ça donne un nombre complet, alors c'est divisible par 2.	Explication, justification
Le CE demande ensuite aux élèves ce qu'ils pensent de la première stratégie de regarder le 4 puis le 6. Zack se lance dans une explication en proposant que Paul s'intéresse à la parité de chaque chiffre du nombre :	Demande validation
Zack : C'est comme s'il regarde le 4 et le 6 pour savoir si c'est un nombre pair ou impair.	Explication
CE : Ok. Peux-tu nous en dire un peu plus là-dessus?	Dem. explication/justification
Zack : Bien, les deux sont des nombres pairs parce que 0, 2, 4, 6, 8 sont des nombres pairs.	Justification
CE : Ok.	
Zack : Les nombres pairs se divisent toujours en deux.	Justification
Le CE dit que c'est un peu ce que Marie propose avec sa division. Le CE indique que le nombre 47, en contraste, ne peut pas se diviser en deux puisqu'il est impair. Le CE demande aux élèves s'ils ont autre chose à dire sur cette stratégie.	Explication Exemplification Dem. explication/justification
Damien dit alors que les deux stratégies sont au fond les mêmes, car « 4 on peut le diviser en 2, ça donne 2. Et 6, on peut aussi le diviser en 2, ça donne 3 ». Le CE reprend l'explication donnée puis un autre élève renchérit qu'il aurait également fait 6 ÷ 2 = 3, car 3 + 3 = 6 et 4 ÷ 2 = 2, car 2 + 2 = 4.	Explication, justification Explication Explication, justification
À ce moment, Julie propose que 106 fonctionne aussi, car cela donne deux fois le nombre 53 :	
Julie : 106 fonctionne aussi parce que ça donne 53 et 53.	Exemplification, justification
CE : Ok. Tu en regardes un autre et ça te donne 53 et 53. Quand on divise en deux, ça veut dire qu'ils ont deux parties. Est-ce qu'on pourrait utiliser la stratégie de Marie, mais avec le 106?	Explication Formulation d'une question mathématique
Certains élèves disent que oui et d'autres disent que non.	Argumentation

Figure 2 – *Extrait de la séance de classe et analyse des pratiques mathématiques déployées*

L'argumentation mathématique sur l'usage de la stratégie de divisibilité de chaque chiffre du nombre sur l'exemple de 106 fait ainsi naitre le second problème mathématique collectif, plus local, car directement lié au nombre 106. Pour le résoudre, des *explications* et *justifications* mathématiques sont données et mènent à mettre en avant différentes décompositions de 106 et à réfléchir à la valeur du « 10 » dans le nombre. Ceci entraine la collectivité à *formuler une question mathématique* à savoir « si les décompositions sont divisibles, est-ce que le nombre complet l'est nécessairement ? ». Cette question engendre le troisième problème mathématique collectif qui génère des *justifications*, *exemples* et *validations* chez la collectivité pour le résoudre et y donner un sens. Sa résolution mène la collectivité à *formuler une conjecture,* soit qu'un nombre pair divisé par 2 donne toujours un nombre impair. Étant investiguée, celle-ci devient le quatrième problème mathématique collectif. Plusieurs *exemples, justifications, (in)validations* permettent de la réfuter et donc de résoudre ce problème. La période tirant à sa fin, un retour rapide sur la tâche initiale est fait pour conclure la séance.

IV. DISCUSSION ET MOT DE LA FIN

Cette séance met en évidence que le déploiement de pratiques mathématiques en classe a le potentiel de déclencher d'autres pratiques mathématiques qui permettent non seulement de faire avancer la résolution de la tâche initiale, mais également de stimuler l'émergence de problèmes mathématiques collectifs sur lesquels la collectivité est appelée à se pencher. Si l'un des intérêts de la résolution de problèmes à l'école est de développer la pensée mathématique des élèves à travers ces pratiques mathématiques (Schoenfeld, 2020), il semble également que leur mise en œuvre en classe peut générer de nouveaux problèmes mathématiques à explorer. En retour, ces problèmes déclenchent le déploiement d'autres pratiques mathématiques, stimulant à nouveau la pensée mathématique des élèves. Une boucle d'influence mutuelle se fait sentir : les pratiques mathématiques favorisent l'émergence de problèmes mathématiques collectifs, et les problèmes mathématiques collectifs stimulent la mise en œuvre de pratiques mathématiques. Ce phénomène souligne l'importance du contexte offert en classe qui apparait prédominant par rapport à la tâche proposée puisqu'à travers ses inter-actions avec la collectivité, celle-ci est appelée à se transformer pour faire place à de nouveaux problèmes à résoudre. Toutefois, la question des conditions favorisant la mise en œuvre des pratiques mathématiques et l'émergence de problèmes mathématiques collectifs demeure à investiguer. Ce texte empirique invite à poursuivre les études en ce sens, et à explorer la pensée mathématique à un niveau collectif.

RÉFÉRENCES

Barabé, G. (soumis). Vers la notion de problèmes mathématiques collectif. *For the Learning of Mathematics.*

Douady, R. (1994). Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir. *Reperes – IREM,* (15), 37-61. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/iwr94020_1702761124976-pdf

Kieren, T. (1995). *Mathematics Teaching (In-the-middle): Enactivist view on learning and teaching mathematics* [Communication]. Canadian National Mathematics Leadership conference, Université Queens, Kingston, Ontario.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal, 27*(1), 29-63.

Liljedahl, P. et Cai, J. (2021). Empirical research on problem solving and problem posing: a look of the state of the art. *ZDM, 53*(3), 723-735. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01291-w

Maturana, H. et Varela, F. J. (1992). *The tree of knowledge*. Shambhala.

Proulx, J. (2018). On teaching actions in mathematical problem-solving contexts. Dans *Actes de la 40e rencontre annuelle de North American Chapter of the International Group for the Pyschology of Mathematics Education, 15-18 novembre, Greenville* (p. 1060-1067). University of South Carolina & Clemson University.

Schoenfeld, A. H. (2020). Mathematical practices, in theory and practice. *ZDM, 52*(4), 1163-1175. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01162-w