ÉGALITÉ DE QUANTITÉS ET DÉVELOPPEMENT D'UNE PENSÉE STRUCTURALE EN ARITHMÉTIQUE

| CONSTANTIN* CÉLINE, COULANGE** LALINA ET THEIS*** LAURENT

Résumé | Ce texte propose d'explorer comment des élèves de 6-7 ans peuvent mettre en œuvre une pensée structurale (Kieran, 2022) en arithmétique dans des tâches centrées sur des égalités et leurs écritures symboliques. En nous inscrivant dans une approche sémio-linguistique en didactique des mathématiques (Drouhard, 2012) nous nous intéressons à ce que recouvre la compréhension du signe « = » et la notion d'égalité du point de vue d'une théorie mathématique des quantités (Chambris et Subramaniam, 2023).

Mots-clés : pensée structurale, égalité, arithmétique, quantités

Abstract | In this paper, we explore how 6- to 7-year-olds can develop a structural thinking (Kieran, 2022) in arithmetics when facing equivalence tasks and their symbolical writing. Taking a semio-linguistic approach (Drouhard, 2012) in didactics of mathematics, we focus on pupils' understanding of the equal sign and the concept of equality from a theory of quantities perspective (Chambris et Subramaniam, 2023).

Keywords: Structural thinking, equality, arithmetic, quantities

I. PENSÉE STRUCTURALE, ÉGALITE ET CONNAISSANCES ARITHMÉTIQUES

1. *Pensée structurale et égalité*

Les recherches internationales s'inscrivant dans le courant de l'*early algebra* ont très tôt mis en avant l'importance d'une pensée structurale comme susceptible de favoriser l'entrée dans une pensée algébrique, la pensée structurale étant essentiellement caractérisée par la perception de relations entre des nombres correspondant à des propriétés de nombres et d'opérations (Mason et al., 2009). Dans ce même courant, de nombreuses recherches se sont intéressées à l'égalité d'expressions numériques (par exemple Pang et Kim, 2018 ; Madej, 2021)[1]. Nous retenons en particulier de ces travaux que les significations d'égalités qui seraient le plus à même de contribuer au développement d'une pensée structurale, reposent sur des relations entre expressions numériques de part et d'autre du signe « = » par opposition à des calculs à réaliser et convoquent des connaissances arithmétiques liées aux propriétés des nombres et des opérations. Les recherches réunies par Kieran (2022) autour de la dimension structurale tentent notamment d'identifier la (ou les) façon(s) dont les élèves structurent ou transforment les expressions numériques associées à ces égalités. Certains travaux se sont en particulier intéressés à des stratégies relevant de la compensation que l'on pourrait traduire par des égalités comme « 3 + 5 = 4 + 4 » par exemple. Celles-ci correspondent au fait que quand une « partie » d'un nombre est « transférée » à un autre (Carpenter et al., 2003) ou quand un nombre est retiré à un terme d'une somme et ajouté à l'autre (Schifter, 2018), comme « 1 de 5 à 3 » dans « 3 + 5 », la somme est inchangée. D'autres recherches relèvent des stratégies orientées par la décomposition de nombres permettant de

* LIRDEF, Univ Montpellier, Univ Montpellier Paul Valéry, Montpellier – France – celine.constantin@umontpellier.fr

** LaB-E3D (EA 7441), Univ Bordeaux – France – lalina.coulange@u-bordeaux.fr

*** Université de Sherbrooke – Canada – Laurent.Theis@USherbrooke.ca

[1] Kieran (2022) signale que d'aucuns parlent plus de pensée relationnelle. Elle-même situe certaines égalités du côté de la pensée analytique en insistant sur les interactions importantes entre ces types de pensées.

substituer à un terme d'une somme, une somme de plusieurs nombres ou inversement (Kieran et Martínez-Hernández, 2022). Cette variété apparente dans les stratégies d'élèves envisagées dans les recherches pose la question des connaissances arithmétiques potentiellement convoquées dans la transformation d'expressions numériques associées à des égalités.

2. *Connaissances arithmétiques*

Une majorité de ces travaux rapproche ces connaissances de propriétés des nombres et des opérations qui seront explicitées, généralisées et formalisées plus tardivement, comme la propriété d'associativité (Carpenter et al., 2003). Toutefois, Kieran (2022) souligne les spécificités potentielles des connaissances arithmétiques qui participent du développement d'une pensée structurale. A partir des travaux de Freudenthal (1983), elle signale des structures possibles (d'ordre, d'addition, de multiplication), d'une diversité bien plus grande que celle classiquement envisagée à partir des propriétés « basiques » des nombres et des opérations. Nous rejoignons Kieran (2022) et Kieran et Martínez-Hernández (2022) sur le fait qu'identifier les propriétés arithmétiques sur lesquelles repose l'interprétation d'égalités numériques par des élèves de primaire ne va pas de soi. A l'instar de Chambris et Subramaniam (2023), nous faisons l'hypothèse de connaissances transparentes dans l'enseignement et l'apprentissage de l'arithmétique scolaire qui vont de pair avec une théorie mathématisée des quantités qui pourrait se constituer comme fondement pour la construction des nombres. Si cette perspective a été explorée dans de nombreux travaux (par exemple, Smith et Thompson, 2007 ou Davydov, 1975), nous nous inscrivons dans la perspective de l'étude renouvelée d'une théorie des quantités telle qu'amorcée par Chambris et Subramaniam. Notre démarche se rapproche d'ailleurs de celle de ces auteurs qui défendent l'idée d'un nécessaire raffinement des concepts pré-numériques tels que développés dans ces travaux afin de mettre en lumière la manière dont les raisonnements sur les quantités peuvent contribuer à la construction de significations des nombres, dans un aller-retour entre études cognitives et élaboration théorique. Notre point de vue s'attache toutefois à la question du rôle des signes dans la construction de significations.

3. *Signes, représentations sémiotiques iconiques et symboliques*

Il nous paraît important de prendre en compte la diversité de « signes » potentiellement à l'œuvre dans l'activité de jeunes élèves sur les égalités car l'introduction des écritures symboliques et du signe « = » se fait souvent avec des collections de cubes, de jetons ou de doigts, représentées voire manipulées par les élèves (Constantin et Coulange, 2022). Nous situant dans une approche sémio-linguistique en didactique des mathématiques (Drouhard, 2012), nous interrogeons le rôle des représentations sémiotiques (Duval, 2006) qui donnent à voir et contribuent à façonner l'activité des élèves sur les égalités, que ces représentations soient symboliques algébriques, matérielles ou iconiques[2]. L'une des caractéristiques des représentations sémiotiques iconiques tient en particulier à leur ambivalence sémantique (Constantin et Coulange, 2022), ces représentations pouvant se référer tantôt à un nombre tantôt à une collection (dont le sens est alors porté par l'organisation spatiale de ses éléments, contrairement au cas où elle se réfère directement au nombre). Nous faisons l'hypothèse que des représentations iconiques contribuent, sous certaines conditions, à la construction de significations des écritures symboliques d'égalités, adossées à des propriétés sur les quantités. Celles-ci ne sont toutefois pas toujours aisées à identifier (Constantin et Coulange, *à paraître*).

[2] Dans la suite du texte, nous regrouperons sous le terme iconique des représentations constituées d'objets comme des cubes ou des doigts en présence ou imagés, manipulables effectivement ou mentalement.

II. UNE ANCIENNE EXPÉRIMENTATION AUTOUR DU SIGNE « = »

Les données analysées dans cette communication sont issues de la recherche doctorale d'un des co-auteurs (Theis, 2005) dont l'objectif était de décrire le processus de compréhension du signe « = » chez des élèves de la première année du primaire (6 à 7 ans). Pour ce faire, une expérimentation didactique a été réalisée, avec une séquence d'enseignement individualisée et adressée à trois enfants, précédée d'un prétest et suivie d'un post-test. Dans Theis (2005), les éléments suivants ont guidé l'élaboration de la séquence (de 6 à 9 séances individuelles d'une trentaine de minutes) mise en œuvre dans le dernier tiers de l'année scolaire. (1) Les tâches se sont basées sur une analyse conceptuelle de la relation d'égalité appuyée sur le modèle de compréhension de Herscovics et Bergeron (1989). (2) Les tâches étaient élaborées pour favoriser un lien entre des représentations sémiotiques matérielles (cubes ou jetons) et une écriture mathématique. Vers la fin de la séquence seulement, le travail s'est fait exclusivement sur l'écriture. (3) La signification du signe « = » a été explicitée dans la première séance, comme indiquant qu'on retrouvait la même quantité des deux côtés du signe, dans une situation qui présentait une opération à droite du signe « = ». (4) Deux types de situations ont été proposées pour l'égalité: des situations d'inclusion dans lesquelles le tout inclut les parties, et des situations de comparaison de collections. (5) Différents types d'égalités ont été travaillées $a = b + c$ ou $a + b = c$ puis $a + b = c + d$. (6) Trois types de tâches ont été proposés aux élèves: déterminer si une égalité donnée est vraie ou non ; ajuster une égalité si elle a été identifiée comme étant fausse et déterminer une inconnue dans une égalité pour que celle-ci soit vraie.

Dans cet article, nous prenons appui sur des matériaux recueillis lors de cette expérimentation auprès de deux des trois élèves concernés, nommées Mélissa et Caroline, afin de documenter leur cheminent tout au long de l'expérimentation, du point de vue du développement d'une pensée structurale. Si les variables didactiques de la séquence expérimentée n'avaient pas initialement été pensées à cet effet, certaines des caractéristiques des tâches proposées nous ont paru pouvoir être réinterrogées de ce nouveau point de vue. Nous cherchons ainsi à élucider les connaissances arithmétiques potentiellement à l'œuvre dans les stratégies de Mélissa et Caroline et les conditions de leur émergence, au regard des représentations sémiotiques en présence dans les tâches expérimentées. Précisons d'emblée que les tâches proposées à ces deux élèves ne sont pas toujours identiques, nous y reviendrons au regard de leur cheminement.

III. DEUX PARCOURS D'ÉLÈVES DANS LA SÉQUENCE : MÉLISSA ET CAROLINE

1. *Une propriété arithmétique « commune »*

Une première connaissance arithmétique semble émerger rapidement des tâches proposées pour les deux élèves. Nous proposons la formulation suivante de la propriété arithmétique associée.

Une quantité A composée de B et de C étant plus petite (plus grande) qu'une quantité A' de D, si on augmente (diminue) de D l'une ou l'autre des parties composant A, *i.e* si on augmente (diminue) B ou C de D, alors on augmente (diminue) A d'autant, et A et A' sont égalées.

Figure 1 – *Formulation de la propriété arithmétique P1*[3]

Pour Caroline, une connaissance liée à cette propriété émerge dès la première séance (qui suit le prétest). Des cubes sont disposés devant elle sur deux feuilles distinctes, celle de gauche comporte 6

[3] Notons que la première partie s'appuie sur l'une des propriétés fondamentales des quantités identifiées par Chambris (2022) reliant structure d'ordre et structure additive: « si a<b alors il existe c tel que a + c = b » (p. 76)

cubes non organisés spatialement et celle de droite comporte 5 cubes organisés en deux sous-ensembles de 2 et 3 cubes. Elle est invitée à dénombrer chaque collection et à placer des cartons comportant des écritures symboliques algébriques sous chacune. Caroline s'exécute et place correctement les cartons « 6 » et « 2 + 3 », réalisant par là-même une conversion entre ces représentations sémiotiques, ce qui a déjà été travaillé dans les tâches précédentes.

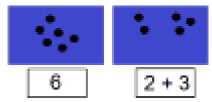

Figure 2 – *Première tâche*[4] *associée à la propriété P1 pour Caroline (Séance 1).*

Caroline doit décider si on peut ou non mettre le signe « = » entre les deux expressions. Elle s'appuie spontanément sur les représentations sémiotiques iconiques des cubes pour raisonner et ramène la tâche donnée à une comparaison de cardinaux des deux collections représentées. Une fois les quantités concernées identifiées (5 et 6), elle conclut qu'on ne peut pas mettre le signe « = ». Une nouvelle tâche lui est alors proposée : il s'agit de modifier les représentations sémiotiques, à la fois iconiques et symboliques pour pouvoir écrire le signe « = ».

Et si on voulait mettre un signe « = », qu'est-ce qu'il faudrait changer ? (*rajoute 1 cube aux 3 cubes*). Est-ce qu'on peut le mettre maintenant ? **Oui**. Est-ce que tu peux lire ce qui est écrit ? **6 = 2 + 3**. C'est correct maintenant ? **Oui**. Tu en as 2 + 3 ici maintenant ? **Non**. Qu'est-ce qu'il faudrait changer encore. **Enlever ça** (*« 2 + 3 »*). Qu'est-ce qu'il faut mettre ? (*écrit « 6 = 2 + 4 » sur un carton et le met en dessous*).

Le fait que Caroline envisage rapidement l'ajout d'un cube nous amène à supposer qu'elle a identifié que la quantité associée à la collection sur la feuille de droite est plus petite de 1 que la quantité associée à la collection de cubes représentée sur la feuille de gauche. Certes l'ajout d'un cube à la sous-collection de trois cubes ne trouve pas directement son pendant dans les écritures symboliques, Caroline ne proposant pas directement de remplacer le « 3 » par un « 4 » dans « 2 + 3 ». Il n'en demeure pas moins qu'une connaissance arithmétique associée à P1 émerge rapidement dans l'accomplissement de cette tâche, à partir de la comparaison de deux collections dont l'une est envisagée comme étant composée de deux sous-collections.

Pour Mélissa, nous avons relevé plusieurs tâches l'amenant à convoquer cette même connaissance arithmétique. Tout comme pour Caroline, la connaissance concernée fait l'objet d'une formulation dès la première séance de l'expérimentation.

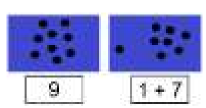

Figure 3 – *Première tâche associée à la propriété P1 pour Mélissa (Séance 1).*

Après avoir dénombré et mis en place les cartons, Mélissa raisonne à partir des écritures symboliques pour justifier qu'on ne peut pas mettre le signe « = » (en disant que « 9 » « ça n'est pas 8 »). Elle se réfère toutefois d'emblée aux collections de jetons en présence et répond rapidement « il faut en sortir un » pour répondre à la question suivante.

Qu'est-ce qu'il faut faire pour qu'on puisse mettre le signe « = » ? **Il faut en sortir un** (*des 9 jetons*). Qu'est-ce que tu écrirais à la place ? (*réfléchit, et écrit 7 à droite du + puis 2 à gauche pour faire 2 + 7*)

[4] Pour chaque tâche, nous avons choisi de représenter les cubes ou les jetons en présence de la même manière à l'aide de points pour en montrer la disposition.

Nous supposons que Mélissa a identifié le fait que les quantités totales différant de 1, elle pouvait les égaler en diminuant de 1 la collection de 9 jetons. Lorsqu'elle est invitée à modifier l'écriture, elle ne remplace toutefois pas « 9 » par « 8 ». Elle opère sur l'autre expression numérique en remplaçant « 1 » par « 2 ». On peut penser qu'elle convoque un fait numérique connu renvoyant à une décomposition de 9 à partir de 7 ou de la recherche d'un complément à 9 de 7 par calcul. Toutefois on peut aussi faire l'hypothèse qu'elle perçoit l'ajout de 1 à l'une des deux quantités qui compose la quantité « totale ». Une tâche donnée par la suite (8 __ 4 + 3) dans le seul registre des écritures symboliques renforce cette deuxième hypothèse.

> Est-ce qu'on peut mettre un signe « = » ici ? **Non, parce que, ici, c'est 8, et 4 + 3, ça donne 7**. **Alors, il faut mettre un 5 ici. Je mettrais 5 + 3 ou 4 + 4.** (*écrit « 8 = 4 + 4 »*) Est-ce qu'on peut mettre un signe « = » maintenant ? **Oui, parce que, ici c'est 8, et ici, 4 + 4, ça donne 8 aussi**.

Dans cette deuxième tâche, quand il s'agit d'égaler 7 à 8, Mélissa mobilise plus visiblement une connaissance associée à la propriété P1, en montrant sa capacité à la réinvestir de façon flexible dans la transformation de l'écriture symbolique « 4 + 3 » en « 5 + 3 » ou « 4 + 4 », ce qui renvoie bien à l'augmentation de l'une ou de l'autre quantité composant le « tout ».

Ainsi, pour ces deux élèves, la comparaison de quantités qui diffèrent de 1 provoque rapidement une augmentation ou une diminution de la quantité composée, se traduisant à son tour très vite par un ajout ou un retrait de 1 à l'une des quantités qui la composent. Ceci correspond à une connaissance relevant de la propriété arithmétique P1, dans le cas particulier d'une différence de 1. Pour Caroline cette connaissance s'exprime d'abord comme des transformations des représentations iconiques avant d'être converties (et parfois de façon laborieuse) dans le registre symbolique quand Mélissa envisage d'emblée des transformations des écritures symboliques de manière plus concomitante. Toutefois pour ces deux élèves, on peut penser que des caractéristiques intrinsèques des représentations iconiques favorisent de manière importante l'émergence d'une telle connaissance arithmétique, l'ajout ou la diminution d'1 à la quantité composée se reportant presque nécessairement à l'ajout ou à la diminution d'1 à l'une des quantités qui la composent. Pour cette raison entre autres, même si le point de départ est une comparaison de quantités (correspondant à des expressions numériques de part et d'autre du signe « = » dans le registre symbolique) qu'il s'agit d'égaler, nous nous questionnons sur son potentiel dans le développement d'une pensée structurale. Nous y reviendrons.

2. *Une propriété arithmétique inégalement convoquée*

Une autre propriété arithmétique nous a semblé en arrière-plan de connaissances émergentes mais de manière plus inégale dans les cheminements de ces deux mêmes élèves. Nous en proposons la formulation suivante :

Une quantité A composée de B et de C est égale à une quantité A'. Si A' est composée d'une quantité plus grande (plus petite) que B – soit B augmentée (diminuée) de D – elle est composée d'une quantité plus petite (plus grande) C - C diminuée (augmentée) de D.

Figure 4 – *Formulation de la propriété arithmétique P2*

Lors du prétest et tout au long de la séquence, Mélissa convoque à plusieurs reprises des « déplacements » d'un cube d'une sous-collection à l'autre, ces deux sous-collections représentant une quantité composée. La présence concomitante de certaines écritures symboliques et des représentations iconiques semble contribuer à piloter des comparaisons des quantités correspondant aux sous-collections en jeu ou aux termes de sommes.

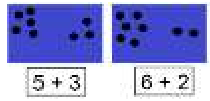

Figure 5 – *Un déplacement pour comparer des quantités composées (Mélissa, Séance 5)*

Est-ce qu'on peut mettre un signe « = » ici ? (*réfléchit*) **Oui**. Pourquoi penses-tu cela ? **Parce que 5 + 3, ça donne 8 et 6 + 2, ça donne 8** (*met le signe « = »*). Peux-tu me montrer aussi avec les cubes qu'il y en a la même quantité ? […] **Il faut en mettre un de ceux-ci** (*des 6 à droite*) **ici** (*des 2 à droite*).

Si Mélissa convoque d'emblée les quantités totales, elle justifie l'égalité de « 5 + 3 » et de « 6 + 2 » de manière complémentaire en envisageant le déplacement d'un cube d'une représentation iconique à l'autre, tout en réalisant des conversions dans le registre des écritures symboliques. Toutefois plusieurs observables nous amènent à penser que la validation de l'égalité est à ce stade principalement fondée par une action de déplacement qui, de manière sensible, ne fait ni diminuer ni augmenter la quantité totale de cubes, plutôt que par une propriété des quantités composées. D'une part, lors du pré-test, Mélissa justifie à plusieurs reprises la conservation de quantités face à des déplacements de l'intervenant en disant « parce que tu n'en as pas sorti »[5]. D'autre part, on note la prégnance de verbes d'action liés au déplacement (d'un cube) qui renvoie aux propriétés intrinsèques des représentations iconiques en présence (« il faut en mettre un de ceux-ci »). Autrement-dit la conservation ne dérive pas de la modification de la structure liée aux quantités composées et d'une propriété comme P2.

Pourtant, lors de la dernière séance, pour statuer sur la validité d'une égalité à partir des seules écritures symboliques « 5 + 4 » et « 6 + 3 », le discours de Mélissa évolue :

Pourquoi penses-tu cela ? **Parce que 5 + 4, ça donne 9, et 6 + 3, ça donne 9 aussi**. **Mais on peut faire, et ici, avec, le 6, pour que ça donne la même chose, il faut que ce soit un peu plus petit.** Est-ce que tu peux m'expliquer un peu plus ? **Regarde, ici, c'est 5 + 4, et ici, c'est 6 + 3, alors on peut faire 5 ici (***à la place du 6***), mais si c'est 6, il ne faut pas mettre 4, mais quelque chose d'un peu plus petit.**

De nouveaux arguments liés à la comparaison de quantités apparaissent: « 6 » étant plus grand que « 5 » (augmenté de 1), on doit substituer à « 4 » quelque chose de plus petit (diminué de 1). Cette transformation d'écriture se joue dans le seul registre des écritures symboliques tout en restant référée à des quantités composées qu'il s'agit cette fois de comparer, en prise d'appui sur une relation d'ordre entre les parties. Ceci nous paraît constituer une avancée notable en direction de P2 avec un possible début de généralisation *via* des verbalisations dépassant le cas particulier d'une augmentation ou diminution de 1 (« un peu plus petit »). La rapidité avec laquelle Mélissa accomplit la tâche suivante, compléter « 2 + 4 = ? + 1 », en évoquant la substitution de « 1 » à « 2 » dans la deuxième sous-expression numérique pour en conclure « 5 » de manière quasi-immédiate, nous semble l'indice supplémentaire d'une nouvelle connaissance liée à cette propriété arithmétique qui devient opérationnelle pour envisager des traitements intrinsèques aux écritures symboliques.

Si un certain nombre de conditions ont semblé réunies pour que Mélissa construise des connaissances associées à P2, il n'en est pas tout à fait de même pour Caroline. On trouve un peu les mêmes prémisses de certaines de ces connaissances dans des traitements d'abord intrinsèques au registre de représentation sémiotiques iconiques, soit des actions de déplacement d'un cube d'une partie à l'autre. Ainsi lors de la troisième séance, après quelques difficultés rencontrées pour comprendre la consigne, Caroline modifie quelque peu la tâche en réorganisant une collection de 8 cubes en deux sous-collections de 4 cubes, en vue de compléter l'égalité lacunaire « 5 + … = 8 ». Ceci lui permet d'envisager assez rapidement que la quantité « manquante » (dans le registre symbolique) ou

[5] Ceci renvoie d'ailleurs à la définition de l'égalité comme étant « ni plus grand ni plus petit » et fondée par le principe de trichotomie dans la théorie des quantités développée par Subramaniam et Chambris (à paraître).

« cachée » dans le registre iconique correspond à « 3 », après le déplacement d'un cube d'un sous-ensemble de 4 vers l'autre, pour obtenir 5.

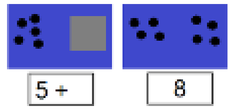

Figure 6 ***–*** *Un déplacement pour compléter une égalité lacunaire (Caroline, Séance 3)*

Toutefois, dans l'accomplissement de cette tâche comme pour d'autres, Caroline exprime le sentiment d'avoir « triché ». Est-ce parce qu'elle manque de moyens de contrôle sur une telle stratégie ? Par la suite, elle semble d'ailleurs peiner à réinvestir une telle stratégie, faute peut-être de connaissances relevant de la propriété P2. Ainsi lors de la sixième séance, lorsqu'il s'agit à nouveau de déterminer l'inconnue pour que l'égalité soit vraie (mais avec deux sommes de deux termes), Caroline, visiblement embêtée par la question, réfléchit et propose « 1 ».

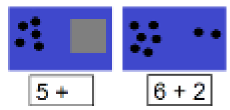

Figure 7 ***–*** *Un déplacement sans recomposition (Caroline, Séance 6)*

J'ai déjà triché parce que j'ai fait comme ça. Il y avait ceux-ci (*montre 6 cubes sur la feuille de droite*) **et après j'en ai enlevé 1** (*sort 1 cube du sous-ensemble de 6 et le met à côté*) **et j'ai mis 1 sur le sac aussi.**

Elle paraît bien diminuer une des deux quantités représentées à droite en lien avec la comparaison entre 5 et 6, mais en perdant de vue ce qui en découle pour l'autre partie et la quantité totale, la quantité 1 ôtée à 6 n'étant pas appréhendée comme « à rajouter à 2 ». Si elle parvient à le faire avec l'aide de l'intervenant, ce n'est que lors de la huitième séance qu'elle paraît prendre conscience de l'effet de la modification d'une quantité sur l'autre si l'on veut conserver la quantité composée à l'occasion de la tâche présentée à la figure 8.

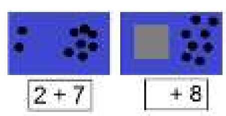

Figure 8 ***–*** *Un déplacement et une recomposition (Caroline, Séance 8)*

J'ai regardé 7 et ce cube (*1 des 2 cubes à gauche*), **et j'ai pensé qu'il en resterait un dans la boîte**.

Ce faisant, Caroline anticipe (en parlant au conditionnel) le résultat d'une action de déplacement, l'ajout d'un cube à une quantité conduisant nécessairement à la diminution de ce même cube de l'autre si l'on ne veut pas « modifier » le tout. Cette évolution ne semble cependant pas se stabiliser par la suite, et ne pas pouvoir prendre la forme aboutie prise dans le discours de Mélissa, et ce, sans doute pour différentes raisons. En effet, la succession de tâches présentées à Caroline ne fait pas apparaître une différence de 1 entre deux quantités au moment où ces connaissances émergent contrairement à Mélissa. Le fait que Caroline ne s'autorise pas beaucoup à déplacer les cubes (malgré les relances de l'intervenant qui l'y invite) a peut-être également joué un rôle. Ainsi pour une autre tâche dans la même séance associée à l'égalité lacunaire « 2 + 8 = ? + 1 » proche de celles déjà rencontrées, Caroline compte les cubes de la sous-collection de 8 cubes et un cube de la sous-collection de 2 cubes, sur la feuille de gauche avant d'annoncer « neuf », sans pour autant envisager l'action de déplacement d'un cube correspondant au remplacement de « 2 » par « 1 », pourtant apparue en amont.

IV. VERS DE NOUVELLES BALISES POUR LE DÉVELOPPEMENT D'UNE PENSÉE STRUCTURALE FONDÉE PAR LES QUANTITÉS ?

Nos analyses nous ont permis d'identifier deux propriétés relevant d'une théorie mathématique des quantités (Subramaniam et Chambris, à paraître), l'une renvoyant à des connaissances qui émergent rapidement, contrairement à l'autre, les connaissances associées ne se pérénisant que pour l'une des deux élèves seulement. Sur la base des résultats de notre étude, nous affirmons que ces deux propriétés arithmétiques se différencient du point de vue du développement d'une pensée structurale fondée par une théorie mathématique des quantités. Pour étayer cette affirmation, nous reprenons la distinction faite par Vergnaud entre les trois premières relations « de base » du champ conceptuel additif : celles dites de composition, de comparaison et de transformations d'états (Vergnaud, 1990). Les caractéristiques des tâches proposées dans la séquence expérimentale renvoient à des relations de compositions (nous avons d'ailleurs parlé de « quantités composées ») d'états envisagés autour des structures additives et des expressions numériques afférentes (du type « $a + b$ » de part et d'autre du signe « = »). Toutefois certaines des stratégies investies par les élèves semblent davantage relever tantôt de relations de transformations d'états, tantôt de comparaisons (additives) d'états.

Ainsi, à partir du jeu sur les tâches proposées, si l'amorce des stratégies des deux élèves associées à la propriété P1 suggère une comparaison d'états (une quantité composée étant reconnue plus grande que l'autre), celle-ci semble très vite évoluer en une relation de transformation d'états *via* la recherche de ce qu'il faut ajouter à une quantité (composée de deux autres quantités) pour en « égaler » une autre. Au regard des spécificités des signes en présence (en particulier les représentations matérielles de cubes), ceci conduit assez spontanément à envisager une relation de transformation d'une des deux quantités qui composent la quantité initiale toujours en considérant « ce qu'il y a à ajouter » comme transformation positive portant sur une partie. Ainsi les raisonnements associés à P1 sont-ils essentiellement fondés par des relations additives élémentaires de transformation d'états, la comparaison des quantités totales n'étant qu'une première étape.

La propriété P2 nous semble revêtir un plus fort potentiel pour le développement d'une pensée structurale. Certes, du fait des caractéristiques des représentations sémiotiques matérielles en présence, ce sont initialement des « déplacements » d'un objet qui émergent pour les deux élèves, ces déplacements pouvant être appréhendés comme des transformations d'états concomitantes des parties (l'une entrainant l'autre si l'on ne veut pas modifier le tout que constitue la quantité composée). Toutefois pour une des deux élèves, un changement de point de vue s'opère l'amenant à « voir » de nouvelles structures. En effet, sur la fin de l'expérimentation, des évolutions de son discours laissent à penser que ce sont des relations de comparaison (additive) entre quantités, parties d'un même « tout », qui deviennent le support de sa réflexion. Ces relations additives renvoient aux termes de deux sommes (écrites de part et d'autre du signe « = »), considérés deux à deux, les manipulations d'expressions *via* des substitutions devenant des moyens pour raisonner et opérer sur les quantités. Le fait que les deux élèves convoquent régulièrement des « résultats » correspondant au « tout » a pu jouer un rôle, non seulement pour permettre les comparaisons initiales mais aussi pour garantir la conservation et permettre le cheminement vers la propriété P2.

Finalement, l'observation du parcours de ces deux élèves nous a amenés à identifier une certaine diversité de connaissances arithmétiques au cœur de stratégies parfois qualifiées de compensation dans les recherches, bien au-delà des propriétés algébriques usuelles comme l'associativité. Nous rejoignons en cela les travaux de Kieran (2022). En réinterprétant les relations additives investies par ces élèves dans la perspective des travaux de Vergnaud, la comparaison d'états nous semble bel et bien une balise dans le développement d'une pensée structurale, sous certaines conditions. Au regard de notre corpus, l'une de ces conditions relève de la mise en relation de comparaisons avec des augmentations ou diminutions (Chambris, 2022), sans toutefois que les transformations d'états prennent le pas, ces mises en relations pouvant donner accès à des propriétés arithmétiques susceptibles d'être généralisées (via différentes valeurs de D par exemple). Des éléments facilitateurs nous paraissent émerger comme des constructions de significations d'écritures symboliques qui restent référées aux quantités (*via* des représentations matérielles, mais nécessairement transitoires) ou comme le cas particulier du « 1 », mais qui ne doivent pas faire verser dans un « constat systématique » (du résultat de deux transformations concomitantes) qui serait contre-productif. La question des conditions permettant un parcours comme celui de Mélissa dont nous espérons avoir montré le caractère particulièrement délicat, nous parait rester ouverte.

RÉFÉRENCES

Carpenter, T., Franke, M. et Levi, L. (2003). *Thinking mathematically. Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Heinemann.

Chambris, C. (2022). *Transparence des savoirs dans l'enseignement et l'apprentissage de l'arithmétique scolaire, raisonnements multiplicatifs. Apports d'une perspective mathématique sur les grandeurs et les unités. Histoire et perspectives sur les mathématiques* [Habilitation à diriger des recherches, CY Cergy Paris Université]. https://hal.science/tel-04391867

Chambris, C. et Subramaniam, (Ravi) K. (2023). Can school arithmetic be seen as theory building? Dans *Proceedings of ISEMT Charles University, Faculty of Education, Prague, the Czech Republic* (p. 123-133). https://hal.science/hal-04188452

Constantin, C. et Coulange, L. (2022). Sens et interprétation du signe « = » du point de vue d'élèves de 6-7 ans. *RQDM,* (Thématique 1), 5-42. https://rqdm.recherche.usherbrooke.ca/ojs/ojs-3.1.1-4/index.php/rqdm/article/view/53

Constantin, C. et Coulange, L. (2023, 24 mars). *Ambivalence et potentialités de représentations sémiotiques dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques en première année de primaire* [Communication]. Séminaire National de Didactique des Mathématiques.

Davydov, V. V. (1975). The psychological characteristics of the "prenumerical" period of mathematics instruction. Dans L. Steffe (dir.), *Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics. Volume 7: Children's capacity for learning mathematics* (p. 109-206). University of Georgia.

Drouhard, J. P. (2012). L'épistémographie, un outil au service de la didactique des mathématiques. Dans M. Abboud-Blanchard et M. Flückiger (dir.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques –2011* (p. 129-133). IREM de Paris VII.

Duval, R. (2006). Transformation de représentations sémiotiques et démarches de pensée en mathématiques. Dans J.-C. Rauscher (dir.), *Actes du XXXIIe Colloque COPIRELEM* (p. 67-89). IREM de Strasbourg.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Reidel.

Herscovics, N. et Bergeron, J. (1989). Analyse épistémologique des débuts de l'addition. Dans *Actes de la 41e rencontre de la Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques* (p. 155-165). Bruxelles.

Kieran, C. (2022). The multi-dimensionality of early algebraic thinking: background, overarching dimensions, and new directions. *ZDM Mathematics Education*, *54*, 1131–1150. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01435-6

Kieran, C. et Martínez-Hernández, C. (2022). Coordinating invisible and visible sameness within equivalence transformations of numerical equalities by 10- to 12-year-olds in their movement from computational to structural approaches. *ZDM Mathematics Education, 54*, 1215–1227. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01355-5

Madej, L. (2021). Primary school students' knowledge of the equal sign – the Swedish case. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *20*, 321–343. https://doi.org/10.1007/s10763-020-10144-z

Mason, J., Stephens, M. et Watson, A. (2009). Appreciating mathematical structure for all. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 10-32.

Pang, J. et Kim, J. (2018). Characteristics of Korean students' early algebraic thinking: A generalized arithmetic perspective. Dans C. Kieran (dir.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (p. 141-166). Springer.

Schifter, D. (2018). Early algebra as analysis of structure: A focus on operations. Dans C. Kieran (dir.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (p. 309-328). Springer.

Smith, J. P. et Thompson, P. W. (2007). quantitative reasoning and the development of algebraic reasoning. Dans J. J. Kaput, D.W. Carraher et M. L. Blanton (dir.), *Algebra in the early grades* (p. 95-132). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315097435-5

Subramaniam, K. (Ravi) et Chambris, C. (2024, 7-14 juillet). *Early algebra as generalised arithmetic is reasoning about quantity* [Communication]. 15th International Congress on Mathematical Education (ICME-15), Sydney, Australie.

Theis, L. (2005). *Les tribulations du signe = dans la moulinette de la bonne réponse*. Éditions Bande didactique.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *10*(2-3), 133-170.