APPROCHE ANTHROPOLOGIQUE DE LA PENSÉE ALGÉBRIQUE

| CHAACHOUA* HAMID ET DEWYSPELAERE** STÉPHANIE

Résumé | Ces dernières décennies, la notion de « pensée algébrique » a émergé, élargissant les connaissances traditionnellement associées à l'algèbre élémentaire. En s'appuyant sur la théorie anthropologique du didactique, cette communication propose de caractériser la pensée algébrique à travers un modèle praxéologique de référence. Ce modèle est ensuite questionné par rapport à deux autres modèles.

Mots-clés : pensée algébrique, praxéologie, modèle praxéologique de référence, curriculum

Abstract | In recent decades, the notion of "algebraic thinking" has emerged, expanding the knowledge traditionally associated with elementary algebra. Drawing on the anthropological theory of didactics, this paper proposes to characterize algebraic thinking through a praxeological reference model. This model is then compared to two other models.

Keywords: Algebraic thinking, praxeology, praxeological reference model, curriculum

I. INTRODUCTION[1]

La pensée algébrique, bien qu'étroitement liée à la pensée mathématique générale, possède des caractéristiques distinctes qui se manifestent à travers différentes activités cognitives.

Tout d'abord, la notion de pensée peut être vue comme processus cognitif selon Pierre Steiner (2017), penser implique plusieurs actions comme réfléchir, discerner, comparer ou généraliser. Cette description générale de la pensée s'applique aussi aux mathématiques avec des spécificités. Selon Piaget (1976), deux types de pensée s'opposent dans l'activité mathématique, « la pensée logique opératoire » et la « pensée naturelle », tandis que Stacey (2006), en s'appuyant sur les travaux de Burton et Masson, décompose la pensée mathématique en spécialisation, généralisation, conjecture et preuve.

Dans le cas de l'algèbre, Lins (1992) et Kieran (1996) introduisent l'idée que la pensée algébrique ne se limite pas à la manipulation symbolique des lettres et aux techniques opératoires classiques. Selon Lins (1992), elle se manifeste comme une intention, une manière d'organiser et de modéliser le monde, même lorsque les outils algébriques formels ne sont pas encore maîtrisés. Cette approche met en avant le rôle de la pensée dans la structuration des relations mathématiques, indépendamment de leur expression symbolique. Kieran (1996) élargit cette vision en intégrant les apports des technologies numériques, qui offrent de nouvelles représentations pour appréhender les relations quantitatives. Ainsi, la pensée algébrique se définit comme l'usage de diverses représentations pour comprendre et manipuler les structures mathématiques de manière relationnelle, dépassant ainsi une approche strictement formelle de l'algèbre.

Squalli (2015, 2020) et Radford (2012) enrichissent ces points en précisant que la pensée algébrique se concrétise à travers des raisonnements analytiques, des généralisations et des opérations symboliques. Le positionnement de la caractérisation de la pensée algébrique par rapport au registre symbolique est fondamental. Le langage mathématique, notamment en algèbre, est un hybride entre le langage naturel et les symboles mathématiques (Laborde, 1983). Duval (1993) insiste sur la nécessité

---

* Univ. Grenoble Alpes, CNRS, Grenoble INP, LIG, 38000 Grenoble – France – hamid.chaachoua@univ-grenoble-alpes.fr

** Lycée G Fauré, 74000 Annecy – France – Stephanie.Dewyspelaere@ac-grenoble.fr

[1] Ce travail a été motivé pour contribuer à un renouveau du curriculum sur les activités numériques du cycle 3 dans le cadre du projet PEGASE. « Opération soutenue par le pôle Pégase et l'Etat, dans le cadre de l'action « Territoires d'innovation pédagogique » du programme d'investissement d'avenir, opéré par la Caisse des Dépots ».

de coordonner ces registres de représentation pour permettre aux élèves de conceptualiser des notions algébriques. Si le registre symbolique est vu actuellement comme une caractéristique de l'algèbre, il ne l'est pas pour la pensée algébrique. Ainsi, Squalli (2020) précise que l'on ne peut pas distinguer le caractère algébrique de la pensée ou de l'activité mathématique dans la nature des ostensifs au sens de Bosch et Chevallard (1999), mais qu'il est possible de le faire dans la nature des non ostensifs, c'est-à-dire dans les significations des concepts ainsi que dans la nature des raisonnements impliqués. Pour préciser les caractéristiques des raisonnements dans des activités de nature arithmétique avant une entrée dans l'algèbre (résolution de problèmes déconnectés), Squalli et Adihou (2020) proposent une classification des modes de raisonnements en trois catégories selon leur degré d'analycité :

- Raisonnement non analytique : calcul direct, par essai-erreur sans ajustement, essais numériques avec ajustement simple ; l'élève opère sur des données et des relations connues, dans un registre numérique ; le domaine de validité de ce type de raisonnement englobe les problèmes de type « connectés » (Bednarz et Janvier, 1996) ou solvables par essai-erreur ;
- Raisonnement fonctionnel à tendance analytique : raisonnement hypothético-déductif de type fausse-position dans un registre numérique ou intermédiaire, raisonnement fonctionnel avec des tables de valeurs numériques (dans un scenario de généralisation arithmétique où l'élève infère la régularité observée grâce à la relation fonctionnelle entre les variables), raisonnement avec mathématisation mais l'élève n'opère pas sur les représentations ;
- Raisonnement analytique : raisonnement avec des inconnues et des équations explicites avec ou sans perte du lien avec le contexte, dans un registre symbolique.

Cela est renforcé par les approches de Chevallard (1989) et Squalli (2020) sur la modélisation et la généralisation comme sources clés de la pensée algébrique. Les activités de modélisation et de généralisation ressortent comme des déclencheurs essentiels de la pensée algébrique. Ces activités nécessitent des raisonnements analytiques qui peuvent alors être classés en différents degrés selon leur niveau d'analycité. En particulier, la capacité à opérer sur des symboles, à raisonner sur des relations fonctionnelles ou à conceptualiser des structures est cruciale.

En somme, la pensée algébrique se distingue par sa capacité à opérer de manière relationnelle et analytique, en utilisant diverses représentations pour organiser, modéliser et manipuler des situations quantitatives. Les différentes contributions étudiées mettent en évidence un continuum allant de l'arithmétique à l'algèbre, où la nature des raisonnements et des activités joue un rôle fondamental dans le développement de cette pensée.

La référence à la pensée algébrique dans les travaux en didactique des mathématiques a été motivée par la volonté d'apporter une réponse didactique aux difficultés que pose l'apprentissage de l'algèbre, et plus précisément pour identifier les activités facilitant l'entrée dans cette discipline. Leur spécificité est de ne pas recourir au registre symbolique. Cependant, ces travaux s'inscrivent principalement dans des approches cognitives, ce qui conduit à les caractériser principalement à partir des raisonnements mobilisés par les élèves.

Dans cet article, nous proposons de caractériser la pensée algébrique d'un point de vue épistémologique, c'est-à-dire à partir du savoir sans prendre en compte le point de vue cognitif.

II. UN MODÈLE PRAXÉOLOGIQUE DE RÉFÉRENCE

Comme tout objet à enseigner, l'algèbre enseigné est un construit résultant d'un processus de transformations, le plus souvent à partir de l'institution qui l'a produit -ce que Chevallard (1985) caractérise comme le processus de transposition didactique-. Par conséquent, il existe une diversité de constructions possibles d'un objet à enseigner et des curricula dans lesquels il s'insère (Artigue, 2018 ; Wijayanti et Bosch, 2018).

Pour comprendre le processus de transposition didactique, le chercheur a besoin d'élaborer un modèle épistémologique de référence (MER).

> *Research in didactics needs to elaborate its own models of reference to be able to avoid being subject to the different institutions observed, especially the 'dominant' ones. There is no privileged reference system for the analysis of the different bodies of knowledge of each step of the didactic transposition process* […]. (Bosch and Gascón, 2006, p. 57)

Un tel modèle permet de définir ce qu'est un domaine de savoir, et permet en particulier d'analyser un curriculum existant ou pouvant exister mais également différents phénomènes didactiques. Comme beaucoup de recherches nous désignons l'algèbre qu'on enseigne ou qu'on pourrait enseigner au secondaire par l'algèbre élémentaire. Différents travaux ont développé leur propre MER qui répond à des problématiques spécifiques. Chacun d'eux présente une « définition » de l'algèbre élémentaire (ou activités algébriques) et des outils pour l'analyse d'un curriculum. Dans La Théorie Anthropologique du Didactique TAD (Chevallard, 1992), les MER sont décrits comme des séquences ou des arborescences de praxéologies (Bosch et Gascón, 2006). Cette théorie propose de modéliser les activités humaines, et en particulier les activités mathématiques, par le concept de praxéologie. Les praxéologies sont formées de types de tâches T, des techniques τ qui les réalisent, des technologies θ qui permet de les expliquer, les justifier, de les adapter voire de les produire et les théories Θ associées qui justifient à leur tour les technologies. Une praxéologie est ainsi représentée par le quadruplet [T, τ, θ, Θ], et on désigne le couple [T / τ] par la praxis et [θ / Θ] par le logos. Quand le MER s'appuie sur la praxéologie pour modéliser les connaissances, il est désigné par Modèle Praxéologique de Référence (MPR). Un tel modèle se présente comme une déclinaison d'une praxéologie globale en plusieurs praxéologies régionales, chacune liée à une même théorie. Ces praxéologies régionales se subdivisent ensuite en praxéologies locales, chacune étant relative à une même technologie. Enfin, les praxéologies locales se déclinent en un petit nombre de praxéologies ponctuelles.

Plusieurs MER ont été développés dans des travaux de recherche pour caractériser les activités algébriques. Dans un premier temps, nous proposons un MER qui intègre et restructure certains modèles présentés ci-après. Ensuite, nous caractériserons les activités de la pensée algébrique par rapport à ce MER.

Les deux premiers modèles, issus des travaux de Grugeon (1995) et de Kieran (1996), ne s'inscrivent pas dans le cadre de la TAD.

Le premier modèle est issu des travaux de Grugeon (1995) qui expose une structure multidimensionnelle pour analyser les compétences algébriques du côté de l'enseignement et du côté de l'élève (Grugeon et al., 2012). Du côté savoir, Grugeon s'inspire des dimensions outil et objet des concepts mathématiques selon Douady (1986). Ainsi, l'algèbre peut être mobilisée comme outil de résolution via la modélisation pour résoudre des problèmes « arithmétiques » formulés en langue naturelle sous forme d'équations, et au-delà, pour résoudre des problèmes intra ou extra-mathématiques sous forme de relations fonctionnelles entre données et variables. Dans sa dimension objet, l'algèbre est un ensemble structuré d'objets avec des propriétés spécifiques, des représentations sémiotiques associées à différents registres et des modes de traitement.

Le deuxième modèle est celui de Kieran (1996, 2004) qui propose une modélisation de l'activité algébrique à partir de la classification des sources de signification de l'algèbre de Radford et des représentations mathématiques au sens des registres sémiotiques de Duval (1993). Ce modèle décrit 3 catégories d'activités : Les activités Génératives qui impliquent la génération d'expressions algébriques et d'équations, qui sont les objets de l'algèbre ; les activités Transformationnelles qui se réfèrent à l'usage de règles de transformation relatives à la réduction de termes, à la factorisation, au développement d'expressions, à la substitution, à la résolution d'équations, à la simplification d'expressions entre autres ; et les activités Globales à un niveau méta qui mobilisent l'usage de l'algèbre comme outil pour résoudre différents types de problèmes. Ce modèle est désigné par l'acronyme GTG, pour Génératives, Transformationnelles et Globales.

Les autres modèles s'inscrivent dans la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD). Certains ont proposé une classification des types de tâches, que nous articulons avec les deux premiers modèles (Figure 1). Nous avons rattaché aux trois types d'activités du modèle de Kieran des types de tâches génératrices au sens de Chaachoua (2020) pour structurer les sous-types de tâches à partir des variables. Par exemple, dans les activités de transformation, nous associons cinq types de tâches[2], comme « Factoriser une expression algébrique », auxquelles sont associées des variables (degré, nombre de termes, etc.), dont l'instanciation à des valeurs génère des sous-types de tâches. Pour ces cinq types de tâches, les travaux de Croset (2009), Ferraton (2011), Jolivet et al. (2022), Chaachoua (2010) et Pilet (2012) décrivent et affinent les générateurs de types de tâches associés.

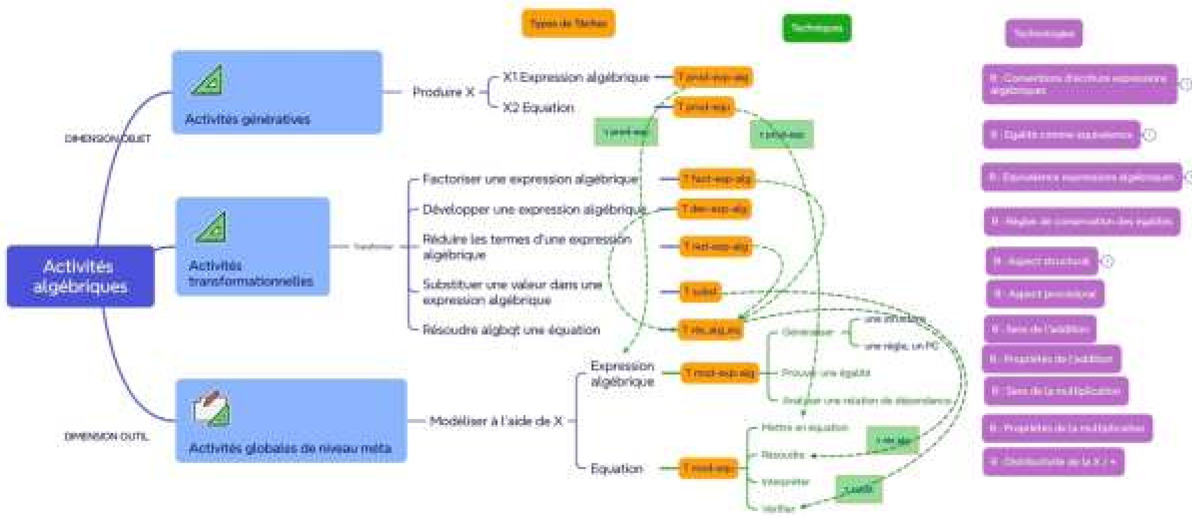


Figure 1 **–** *MPR activités algébriques*

Dans la figure 1, nous avons représenté un type de relation « être ingrédient de » entre les types de tâches par la technique (flèches en pointillés). En effet, Chaachoua (2020) propose de décrire une technique comme un ensemble de types de tâches. Ainsi, les types de tâches « Factoriser une expression algébrique », « Réduire une expression algébrique » et « Développer une expression algébrique » sont des ingrédients d'une technique accomplissant le type de tâche « Résoudre algébriquement une équation », qui est lui-même un ingrédient d'une technique qui accomplit le type de tâches « Modéliser à l'aide d'une équation », relevant des activités globales de niveau méta. Nous avons également indiqué les éléments technologiques, sur la partie droite de la figure, sans expliciter leurs liens avec les techniques.

Comme nous l'avons dit plus haut, nous souhaitons caractériser les praxéologies facilitant l'entrée dans l'algèbre qui ne nécessitent pas l'usage du registre symbolique. Pour cela, notre choix s'est porté d'abord sur les technologies identifiées dans des travaux de recherche comme sources de difficultés des élèves et qui ont un sens pour des expressions numériques. Prenons le cas de la technologie «

[2] Dans Kieran, on trouve 6 types de tâches. Nous avons regroupé « simplifier » et « réduire les termes » en un seul. De même nous avons restructuré les types de tâches des activités globales.

Aspects structural et procédural des expressions algébriques ». Ces deux aspects ont été distingués par Sfard (1991) : structural, où l'expression est perçue comme un objet, et procédural où elle est considérée comme un processus. La littérature souligne les difficultés que rencontrent les élèves à considérer une expression algébrique selon son aspect structural. Pour cette raison, des propositions ont été faites pour travailler cet aspect dans les expressions numériques avant l'introduction du symbolisme ; par exemple, à travers des types de tâches de conversion (Duval, 1993) qui correspondent aux des activités génératives (Kieran, 1996). Un exemple de type de tâches de conversion d'expression numérique vers le registre arbre a été développé dans un micromonde d'algèbre Aplusix (Chaachoua et al. 2012). La figure ci-contre illustre un exercice dans lequel la consigne est « Remplacer les points d'interrogation dans les arbres de manière à obtenir des expressions équivalentes à l'expression 2+4×5+1. L'opérateur du plus haut niveau donne la forme de l'expression, ici la somme.

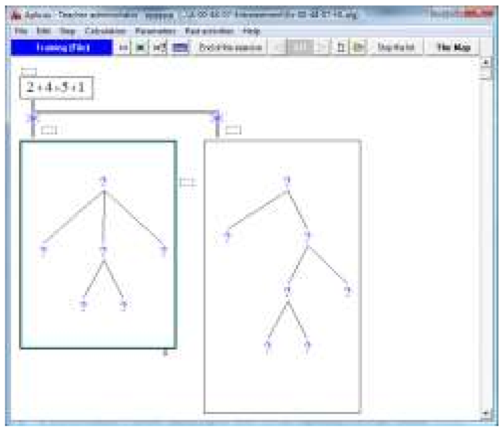


***Figure 2 –** Représentation en arbre*

À partir des considérations précédentes, nous définissons le pré-algèbre comme un domaine d'organisation praxéologiques engendrées par les technologies suivantes : θ_{num_1} « Égalité comme équivalence entre expressions numériques » ; θ_{num_2} « Équivalence des expressions numériques » ; θ_{num_3} « Règles de conservation des égalités entre expressions numériques » ; θ_{num_4} « Aspects structural et procédural des expressions numériques » ; θ_{num_5} « Priorité des opérations » ; θ_{num_6} « Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition dans une expression numérique ». Nous formulons l'hypothèse que les praxéologies de ce domaine constituent des conditions nécessaires à l'élaboration des praxéologies didactiques du domaine de l'algèbre.

La figure 3, présente des filiations possibles entre les technologies de ce domaine et celles des deux domaines : arithmétique et algèbre. Les pointillés représentent un changement de point de vue nécessaire.

Les technologies du domaine pré-algèbre ont été mise à l'épreuve quant à leur potentiel de faciliter l'entrée dans l'algèbre dans plusieurs travaux. C'est le cas de l'élément technologique de la distributivité (θ_{num_6}) pour lequel Constantin et Coulange (2017) s'interrogent sur les potentialités des savoirs à enseigner et enseignés autour de la multiplication à l'école primaire, convoquant la propriété de distributivité, pouvant favoriser l'entrée dans une pensée algébrique. Nous pensons que cet élément technologique trouve son intérêt dans le pré-algèbre à travers des praxéologies comme celles du calcul mental (Butlen, 2007), qui peuvent également contribuer à travailler les transformations des expressions numériques. Cela s'inscrit aussi dans la technologie θ_{num_2} sur les équivalences d'expressions numériques.

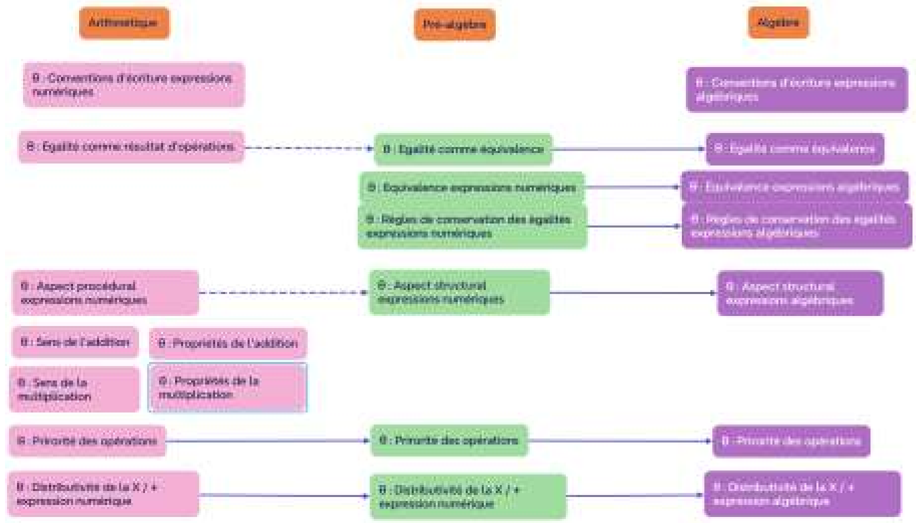


Figure 3 – *Les technologies des 3 domaines : arithmétique, pré-algèbre et algèbre*

De notre point de vue, nous considérons le domaine du pré-algèbre comme un champ de travail à part entière. Il peut être structuré de la même façon que celui de l'algèbre (Figure 1) selon les trois types d'activités pré-algébriques : génératives, transformationnelles et globales. Les deux premières permettent de travailler la dimension objet du pré-algèbre et la troisième sa dimension outil. Cependant, un enjeu didactique majeur demeure : trouver des raisons d'être pour motiver l'entrée dans l'algèbre. Notre hypothèse est que l'efficacité de ces raisons d'être sera plus grande si le domaine du pré-algèbre est suffisamment exploré et travaillé.

Les travaux sur l'élaboration des praxéologies pouvant motiver l'introduction des objets de l'algèbre sont nombreux. Ces praxéologies sont rattachées aux activités globales autour de la généralisation et plus généralement de la modélisation. C'est le cas des problèmes de généralisation où on trouve les exemples pattern qui permettent l'entrée dans l'« algèbre avant la lettre » (Bronner, 2015 ; Radford, 2014). Dans le cas d'activités de généralisation de patterns figuratifs, plusieurs recherches montrent que les élèves du primaire et du début du secondaire peuvent produire des généralités algébriques sans recourir aux lettres (Mary et al., 2014 ; Radford, 2014 ; Squalli, 2015 ; Vlassis et al., 2018).

Pour la modélisation, on peut citer les travaux Ruiz-Munzon (2010) qui explore l'idée de Chevallard d'une entrée dans l'algèbre à travers un processus de modélisation à l'aide de programmes de calculs [PC]. Un modèle épistémologique de référence propose un curriculum algébrique de l'école primaire jusqu'au lycée. Ce MPR décrit un processus d'algébrisation des organisations praxéologiques en trois étapes. La première correspond à la traduction d'un programme de calcul donné en langage naturel en une expression algébrique (activité générative). Ce système correspond notamment aux problèmes arithmétiques se résolvant par l'exécution d'un programme de calcul à l'aide de la méthode d'analyse-synthèse. La deuxième étape correspond à la production d'une expression algébrique en vue de la généralisation d'une régularité ou d'une propriété éventuellement dans un processus de modélisation (activité globale de niveau méta). La troisième correspond à l'étude de l'équivalence de deux programmes de calculs (activité globale de niveau méta).

Notre question porte alors sur le type de travail dans le domaine pré-algèbre qu'il faut faire pour faciliter cette progression. Ce questionnement est analogue à celui posé par Pilet et Grugeon Allys (2021) à propos de la première étape :

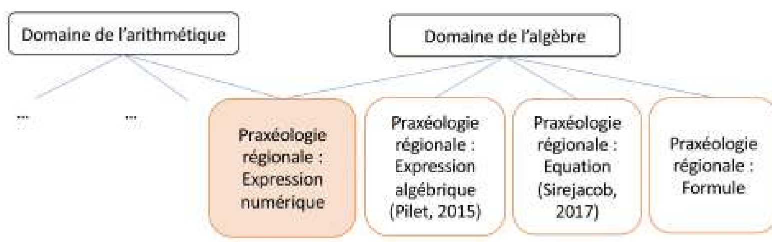
> Au début du secondaire, il semble peu envisageable d'attendre des élèves la production d'une telle expression algébrique sans un travail préalable sur les écritures numériques et leurs propriétés. Quelles sont alors les étapes

> intermédiaires ? Comment préparer les élèves à produire des expressions numériques parenthésées « en ligne » dont il faut analyser la structure pour pouvoir les simplifier ? En définissant l'activité numérico-algébrique, nous cherchons à caractériser cette richesse en identifiant l'équipement praxéologique nécessaire pour permettre aux élèves d'aborder dans des conditions optimales la première étape du processus d'algébrisation. (*ibid*., p. 12)

Les auteurs proposent un travail préalable dans des activités appelées numérico-algébriques dont les aspects épistémologiques sont :

> L'analycité, la représentation des relations entre les données connues et inconnue(s) d'un problème par un modèle symbolique, le calcul s'appuyant sur des propriétés des nombres et des opérations et sur l'égalité comme relation d'équivalence, la dénotation et le sens des expressions numériques, les caractères structural et procédural d'un concept. (*ibid*., p. 17)

On voit bien une proximité d'approches avec certaines nuances. Les activités numérico-algébriques sont situées, pour les auteurs, dans une organisation praxéologique régionale, autour d'une théorie non explicitée dans l'article pour faire des ponts entre l'arithmétique et l'algèbre.



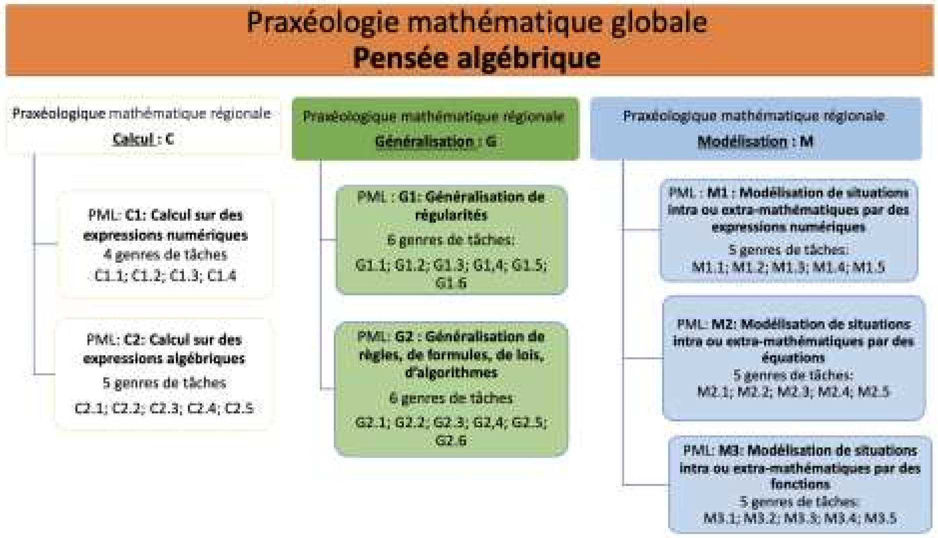
(Pilet et Grugeon Allys, 2021 p. 18)

Figure 4 – *Extension de la praxéologie de référence du domaine de l'algèbre*

Dans notre approche, nous avons défini le pré-algèbre comme un domaine au même niveau que les domaines de l'arithmétique et de l'algèbre pour au moins deux raisons. La première est que les technologies retenues dans le pré-algèbre relèvent de plusieurs théories, la deuxième est que la structuration de ses praxéologies peut être similaire à celle de l'algèbre par catégorisation en trois types d'activités (générative, transformationnelles, et globale de niveau méta) avec la double dimension objet et outil. De plus, le domaine de pré-algèbre peut fournir des conditions pour des praxéologies didactiques facilitant l'entrée dans les fonctions.

Notre approche est plus proche de celle de Squalli et Jeannotte (2022) qui situe la pensée algébrique au niveau globale (figure 5).

Si on regarde de près les organisations praxéologiques régionales, on trouve les activités génératives et transformationnelles dans la praxéologie régionale « Calcul - C », et les activités globales de niveau méta réparties dans les deux praxéologies régionales « Généralisation – G » et « Modélisation – M ».



(Squalli et Jeannotte, 2022, p.76)

Figure 5 – *Modèle praxéologique de référence de la pensée algébrique*

III. CONCLUSION

Le travail présenté ici constitue une contribution aux recherches sur le développement de la pensée algébrique. Plus précisément, nous avons cherché à caractériser les activités de la pensée algébrique dans un domaine de savoir par une approche épistémologique. Nous proposons le terme de "pré-algèbre", vu à la fois comme un domaine de recherche et une perspective curriculaire (Carraher et Schliemann, 2007). À cette fin, nous avons présenté la genèse de notre modèle épistémologique de référence, élaboré à partir du modèle conceptuel de l'activité algébrique, dit « GTG » (Kieran, 2007), ainsi que d'autres modèles épistémologiques. Nous avons choisi d'explorer les éléments technologiques identifiés dans des travaux de recherche comme sources de difficultés pour les élèves et qui sont pertinentes pour les expressions numériques. Nous définissons la pré-algèbre comme un domaine d'organisation praxéologique engendré par ces technologies, structuré de manière similaire à celui de l'algèbre selon les trois types d'activités pré-algébriques GTG. Ce domaine est envisagé à la fois comme un champ de travail autonome dans une perspective curriculaire et comme un objet d'étude pour les conditions d'élaboration de praxéologies didactiques facilitant l'entrée dans l'algèbre élémentaire. Le domaine pré-algébrique n'est pas juxtaposé entre les domaines de l'arithmétique et de l'algèbre mais il se développe en parallèle avec eux. L'arithmétique doit créer des conditions pour le pré-algèbre qui à son tour crée des conditions pour l'algèbre élémentaire.

Figure 6 – *Les 3 domaines arithmétique, pré-algèbre et algèbre*

Nous avons souligné la proximité de notre approche avec celles de Pilet et Grugeon Allys (2021) et Squalli et Jeannotte (2022), tout en mettant en évidence quelques nuances. Il semble pertinent de développer un programme commun fondé sur ces trois modèles comme perspective de recherche.

RÉFÉRENCES

Artigue, M. (2018). Implementing curricular reforms: A systemic challenge. Dans Y. Shimizu et R. Vithal (dir.), *School mathematics curriculum reforms: Challenges, changes and opportunities. Proceedings of the twenty-fourth ICMI study conference* (p. 43–52). ICMI. https://hal.science/hal-03357048

Bosch, M. et Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques, 19*(1), 77-124.

Bosch, M. et Gascón, J. (2006). Twenty-five years of the didactic transposition. *ICMI Bulletin, 58*, 51-64.

Bronner, A. (2015). Développement de la pensée algébrique avant la lettre – Apport des problèmes de généralisation et d'une analyse praxéologique. Dans L. Theis (dir.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : Enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* (p. 247-264). Université d'Alger.

Butlen, D. (2007). *Le calcul mental entre sens et technique : recherches sur l'enseignement des mathématiques aux élèves en difficulté, du calcul mental à la résolution de problèmes numériques*. Presses Universitaires de Franche-Comté.

Carraher, D. W. et Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. Dans F. Lester (dir.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (p. 669-705). Information Age Publishing.

Chaachoua, H. (2010). *La praxéologie comme modèle didactique pour la problématique EIAH. Étude de cas : La modélisation des connaissances des élèves*. HDR. Université Joseph Fourier. https://halshs.archives-ouvertes.fr/tel-00922383/document

Chaachoua, H. (2020). T4TEL : Un cadre de référence pour la formalisation et l'extension du modèle praxéologique. *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, 22*(4), 103-118. https://doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i4p103-118

Chaachoua, H., Chiappini, G., Pedemonte, B., Croset, M.-C. et Robotti, B. Y. (2012). Introduction de nouvelles représentations dans deux environnements pour l'apprentissage de l'algèbre : ALNUSET et APLUSIX. Dans L. Coulange, J.-P. Drouhard, J.-L. Dorier et A. Robert (dir.), *Enseignement de l'algèbre élémentaire : Bilan et perspectives* (p. 253-281). La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné*. La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Partie 2. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x,* (19), 43-72.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 12*(1), 73-112.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2), 221-265.

Constantin, C. et Coulange, L. (2015). Quelles alternatives pour l'enseignement du calcul algébrique au collège ? Dans D. Butlen, I. Bloch, M. Bosch, C. Chamris, G. Cirade, S. Clivaz, S. Gobert, C. Hache, M. Hersant et C. Mangiante-Orsola (dir.), *Rôles et places de la didactique et des didacticiens des mathématiques dans la société et le système éducatif. Recueil des communications de la 17e école d'été de didactique des mathématiques* (p. 315-332). La Pensée Sauvage.

Croset, M.-C. (2009). *Modélisation des connaissances des élèves au sein d'un logiciel d'algèbre. Études des erreurs stables inter-élèves et intra-élève en termes de praxis-en-acte* [Thèse de doctorat, Université Joseph-Fourier]. HAL theses. https://theses.hal.science/tel-00444557v1

Douady, R. (1984). *Dialectique outil/objet et jeux de cadres* [Thèse de doctorat, Université Paris VII]. HAL theses. https://theses.hal.science/tel-01250665

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(2), 5–31. https://revue-rdm.com/1986/jeux-de-cadres-et-dialectique/

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5,* 37-65.

Ferraton, G. (2011). *Rapport institutionnel à l'objet calcul littéral au collège : Construction et utilisation d'un modèle praxéologique de référence pour les trois types de tâche réduire, développer et factoriser une expression littérale* [Mémoire de Master M2 inédit].

Grugeon-Allys, B., Pilet, J., Chenevotot-Quentin, F. et Delozanne, E. (2012). Diagnostic et parcours différenciés d'enseignement en algèbre élémentaire. *Recherche en Didactique des Mathématiques, Hors-série*, 137-162.

Grugeon, B. (1995). *Étude des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves à l'algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement* [Thèse de doctorat, Université Paris VII – Diderot]. HAL theses. https://theses.hal.science/tel-01252058v1/file/Theses%20Grugeon.pdf

Jolivet, S., Chaachoua, H. et Desmoulins, C. (2022). Modèle de description didactique d'exercices de mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 42*(1), 53-102.

Kieran, C. (1996). The changing face of School Algebra. Dans *8th International Congress on Mathematical Education Selected lectures* (p. 271-286). SAEM THALES.

Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? *The Mathematics Educator, 8*(1), 139-151.

Laborde, C. (1983). Deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique : Langue naturelle et écriture symbolique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 4*(2), 199-203.

Lins, R. C. (1992). *A framework for understanding what algebraic thinking is* [Thèse de doctorat, University of Nottingham]. https://eprints.nottingham.ac.uk/13227/1/316414.pdf

Mary, C., Squalli, H. et Schmidt, S. (2014). Activité de généralisation et de justification chez des élèves en difficulté. Dans C. Mary, H. Squalli, L. DeBlois et L. Theis (dir.), *Recherches sur les difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques : regard didactique* (pp. 163-186). Presses de l'Université du Québec.

Piaget, J. (s.d.). *Fondation Jean Piaget.* https://www.fondationjeanpiaget.ch/fjp/site/accueil/index.php

Pilet, J. et Grugeon-Allys, B. (2021). L'activité numérico-algébrique à la transition entre l'arithmétique et l'algèbre. *Éducation et Didactique, 15*(2), 9-26.

Radford, L. (2012). Early algebraic thinking: Epistemological, semiotic and development issues. Dans *The proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (p. 209-228). Springer.

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal, 26*, 257-277.

Ruiz-Munzón, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional* [Thèse de doctorat, Universitat Autònoma de Barcelona]. https://www.educacion.gob.es/teseo/mostrarRef.do?ref=906861

Ruiz-Munzón, N., Bosch, M. et Gascón, J. (2013). Comparing approaches through a reference epistemological model: The case of school algebra. Dans B. Ubuz, Ç. Haser et M. A. Mariotti (dir.), *Proceedings of the 8th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (p. 2870-2979). Middle East Technical University.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1-36.

Squalli, H. (2015). La généralisation algébrique comme abstraction d'invariants essentiels. Dans L. Theis (dir.), *Actes du colloque EMF2015 « Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : Enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage », 10-14 octobre 2015*, *Université d'Alger, Algérie* (p. 346-356). https://bibnum.publimath.fr/ACF/ACF15083.pdf

Squalli, H. (2020). Early algebra: Genèse d'un domaine de recherche, évolution et perspectives. Dans H. Squalli, I. Oliveira, A. Bronner et M. Larguier (coor.), *Développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début du secondaire : recherches et perspectives curriculaires.* Centre de recherche et d'intervention sur la réussite scolaire.

Squalli, H. et Adihou, A. (2020). Cadre d'analyse des raisonnements dans la résolution de problèmes algébriques de type partage inéquitable. *Nouveaux Cahiers de la Recherche en Éducation, 22*(1), 36-62.

Squalli, H., et Jeannotte, D. (2022). Un modèle praxéologique de référence de la pensée algébrique élémentaire. *Revue Québécoise de Didactique des Mathématiques, Numéro thématique*(Tome 2), 66-101.

Stacey, K. (2006). *What is mathematical thinking and why is it important?* https://www.researchgate.net/publication/254408829

Steiner, P. (2017). *Qu'est-ce que la pensée ?* Librairie philosophique J. Vrin.

Vlassis, J., Demonty, I. et Fagnant, A. (2018). Algebraic thinking, pattern activities and knowledge for teaching at the transition between primary and secondary school. *Educational Studies in Mathematics, 9*(1), 1-19.

Wijayanti, D. et Bosch, M. (2018). The evolution of the knowledge to be taught through educational reforms: The case of proportionality. Dans Y. Shimizu et R. Vithal (dir.), *School mathematics curriculum reforms: Challenges, changes and opportunities. Proceedings of the twenty-fourth ICMI study conference* (p. 173–180). ICMI.