LES AIDES DIDACTIQUES DANS LA DÉTERMINATION DE LA LIMITE D'UNE SUITE NUMÉRIQUE CONVERGENTE DANS L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE

| ABBY-M'BOUA* PARFAIT

Résumé | Ce travail porte sur la nature de la typologie des aides didactiques des enseignants, lors de la détermination de la limite d'une suite numérique convergente. Les résultats obtenus à partir d'un questionnaire montrent une invariance des pratiques enseignantes pour une suite donnée par son terme général. Par contre, dans le cas d'une suite donnée par une formule de récurrence, les enseignants sont moins à l'aise, se sentent relativement libres et leurs aides didactiques différent d'un enseignant à un autre.

Mots-clés : aide didactique, pratiques enseignantes, suite numérique, convergence, limite

Abstract | This work focuses on the nature of teachers' teaching aids when determining a convergent digital sequence. The results obtained from a questionnaire show an invariance of teaching practices in the case of a sequence given by its general term. On the other hand, in the case of a sequence given by a recurrence formula, teachers are lees comfortable, feel relatively free, and their teaching aids differ from one teacher to another.

Keywords: Didactic aid, teacher practices, digital sequence, convergence, limit

I. POSITION DU PROBLÈME

Notre recherche présentée ici, s'inscrit dans le prolongement des études menées sur les pratiques des enseignants. Elle s'intéresse aux aides didactiques proposées par des enseignants de mathématiques à leurs élèves, relatives à la notion de limite des suites numériques convergentes. Le choix de ce volet de recherche sur aides didactiques proposées par des enseignants de mathématiques à leurs élèves, relatives à la notion de limite des suites numériques convergentes n'est pas aléatoire. Il a été motivé par plusieurs raisons. D'abord, nous ne considérons pas le terme d'aide didactique dans l'orientation d'un instrument (Astolfi et al. ; 2002), mais comme une stratégie mise en place dans des situations didactiques pour faciliter la réflexion des élèves, dans son apprentissage. Ensuite, la convergence des suites numériques est un cas particulier du prolongement de l'enseignement de limite d'une fonction et cette notion est considérée comme une partie fondamentale dans l'enseignement des Mathématiques, en particulier en Analyse réelle, et occupe une place prépondérante dans les préoccupations de la transition lycée/l'université. Aussi, en didactique des mathématiques, la notion de limite d'une fonction a fait l'objet de nombreux travaux antérieurs reconnus (Cornu ; 1983, Sierpinska ; 1985, Bkouche ; 1996, Trouche ; 1996, Schneider ; 2001, Bosch et al. ; 2002, Le Thai Bao ; 2007 et Allab ; 2008) et aussi celle la convergence des suites numériques (Robert ; 1982 et 1983, Boschet ; 1983, Litim, Zaki et Benbachir ; 2015 et Ghedamsi. et Fattoum ; 2018). Enfin, des études ont été menées sur les ressources documentaires des enseignants (Gueudet et Trouche ; 2008, Margolinas et Wozniak ; 2009 et Leroyer ; 2013). En examinant la plupart des ressources documentaires dans le contexte ivoirien, nous avons constaté que toutes les activités des élèves se rapportant à la recherche de la limite d'une suite convergente, donnée par une formule de récurrence sont déjà orientées par les auteurs de ces ressources, c'est-à-dire qu'aucune initiative n'est donnée aux enseignants, pour aider leurs élèves.

* École Normale Supérieure d'Abidjan – Côte d'Ivoire – abby_mboua@yahoo.fr

Cette étude, qui se situe dans une perspective cognitive, a des implications didactiques importantes ; elle doit contribuer à une meilleure connaissance des modèles cognitifs dont disposent les enseignants, dans la recherche des stratégies de détermination de la limite d'une suite numérique convergente. Elle essaie d'examiner de près dans quelles mesures et comment les enseignants eux-mêmes, sont capables d'élaborer des aides didactiques en direction de leurs élèves se rapportant à la détermination de la limite d'une suite numérique convergente.

II. MÉTHODOLOGIE DE LA RECHERCHE

1. Échantillon

Par rapport au sujet qui nous intéresse, il nous faudrait prendre en compte plusieurs facteurs qui pourraient aussi avoir une influence sur la qualité des réponses du professeur, tels que ses particularités personnelles ou son histoire antérieure ou encore l'état de ses connaissances professionnelles. Il nous faudrait tenir compte aussi du niveau « académique » de ce dernier, etc. Il nous faut donc chercher à réduire au maximum certaines de ces variables qui peuvent rendre complexes nos analyses.

Par nos choix méthodologiques, nous avons tout de même essayé de limiter les facteurs extérieurs, en choisissant dans la mesure du possible, des terrains d'observations appropriés. En particulier, le choix des enseignants et le choix du type de séance de classe nous ont permis de circonscrire au maximum notre recherche.

Nous avons également fait le choix d'annoncer individuellement à l'ensemble des enseignants que d'une part nous n'allons pas assister à une de leurs séances de classe, mais, ils allaient répondre à un questionnaire. Et d'autre part que nous les considérons, pour leur participation individuelle à cette étude, comme des professionnels de l'enseignement. Cette prise de position se justifie par rapport à l'étude elle-même. Il y a là un enjeu très important : nous considérons les enseignants comme étant ceux qui font les choix didactiques et qui en prennent seuls la responsabilité devant leurs élèves. Nous leur avons signifié tacitement notre intention de ne pas leur donner de directives concernant les choix didactiques à faire.

L'échantillon était constitué au départ de l'effectif total des enseignants dans les établissements, dans lesquels, nous avons à encadrer des professeurs stagiaires de niveau CAP/PL[1], durant l'année scolaire 2021/2022. Ces enseignants étaient au nombre de soixante-dix-neuf (79). Selon les critères de la diversification de l'échantillon et de la saturation des réponses (de Huberman et Miles, 1991), nous avons choisi des volontaires, qui enseignaient dans les classes de premières et terminales scientifiques (Première C, Terminale C, Première D et Terminale D), ayant en moyenne une dizaine d'années d'expérience dans l'enseignement et qui avaient déjà terminé leurs enseignements sur la notion de convergente d'une suite numérique. Quarante-trois (43) enseignants ont donc été retenus pour cette étude. Nous les avons tous réunis à l'Ecole Normale Supérieure d'Abidjan pendant les congés de février 2022.

2. Le questionnaire

Selon le programme officiel en vigueur en Côte d'Ivoire, la grande partie du cours sur la notion d'une suite numérique est basée exclusivement sur les suites données, soit par une formule générale, soit par une formule de récurrence. Ainsi, avons-nous élaboré le questionnaire (Cf. Annexe),

[1] Certificat d'Aptitude Pédagogique pour les Professeurs de Lycée.

comportant quatre exercices, dont les deux premiers se rapportent à une suite donnée par son terme général et les deux derniers portent sur des suites données par une formule de récurrence.

III. PRÉSENTATIONS ET INTERPRÉTATIONS DES RÉPONSES DES ENSEIGNANTS

Nous rappelons que les enseignants qui ont été sollicités pour cette recherche ont le niveau CAP/PL. Nous avons souhaité que tous proposent des solutions pour les quatre cas, car, logiquement, ils sont tous supposés avoir les connaissances mathématiques universitaires suffisantes et nécessaires pour résoudre convenablement des exercices élémentaires sur la détermination de la limite d'une suite convergente, et proposer des aides didactiques à leurs élèves. Quatre enseignants[2] n'ont pas rendu leurs questionnaires.

1. Présentation des enseignants ayant rendu leurs questionnaires

Tableau 1 – *Répartition des enseignants selon leur classe d'enseignement au cours de l'année scolaire 2021/2022*

	Total	
	Effectif	**Fréquence %**
Première C	5	13
Première D	9	23
Terminale C	6	15
Terminale D	19	49
Total	39	100

On observe dans le tableau, que :

- 13 % de l'échantillon ont une classe de première C
- 23 % ont une classe de première D
- 15 % enseignent Terminale C
- 49 % prennent une classe de Terminale D.
- Les enseignants ayant une classe de Terminale représentent plus de la moitié de l'effectif total, soit environ 64 %.

2. Présentation des résultats obtenus

L'analyse des productions de ces enseignants s'est déroulée en deux étapes. La première a débuté par une catégorisation de toutes les réponses[3], qu'ils ont proposées. Ensuite, nous avons interprété l'ensemble des réponses identifiées dans des catégories distinctes afin de caractériser les aides didactiques les plus répandues, dans les consignes à donner aux élèves.

En examinant l'ensemble des productions, la première remarque frappante est que :

- Tous les enseignants n'ont pas résolu en intégralité tous les différents cas.
- La majorité des enseignants a résolu le premier et le deuxième cas.

[2] Ce sont tous des enseignants qui avaient cette année des classes, de première D.

[3] Les réponses qui n'ont pas pu être catégorisées, n'ont pas été prises en compte lors de notre analyse.

- Plus de 60 % des enseignants ont répondu au troisième cas.
- Moins de 10 % a pu répondre à l'intégralité du quatrième cas.
- Les aides didactiques proposées par tous les enseignants sont pratiquement identiques pour le cas 1 et le cas 2.
- Les aides didactiques sont variées chez la majorité des enseignants, qui ont proposé une démarche de résolution pour le cas 3.
- Les aides didactiques sont également variés chez le peu d'enseignants qui ont répondu au quatrième cas.

Dans la suite, nous allons nous intéresser aux aides didactiques proposées par les enseignants. En décortiquant les réponses des enseignants, nous avons constaté que les aides élaborées par les enseignants sont de trois natures, à savoir algébriques[4] (par calculs), géométriques (utilisation de courbes dans un repère orthonormé) et hybrides (algébriques et géométriques).

Aide didactique de nature algébrique primaire (ADNAP)

On la reconnaît, lorsque la suite est donnée par son terme général. Dans la recherche de la limite d'une suite numérique, on utilise le terme général de la suite numérique. On pourrait y voir une conformité avec les prescriptions institutionnelles données aux élèves, à savoir, pour déterminer la limite d'une suite numérique, donnée par son terme général, on la remplace par une fonction numérique, dont la variable (l'indice) est n.

L'origine de cette démarche peut s'est expliquée par le fait que dans l'enseignement secondaire, une suite est considérée comme la restriction d'une fonction numérique sur l'ensemble des nombres entiers naturels. Et lorsqu'un élève veut calculer la limite d'une suite, il remplace d'abord la variable (l'indice) par x et après des transformations successives, il arrive à trouver un nombre fini, alors ce nombre trouvé est la limite de la suite numérique. C'est cette stratégie que dans l'enseignement secondaire, tous les enseignants, transmettent à leurs élèves dans la recherche de la limite d'une suite numérique.

La règle d'action pédagogique est la suivante : « Si (u) est une suite définie par son terme général, alors pour déterminer la limite de cette suite, on remplace le n par x, et on détermine la limite en plus l'infini ».

Ces aides didactiques sont apparues chez tous enseignants interrogés dans le cas 1 et dans le cas 2. Dans le cas 1, à titre illustratif, on a :

Nous avons eu deux types de réponses relevés chez la majorité des enseignants.

a. *Pose* $f(x)=\frac{2x^2+5}{x^2+2}$ *b.* *Calcule* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *c. Donne la limite de la suite* $(u)_n$ *lorsque* n *tend vers plus l'infini.*	*1.* *Pose* $f(x)=\frac{2x^2+5}{x^2+2}$ 2. *Justifie que* $\|(f(x)-2\| \leq \frac{1}{x^2}$ 2. *Calcule* $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2)$ *3.* *Donne la limite de la suite* $(u)_n$ *lorsque* n *tend vers l'infini.*

[4] Elles sont soit primaires ou secondaires (de premier ordre ou de second ordre)

Dans le cas 2, on a :

> *a.* *Pose* $f(x) = (1+\frac{2}{x})^x$
> *b.* *Calcule* $\lim_{x \to +\infty} f(x)$
> *(On fera intervenir la fonction exponentielle)*
> *c.* *Donne la limite de la suite* $(u)_n$ *lorsque* n *tend vers* $+\infty$.

Aide didactique de nature algébrique secondaire de premier ordre (ADNASPO)

Elle est utilisée lorsque la suite est donnée par une formule de récurrence. Dans le cas d'une suite donnée par une formule de récurrente, on commence d'abord par utiliser la propriété suivante :

- Soit (u) une suite infinie de réels satisfaisant à la relation de récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ (On suppose que f est une fonction continue sur un intervalle $[\alpha; \beta]$ contenant tous les termes de la suite (u). Si la suite (u) admet un nombre réel l pour limite, alors l est une solution de l'équation $f(x) = x$.

Puis, ils utilisent la règle d'action pédagogique faisant intervenir une suite auxiliaire, selon le nombre de solution de l'équation :

- « Si la fonction f admet un et un seul point fixe a, alors, on considère la suite (v), telle que pour tout n, $v_n = u_n - a$. On montre ensuite que la suite (v) est une suite géométrique. On exprime v_n et u_n en fonction n et en utilisant l'aide didactique de nature algébrique primaire, on détermine la limite de la suite (u)».
- Si f est une fonction admet deux points fixes a et b, alors, on considère la suite (v), telle que pour tout n, $v_n = \frac{u_n - a}{u_n - b}$. On montre ensuite que la suite (v) est une suite géométrique. On exprime v_n et u_n en fonction n et en utilisant l'aide didactique de nature algébrique, on détermine la limite de la suite (u) ».

Cette aide est apparue dans les cas 3 et 4, chez tous les enseignants ayant une classe de terminale C, mais chez très peu chez les autres enseignants, ayant la classe de terminale D.

Dans le cas 3, on a l'exemple suivant chez plusieurs enseignants

> $\forall n \in IN, \qquad 3u_{n+1} = u_n + 4$
> a. Pose $\forall n \in IN,\ v_n = u_n - 2$
> b. Montre que la suite $(v)_n$ est une suite géométrique
> c. Déduis l'expression de v_n , puis celle de u_n en fonction de n
> d. Détermine la limite de la suite $(u)_n$.

Certains enseignants ont pu déterminer le point fixe, qui est la limite de la suite, mais n'ont pas pu intégralement proposer des didactiques appropriées. Ils sont plus nombreux parmi les enseignants qui tiennent une terminale D.

Dans le cas 4, on a l'exemple suivant

a. Pose $\forall n \in IN,\ v_n = \frac{u_n-5}{u_n+1}$
b. Montre que la suite $(v)_n$ est une suite géométrique
c. Déduis l'expression de v_n , puis celle de u_n en fonction de n
d. Détermine la limite de la suite $(u)_n$.

Certains enseignants ont pu déterminer les points fixes, mais n'ont pas pu intégralement proposer des didactiques appropriées. Ils sont plus nombreux parmi les enseignants qui tiennent une terminale D.

Aide didactique de nature algébrique secondaire de second ordre (ADNAPSSO)

Elle est utilisée lorsque la suite est donnée par une formule de récurrence.

Dans le cas d'une suite donnée par une formule de récurrence, on commence d'abord aussi par utiliser la propriété suivante :

- Soit (u) une suite infinie de réels satisfaisant à la relation de récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ (On suppose que f est une fonction continue sur un intervalle $[\alpha;\beta]$ contenant tous les termes de la suite (u). Si la suite (u) admet un nombre réel l pour limite, alors l est une solution de l'équation $f(x) = x$.

Puis, ils utilisent la règle d'action pédagogique faisant intervenir un encadrement, soit de $\boldsymbol{f'}$, soit de $u_n - l$.

Dans le cas 4, nous allons présenter un exemple

$$\forall n \in IN, \qquad u_{n+1} = \frac{6u_n + 5}{u_n + 2}$$

a. Montre que $|u_{n+1} - 5| \leq \frac{|u_n-5|}{3}$
b. Déduis que $|u_n - 5| \leq \frac{|u_0-5|}{3^n}$
c. Détermine la limite de la suite $(u)_n$.

Cette aide est apparue dans le cas 3 et 4, chez tous les enseignants ayant une classe de terminale C, mais chez très peu chez les autres enseignants, ayant la classe de terminale D.

Les aides didactiques de nature géométrique (ADNG)

Elles font intervenir un repère orthonormé(O, I, J). Dans ce repère, les enseignants demandent aux élèves de construire la première bissectrice, c'est-à-dire la droite (D), d'équation $y = x$), et la courbe C_f. Ensuite par lecture, de quelques termes, ils demandent aux différents élèves de faire une conjecture la limite de la suite (u). Elle est apparue dans le cas 3 et le cas 4.

À titre illustratif pour le cas 4

1. Dans un repère orthonormé (O, I, J), construis la droite (D) d'équation $y = x$ et (C), la représentation graphique de la fonction $f: x \mapsto \frac{6x+5}{x+2}$
2. Place les termes suivants u_1, u_2 , u_3 , u_4 à partir de $u_0 = 1$
3. Quelle peut-être la limite de la suite $(u)_n$?

Cette aide peut être utilisée dans le cas où la limite est un nombre entier relatif.

Dans cet exemple, cette aide ne prouve pas que la suite converge vers 5, mais, le laisse penser, et permet de guider le raisonnement (cela évite de s'égarer dans des recherches qui n'aboutiraient pas)

Les aides didactiques de nature hybride (ADNH)

C'est un mélange d'aides didactiques de nature algébrique et de nature géométrique. L'enseignant commence par les aides de nature géométrique, pour faire une conjecture de la limite et ensuite par l'utilisation des aides didactiques de nature algébrique.

Pour le cas 4, les enseignants ont commencé par l'utiliser, mais un seul a pu utiliser après la règle d'action pédagogique, faisant intervenir un encadrement.

a. Observe graphiquement le comportement la suite (u_n).
b. Prouve que tout entier naturel n, $u_{n+1} - 5 = (u_n - 5) \times \frac{1}{u_n+2}$
c. Montre que $|u_{n+1} - 5| \leq \frac{|u_n-5|}{3}$
d. Déduis que $|u_n - 5| \leq \frac{|u_0-5|}{3^n}$
e. Détermine la limite de la suite $(u)_n$.

IV. CONCLUSION

Ce travail de recherche qui a porté sur la détermination de la limite des suites numériques convergentes est une amorce sur une longue route qui doit permettre d'étudier l'impact des aides didactiques des enseignants dans le processus/apprentissage des notions mathématiques, car ce sont à eux que revient la responsabilité d'élaborer des situations didactiques.

Les enseignements que nous avons tirés de ce travail à partir des résultats du questionnaire papier-crayon peuvent se résumer selon trois axes :

- le répertoire didactique des enseignants est composé de trois aides didactiques suivantes, à savoir, algébriques, géométriques et hybrides
- dans le cas d'une suite donnée par une formule explicite, il y a prédominance de l'algèbre des limites au niveau des connaissances procédurales des professeurs, car, ces enseignants proposent de calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} f(n)$, en opérant les transformations algébriques adéquates sur $f(n)$.
- par contre, dans le cas d'une suite donnée par une formule de récurrence, nombreux d'entre eux sont démunis pour proposer convenablement des aides didactiques

Nous pensons surtout que ce travail inaugure un nouveau champ de recherche en didactique : celui de la prise en compte des aides didactiques proposées par les enseignants.

RÉFÉRENCES

Astolfi, J. P., Darot, E., Guisburger-Vogel, Y et Toussaint, J. (2008). *Mots-clés de la didactique des sciences : Repère, définitions, bibliographies.* De Boeck Supérieur.

Bkouche, R. (1996). Point de vue : des limites et de la continuité dans l'enseignement. *Repères- IREM*, (24), 67-76. https://bibnum.publimath.fr/IWR/IWR96038.pdf

Bosch, M., Espinoza, L. et Gascon, J. (2002). El profesor como director de procesos de estudio: analisis de organizaciones didacticas espontaneas. *Recherches en didactique des mathématiques, 23*(1), 79 –135. https://revue-rdm.com/2003/el-profesor-como-director-de/

Boschet, F. (1983). Les suites numériques comme objet d'enseignement. *Recherches en didactique des mathématiques, 4*(2), 141–163. https://revue-rdm.com/1983/les-suites-numeriques-comme-objet/

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Pensée Sauvage.

Cornu, B. (1983). *Apprentissage de la notion de limite : conceptions et obstacles* [Thèse de doctorat, Université Scientifique et Médicale de Grenoble].

Ghedamsi, I. et Fattoum, F. (2018). Étude de l'évolution des images de la convergence des suites lors d'un enseignement ordinaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 38*(2), 207-259. https://revue-rdm.com/2018/etude-de-levolution-des-images-de-la-convergence-de-suites-lors-dun-enseignement-ordinaire/

Gueudet, G. et Trouche, L. (2008). Du travail documentaire des enseignants : genèses, collectifs, communautés. Le cas des mathématiques. *Éducation et Didactique, 2*(3), 7-33. https://doi.org/10.4000/educationdidactique.342

Huberman, A. M. et Miles, M. B. (1991). *Analyse des données qualitatives*. De Boeck-Wesmael.

Leroyer, L. (2013). Le rapport au support dans le travail de préparation en mathématiques des enseignants du premier degré. *Éducation et Didactique, 7*(1), 147-164. https://doi.org/10.4000/educationdidactique.1608

Le Thai Bao, T. T. (2007). *Étude didactique des relations entre notion de limite et décimalisation des nombres réels dans un environnement « calculatrice ». Une étude de cas dans l'enseignement mathématique secondaire au Viêt-Nam* [Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier]. HAL theses. https://theses.hal.science/file/index/docid/169190/filename/These.pdf

Litim, B., Zaki, M. et Benbachir, A. (2016). Difficultés conceptuelles d'étudiants de première année d'université face à la notion de convergence des suites numériques. Dans L. Theis (dir.), *Actes du colloque EMF2015 « Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage », 10-14 octobre 2015, Université d'Alger, Algérie* (p. 677-686). Université des Sciences de la Technologie Houari Boumediene ; Société Mathématique d'Algérie.

Margolinas, C. et Wozniak, F. (2009). Usage des manuels dans le travail de l'enseignant : l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. *Revue des sciences de l'éducation, 35*(2), 59-82. https://doi.org/10.7202/038729ar

Robert, A. (1982). L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur [Thèse de doctorat, Université Paris 7]. HAL theses. https://theses.hal.science/tel-01250393v1

Robert, A. (1983). Acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur. *Recherches en didactique des mathématiques, 3*(3), 305–341. https://www.researchgate.net/publication/287493411