POUR UNE PENSÉE FONCTIONNELLE ANCRÉE DANS L'ACTION

| LAURENCE-ROULEAU* VINCENT

Résumé | Nous proposons qu'une certaine conception dite *active* de la notion de fonction puisse être au cœur d'usages contemporains en mathématique ou dans d'autres domaines d'application, notamment en modélisation et en informatique. Dans cet article, nous allons décrire et illustrer cette conception en donnant un aperçu de la façon dont elle s'exprime chez certains élèves du secondaire.

Mots-clés : pensée fonctionnelle, conception, fonction, algorithme, logique

Abstract | We propose that a certain *active* conception of the notion of function may be at the heart of contemporary mathematics and applications in other fields, namely in modelling and computer science. In this paper, we describe and illustrate such a conception by presenting how it is expressed among some high school students.

Keywords: Functional thinking, conception, function, algorithm, logic

I. INTRODUCTION

Dans les dernières années, une pensée fonctionnelle est mise en lumière par différents chercheurs (Robert et al., 2018 ; Ben Nejma, 2020), notamment caractérisée en termes de variation (continue) de la variable ou de *covariation* (dans le sens de Carlson et al., 2002). Cela s'accorde bien aux fonctions (réelles) pour lesquelles on s'intéresse à une propriété associée à la notion de variation telle la *dérivabilité* ou plus généralement la *continuité*.

Nous aimerions contribuer à la poursuite de la réflexion sur la pensée fonctionnelle en ouvrant la porte à une diversité de fonctions pour lesquelles sont valorisées des propriétés qui ne font pas nécessairement intervenir la notion de variation, par exemple la *calculabilité*, c'est-à-dire l'existence d'un algorithme pour expliciter ce que fait une fonction donnée. En particulier, on peut penser aux fonctions définies par *récurrence*, par exemple la fonction *factorielle* $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que $f(0) = 1$ et $f(n) = n \cdot f(n-1)$ pour $n > 0$. Nous croyons que de telles fonctions peuvent trouver des usages diversifiés dans différentes branches de la mathématique ou dans d'autres domaines d'application, par exemple en informatique ; cela pourrait par le fait même entretenir des liens entre une pensée fonctionnelle et d'autres pensées - algorithmique, informatique ou logique.

1. *La fonction conçue comme une action*

Dans sa définition de *fonction*, Euler n'accordait pas d'importance aux différents processus (équivalents) qui la décrivait ; par exemple, $u = 2 - 3z + z^2$ et $u = (1 - z)(2 - z)$ représentaient une même fonction (Youschkevitch, 1976). De nos jours, cela s'exprime en théorie des ensembles lorsqu'une fonction est définie essentiellement par son *graphe*[1]. Certains auteurs apportent parfois des nuances ; ainsi Nicholson (1993) donne une première définition comme graphe, suivie d'une seconde, qualifiée de « *Working Definition* » et se rapprochant mieux selon lui de la façon dont un mathématicien conçoit la fonction, comme une règle qui fait correspondre chaque élément du domaine à exactement un élément du codomaine. L'auteur mentionne que le processus pour définir une fonction consiste à

* Pensionnat du Saint-Nom-de-Marie – Canada – vincent.laurence-rouleau@umontreal.ca

[1] Par *graphe* d'une fonction *f*, nous entendons l'ensemble des couples $(x, f(x))$ pour tout *x* du domaine, et non pas la représentation par des points dans le plan cartésien ; autrement dit, le graphe est une *relation* (fonctionnelle).

spécifier les domaine et codomaine, puis à définir l'« action » de la fonction, c'est-à-dire comment attribuer l'image à chaque élément du domaine.

Pour exprimer cette apparente dichotomie, nous avons suggéré l'existence de deux pôles conceptuels pour situer les différentes significations entendues de la fonction ; nous les désignons par les expressions *conception figée* et *conception active* de la fonction (Laurence-Rouleau, 2023). Toute définition, description ou représentation de la fonction où la formation des couples est donnée *a priori* s'inscrit dans ce que nous appelons une *conception figée* de la fonction. Cela inclut notamment la représentation graphique du graphe d'une fonction réelle dans le plan cartésien, où les coordonnées d'un couple sont amalgamées en un point. Notons que cette conception figée coïncide avec l'idée de concevoir la fonction comme étant « statique » mentionnée par d'autres auteurs (par exemple Sierpinska, 1992) ; cependant, nous n'y référons que pour la distinguer de la conception active qui nous intéresse. Lorsque l'on indique en premier lieu *comment* les éléments du domaine d'une fonction ont été transformés en leurs images, un à un ou dans leur ensemble, nous y voyons plutôt une *conception active* de la fonction. Cette conception est « dynamique » dans un sens qui s'approche de celui de Sierpinska (1992), mais il ne doit pas être confondu avec d'autres formes de dynamisme ; par exemple, le raisonnement covariationnel, bien que dynamique dans un sens, s'inscrit dans une conception figée dans le nôtre puisqu'il s'opère sur des couples du graphe. La fonction conçue activement est présente dans plusieurs branches de la mathématique, notamment lorsqu'il est question d'agir sur des objets (par transformation, projection, codage, etc.) ou encore de montrer qu'une structure est incluse dans une autre (par un monomorphisme) ou est équivalente à une autre (par un isomorphisme). On peut aussi la retrouver au cœur des fonctions définies par récurrence utilisées notamment en modélisation ; pensons au modèle SIR de propagation d'une épidémie[2].

Afin de caractériser cette conception active, nous avons adopté un changement de point de vue intra-mathématique menant à une définition du concept de fonction qui capture son aspect opérationnel (Laurence-Rouleau, 2023), motivé didactiquement par les modèles de compréhension d'un objet mathématique par dualité « processus-objet » (Gray et Tall, 1994 ; Dubinsky, 1991 ; Sfard, 1991), où une conception *opérationnelle* de l'objet contribue à une conception *structurelle*. Ainsi, plutôt que de concevoir *a priori* une fonction comme un graphe dans la théorie des ensembles, on la conçoit d'abord comme un *morphisme* dans la théorie des *catégories* ; cela met de l'avant une caractéristique opérationnelle de la fonction : la *composition*, opération fondamentale sur les morphismes. De plus, on construit la fonction à partir d'un autre morphisme, appelé *cheminement*, qui contient le mode opératoire ou l'action de la fonction. Intuitivement, un cheminement consiste en un ensemble de *chemins* dont chacun explicite comment chaque élément du domaine a été transformé en son image. Évidemment, on pourrait exprimer différents cheminements pour une même fonction, et c'est justement l'idée : une fonction peut ainsi être définie *a posteriori* comme une classe de cheminements *équivalents*[3]. La fonction s'exprime donc opérationnellement par l'un ou l'autre de ses représentants (cheminements), à l'instar d'un nombre rationnel qui peut être représenté par différentes fractions (conçues comme divisions d'entiers) équivalentes à des fins calculatoires.

[2] Dans un tel modèle, des fonctions *S*, *I* et *R* indiquant le nombre de personnes susceptibles d'être infectées $S(n)$, le nombre de personnes infectées $I(n)$ et le nombre de personnes retirées $R(n)$ (guéries ou décédées) selon le nombre n de jours écoulés sont définies à partir de $S(n-1)$, $I(n-1)$ et $R(n-1)$.

[3] Nous préférons omettre les détails techniques des définitions de cheminement et de fonction comme classe de cheminements équivalents pour alléger ce texte ; on peut les trouver dans d'autres publications (Laurence-Rouleau, 2023 ; Rouleau, 2021)

II. QUELQUES ÉLÈVES EN ACTION

Dans le cadre d'un projet de recherche (Laurence-Rouleau, 2023), quelques problèmes ont été élaborés autour d'une conception active de la fonction et présentés à des dyades ou triades d'élèves québécois de niveau secondaire. Nous proposons de mettre en lumière l'activité mathématique déployée lors de la résolution d'un de ces problèmes : **soit deux fonctions $f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, appelées respectivement le *plancher* et le *plafond*, telles que $f(x) = \lfloor x \rfloor$ et $g(x) = \lceil x \rceil$; décrivez g à l'aide d'une composition de f et d'opérations arithmétiques**.[4]

Une première solution[5] exprimée par un participant de 3e secondaire, surnommé *S*rinivasa, avait été la fonction définie par parties g telle que $g(x) = f(x) + 1$ si x n'est pas un nombre entier, et $g(x) = f(x)$ sinon. Son coéquipier Fiodor avait alors poursuivi en faisant un lien avec la programmation et la fonction logique « si … alors … ». Bien qu'une telle solution ait été facilitée par des connaissances en informatique de la part de Srinivasa, nous croyons toutefois qu'il est peu probable qu'elle ait pu être obtenue en adoptant seulement une conception figée de la fonction ; en particulier, une représentation graphique du graphe dans le plan cartésien de chacune des fonctions *plancher* et *plafond* – dont la forme rappelle les marches d'un escalier – peut au mieux permettre d'imaginer des réflexions (géométriques) permettant de superposer les lieux de points l'un sur l'autre. Cela nous semble d'autant plus improbable pour la seconde solution proposée par *S*rinivasa, $g(x) = \lfloor x \rfloor - \lfloor -x + \lfloor x + 1 \rfloor \rfloor + 1$, qui reflète le processus de son raisonnement par un seul enchaînement opérationnel.

La troisième solution de *S*rinivasa était celle à laquelle nous nous attendions *a priori*, $g(x) = -f(-x)$, mais l'explication donnée par le participant nous semblait inattendue :

> Le plancher c'est l'inverse du plafond... donc c'est comme le même concept quand tu veux faire un... un AND genre quand tu programmes... tu peux faire un NOT... bien comme un NOT sur chacun des *inputs*, et tu mets un OR, puis un autre NOT... puis là le $-x$ comme c'est le NOT, puis là c'est la fonction inverse... le plancher au lieu du plafond... puis là tu inverses... tu ré-inverses.

Nous interprétons cela comme une « analogie » avec une des *lois de De Morgan* ; l'énoncé « *A et B* » est équivalent à « *non*(*non*(A) *ou non*(B)) », mais pour des fonctions unaires « *plancher* » et « *plafond* » en lieu et place des fonctions binaires « *ou* » et « *et* » : *plafond*(*x*)=*non*(*plancher*(*non*(*x*)). Ce rapprochement avec la logique n'est pourtant pas nouveau d'un point de vue mathématique ; depuis Leibniz, diverses modélisations de différentes logiques (sur le plan sémantique ou syntaxique) ont vu le jour – algèbres de Boole, algèbres de Heyting, algèbres « multi-valuées » (*MV-Algebras*), etc. Dans une perspective didactique, nous y entrevoyons un aspect de l'activité mathématique qui consiste à faire des liens entre des idées distinctes à première vue mais qui possèdent une *structure* commune. Notons que cela peut inviter subséquemment à chercher à expliciter la correspondance entre ces idées ou structures, c'est-à-dire à décrire l'action du morphisme qui permet de passer de l'une à l'autre.

---

[4] Par opérations arithmétiques, on entendait les fonctions unaires qui consistent à additionner, multiplier, soustraire ou diviser par un nombre donné ; aussi, les fonctions plancher et plafond étaient respectivement la fonction qui transforme un nombre réel en le plus grand entier qui lui est inférieur ou égal et la fonction qui transforme un nombre réel en le plus petit entier qui lui est supérieur ou égal.

[5] Précisons que les participants avaient la possibilité de faire usage d'applications informatiques, appelées *outils d'exploration*, créées à l'aide du logiciel *GeoGebra* afin de représenter graphiquement la composition de fonctions et les cheminements équivalents (pour des fonctions unaires réelles à arguments réels). Le lecteur intéressé peut avoir accès à l'outil d'exploration B à l'adresse suivante : https://www.geogebra.org/classic/g4hgvznr

III. CONCLUSION

En résumé, nous avons soulevé la possibilité qu'une conception active de la fonction, caractérisée par les notions de composition et de cheminements équivalents, puisse entretenir des liens avec un raisonnement favorable à la découverte d'algorithmes, et par le fait même avec la programmation en informatique ; notons que tout cela s'inscrit plus largement dans un esprit de logique *intuitionniste*[6].

RÉFÉRENCES

Ben Nejma, S. (2020). Exploitation de l'histoire dans une analyse didactique du développement de la pensée fonctionnelle au début de l'enseignement secondaire tunisien. *Revue québécoise de didactique des mathématiques, 1*, 38-69.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. et Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(5), 352-378.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. Dans D. Tall (dir.), *Advanced mathematical thinking* (p. 95-126). Kluwer Academic Publishers.

Gray, E. et Tall, D. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A "proceptual" view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(2), 116-140.

Laurence-Rouleau, V. (2023). *Vers une conception active de la fonction mathématique* [Thèse de doctorat, Université de Montréal]. Papyrus. https://papyrus.bib.umontreal.ca/xmlui/handle/1866/33485

Nicholson, W. K. (1993). *Introduction to abstract algebra*. PWS Publishing Company.

Robert, V., Squalli, H. et Bronner, A. (2018). La pensée fonctionnelle : une analyse praxéologique du potentiel de son développement précoce. Dans M. Abboud (dir.), *Actes du colloque EMF2018 « Mathématiques en scène, des ponts entre les disciplines », 22-26 octobre 2018, Gennevilliers, Paris* (p. 284-293). IREM de Paris. https://www.researchgate.net/publication/337198899

Rouleau, V. L. (2021). Autour des classes d'équivalence. *Bulletin AMQ, 61*(1), 26-49.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. Dans E. Dubinsky et G. Harel (dir.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (p. 25-58). Mathematical Association of America.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1-36.

Youschkevitch, A. P. (1976). The concept of function up to the middle of the 19th century. *Archive for History of Exact Sciences, 16*(1), 37-85.

[6] La logique *intuitionniste* (ou logique *constructive*) se distingue notamment de la logique *classique* en ce que la preuve d'un énoncé quant à l'existence d'un objet doit indiquer comment « procéder » pour construire ledit objet (et n'admet pas des raisonnements comme le « tiers exclu »).