# DÉVELOPPEMENT DE LA PENSÉE RELATIONNELLE : ÉTUDE DES ACTIVITÉS AU DÉBUT DU PRIMAIRE

POLOTSKAIA* Elena, FREIMAN** Viktor, BANKOUSSOU-MABIALA*** Edward et SAVARD**** Annie

**Résumé |** Les chercheurs de l'école de Davydov (2008) suggèrent que la pensée relationnelle constitue une base essentielle pour le développement de la pensée algébrique. En s'appuyant sur l'analyse de deux leçons de résolution de problèmes écrits menées auprès d'élèves de première année du primaire, cette communication contribue à affiner le modèle de développement de la pensée relationnelle chez les élèves au début du primaire.

**Mots-clés** : pensée relationnelle, pensée algébrique, résolution de problèmes écrits, enseignement au primaire

**Abstract |** Researchers from the Davydov (2008) school of thought suggest that relational thinking is foundational for the development of algebraic thinking. Based on two lessons on solving word problems conducted in the first year of primary school (ages 6–7), this paper contributes to the development of a model of relational thinking at the very beginning of the schooling.

**Keywords**: Relational thinking, algebraic thinking, word-problem solving, primary school

## I. PROBLÈME

Les débats autour de l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre se sont intensifiés au cours de 30 dernières années tant du côté de francophonie qu'ailleurs dans le monde. Ce débat a permis de bien documenter les difficultés des élèves et les obstacles qui peuvent être attribués, entre autres, à l'emphase sur la pensée arithmétique (opérationnelle) dès le début de scolarité de l'enfant. Dans ce contexte, le développement de la pensée arithmétique précédait, en tant que préalable (et c'est encore le cas dans certains pays) celui de la pensée algébrique (relationnelle). À la fin du XXe siècle, il est devenu évident qu'un nombre important d'élèves du secondaire étaient confrontés à des difficultés dans l'apprentissage de l'algèbre. Par exemple, de nombreux élèves interprétaient le signe d'égalité (« = ») de manière opérationnelle comme « calculer le résultat » plutôt que de manière relationnelle comme « les expressions gauche et droite sont équivalentes » (voir plus d'exemples dans Kieran, 2018). C'est ainsi que le mouvement Early Algebra est né comme recherche de solutions pour réduire l'écart entre l'arithmétique et l'algèbre dans le but de faciliter une transition entre les deux modes de pensées en introduisant, entre autres, les activités qui permettent de solliciter le raisonnement algébrique tôt au primaire (ex., Kaput, 2008 ; Kieran, 2018).

La conceptualisation du développement du raisonnement algébrique chez les élèves au cours des premières années de la scolarité obligatoire a été mise en avant, entre autres, par Blanton et ses collègues (2018). Les chercheurs utilisaient une définition de la pensée algébrique formulée par Kaput (2008) comme cheminement vers les généralisations et l'expression de ces généralisations sous forme symbolique. Pour les jeunes enfants, le langage naturel et certaines représentations visuelles

* Université du Québec à Ottaouais – Canada – elena.polotskaia@uqo.ca

** Université de Moncton – Canada – viktor.freiman@umoncton.ca

*** Université de Moncton – Canada – eeb7988@umoncton.ca

**** Université McGill – Canada – annie.savard@mcgill.ca

culturellement acceptées sont également considérés comme représentations sémiotiques bien valables (et même préférables).

Toujours dans le cadre de ce mouvement, les chercheurs comme Carpenter et coll. (2003) se sont intéressés aux potentialités de l'arithmétique et des connaissances numériques opérationnelles comme contexte pour introduire, chez les jeunes enfants, les idées liées aux propriétés fondamentales des opérations et les propriétés basiques de l'égalité. Selon nombreux chercheurs (ex., Squalli, 2015 ; Radford, 2014 ; Venant et Migneault, 2017), le contexte arithmétique permet de véhiculer une vision plutôt structurale de nombres et des opérations.

Une autre école de pensée (ex., Davydov, 2008 ; Schmittau, 2005) suggère qu'une certaine pensée relationnelle est préalable à l'arithmétique et peut servir de base au développement de la pensée algébrique. Pour Davydov, cette pensée relationnelle inclut une compréhension de la notion d'équivalence dans les contextes non numériques, notamment des propriétés physiques des objets (longueur, poids, volume, etc.). Elle inclut également une compréhension de certaines relations entre ces quantités comme, par exemple total composé de deux parties, c.-à-d. la quantité totale est équivalente à l'ensemble de deux quantités. Il faut souligner que ces quantités ne sont pas mesurées ni exprimées en nombres ; l'équivalence est déterminée par la comparaison directe des objets ou par déduction (si A=B et B=C, donc A=C).

Dans cette optique, les expériences menées au Québec (Polotskaia et coll., 2023 ; elenapolotskaia.com) ont permis de concevoir des activités qui engagent les élèves dans une étude de structures additives dans un contexte non numérique, toujours dans le but de développer une perspective relationnelle. Cette approche équilibrée vise à favoriser une compréhension plus profonde et holistique des structures additives et des propriétés des opérations d'addition et de soustraction, au-delà de leur simple application arithmétique. En mettant cette approche sur une perspective longitudinale de développement de la pensée algébrique (relationnelle), Polotskaia et ses collègues (2024) se sont penchées sur un cadre d'analyse qui permettra de capter et clairement décrire la pensée relationnelle des élèves dans des contextes non numérique et mixte (numériques-schématiques) au début d'apprentissage.

## II. CADRE CONCEPTUEL

Polotskaia et coll. (2024) se sont basées sur les quatre pratiques essentielles qui reflètent des aspects fondamentaux de Kaput (2008) pour définir leur cadre conceptuel d'algèbre précoce : généraliser, représenter, justifier et raisonner avec une structure et des relations mathématiques (Blanton et al., 2018). Une autre ligne de pensée qui a influencé leur travail provient de l'approche développementale proposée par le psychologue russe Vasily Davydov et ancrée dans l'école de pensée vygotskienne. Dans le cadre de cette approche, de nombreuses expériences (par exemple, Davydov, 1982 ; Mellone et coll., 2021 ; Eriksson et Eriksson, 2020) ont démontré que les jeunes enfants peuvent travailler avec des quantités continues (volume, longueur, etc.) sans compter ni utiliser des expressions numériques. Les enfants peuvent comprendre des relations entre des quantités, les exprimer symboliquement (<, >, =), et justifier leurs solutions logiquement. Ils existent donc des contextes (longueur, poids, etc.) accessibles aux jeunes apprenants pour étudier des relations quantitatives. Dans ces contextes, les enfants peuvent étudier, plus tôt dans leur parcours, des idées algébriques comme l'équivalence, l'utilisation de lettres, l'évaluation des expressions comme vraies/fausses, etc. Ainsi, si des contextes non numériques sont utilisés pour étudier les relations et les structures, les modes de communication et de représentation (modélisation) devraient également être non numériques.

Des chercheurs de Early Algebra (par exemple Radford, 2011 ; Boily et coll., 2020) ont montré que les enfants de 4 à 8 ans peuvent exprimer leur raisonnement sur les relations en utilisant des mots et des gestes spéciaux. Par exemple, pour exprimer la croissance d'une séquence non numérique, un enfant peut dire « en montant » et produire un geste correspondant (Boily et coll., 2020) ; un enfant peut utiliser des gestes pour attirer l'attention sur des aspects généraux de plusieurs structures (images) (Radford, 2011). Dans les expériences de Davydov (2008), la notation des lettres et les représentations schématiques ont été utilisées dès le début et ont aidé les élèves à exprimer leur compréhension. Plus tard dans le parcours, les élèves peuvent utiliser tous ces moyens de représentation et de communication dans des contextes de résolution de problèmes écrits ou d'équations.

En tenant compte du fait que la pensée mathématique des élèves peut refléter une compréhension complète ou partielle des structures ou des relations, et que les élèves peuvent exprimer leur pensée en utilisant des outils sémiotiques de différents niveaux d'abstraction, Polotskaia et coll. (2024) ont proposé le cadre bidimensionnel suivant pour analyser la pensée algébrique des enfants dès l'âge préscolaire dans des contextes non numériques ou mixtes. La première dimension reflète la qualité des relations qu'un élève utilise pour argumenter : relations partielles (plus grand, plus petit, identique) ou relations au sens de Davydov (1982) (équation). La deuxième dimension reflète le niveau d'abstraction des outils sémiotiques utilisés par l'élève : manipulation directe sans commentaires, utilisation du langage naturel et/ou de gestes pour exprimer sa pensée relationnelle, argumentation utilisant un système sémiotique formel culturellement partagé (autre que le langage naturel) (Annexe 1, Tableau 1).

Les auteurs (Savard et Polotskaia 2017; Polotskaia et coll., 2023) ont distingué deux paradigmes dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques au primaire par la résolution de problèmes: celui dit opérationnel et un autre dit relationnel. Il a été démontré le potentiel du paradigme relationnel dans le contexte de problèmes écrits pour faire émerger, chez les élèves de 6 à 8 ans, un niveau d'abstraction accrue, notamment par l'utilisation de la modélisation des relations entre les quantités à l'aide de schémas pour en déduire l'opération arithmétique. Toujours dans ce paradigme, une forme spécifique de tâches a été conçue et expérimentée dans des classes de 1re année (6 ans) au Québec (Savard et Polotskaia, 2017). Dans ce qui suit, nous analysons des extraits de deux leçons lors desquelles les enseignantes, formées lors de nos projets de recherche, utilisent les tâches expérimentales avec leurs élèves.

C'est la première fois que le modèle bidimensionnel est utilisé dans le contexte de la résolution de problèmes écrits. Ce contexte est habituellement traité de façon numérique et dans le paradigme opérationnel. Cependant, les deux enseignantes tentent d'utiliser des schémas des relations quantitatives et travaillent ainsi dans le paradigme relationnel. C'est ce traitement relationnel qui sera analysé pour détecter des éléments de la pensée relationnelle ou algébrique des élèves. Nous cherchons ainsi à opérationnaliser notre modèle, toujours en construction.

# III. LES TRACES DE LA PENSÉE RELATIONNELLE DANS L'ANALYSE DE SITUATIONS ADDITIVES CHEZ LES ÉLÈVES DE PREMIÈRE ANNÉE

La **première leçon** propose aux élèves l'énoncé contenant des données incohérentes. *Cédric a 15 cartes. Samuel lui en donne 3. Cédric a maintenant 20 cartes.* Les élèves devaient détecter l'incohérence et analyser la situation à l'aide de schémas. Cet énoncé présente une relation additive de composition de type équation (total composé de deux parties), notamment, l'ensemble des cartes de Cédric à la fin est composé de ses cartes au début et celles données.

En lisant l'énoncé, un élève (E1) dit immédiatement que '*ce n'est pas bon (le problème), car ça ne fait pas 20, ça fait 18'*. Et à la question de l'enseignante : pourquoi tu penses que ça ne fait pas 20 ? E1 dit que '*15 plus 3, ça fait quinze, seize, dix-sept, dix-huit*'. Un autre élève (E2) dit qu'il faut en ajouter plus pour que ça fasse 20. L'enseignante demande de préciser ce qu'il faut avoir plus. E2 dit '*2 autres de plus*'. L'enseignante : ce qu'on te (à Cédric) donne ou ce que tu as déjà ? E2 affirme que c'est ce qu'on lui donne.

Dans cet épisode, l'élève E1 utilise une façon mathématique (*système sémiotique culturellement partagé*) pour argumenter sa conclusion que 20 « n'est pas bon ». Apparemment, il met en relation les nombres de cartes au début, des cartes données et l'état final pour formuler et réaliser l'opération correspondante (*une relation complète*). À son tour, E2 s'exprime en forme de relation (2 de plus) en faisant référence implicite à la relation entre les trois quantités en question (*une relation complète)* et aussi entre le 18 et le 20 (écart de 2). En plus, E2 identifie le rôle de « 2 autres » dans la relation principale comme les cartes données, ce qui est correct. Il communique dans un langage mathématique (*système sémiotique culturellement partagé).* Dans les deux cas, les élèves communiquent le fruit d'une *réflexion relationnelle avancée*.

Ensemble avec les élèves, l'enseignante a construit un schéma non numérique pour solliciter davantage la pensée relationnelle des élèves (Figure 2). Elle aide les élèves à associer chacun des trois segments à une quantité mentionnée dans l'histoire. Les réponses des élèves, bien que courtes, ne contenaient toutefois aucune référence explicite à une valeur numérique.


***Figure 2 –*** *Schéma représentant la relation dans sa forme générale*

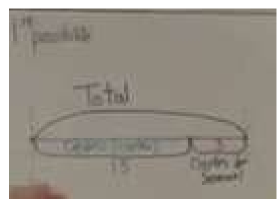


***Figure 3 –*** *Schéma analysant le cas 1 (on cherche le total)*

La classe se met ainsi à examiner les trois hypothèses sur une donnée erronée (ce qui ne va pas dans l'énoncé). Le premier cas (le total de 20 ne va pas) ne semblait pas avoir posé des difficultés aux élèves. À partir de nombres qui étaient 'bons' (15 cartes au départ et 3 cartes données par Samuel), un élève a su poser la question (sur demande de l'enseignante) : *Il y a combien de cartes au total ?* et lorsque l'enseignante avait demandé de préciser, 'les cartes de qui', l'élève a reformulé la question : *Cédric a combien de cartes au total ?* Un autre élève (E3) appelé au tableau pour 'écrire une phrase mathématique' n'a pas hésité à mettre 15 + 3 = 18. Ensuite, l'enseignante a demandé la précision de ce que le nombre 18 signifierait. E3 répondait que c'est 18 cartes de Cédric. Enseignante insiste pour éclaircir, 18 de Cédric, maintenant ou au départ ? E3 répond : *c'est les cartes de Cédric maintenant*.

On peut interpréter l'argumentation de E3 comme l'utilisation d'un *système sémiotique culturellement partagé* pour communiquer sa compréhension d'une *relation complète*.

En revenant au texte de l'énoncé initial (Figure 1) et le schéma général (Figure 2), l'enseignante demande quelle pourrait être la 2e possibilité (de quelque chose qui ne va pas). Un élève propose que le nombre 3 (pointé par l'enseignante dans l'énoncé) qui représente *les cartes que Samuel donne à Cédric*) pourrait ne pas être bon. L'enseignante dessine, avec la contribution des élèves, le schéma représentant cette possibilité en mettant de l'emphase sur la signification de rôle de chaque segment et de la quantité qu'il représente (Figure 4). Elle demande, entre autres, d'indiquer la quantité que l'on recherche (point d'interrogation), les quantités que l'on considère 'bonnes' dans l'énoncé initial (15 cartes de Cédric au départ et 20 cartes de Cédric à la fin) et la question que l'on se pose pour savoir la quantité recherchée.

Une fois le schéma construit et le rôle de chaque nombre dans la situation établi, les élèves sont appelés à formuler une phrase mathématique pour trouver le nombre de cartes que Samuel a donné à Cédric. L'enseignante explicite davantage (en pointant sur le schéma) : si on connait le nombre de cartes de Cédric au départ et son nombre de cartes maintenant, que faire pour calculer le nombre de cartes que Samuel lui donne? Un élève appelé au tableau avait toutefois besoin d'aide d'un autre collègue de classe (E4) qui propose 20 – 15.

Comme dans les cas précédents, nous pouvons faire l'hypothèse que E4 a utilisé une pensée relationnelle qui n'est d'ailleurs pas perceptible, mais qui se déploie dans l'action de communication explicite d'une opération arithmétique adéquate.

L'analyse s'est poursuivie avec le 3e cas pour lequel le schéma a été construit de la même manière en mettant le point d'interrogation sur le segment représentant la quantité de départ. Encore, comme dans le 2e cas, les élèves ont été capables, avec l'aide de l'enseignante, d'associer différentes quantités aux segments de schéma pour déterminer celles qui sont connues ('bons') et celle qui était inconnue ('pas bonne') en posant une question appropriée pour la retrouver (Figure 5). L'enseignante invite alors un élève (E5) de se présenter au tableau.

***Figure 4 –*** *Schéma représentant des relations dans le cas 2 (on cherche les cartes données par Samuel)*

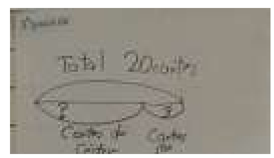

***Figure 5 –*** *Schéma représentant des relations dans le cas 3 (on cherche les cartes de Cédric de départ)*

- Ens : Es-tu capable de me trouver la phrase mathématique ? (Élève vient au tableau). Regarde ces chiffres. Quelle phrase mathématique tu déciderais ?
- E5 : (écrit 15 au tableau ; en disant quelque chose qui n'est pas audible).
- Ens : (l'enseignante dit non et essaie de l'aider) Qu'est-ce qu'il y a sur le diagramme ici ; qu'est-ce que (sur le diagramme) qu'on sait (qui) est vrai ?
- E5 : Cédric en avait 20 ; Samuel lui a donné 3 autres.
- Ens : Oui
- E5 : Là Cédric en a 23.
- Ens : Non, au début Cédric n'en avait pas 20 (fait appel à un autre élève qui dit 20 – 3, ce qui est, par la suite, écrit par l'élève au tableau).
- Ens : (au premier élève qui est toujours au tableau) : il manque quelque chose dans ta phrase (20 – 3)
- É5 : (ajoute un '+' à la fin de la phrase) 20 – 3 +
- Ens : Non il faut mettre '='. Elle fait appel à un autre élève (calculateur) qui donne la réponse (obtenue avec la calculatrice). La phrase mathématique apparait au tableau, par la suite : 20 -3 = 17.

Ici, on voit bien les difficultés de E5 de raisonner à l'aide des relations. Il semble être confus quant au rôle de chaque composante numérique (pas de relation partielle ou complète) et n'arrive pas à trouver une opération mathématique adéquate et même utilise un symbole mathématique « + » incorrectement (la communication mathématique peu adéquate).

**Une autre leçon** (dans une autre classe) est organisée de la même façon, mais la situation à discuter présente une relation de comparaison : *C'est la fête de Zachary aujourd'hui. Zachary dit : il y a 3 filles de plus que de garçons à ma fête. Karolanne dit : il y a 7 filles. Charle-Olivier dit : il y a 5 garçons.*

Comme dans la leçon précédente, l'enseignante amène les élèves à remarquer l'incohérence des valeurs numériques dans l'histoire, discute et construit une représentation non numérique (schéma, Figure 6). Le groupe choisit une valeur « pas bonne » (le nombre de filles de plus que de garçons), formule la question sur la valeur à trouver et construit au tableau un schéma doté de données numériques et de point interrogation (Figure 7).

L'enseignante demande aux élèves de proposer une phrase mathématique pour calculer la valeur inconnue.

- E6 : Ah, je sais ! 7+5.
- Ens. : (Écrit la phrase au tableau.) Ça devrait donner le nombre de filles de plus, que j'ai (ici).
- Plusieurs élèves : Non !
- Ens. : Montre sur le schéma : Ça veut dire que je prends mes 7 filles (montre la ligne des filles). Je vais rajouter mes 5 garçons (montre la ligne des garçons).  Ça va me donner combien j'ai de plus de filles (montre le segment « de plus »)?
- Un élève : Oui !
- Plusieurs élèves : Non !
- Ens. : Vous n'avez pas l'air d'accord ! C'est comme si tu prenais ta ligne ici-là (montre la ligne des filles, dessine un segment au tableau), 7 filles, et je rajoute mes 5 garçons (ajoute un autre segment à droite du premier).
- Ens. : Et ça va me donner combien que j'ai des filles de plus ?
- Plusieurs élèves : Non.

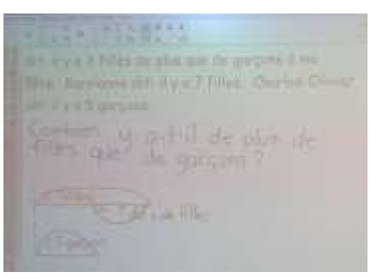

***Figure 6 –*** *L'énoncé et le schéma du cas 1 (la recherche de « filles de plus que de garçons »)*


***Figure 7 –*** *Schéma additionnel (à droite) représentant le sens de la phrase 7+5*

Dans cet épisode, E6 propose une opération qui ne concorde pas avec la relation discutée. L'enseignante essaie d'aider les élèves à interpréter cette proposition en utilisant la représentation relationnelle, notamment de créer du sens relationnel à l'expression mathématique proposée par E6. En se référant au schéma construit, elle graduellement construit une autre représentation non numérique où la ligne composée de deux segments représente le résultat de l'addition. Les élèves, qui observent cette démarche de l'enseignante, acceptent que la ligne ainsi obtenue ne corresponde pas à ce qu'on cherche. Évidemment, on ne peut pas juger si les élèves, en ce moment, pensent de façon relationnelle ou juste voient que la ligne est trop longue par rapport au segment recherché. C'est l'enseignante qui les guide et finit par divulguer la réponse, c'est elle qui pose des gestes sur la représentation schématique, pas les élèves.

À la suite de cet épisode, une autre élève (E7) propose une soustraction 7-5. L'enseignante l'invite à expliquer cette opération sur le schéma, mais l'élève demeure à sa place.

- Ens. : Où est le 7 ? Avec tes mains ici. Montre-moi ici (montre le schéma) ce qui doit se passer. (Elle attend, mais E7 ne répond pas.) Regarde, je prends 7 (elle montre avec ces mains la ligne de filles sur le schéma). Je vais en enlever quoi ?
- E7 : Moins 5.
- Ens. : Y est où le 5 ? Sur la représentation ici, où est mon 5 ?
- E7 : (regarde sur le schéma, mais ne s'y approche pas.) C'est Charle-Olivier (qui dit : il y a 5 garçons).
- Ens. : (montre la ligne de 5 garçons sur le schéma.) On prend 7, les amis (montre la ligne de 7 avec ses deux mains) et je vais y enlever le 5 (elle cache une partie du schéma avec un carton, Figure 8).
- Un élève : Ah !
- Ens. : Est-ce que c'est vrai que ça va me donner les filles de plus ?
- Plusieurs élèves : Oui !

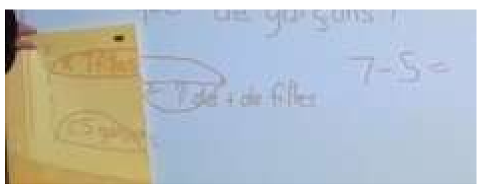

***Figure 8 –*** *L'enseignante cache une partie du schéma avec un carton.*

Dans cet épisode, nous interprétons l'idée de E7, qui suggère 7-5, comme indice de la présence d'une pensée relationnelle, car cette opération ne peut pas être une traduction directe de l'expression « de plus que » et l'élève est capable d'établir une correspondance entre la valeur 5 et un élément de la représentation. Cependant, on ne peut pas valider cette interprétation avec certitude. La communication de l'élève est limitée à une réponse orale qui n'est pas complète. Si l'enseignante réussissait à faire poser des gestes et expliquer l'opération sur le schéma par l'élève, cela augmenterait notre certitude.

Dans la leçon, l'enseignante invite les élèves à interpréter le schéma en vue de tester leur compréhension à l'aide des paroles, des gestes et des expressions mathématiques. Cependant, peu d'élèves font de référence au schéma pour expliquer leur solution.

# IV. DISCUSSION ET CONCLUSION

Nous avons analysé les communications de 7 élèves lors des discussions mathématiques en classe en 1re année du primaire (6-7 ans). Les élèves ont participé dans l'analyse des situations porteuses d'un potentiel à développer leur pensée relationnelle. Dans ce contexte, nous avons utilisé le modèle de la pensée relationnelle développé précédemment pour le tester.

Dans le cas de la leçon 1, nous constatons que les élèves E1, E2 et E3 communiquent le fruit d'une réflexion bien avancée sur la relation donnée et le font de façon mathématique. Grâce aux questions de clarification posées par l'enseignante, nous pouvons confirmer notre hypothèse sur la nature de la pensée des élèves. Bien que la communication de E4 puisse elle aussi témoigner d'une pensée relationnelle, ni l'attribution de rôle à des quantités ni des gestes ne sont observés, car l'élève ne les a pas réalisés et l'enseignante ne les a pas demandés.

Dans le cas de la leçon 2, l'enseignante déploie beaucoup d'efforts pour solliciter des gestes et des explications de ses élèves. L'interprétation de la communication de E7 pose un problème, car l'élève refuse de manipuler sur le schéma pour expliquer davantage sa pensée. Il se peut qu'il n'ait pas encore appris à le faire. Son explication orale n'est pas développée non plus.

Quant à E5 de la leçon 1 et E6 de la leçon 2, notre modèle nous aide à identifier l'absence de la pensée relationnelle, car ce que ces élèves disent ou font ne correspond pas aux rôles des quantités dans l'histoire (la relation entre eux). Cependant, nous n'avons pas assez d'information pour identifier la place de communications de ces élèves dans notre modèle.

Finalement, nous devons constater que nos résultats semblent aller dans un sens plutôt binaire. Soit on identifie une pensée relationnelle avancée, soit on n'arrive pas à l'identifier avec certitude. La gestion de la discussion par l'enseignante et la capacité (limitée) des élèves de verbaliser leur pensée pourraient expliquer la difficulté d'associer le discours de l'élève au modèle proposé. Dans les deux leçons, ce sont les enseignantes qui parlent, qui construisent les schémas et qui les manipulent plus que les élèves. Il est possible que leurs élèves n'aient pas beaucoup d'expérience de travail avec des schémas et ne sachent pas trop les inclure dans le discours à l'aide de gestes ou paroles. Il est aussi possible qu'il y a un manque de formation des enseignantes par rapport à la gestion de l'activité sollicitant la pensée relationnelle des élèves. Par exemple, dans la leçon 1 (dans les épisodes analysés), l'enseignante n'invite pas les élèves à montrer quoi que ce soit sur le schéma. Dans la leçon 2, l'enseignante questionne beaucoup ses élèves sur les rôles des quantités et les invite à montrer leur raisonnement sur le schéma. Cependant, elle analyse le schéma beaucoup plus par elle-même. Une troisième possibilité est que la construction du schéma dans l'activité n'est pas la responsabilité des élèves. Il n'y a pas donc d'occasion de les observer poser de gestes comme c'est prévu dans le modèle.

Pouvoir interpréter la communication d'un élève durant une leçon est très important pour les recherches sur le développement de la pensée algébrique. Une interprétation adéquate aide à évaluer l'état d'avancement de l'apprentissage de l'élève et de suggérer des interventions pertinentes. Cependant, une communication pas suffisamment riche, qui n'inclut pas de modalités variées (parole, phrase mathématique, schéma, geste, manipulation), ne joue pas à la faveur de l'interprétation didactique. Notre analyse à l'aide du modèle bidimensionnel démontre la nécessité d'accorder une importance spéciale au développement de modes de communication variés chez l'enseignante et chez l'élève pour enrichir le discours mathématique en classe et pour faciliter l'interprétation du raisonnement mathématique des élèves. Cette conclusion est en lien avec la vision du programme de formation du Québec qui insiste sur l'utilisation du matériel de manipulation et le développement de la compréhension profonde. Cependant, en classe du primaire, l'utilisation du matériel de manipulation est souvent réduite à la représentation des nombres ou des opérations sur des nombres. Les relations quantitatives dans le sens de Davydov ne font pas partie de ce programme.

L'idée d'utiliser de nombreux outils de communication dans un discours mathématique s'aligne bien avec la théorie de Duval (2006) qui explique que le transfert de la pensée d'un registre sémiotique à un autre est ce qui peut confirmer une compréhension mathématique.

Revenant à notre modèle, nous proposons qu'il doive être complété par une méthode d'observation active. Une observation passive peut ne pas rapporter assez d'information. L'observateur (ou dans notre cas l'enseignante) doit proposer à l'élève de communiquer une même idée via différents registres. Pour les cas de problèmes écrits, cela peut inclure la parole, la construction d'un schéma ou la manipulation avec un schéma donné, des expressions mathématiques, des gestes, etc.

Dans des travaux sur la pensée relationnelle et algébrique (Davydov, 2008; Eriksson, et Eriksson, 2020; Polotskaia et coll., 2024), on avance l'idée que l'étude des relations quantitatives de base doit être une des préoccupations centrales au début de l'apprentissage des mathématiques. L'idée de relation au sens de Davydov (1982) doit être explicitement incluse dans le programme de formation du Québec. Quant au processus d'enseignement-apprentissage qui vise à développer la pensée relationnelle des jeunes élèves, il nous semble judicieux de proposer de repenser le mode de fonctionnement désiré lors de la résolution de tâches mathématiques en classe. Il ne suffit pas de manipuler des objets et commenter cette action oralement. Il ne suffit pas non plus de présenter un schéma relationnel au tableau et en discuter oralement. Il faut solliciter l'élève à utiliser plusieurs outils sémiotiques (Duval, 2006) dans une même communication pour exprimer sa pensée. Ainsi, l'élève va profiter de la pratique de transformation de ses pensées d'un registre à un autre pour approfondir sa compréhension. L'enseignante sera en mesure de mieux interpréter la communication de l'élève pour mieux gérer le processus d'enseignement et ainsi de répondre aux besoins éducatifs des élèves.

En conclusion, nous constatons que des limitations de l'utilisation d'un modèle théorique pour interpréter le travail en classe au primaire nous ont menés à questionner le mode de fonctionnement et des interactions didactiques comme un moyen crucial du développement de la pensée mathématique.

## RÉFÉRENCES

Blanton, M., Brizuela, B. M., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Gardiner, A. M., Stroud, R., Fonger, N. et Stylianou, D. (2018). Implementing a framework for early algebra. Dans C. Kieran, (dir.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5-to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (p. 27-49). Springer International.

Blanton, M., Stroud, R., Stephens, A., Gardiner, A. M., Stylianou, D. A., Knuth, E., Isler-Baykal, I. et Strachota, S. (2019). Does early algebra matter? The effectiveness of an early algebra intervention in grades 3 to 5. *American Educational Research Journal*, *56*(5), 1930-1972. https://doi.org/10.3102/0002831219832301

Boily, M., Polotskaia, E., Lessard, G. et Anwandter Cuellar, N. S. (2020). Les suites non numériques et le potentiel de la pensée algébrique chez les élèves du préscolaire. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation, 22*(1), 11-35.

Carpenter, T. P., Franke, M. L. et Levi, L. (2003). *Thinking mathematically*. Heinemann.

Davydov, V. V. (1982). Psychological characteristics of the formation of mathematical operations in children. Dans T. P. Carpenter, J. M. Moser et T. A. Romberg (dir.), *Addition and subtraction: Cognitive perspective* (p. 225–238). Lawrence Erlbaum Associates.

Davydov, V. V. (2008). *Problems of developmental instruction. A theoretical and experimental psychological study*. Nova Publisher.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1-2), 103-131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Eriksson, H. et Eriksson, I. (2020). Learning actions indicating algebraic thinking in multilingual classrooms. *Educational Studies in Mathematics, 106*(3), 363-378.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? Dans J. Kaput, D. W. Carraher et M. L. Blanton (dir.), *Algebra in the early grades* (p. 5–17). Routledge.

Kieran, C. (2018). Seeking, using, and expressing structure in numbers and numerical operations: A fundamental path to developing early algebraic thinking. Dans C. Kieran (dir.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5-to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (p. 79-105). Springer International.

Mellone, M., Ramploud, A., et Carotenuto, G. (2021). An experience of cultural transposition of the El'konin-Davydov curriculum. *Educational Studies in Mathematics*, *106*, 379-396.

Polotskia, E., Anwandter-Cueuillard, N., Savard, A. et Robert, V. (2024, juillet). *Learning routes for algebraic thinking in preschool* [Rapport de recherche]. PME.

Polotskaia, E., Savard, A., Felus, O. et Freiman, V. (2023). Equilibrated development approach to word problem solving in elementary grades: Fostering relational thinking. Dans K. M. Robinson, D. Kotsopoulos et A. K. Dubé (dir.), *Mathematical Teaching and Learning*. Springer Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-31848-1_3

Radford, L. (2011). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. Dans *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (p. 303-322). Springer Berlin Heidelberg.

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, *26*, 257-277.

Savard, A. et Polotskaia, E. (2017). Who's wrong? Tasks fostering understanding of mathematical relationships in word problems in elementary students. *ZDM*, *49*(6), 823-833. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0865-5

Schmittau, J. (2005). The development of algebraic thinking: A Vygotskian perspective. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *37*, 16-22.

Squalli, H. (2015). La généralisation algébrique comme abstraction d'invariants essentiels. Dans L. Theis (dir.), *Actes du colloque EMF2015 « Pluralités culturelles et universalité des mathématiques: enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage », 10-14 octobre 2015, Université d'Alger, Algérie* (p. 346-356). https://bibnum.publimath.fr/ACF/ACF15083.pdf

Venant, F. et Migneault, P. (2017). Développer la pensée algébrique précoce en jouant? Représentations et manipulations dans Dragon Box. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, *20*(3), 33-55.

## ANNEXE 1

***Tableau 1 –*** *Cadre bidimensionnel de la pensée algébrique (Polotskaia et coll., 2024)*

| Relation utilisée / Outil de communication | **Relation partielle, plus que, moins que, égale (identique)** | **Relation de type équation (Composition ou comparaison additive)** |
|---|---|---|
| **Manipulation avec des objets/schéma (sans commentaires)** | Essai-erreur organisé; Choix d'objet adéquat. | N'est pas possible de juger. |
| **Argumentation dans le langage naturel ou par geste** | Élève nomme et/ou montre par un geste la relation partielle. | Élève nomme et/ou montre par des gestes la relation complète |
| **Argumentation en utilisant un système sémiotique culturellement partagé** | Élève représente la relation partielle symboliquement ou schématiquement et l'utilise pour avancer son raisonnement | Élève représente la relation complète symboliquement ou schématiquement et l'utilise pour avancer son raisonnement |