Une analyse didactique des démarches mobilisées par des élèves du primaire pour résoudre des problèmes de proportionnalité

| HRAIMI* Hend et BEN NEJMA** Sonia

Résumé | Cette recherche analyse les démarches mises en œuvre par des élèves du primaire pour modéliser des problèmes de proportionnalité et le rôle des représentations dans le développement de la pensée proportionnelle. L'étude s'inscrit dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique et celle du champ conceptuel des problèmes multiplicatifs. L'analyse bidimensionnelle, de nature épistémologique et sémiotique conduite met en lumière le potentiel de développement d'aspects fonctionnels chez les élèves.

Mots-clés : proportionnalité, primaire, aspects fonctionnels, sémiotique, épistémologique.

Abstract | This research analyzes the approaches used by primary school pupils to model proportionality problems and the role of representations in the development of proportional thinking. The study is based on the anthropological theory of didactics and the conceptual field of multiplicative problems. The two-dimensional analysis, of an epistemological and semiotic nature, highlights the potential for developing functional aspects in pupils.

Keywords: proportionality, primary school, functional aspects, semiotics, epistemology.

I. INTRODUCTION ET PROBLÉMATIQUE

Dans l'approche constructiviste de l'apprentissage des mathématiques, l'accent est mis sur la modélisation de problèmes contextualisés dont le modèle de proportionnalité est souvent implicite (Douady, 1986). L'élève est amené à identifier le nombre de grandeurs en jeu, leurs natures et le (s) type (s) de relations entre ces grandeurs et à réaliser des changements de registres sémiotiques (Duval, 1995) pour modéliser un énoncé concret, un graphique… et le convertir en une relation de proportionnalité entre nombres, mesures ou grandeurs (fixes ou variables) afin de résoudre le problème. Souvent, les élèves ne sont pas initiés à des tâches de reconnaissance de la relation de proportionnalité (Simard, 2012), ce qui pourrait expliquer, en partie, les difficultés rencontrés. Plusieurs recherches ont exploré les démarches mises en œuvre par des élèves pour résoudre des problèmes classiques de proportionnalité. Vanluydt, E., Verschaffel, L., et Van Dooren, W. (2022) suivent l'évolution du raisonnement proportionnel chez les jeunes pour mieux comprendre ses fondements conceptuels en contexte scolaire. Dans leur étude, trois situations sont considérées, la règle de trois, la vérification et la comparaison pour mettre en évidence le rôle des variables didactique, dans l'usage erroné du modèle de proportionnalité. Belmas (2001) développe le point de vue selon lequel l'apprentissage conceptuel de la proportionnalité ne se substitue pas à l'apprentissage des techniques mais le complète. Comin (2002) propose une vision de la proportionnalité sous l'angle de la relation fonctionnelle en mettant en avant l'importance de la propriété de linéarité multiplicative, qu'il nomme « rapport interne » comme un levier pour introduire les fractions dès les premières années du primaire. Hersant (2005) souligne que l'application linéaire est souvent conçue comme le modèle mathématique institutionnel qui s'est substitué aux problèmes de la règle de trois et de la théorie des proportions.

* Université Virtuelle de Tunis – ISEFC – Tunisie – hendhraimi@gmail.com

** Université de Carthage – FSB, LR16ES08, Larina, 7000, Bizerte –Tunisie – sonia.bennejma@fsb.ucar.tn

Voisin (2017) s'appuie sur ces travaux pour approfondir sa réflexion autour des techniques mobilisées en vue de donner progressivement un sens au coefficient de proportionnalité. L'apprentissage conceptuel est alors envisagé en prenant compte des valeurs numériques afin de choisir au mieux les modalités de résolution. Il met en avant que l'identification d'un facteur de linéarité multiplicative et sa transformation en un coefficient de proportionnalité relève de l'étude des grandeurs et des liens entre leurs mesures. Dans sa thèse Levain (1997) relève trois catégories de situations de proportionnalité qui peuvent être problématique pour les élèves, La première renvoie aux problèmes qui se résolvent par une multiplication ou une division ou par la quatrième proportionnelle. La seconde s'organise autour du passage de la proportionnalité simple à l'enchainement d'isomorphismes. La troisième réside dans l'évolution des problèmes d'isomorphismes vers les problèmes de proportion double. Nelson et al. (2022) explorent la manière dont les représentations (figuratives, analogiques…) sont mobilisées par les élèves en difficulté.

Cette revue de littérature met en avant différentes facettes liées à l'apprentissage de la proportionnalité dans des contextes institutionnels variés. Dans le contexte tunisien, la proportionnalité est considérée comme une notion fondamentale dans le socle des compétences exigibles à l'école primaire. Elle se présente dans le cadre de la résolution de problèmes classiques (recettes…) puis des problèmes d'échelle, pourcentages, vitesses et conversions d'unité. Ce n'est qu'au début du secondaire que la notion de proportionnalité est mise en rapport avec l'étude des fonctions linéaires. Les relations de proportionnalité sont alors mis en lien avec des aspects fonctionnels (variable, dépendance, correspondance et modèle linéaire) que les élèves manipulent par l'usage de représentations sémiotiques (Ben Nejma, 2020, 2023).

Dans cette recherche, nous explorons les démarches mises en œuvre par des élèves du primaire pour modéliser des problèmes de proportionnalité en se centrant sur le rôle des représentations (symbolisme, graphiques, tableau, Schéma, diagramme…) dans la communication de la solution. En effet, l'évolution de situations issues de la théorie des proportions, adaptée au cadre discret à celles de linéarité, adaptée au cadre continu constitue un saut épistémologique important entre l'utilisation des propriétés additives et multiplicatives (addition/multiplication) et le retour à l'unité (division). Cette évolution est souvent accompagnée de schématisations et de représentations graphiques initiant les élèves au développement de la pensée fonctionnelle. Notre ambition est de mettre en avant l'importance de la dimension sémiotique dans le développement de composantes liées à la pensée fonctionnelle (Stooling, 2008) qui se déploie dans des activités de proportionnalité. C'est par le moyen de ces représentations qu'une activité sur des objets mathématiques est possible. Nous faisons l'hypothèse que diverses représentations mises en avant dans les productions des élèves du primaire (11-12ans) déterminent en partie la signification qu'ils accordent à certains aspects fonctionnels et peuvent nous renseigner sur la validité du raisonnement proportionnel déployé. Cette étude s'inscrit dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique abordée à travers deux dimensions d'analyse, une dimension épistémologique et une dimension sémiotique des praxéologies que nous développons dans la section suivante.

II. CADRE THÉORIQUE

Cette étude prend appui sur le concept de praxéologie issu de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1991) qui permet de modéliser toute activité humaine, sociale ou mathématiques de manière à accomplir une tâche t d'un certain type T, au moyen d'une technique τ, justifié par une technologie θ qui permet en même temps de la penser, voire de la produire, et qui à son tour est justifiable par une théorie Θ. La description des praxéologies développées par les élèves de 6^{e} année du primaire autour de la proportionnalité permet de caractériser le rapport personnel à cet objet de savoir et de questionner également son idonéité au rapport institutionnel. Il s'agit pour nous de déterminer la manière dont les démarches déployées par les élèves dans des tâches de proportionnalité nous renseignent sur les techniques et les technologies en jeu. Les techniques utilisées peuvent être reliées à des propriétés de la fonction linéaire utilisés de manière implicite, la technique additive qui au secondaire s'exprime par f(x+y) = f(x) + f(y), la technique scalaire qui peut être exprimée par f(ax) = a f(x) avec le cas particulier du passage à l'unité ou « règle de trois » et la technique de combinaison linéaire faisant intervenir les deux propriétés précédentes. Une procédure fonctionnelle est basée sur l'utilisation du coefficients de proportionnalité et une procédure graphique via une représentation graphique ou une lecture graphique peuvent également être convoqués dans certains types de tâches. Ces techniques son en rapport étroit avec le développement précoce de la pensée fonctionnelle sans l'usage d'un formalisme algébrique et peuvent êtres décelées au moyens de représentations sémiotiques porteuses de conceptions signifiant/signifié autour d'aspects fonctionnels.

Ce cadre théorique est nourri par la théorie des champs conceptuels des problèmes multiplicatifs (Vergnaud, 1995) et la théorie des registres sémiotiques (Duval, 1993,1995). Ce réseautage de cadres théoriques fournit un modèle praxéologique bidimensionnel des démarches mobilisées par les élèves. *La dimension sémiotique des praxéologies* permet d'approcher l'activité cognitive de l'élève dans sa perception des concepts ou des relations entre des objets de savoirs grâce à des signes et des symboles nécessaires à l'acquisition des concepts auxquels ils renvoient. La dimension *épistémologique des praxéologies* renvoie à la proportionnalité en tant que notion mathématique qui se distingue par trois types selon les problèmes multiplicatifs en jeu, en référence aux travaux de Vergnaud (1994) : la proportionnalité simple directe, la proportionnalité simple composée et la proportionnalité multiple. Un problème de proportionnalité simple met en jeu deux grandeurs dont on ne considère, pour chacune, que deux valeurs. En tout, trois données et une inconnue sont la plupart du temps rencontrées. Les problèmes de quatrième proportionnelle font partie de cette catégorie de même que les problèmes d'agrandissement et de réduction de figures. La structure de proportion en jeu dans ces problèmes fait souvent appel à des techniques précises (multiplication, division quotient, division partition) et met en jeu quatre quantités appartenant à deux espaces de mesure différents. Un problème de proportionnalité simple composée met en jeu plus de deux grandeurs, il s'agit, pour la résolution, d'appliquer successivement la proportionnalité simple à deux paires de grandeurs. Dans ce cas, il apparaît également une seule inconnue plutôt liée à plusieurs données dépendant les unes des autres. Cette structure est le résultat d'une composition de deux (ou plusieurs) proportions simples qui traduit une composition de deux proportions simples comportant trois espaces de mesure nommés M1, M2etM3. Dans ces espaces de mesures, il y a une fonction f implicite qui permet le passage de M1 à M2 et une fonction g qui permet de passer de M2 à M3. Ainsi, on applique la fonction linéaire f∘g pour passer de M1 à M3. Ici on a une grandeur qui varie proportionnellement à une autre grandeur qui à son tour varie proportionnellement à une troisième. Un problème de proportionnalité multiple met en jeu plus de deux grandeurs mais dans ce cas, il est impossible de se ramener à un ou plusieurs problèmes successifs de proportionnalité simple Vergnaud (1990).

III. MÉTHODOLOGIE

1. *Un aperçu sur le contexte institutionnel et les programmes du primaire autour de la proportionnalité*

Le système éducatif tunisien est composé de deux cycles, l'enseignement de base qui est un cycle complet de 9 ans accueillant des élèves de la première année (6 ans) jusqu'à la 9[e] année (14-15 ans). Il se subdivise en deux cycles, le primaire (6-11 ans) d'une durée de 6 ans dispensé dans des écoles primaires, et le cycle préparatoire d'une durée de 3 ans dispensé dans les collèges. Nous disposons, pour chaque niveau d'enseignement, d'un manuel officiel unique qui représente la principale référence à suivre par l'enseignant et les élèves. Concernant la proportionnalité au primaire, elle fait sa première apparition en 4^{e} année dans la rubrique « Exploitation des données numériques » puis en 5^{e} année dans le cadre des grandeurs avant de devenir une notion explicite d'enseignement en 6^{e} année, en tant qu'« outil » de résolution de problèmes. Cet objet de savoir n'est pas institutionnalisé et les techniques de résolution des problèmes multiplicatifs ne sont pas explicitées et laissées à la charge des élèves et des enseignants. Selon l'approche par compétence adoptée, trois compétences exigibles apparaissent :C 1. Reconnaître une situation de proportionnalité, C2. Mettre en œuvre un mode de résolution adapté, en choisissant la méthode la plus appropriée compte tenu des données en jeu et C 3. Modéliser une situation de proportionnalité par des relations entre nombres ou grandeurs

Par ailleurs, les concepteurs du programme accordent une importance au développement du raisonnement proportionnel exprimé dans le registre du langage naturel, en particulier dans les problèmes de quatrième proportionnelle. Le choix de travailler avec le coefficient de proportionnalité « en particulier » dans le cas où les grandeurs proportionnelles sont de même nature, même s'il permet d'éviter l'utilisation visible de grandeur-quotient ne facilite probablement pas la différenciation entre coefficient de proportionnalité et rapport scalaire car il ne met pas en évidence la distinction entre coefficient de proportionnalité et rapport scalaire.

2. *Choix du questionnaire et méthodologie d'analyse*

L'expérimentation a été conduite (Hraimi, 2022) sur un échantillon varié de 168 élèves de 6^{e} année à partir d'un questionnaire comportant des problèmes classiques de proportionnalité simple et double. Le questionnaire est composé de deux parties, chacune comporte 5 problèmes à résoudre individuellement par deux groupes d'élèves pour éviter que la surcharge de 10 problèmes n'engendre un effet de lassitude chez les élèves. Une analyse a priori de ces problèmes a été réalisée en fonction des techniques de la typologie des problèmes multiplicatifs. Les productions recueillies sont codées ensuite analysées quantitativement (en termes d'échec ; réussite ; non-réponses) puis qualitativement en fonction des techniques mises en œuvre par les élèves. Ces techniques sont explorées à la lumière des représentations mobilisées qui représentent des ingrédients de ces techniques et qui peuvent nous renseigner sur la forme de pensée déployée (proportionnelle ou fonctionnelle). Les critères retenus pour l'élaboration du questionnaire sont les suivants :

- Le contexte : numérique, échelle, pourcentage, vitesse…
- Les registres sémiotiques : numérique, langage naturel, tableau de valeur, graphique, géométrique.
- Les grandeurs en jeu : aucune grandeur, une grandeur ou deux ou plus (mesures, unité de mesure, ou autres, grandeurs de même nature (exemples, échelle, côté d'un carré et son périmètre…), même nature ou nature différentes (Problèmes de vitesse, prix/kilo, prix/unité, distance/temps.).
- Le type de proportionnalité et techniques en jeu : proportionnalité simple, double ou inverse, type de techniques (isomorphisme numérique, partage proportionnel, isomorphisme de grandeurs, partie/partie, partie/tout, répartition, calcul de pourcentage, augmentation/ réduction ou échelle, enchaînement d'isomorphismes)
- Les types de tâches : calculer un pourcentage, simplifier une fraction, calculer une quatrième proportionnelle, compléter un tableau de proportionnalité…

IV. ANALYSE DES PRODUCTIONS

1. L'exemple du problème 1

Nous présentons ici, un exemple d'analyse que nous avons conduit sur l'ensemble des productions, le problème 1 est un problème concret relativement simple dont l'énoncé est le suivant : Selma a acheté 4 stylos à 6D, calculer le prix de 10 Stylos, le prix de 14 stylos, le prix de 42 stylos. Ce problème fait référence à une relation de proportionnalité simple entre deux grandeurs de nature différentes : le nombre de stylos et le prix. Les taches proposées relèvent du même type : « Calculer le prix de n stylos sachant que 4 stylos coutent 6 D » dont la technique se base sur la recherche de la quatrième proportionnelle. Les valeurs attribuées à l'entier n (variables didactiques) pour chaque tâche permet de générer des démarches de résolution différentes. La situation revêt un indice fort de proportionnalité dans la mesure où la possibilité pour un élève de penser au prix d'un seul stylo (réduction à l'unité est implicite). D'autre part, le choix des variables didactiques en attribuant les valeurs 4 et 10, 14 peut rendre la tâche problématique si l'élève se met à la recherche de régularités numériques et vouloir chercher à multiplier ou à diviser directement. La tache pourrait paraitre simple et se baser sur une technique intuitive (problèmes multiplicatifs) lorsqu'il s'agit de passer, par exemple, du prix de 4 stylos à celui de 24 stylos. Le choix de la variable didactique (prix à l'unité : 1,5D) peut aussi poser des difficultés aux élèves du fait que la valeur du rapport externe soit non entière. Ainsi différentes techniques possibles peuvent être mise en œuvre : multiplication par les rapports internes, multiplication par le coefficient de proportionnalité, réduction à l'unité, proportion, produit en croix, linéarité et repérages de régularités numériques. Pour ce problème, bien que 53,33% ont réussi la résolution, un part importante des productions est soit erronées soit vides de réponses, comme l'illustre le tableau suivant :

Tableau 1 – *Pourcentages des réussite ou d'échec au problème 1*

Nature des réponses	**Réponse correcte (RC)**	**Réponse erronée (RE)**	**Pas de réponse (RP)**
Pourcentages	53.33%	22.5%	24.17%

Nous avons ensuite catégorisé les registres sémiotiques les plus convoqués par les élèves pour résoudre ce problème. Trois registres apparaissent, le registre du tableau (RT), le registre numérique (RN) et le registre discursif (RD) avec une forte dominance du registre des expressions numériques traduisant des opérations de multiplication ou de division (RN).

Tableau 2 – *Pourcentages des registres convoqués dans le problème 1*

Registre mobilisé	**RT**		**RN**		**RD**	
	RC	RE	RC	RE	RC	RE
Fréquence	0%	1.67%	63.42%	31.58%	3.33%	0%
Taux d'apparition	1.67%		95%		3.33%	

Nous présentons une analyse des techniques identifiées pour accomplir les types de tâches convoqués dans ce problème. Nous les synthétisons dans le tableau suivant en fonction de la fréquence d'apparition de chaque technique.

Tableau 3 – *Pourcentages des techniques mises en œuvre dans le problème 1*

Technique	RC	RE	Taux d'apparition
Multiplier par les rapports internes	5%	0%	5%
Multiplier par le coefficient de proportionnalité	6.67%	3.33%	10%
Produit en croix	21.67%	10%	31.67%
Réduction à l'unité	8.33%	13.33%	21.66%
Technique basée sur la linéarité et les repérages de régularités numériques	23.34%	8.33%	31.67%

Les procédures les plus mobilisées par les élèves sont celles qui renvoient au produit en croix (31.67%) et le repérage de régularités (31.67%). La réduction à l'unité est également assez utilisée. Les techniques de multiplication par le coefficient de proportionnalité et de multiplication par les rapports internes semblent les moins convoqués par les élèves. Ce constat nous a paru intéressant, en dépit d'une explicitation de ces techniques dans le manuel officiel et de la recherche spontanée selon un retour à l'unité, les élèves optent pour des techniques de linéarité, même si certaines sont vouées à l'échec, comme l'illustre les exemples suivants :

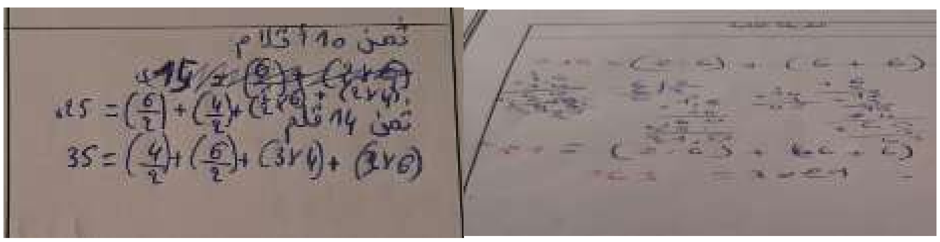


Figure 1 – *Production de l'élève E12*

Sur une autre copie on peut cependant, voir des réponses correctes sur la base de combinaisons linéaires obtenues d'abord en identifiant le coefficient de proportionnalité 1,5 puis par exemple le prix de 14 stylos et celui de la somme de 15 stylos et de 6 stylos ou encore celui de 42stylos est celui de 38 stylos auquel on rajoute le prix de 4 stylos.

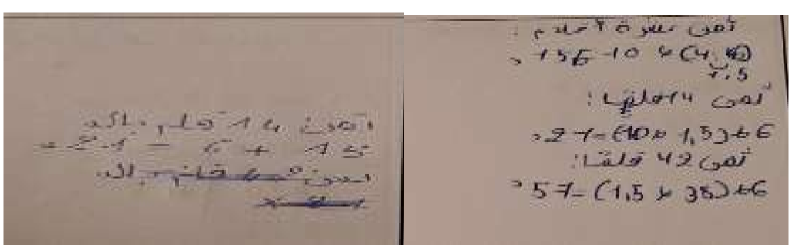


Figure 2 – *Production de l'élève E5*

Par ailleurs, pour le produit en croix, près d'un tiers des copies révèlent des représentations sémiotiques différentes pour l'application de cette technique au moyen de flèches traduisant différemment les relation de correspondance entre les données, comme on peut le voir sur ces extraits.

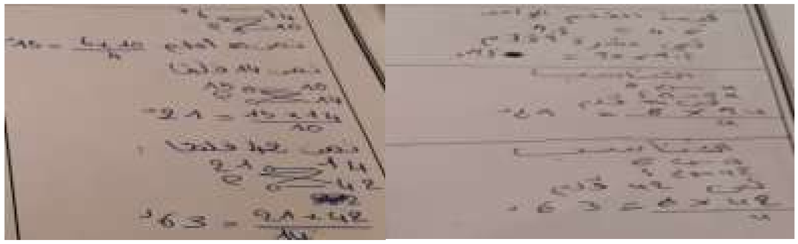
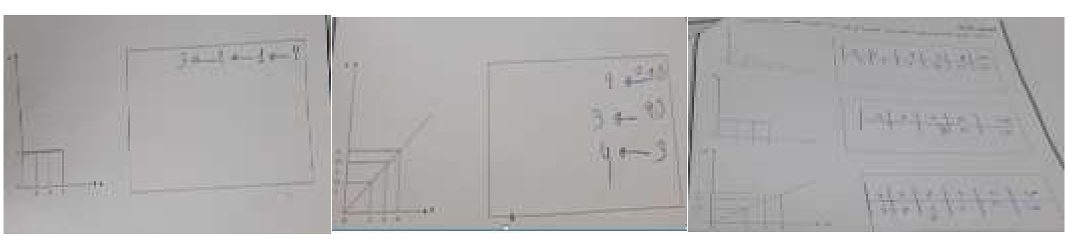


Figure 3 – *Production de l'élève E114*

2. Bilan des analyses

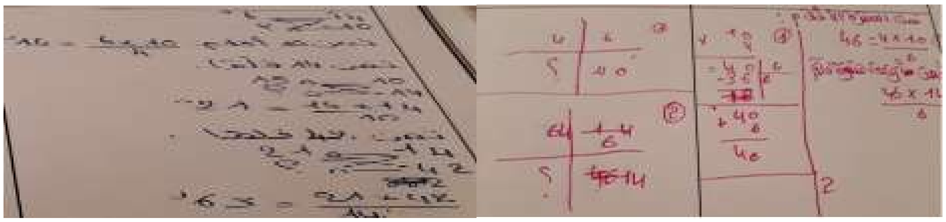
Les résultats de cette étude révèlent des phénomènes intéressants, les élèves tentent de se représenter la proportionnalité entre les nombres proposés de plusieurs manières, on peut voir une variété de représentations sémiotiques qui renvoient implicitement à certaines techniques (quatrième proportionnelle, relations additives, relations multiplicatives). La technique additive, souvent mise en avant n'implique pas forcément une maîtrise du raisonnement de proportionnalité. Par ailleurs, les techniques basées sur le coefficient de proportionnalité et le retour à l'unité sont les moins mobilisées alors que le produit en croix et le repérage de régularité sont plus favorisés par les élèves. De plus, lorsque le registre du tableau n'est pas convoqué par l'énoncé, les élèves ne le mobilisent pas spontanément, alors que cette représentation pourrait servir de levier pour développer des aspects fonctionnels tels que correspondance et dépendance ainsi que le concept de linéarité comme le souligne Simard « Le tableau de proportionnalité devrait encore apparaître comme une aide à la formulation sans pour autant entrainer la conception « tableau = proportionnalité » (Simard, 2012, p50).

Par ailleurs, même si le repérage de régularités est présent au niveau des productions, la stratégie additive est la plus souvent mise en œuvre dans le cadre d'un raisonnement qui n'implique pas toujours la maîtrise du raisonnement proportionnel. Lors de l'expérimentation, les schématisations, par rapport aux problèmes de quatrième proportionnelle les plus complexes, ont contribué en particulier à penser la nécessité de rechercher la valeur unitaire. C'est souvent une visualisation qui facilite la prise de conscience de l'existence d'une question intermédiaire : la recherche de la valeur unitaire. Les représentations de type tableau fléché semblent être, en ce sens, les plus performantes. Elles mettent en évidence la possibilité de raisonner verticalement ou horizontalement. Les schémas sont, pour la majorité des élèves, en interaction avec la construction du raisonnement de proportionnalité. En ce sens, le changement de registre de représentation, proposé par le médiateur, est source de pensées nouvelles formulées par les élèves. Par ailleurs, la reconnaissance d'une situation de proportionnalité à partir d'un graphique semble encore problématique, plusieurs représentations sémiotiques sont mises en évidence pour une lecture graphique des relations et la recherche d'une relation de proportionnalité (tableau, fractions égales, correspondances par des flèches, expression dans le langage naturel, des confusions entre coefficient de proportionnalité et fonction constante, la conceptualisation de l'opérateur « scalaire » en jeu se confond souvent avec l'opérateur implicite « fonction » comme l'illustre les figues suivantes :



Figures 4-5-6 – *Productions des élèves E12, E51, E128*

Dans la même dynamique, on constate une prépondérance de démarches fondées sur le produit en croix (qualifiée de règle de trois) que les élèves appliquent à tous les coups. En revanche dans certaines productions, des liens semblent être établis entre le tableau en croix et le tableau fléché témoignant d'un niveau élaboré de conceptualisation entre raisonnement vertical « scalaire » et raisonnement horizontal « fonction ».



Figures 7-8 – *Productions des élèves E12, E98*

V. CONCLUSIONS ET DISCUSSIONS

La maitrise de la proportionnalité est une compétence fondamentale à développer chez les élèves dès les premières années du primaire. La résolution des problèmes constitue une niche favorable au développement de la pensée proportionnelle mais aussi d'aspects fonctionnels implicites (variable, correspondance, dépendance et variation linéaire). Il semble donc important de s'interroger sur les conditions d'une meilleure conceptualisation de la proportionnalité et ce, dès le plus jeune âge. Le premier apport de cette recherche a été de proposer une méthodologie d'analyse bidimensionnelle qui s'appuie sur des concepts théoriques issus de la TAD et de la théorie des champs conceptuels et nourrie par une approche sémiotique en termes de registres. Le second apport est de nature empirique dont l'objectif a été d'analyser les démarches mise en œuvre par les élèves et les moyens sémiotiques utilisés. Les résultats obtenus montrent que les élèves sont capables de changer de techniques de résolution en fonction des critères retenus pour la conception des problèmes posés, notamment, en fonction de la relation interne et externe liant les valeurs du problème entre elles. Dans la plupart des cas, ils utilisent le produit en croix (4^{e} proportionnelle) et le repérage de régularités et semblent bénéficier d'un répertoire de techniques mais seules deux d'entre-elles semblent avoir un sens pour eux. Ceci témoigne de leur capacité à développer une pensée fonctionnelle même si ces relations se réduisent souvent à des relations additives. Des difficultés apparaissent dans l'identification des régularités de nature multiplicatives ou mixtes (application implicite des théorèmes d'isomorphismes). Par ailleurs, les schémas sont, pour la majorité des élèves, en interaction avec la construction du raisonnement de proportionnalité et témoignent du fait qu'ils perçoivent les relations de correspondance et même de dépendance en diversifiant les schématisations en flèches. Ainsi ces schématisations permettent de mettre en évidence les relations entre les divers éléments qui constituent la proportionnalité. C'est en fait une activité cognitive liée l'appréhension du concept de proportionnalité et à sa structure mathématique que l'élève met en œuvre. La qualité de sa schématisation va dépendre de la pertinence de la relation signifié/signifiant qu'il aura élaborée. Il nous semble que cette diversification d'outils sémiotiques mis en œuvre par les élèves de manière spontanée mériterait d'être à la fois un objet de recherche mais aussi un levier pour l'argumentation et le développement de la pensée fonctionnelle que les enseignants peuvent exploiter dans leur pratique.

RÉFÉRENCES

Belmas, P. (2001). *Apprentissage de la proportionnalité et symbolisations chez des élèves en échec scolaire* [Thèse de doctorat, Université Paris V].

Ben Nejma, S. (2020). Exploitation de l'histoire dans une analyse didactique du développement de la pensée fonctionnelle au début de l'enseignement secondaire tunisien. *Revue Québécoise de didactique des mathématiques, 1*, 38-69. https://doi.org/10.71403/4q29sj75

Ben Nejma, S. (2023). Une analyse bidimensionnelle du développement de la pensée fonctionnelle au début du secondaire. *Revue méditerranéenne en éducation mathématique, scientifique et technologique, 1*, 40-50.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. La pensée sauvage.

Comin, E. (2002). L'enseignement de la proportionnalité à l'école et au collège. Recherches en Didactique des Mathématiques 22(2.3), 135-182.

Douady, R. (1986). Jeux de cadre et dialectique outil-objet. *Recherche en didactique des mathématiques, 7*(2), 5-31.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5*, 37-65.

Duval, R. (1995). *Semiosis et pensée humaine : sémiotiques registres et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.

Hersant, M. (2005). La proportionnalité dans l'enseignement obligatoire en France, d'hier à aujourd'hui. *Repères*, (59), 5-41.

Hraimi, H. (2022). R*apports institutionnels et personnels des élèves du cycle primaire à la proportionnalité dans le contexte scolaire tunisien* [Mémoire de master de recherche en didactique des mathématiques, Université virtuelle de Tunis-ISEFC].

Levain, J. P. (1997). *Faire des maths autrement : développement cognitif et proportionnalité*. L'Harmattan.

Nelson, G., Hunt, J. H., Martin, K., Patterson, B. et Khounmeuang, A. (2022). Current knowledge and future directions : Proportional reasoning interventions for students with learning disabilities. *Learning Disability Quarterly, 45*(3), 159-171. https://doi.org/10.1177/0731948720932850

Stölting, P. (2008). *La pensée fonctionnelle des élèves de 10 à 16 ans – Analyse comparative et études empiriques de son enseignement en France et en Allemagne* [Thèse de doctorat, Université Denis Diderot et Université Regenseburg].

Vanluydt, E., Verschaffel, L. et Van Dooren, W. (2022). The early development of proportional reasoning: A longitudinal study of 5- to 8-year-olds. *Journal of Educational Psychology, 114*(6), 1343–1358.

Voisin, S. (2017). L'enseignement de la proportionnalité : Une expérimentation en classe de SEGPA. *Petit x,* (103), 33-56. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/103x3_1568365881165-pdf

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10*(23), 133-170.

Vergnaud, G. (1994). Proportionnalité simple, proportionnalité multiple. *Grand N,* (56), 55-66.

Simard, A. (2012). Proportionnalité en CM2 et Sixième. *Petit x,* (90), 35-52.