

BILAN DU GROUPE DE TRAVAIL 3

DIFFÉRENTES PENSÉES MATHÉMATIQUES

| BEN NEJMA* SONIA, GBAGUIDI** AHONANKPON FLORENT, JEANNOTTE*** DORIS ET
SQUALLI**** HASSANE

I. INTRODUCTION

La thématique relative aux *différentes pensées mathématiques* occupe une place centrale et récurrente dans les colloques de l'Espace Mathématique Francophone (EMF) traduisant l'intérêt soutenu porté par les chercheurs, formateurs et praticiens du champ de l'éducation mathématique. Depuis EMF 2015, le choix d'aborder la question sous l'angle des *différentes pensées mathématiques* permet d'élargir le champ de réflexion. Il ne s'agit plus de penser une pensée mathématique unifiée, mais bien d'explorer une diversité de formes de pensée (arithmétique, algébrique, fonctionnelle, géométrique, algorithmique, proportionnelle, probabiliste, etc.) dans leurs spécificités, leurs articulations et leurs liens éventuels avec des domaines d'étude en mathématiques. Pour la sixième édition consécutive, cette thématique est reconduite dans le groupe de travail 3 du programme d'EMF 2025. Les différentes contributions au GT3 peuvent être classées selon trois axes : épistémologique et historique, didactique et curriculaire. Sur le plan épistémologique et historique, cette thématique conduit à repenser la nature même de l'activité mathématique en tant que pratique multiforme trouvant ses origines dans l'histoire des mathématiques et à réfléchir sur les différents modèles épistémologiques proposés du point de vue de leur ancrage théorique, de leur spécificité culturelle et de leur complémentarité éventuelle. Sur le plan didactique, elle interroge la manière dont les diverses formes de pensée mathématique peuvent être mobilisées, développées et articulées dans les parcours d'apprentissage depuis le préscolaire. Sur le plan curriculaire, elle invite à repenser les contenus, les pratiques d'enseignement-apprentissage et les programmes d'étude et de formation des enseignants en tenant compte de la diversité culturelle francophone.

Vingt-trois personnes ont participé au GT3 et représentent différents pays (Canada, France, Liban, Maroc, Tunisie). Onze textes ont donné lieu à des présentations qui touchent à différents niveaux d'enseignement allant du préscolaire jusqu'à l'enseignement supérieur et ont eu lieu durant les différentes plages de travail, 9 présentations orales (20 minutes) et deux présentations par affiche (10 minutes), chacune suivie d'une période de discussion équivalente au temps de présentation. Enfin, nous avons pu travailler collectivement durant la dernière séance (environ 1h20) afin de dégager les idées clés discutées, soulever les différents objectifs et explorer des pistes de réflexion futures. Quoiqu'ils puissent appartenir à plus d'un axe, trois textes s'inscrivent plus spécifiquement dans le premier, six dans le second et deux dans le dernier. Ensuite, un bilan a été présenté lors de la clôture s'inscrivant ainsi dans une continuité tout en marquant une actualisation, en phase avec les avancées de la recherche en didactique des mathématiques, les transformations du paysage éducatif et les défis

* Co-responsable du groupe de travail 3 – Université de Carthage – Faculté des sciences de Bizerte-Tunisie – sonia.bennejma@fsb.ucar.tn

** Co-responsable du groupe de travail 3 – Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques – Benin – florent.gbaguidi@imsp-uac.org

*** Co-responsable du groupe de travail 3 – UQAM – Canada – jeannotte.doris@uqam.ca

**** Co-responsable du groupe de travail 3 – Université de Sherbrooke – Canada – hassane.squalli@usherbrooke.ca

posés par les évolutions curriculaires et sociétales. Ce rapport fait la synthèse des présentations et discussions

1. L'axe 1: épistémologie et histoire

Les questionnements d'ordre épistémologique et historique ont eu pour objectif de mettre en évidence les points de convergence et de divergence entre divers champs de recherche en mathématiques et les différents modèles théoriques pour une meilleure compréhension de la nature même de la pensée mathématique.

Abdallah El Idrissi s'intéresse au rôle fondamental du jeu des cadres mathématiques, tel que défini par Douady (1986) dans le développement et la mobilisation de diverses formes de la pensée mathématique. Ce processus est mis en lumière dans diverses situations au fil de l'histoire, constituant ainsi un levier puissant pour favoriser la compréhension conceptuelle et la flexibilité cognitive chez les élèves. L'auteur s'intéresse, plus particulièrement, à la notion d'aire, envisagée comme un outil de preuve au sein de situations historiques variées. Il montre comment cette notion a été mobilisée différemment selon les contextes : en géométrie pour justifier des relations de congruence ou de proportion, en analyse pour fonder des raisonnements intégratifs, en algèbre pour établir des identités, ou encore en combinatoire pour visualiser des structures discrètes. Cette analyse souligne à la fois la richesse épistémologique de la notion d'aire et sa capacité à soutenir le développement de multiples formes de la pensée mathématique, à la croisée de cadres conceptuels distincts. Cette contribution convoque des questions vives au sein du groupe :

Hamid Chaachouaa et **Stéphanie Dewyspelaere** abordent cette thématique par une approche épistémologique et en s'appuyant sur la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1985) dans le domaine de l'algèbre élémentaire, se démarquant ainsi des travaux ayant abordé le développement de la pensée algébrique d'un point de vue cognitif. L'auteur propose de la caractériser par le biais d'un modèle praxéologique de référence (MPR) élaboré à partir du modèle conceptuel de l'activité algébrique, dit « GTG » (Kieran, 2004), ainsi que d'autres modèles épistémologiques. L'auteur questionne ensuite ce modèle à la lumière d'autres modèles théoriques tels que le MPRPA de la pensée algébrique (Squalli et Jeannotte, 2022) et celui de MER de l'algèbre (Pilet et Grugeon Allys, 2021). Le travail présenté apporte un enrichissement aux recherches portant sur le développement de la pensée algébrique à partir de ce qu'il qualifie de « pré-algèbre » envisagé à la fois comme un champ de travail autonome dans une perspective curriculaire et comme un objet d'étude pour les conditions d'élaboration de praxéologies didactiques facilitant l'entrée dans l'algèbre élémentaire. Des questions ont enrichi la discussion autour de cette contribution :

Pour sa part, **Vincent Laurence-Rouleau** aborde cette thématique sous un angle original, celui d'une nouvelle conception de la notion de fonction pour qu'elle puisse être au cœur d'usages contemporains en mathématiques et dans d'autres domaines d'application, notamment en modélisation et en informatique. L'auteur présente le résultat d'une analyse mathématico-épistémologique de cette notion dans une perspective de conception active (Laurence-Rouleau, 2023). Ce travail s'inspire des modèles de compréhension d'un objet mathématique par dualité « processus-objet » (voir p. ex. Sfard, 1991) et de la théorie mathématique des catégories. Cela lui permet de décrire et d'illustrer les conceptions de certains élèves du secondaire et de repenser les liens entre pensée mathématique, pensée algorithmique, informatique ou logique en mettant, particulièrement, l'accent sur la composition de fonctions (morphisme) comme étant un levier de transition d'une conception à une autre, voire d'une pensée à une autre.

2. L'axe 2: didactique

La majorité des présentations (au nombre de six) se situe dans l'axe didactique. Dans cet axe, les propositions traitent des différentes pensées mathématiques dans l'enseignement-apprentissage des mathématiques.

Sonia Ben Nejma et **Hend Hraimi** se sont intéressées à la pensée proportionnelle comme tremplin pour le développement de la pensée fonctionnelle. Pour ce faire, elles ont analysé les démarches de résolution mobilisées par les élèves pour résoudre des problèmes de proportionnalité. Pour faire l'analyse, elles proposent un cadre bidimensionnel enrichi par celui des représentations sémiotiques. Spécifiquement, les outils de la TAD ainsi que des champs conceptuels ont permis de mettre de l'avant le potentiel de la pensée proportionnelle pour le développement d'aspects de la pensée fonctionnelle. En particulier, l'utilisation spontanée par les élèves d'une variété de représentations sémiotiques semblait renvoyer à diverses techniques de résolution de problèmes de proportionnalité et pourrait servir de levier pour développer la pensée fonctionnelle.

Nathalie Bisailon et ses collaboratrices se sont intéressées à l'aspect raisonnement mathématique de la pensée mathématique. Leur étude a porté sur l'analyse des raisonnements d'élèves de 4^e année déployés lors de la résolution d'une énigme logique impliquant le langage courant. Pour ce faire, elles proposent un cadre multicouche permettant de mettre en évidence les pas de raisonnement, la nature des éléments d'un pas, mais aussi la façon dont ces pas s'enchaînent. L'analyse met en évidence la non-linéarité des enchaînements de pas de raisonnement, des enjeux liés aux fondements d'un pas de raisonnement ainsi que des enjeux en lien avec des changements de registres de représentation. L'importance des traces dans la constitution des chaînes de raisonnements apparaît alors centrale pour être en mesure de progresser dans la résolution de l'énigme.

La proposition d'**Elena Poloskoia** et ses collaborateurs contribue au développement d'un modèle de développement d'une pensée relationnelle dans la lignée des travaux de Davidov (2008). Ce texte explore comment la pensée relationnelle, préalable à la pensée algébrique, peut être développée dès la première année du primaire à travers des activités non numériques. En s'appuyant sur le cadre théorique de Davydov (2008), les auteurs analysent deux leçons où des élèves résolvent des problèmes écrits à l'aide de schémas. Un modèle bidimensionnel est utilisé pour évaluer la qualité des relations exprimées et le niveau d'abstraction des outils sémiotiques employés. Les résultats montrent que certains élèves manifestent une pensée relationnelle avancée, tandis que d'autres peinent à exprimer leur raisonnement. L'étude souligne l'importance de varier les modes de communication (gestes, schémas, langage) pour mieux interpréter et soutenir le développement de la pensée mathématique.

Céline Constantin et ses collaborateurs explorent comment des élèves de 6 à 7 ans développent une pensée structurale en arithmétique à travers des tâches centrées sur l'égalité et ses représentations symboliques. En s'appuyant sur une approche sémio-linguistique, les auteurs analysent les stratégies de deux élèves confrontés à des égalités numériques. Deux propriétés arithmétiques liées aux quantités sont identifiées comme leviers pour structurer la pensée mathématique. L'utilisation de tâches de comparaison d'états au sens de Vergnaud est apparue porteuse pour le développement de cette forme de la pensée mathématique.

Nathalie Anwandter et ses collaboratrices explorent comment des enfants du préscolaire (4 à 6 ans) développent une pensée relationnelle dans un contexte non numérique, à travers un jeu d'équivalence de poids avec des balances. En observant leurs gestes, discours et stratégies, les chercheuses identifient différentes formes de raisonnement : quantitatif, qualitatif et explicite. Trois cas d'enfants illustrent des niveaux variés de compréhension des relations d'équivalence. Les résultats montrent que la pensée relationnelle peut émerger avant l'introduction des nombres, en s'appuyant sur

les grandeurs. L'étude propose ainsi un cadre pour analyser cette pensée chez les jeunes enfants sans recours au symbolisme mathématique

Enfin, **Geneviève Barabé** s'est intéressée à comment la résolution collective de tâches routinières peut susciter des pratiques mathématiques authentiques en classe. Ancrée dans la théorie de l'enaction, l'étude montre que ces pratiques collectives génèrent de nouveaux problèmes mathématiques à résoudre. L'analyse d'une séance en 5e année du primaire illustre l'émergence de plusieurs problèmes collectifs à partir d'une tâche simple sur la divisibilité. Les résultats permettent de nourrir l'étude de la pensée mathématique du point de vue du collectif, mettant en lumière de nouveaux enjeux de recherche.

3. *L'axe 3: Le curriculum*

La prise en compte de différents travaux de recherche autour de la pensée mathématique pour l'analyse des curricula des différents pays francophones est un axe omniprésent et questionne leur place dans les programmes, les manuels, les ressources pour les enseignants et dans les pratiques d'enseignement et de formation.

Edward Bankoussou Mabiala s'intéresse au potentiel des suites non numériques à motif répété dans le développement de la pensée algébrique chez les élèves à travers une analyse du programme d'études de la maternelle à la deuxième année du primaire du Nouveau-Brunswick. Ce travail se base sur la théorie des représentations sémiotiques (Duval 1995) pour l'étude des régularités en tant qu'approche pour introduire l'algèbre et renforcer les connaissances des élèves en arithmétique. Selon l'auteur, cette initiation doit se faire de manière progressive, par une diversification des situations en amenant les élèves à identifier la régularité dans une suite puis à la prolonger, ce qui pourrait contribuer à faire entrer les élèves dans la pensée algébrique. La reconnaissance et l'analyse des suites fournissent ainsi une base pour le développement de cette forme de la pensée mathématique offrant aux enfants l'opportunité d'observer et de verbaliser des généralisations, ainsi que de les représenter symboliquement (Warren et Cooper, 2007).

Samia Oueslati aborde le développement de la pensée fonctionnelle dans une perspective interdisciplinaire avant l'introduction formelle du concept de fonction et propose une grille d'analyse multidimensionnelle des manuels scolaires du collège tunisien. Ce travail s'inscrit dans le cadre de la TAD et s'appuie sur des travaux conduits dans ce contexte institutionnel (voir p. ex. Najar et al., 2021). Ce travail a généré plusieurs questionnements au sein du groupe.

II. SYNTHÈSE DES DISCUSSIONS

Les échanges à la suite de chacune des discussions et durant la discussion finale ont mis en évidence une grande diversité dans les façons de parler de la pensée mathématique, parfois porteuses de tensions conceptuelles, mais aussi d'une richesse qui ouvre une compréhension mutuelle. Cette diversité souligne l'importance de maintenir des dialectiques entre différents domaines des mathématiques (algèbre, arithmétique, analyse, etc.), mais aussi de reconnaître la pertinence d'étudier la pensée mathématique avant même l'introduction formelle des objets de savoir. Cela nous amène à réfléchir aux liens entre ces domaines et d'autres disciplines scientifiques et à considérer la trajectoire de développement des différentes pensées mathématiques comme un objet d'étude en soi.

Pour les prochaines années, plusieurs pistes de réflexion sont identifiées au sein de ce groupe de travail. Il apparaît nécessaire de clarifier l'objet même de notre étude puisque certains semblent étudier la pensée mathématique en général, d'autres des formes spécifiques liées à des concepts ou à des domaines. Une réflexion collective sur nos conceptualisations est toujours à propos, notamment pour

modéliser ce que nous savons déjà, identifier les invariants et les différences (ex. : qu'est-ce qui rend une pensée algébrique ?). L'usage de cadres sur les représentations sémiotiques, notamment sur les représentations et leur lien aux concepts, mérite aussi d'être précisé. En effet, plusieurs présentations ont abordé l'aspect sémiotique sans toutefois bien circonscrire ce qui était entendu par là. Enfin, la question de la généralisation – qu'elle soit empirique, constructive ou théorique – pourrait structurer nos travaux futurs, en particulier pour distinguer les processus propres à l'arithmétique et à l'algèbre. Ces éléments pourraient nourrir un futur appel du groupe de travail pour EMF 2029.

RÉFÉRENCES

- Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné*. Éditions La Pensée Sauvage.
- Davydov, V. V. (2008). *Problems of developmental instruction. A theoretical and experimental psychological study*. Nova Publisher.
- Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 5-31. <https://revue-rdm.com/1986/jeux-de-cadres-et-dialectique/>
- Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. Dans D. Tall (dir.), *Advanced Mathematical Thinking* (p. 95-126). Kluwer Academic Publishers.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.
- Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator*, 8(1), 139-151. <https://www.researchgate.net/publication/228526202>
- Laurence-Rouleau, V. (2023). *Vers une conception active de la fonction mathématique* [Thèse de doctorat, Université de Montréal]. Papyrus. <https://papyrus.bib.umontreal.ca/xmlui/handle/1866/33485>
- Pilet, J. et Grugeon-Allys, B. (2021). L'activité numérico-algébrique à la transition entre l'arithmétique et l'algèbre. *Éducation et Didactique*, 15(2), 9-26. <https://doi.org/10.4000/educationdidactique.8580>
- Najar, R., Squalli, H., Adihou A. et Abouhanifa, S. (2021). Transition primaire-collège au Bénin, Maroc et Tunisie : Pour un état des lieux, comparaison et perspectives de l'enseignement de l'arithmétique et de l'algèbre. *ITM Web of Conferences*, 39, article 01004. <http://dx.doi.org/10.1051/itmconf/20213901004>
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36. <https://doi.org/10.1007/BF00302715>
- Squalli, H. et Jeannotte, D. (2022). Un modèle praxéologique de référence de la pensée algébrique élémentaire. *Revue Québécoise de Didactique des Mathématiques, Numéro thématique 2*(Tome 2), 66-101. <https://doi.org/10.71403/www4e62>
- Warren, E. et Cooper, T. J. (2007). Repeating patterns and multiplicative thinking: Analysis of classroom interactions with 9-year-old students that support the transition from known to the novel. *Journal of Classroom Instruction*, 41-42(2-1), 7-17. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ780288.pdf>