MISE AU JOUR DE SAVOIRS TRANSPARENTS AU SEIN D'UN DISPOSITIF DE FORMATION COLLABORATIVE. QUE SE PASSE-T-IL QUAND FORMATEURS ET ENSEIGNANTS SONT AMENÉS À DÉVELOPPER L'INTELLIGENCE DU CALCUL ?

| BATTON* AGNÈS

Résumé | Je m'intéresse ici à l'émergence de propriétés sans existence institutionnelle mais nécessaires pour expliquer certains raisonnements en calcul. Je décrirai le dispositif en appui duquel se fait la recherche puis les éléments de mon cadre théorique (TAD). Les praxéologies mathématiques liées aux propriétés de compensation me permettront d'analyser quelques éléments de suivi d'une formatrice M., formée au sein du dispositif, jusqu'à deux visites en classe chez un enseignant P. qu'elle a formé.

Mots-clés : formation collaborative de formateurs - calcul mental - savoirs transparents - compensation dans le champ additif

Abstract | I am interested here in the emergence of properties without institutional existence, necessary to explain certain reasoning in calculation. I will describe the system supporting the research and then the elements of my theoretical framework (TAD). The praxeologies linked to the compensation properties will allow me to analyze some elements of monitoring of a trainer M., trained within the system, until two classroom visits to a teacher P., trained by herself.

Keywords: Collaborative training for trainers - mental arithmetic - transparent knowledge - compensation in the additive field

I. CONTEXTE

Ma recherche a pour contexte des formations sur le raisonnement en calcul mental, s'appuyant sur un dispositif pédagogique de classe, le « défi-calcul »[1] dans lequel les apprenants doivent « analyser, choisir, transformer, calculer » (Batton et al., 2024). Un groupe IREMS[2] pluri-catégoriel (GIREM2.0) constitué d'une chercheuse en didactique des mathématiques et formatrice en INSPE[3], une formatrice pour les enseignants de l'école primaire (toutes deux issues du GIREM1.0[4]) et une formatrice INSPE, produit des contenus et des outils qu'il déploie dans le cadre d'une formation par homologie-transposition[5] à destination de formateurs-référents (FFIREM). Le collectif (GIREMS2.0 et formateurs-référents) construit des formations de formateurs-néos, des formations d'enseignants et des outils pour la classe et anime des ateliers dans des colloques pour formateurs, publie des articles dans les actes, sur le site de l'IREMS et sur d'autres média afin d'en diffuser les contenus. Le dispositif est implémenté à une assez large échelle dans la formation des enseignants du primaire du Val d'Oise et des formateurs de l'académie de Versailles.

* LDAR – France – agnes.batton@cyu.fr

[1] Les élèves doivent effectuer une série d'items dans laquelle il faut d'abord choisir, pour chaque item, entre le calcul mental et la calculatrice. Plus de points sont gagnés en utilisant le calcul mental.

[2] IREMS : Institut pour la Recherche pour l'Enseignement des Mathématiques et des Sciences

[3] INSPE : Institut National Supérieur du Professorat et de l'éducation

[4] GIREM1.0 : de 2014 à 2017, groupe mixte (chercheurs en didactique, formateurs et enseignants du primaire et du secondaire) qui a travaillé à l'enrichissement d'un dispositif pédagogique existant -« le défi calcul »- pour l'apprentissage du calcul mental (Chambris, Haspekian, Melon, Pasquet, 2018).

[5] Houdement et Kuzniak, 2013 ; Houdement, 2019

Ce dispositif de formation est collaboratif (Bednarz, 2013) au sens où il y a co-construction des savoirs à travers les interactions, la réflexion et la confrontation de points de vue. La responsabilité est collective dans la mesure où chaque participant est responsable de sa propre progression ainsi que de celle du groupe. Il y a un processus de problématisation des pratiques car les situations de formation/enseignement/apprentissage sont centrées sur des problèmes réels de métier, favorisant l'analyse critique et la prise de recul sur les pratiques enseignantes et de formation. Il s'agit de constituer un espace où développer un système cohérent dans lequel les questionnements et les savoirs sont partagés.

Je fais l'hypothèse que des expressions intermédiaires à visée élèves sont nécessaires à mettre en place en formation et en classe pour pouvoir expliquer les techniques et les choix des élèves et que cette formation de formateurs est un lieu privilégié à leur production.

II. CADRE THÉORIQUE / MÉTHODOLOGIE

Comme Boule (1994-1995), je catégorise les savoirs du calcul en connaissance des faits numériques, propriétés des opérations et propriétés de la numération (Chambris, 2008).

Artigue et la CREM (2001) définissent, dans leur rapport sur le calcul, ce qu'ils nomment « **l'intelligence du calcul** » :

> La reconnaissance de formes, la recherche d'analogies, mais aussi le jeu sur les variations possibles, le sens des ordres de grandeur, le sens des expressions manipulées, sur lesquels nous reviendrons ultérieurement jouent un rôle clef dans ce pilotage raisonné que l'on désignera globalement comme « intelligence du calcul ».

D'après Bautier et Goigoux (2004, p. 93), citant (Karmiloff-Smith, 1992, 2003) : « pour que les élèves puissent dépasser l'action et puissent se construire des savoirs : [l'école] doit viser le passage de connaissances-en-actes, largement dépendantes des situations langagières dans lesquelles elles s'exercent, à des connaissances conscientes, explicites et flexibles. »

Je propose d'opérationnaliser l'intelligence du calcul en rendant explicites[6] les savoirs en jeu dans les différentes techniques qui permettent de résoudre les tâches de calcul mental.

1. *La Théorie Anthropologique du Didactique*

Ma recherche a pour objet[7] les savoirs nécessaires à l'intelligence du calcul qui se doivent d'être explicités, ici les propriétés des opérations du champ additif, plus précisément les propriétés de compensations (cf. III). La Théorie Anthropologique du Didactique est notre principal appui théorique, incluant les notions de praxéologie et d'ostensifs (Bosch et Chevallard, 1999) ainsi que le concept de transposition didactique.

> Toute activité humaine consiste à accomplir une tâche t d'un certain type T, au moyen d'une certaine technique τ, justifiée par une technologie θ qui permet en même temps de la penser, voire de la produire, et qui a son tour est justifiable par une théorie Θ. En bref, toute activité humaine met en œuvre une organisation qu'on peut noter $[T/\tau, / \theta/\Theta]$ et qu'on nomme praxéologie, ou organisation praxéologique. (Chevallard, 1998, p. 92).

Je vais donc repérer dans les différents données : les calculs (tâches), les techniques de calcul, les discours sur ces techniques et les propriétés des opérations qui les soutiennent.

Chevallard (1998) décrit plusieurs fonctions à la technologie : « Si la première fonction – justifier la technique – consiste à assurer que la technique donne bien ce qui est prétendu, cette deuxième fonction

[6] Au sens « français » du terme, pas au sens « *direct instruction* » de Bissonette et al.

[7] « est objet toute entité, matérielle ou immatérielle, qui existe pour au moins un individu » Chevallard (2009).

consiste à exposer pourquoi il en est bien ainsi. On notera que ces deux fonctions sont inégalement assumées par une technologie donnée. ».

Je propose de spécifier ces fonctions au contexte de l'école élémentaire. Je vais donc définir ici la fonction « *justifier* » au fait de se ramener à l'utilisation de propriétés formelles. Par exemple : 8 + 3 + 2 = 8 + 2 + 3 « Dans une addition, je peux échanger l'ordre des termes ». Pour autant, son énoncé formel n'explique pas le raisonnement qui rend compréhensible cette transformation pour certains élève à l'école. Il est nécessaire de passer à un autre registre d'explication convoquant des non-ostensifs qui soient plus « visibles » et « manipulables » comme les grandeurs ou les « quantités » (Chambris, 2023). Castela (2008) définit d'autres fonctions aux technologies : valider (pour justifier), expliquer, décrire, faciliter, motiver et évaluer.

Le concept d'écologie du savoir me permet de questionner l'existence dans les classes ou dans nos formation de certains savoirs.

2. Les savoirs transparents

Margolinas et Wozniak (2015), reprenant Margolinas et Laparra (2011), définissent les « savoirs transparents » comme des « savoirs qui se manifestent par des connaissances en situation qui ne sont pas enseignées ni institutionnalisées, mais naturalisées et incorporées dans des praxéologies muettes. ». Pour penser l'enseignement des mathématiques, il est nécessaire d'identifier les « savoirs mathématiques nécessaires pour l'enseignement des mathématiques mais non identifiés par les mathématiciens eux-mêmes » (Laparra et Margolinas, 2010).

L'objectif de ma recherche est d'analyser, en termes praxéologiques, ce qui se passe dans plusieurs institutions (FFIREM, ici FC et classe), et ce, dans plusieurs situations : quand le savoir est reconnu par l'une ou les institutions et quand le savoir est explicité sans être institutionnellement reconnu, phénomènes qui sont liés à la transparence du savoir.

III. CONTRIBUTION DE MA RECHERCHE À L'ÉLABORATION D'UN SAVOIR À ENSEIGNER À L'ÉCOLE PRIMAIRE EN CALCUL MENTAL : LES COMPENSATIONS

1. Exemples de raisonnements en calcul additif

Exemple 1 : 12 – 3 = 12 – 2 – 1

S'il s'agit de le justifier mathématiquement, l'associativité de l'addition des nombres relatifs suffit. S'il s'agit d'expliquer un raisonnement d'élève ou à un élève à l'école primaire, alors cette propriété des relatifs n'est pas satisfaisante pour expliquer ce qui se joue ici.

Exemple 2 : 29 + 30 + 31

E : J'ai mis le 1 de 31 dans 29 pour faire que des 30
PE : Donc là tu as fait quoi ?
E : j'ai pris le 1 de l'unité
PE : tu as enlevé 1
E : j'ai enlevé 1 et je l'ai mis dans 29 pour faire que des 30.
PE : et là tu as rajouté +1.

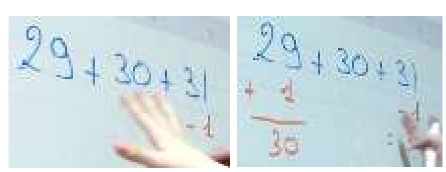


Figure 1 – *Un tableau de classe*

Dans ce que dit l'élève, on voit que ce qui est ajouté à 29 (+1) est retiré de 31 (-1). Il n'est apparemment pas question pour cet élève d'associativité ni de commutativité ici.

2. *Les compensations de l'addition et de la soustraction : des propriétés des opérations*

Le terme « compensation » est polysémique dans la littérature de recherche, résultat d'un état de l'art que je ne détaillerai pas ici (thèse en cours). Il est très présent dans les travaux en psychologie de l'éducation (anglophones notamment) pour décrire certaines « stratégies » de calcul. Quelques didacticiens l'utilisent pour décrire également des « procédures »[8]. Seules Ma et Kessel (2018) les définissent comme des propriétés des opérations.

Ma proposition de définitions formelles de ces propriétés des opérations s'organise en deux catégories : les compensations « internes » et les compensations « externes » (énoncé de la propriété, écriture algébrique[9], exemple de représentation avec des ostensifs « ligne » pour les compensations internes (fig. 2, 3 et 4 par exemple)).

Les compensations internes correspondent à des transformations qui se compensent pour conserver le même résultat entre deux nombres :

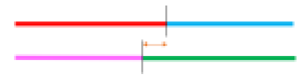


Figure 2 – *compensation interne de l'addition (lignes)*

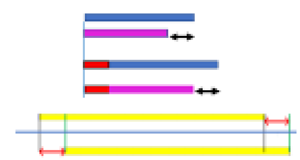
- la compensation interne de l'addition :

Soustraire à l'un des termes ce que l'on ajoute à l'autre terme ne change pas le résultat d'une somme. $a + b = (a + c) + (b - c)$, pour $c \leq b$ // $25 + 18 = (25 - 2) + (18 - 2)$

- la compensation interne de la soustraction :

Ajouter / soustraire un même nombre aux deux termes n'en change pas le résultat.

$a - b = (a + c) - (b + c)$ // $a - b = (a - c) - (b - c)$
pour $c \leq b$ et $c \leq a$
$31 - 18 = (31 + 2) - (18 + 2) = 33 - 20$; $31 - 18 = (31 - 1) - (18 - 1) = 30 - 17$



Figures 3 et 4 – *compensation interne de la soustraction (lignes et droite numérique)*

Les compensations externes : transformation d'un terme puis compensation des effets sur le résultat intermédiaire :

(E1) On ne modifie pas la valeur d'une somme en ajoutant un nombre à un des termes et en le retranchant ensuite au résultat pour compenser.

$a + b = a + (b + c) - c$ // $27 + 8 = 27 + (8 + 2) - 2$

(E2) On ne modifie pas la valeur d'une somme en retranchant un nombre à un terme puis en l'ajoutant au résultat pour compenser. $a + b = a + (b - c) + c$ // $27 + 8 = 27 + (8 - 5) + 5$

(E3) On ne modifie pas la valeur d'une différence en ajoutant au diminuteur[10] un nombre qu'on ajoute ensuite au résultat pour compenser. $a - b = a - (b + c) + c$ // $27 - 8 = 27 - (8 + 2) + 2$

(E4) On ne modifie pas la valeur d'une différence en retranchant du diminuteur un nombre qu'on retranche ensuite du résultat $a - b = a + (b - c) - c$ // $27 - 8 = 27 - (8 - 1) - 1$ i.e Soustraire une somme à un nombre revient à soustraire chacun des deux termes de la somme.

$a - (b + c) = a - b - c$ // $27 - 8 = 27 - 7 - 1$

[8] « Stratégie » et « procédure » correspondent à « technique » en TAD.
[9] Comme nous sommes à l'école, a, b et c sont toujours des entiers naturels.
[10] *Diminuteur :* nombre qu'on enlève dans une soustraction, celui qui va faire diminuer.

(E5) On ne modifie pas la valeur d'une différence en retranchant/ajoutant du diminuende[11] un nombre qu'on ajoute/retranche ensuite au résultat pour compenser.

$(a-c)-b=a-b+c$; $(a+c)-b=a-b-c$ // 31 - 18 = 30 – 18 + 1

3. Exemples de raisonnements sur des non-ostensifs grandeurs ou quantités

Si nous reprenons les deux exemples précédents, il est possible de les justifier de manière formelle à l'aide des compensations. Néanmoins, la justification sera encore trop loin d'une compréhension d'élève ou, plus simplement, de l'explication d'un raisonnement. Pour 12 – 3 = 12 – 2 – 1, le calcul peut être soit oralisé par « 12 moins 3 égal 12 moins 2 moins 1 », soit décrit par « Pour enlever 3, je peux enlever 2 et enlever 1 car 3, c'est 2 et 1 ». La propriété de compensation externe transparait ici : « Retirer une somme revient à retirer chacun des termes. » Pour autant, son énoncé formel n'explique pas, pour l'école, le raisonnement qui rend compréhensible cette transformation. Il est nécessaire de passer à un autre registre d'explication, en convoquant des non-ostensifs qui soient plus lisibles, « manipulables » comme les grandeurs ou les « quantités » (Chambris, 2023). En voici des exemples : « Pour reculer de 3 pas, si je recule de 2 pas, je n'ai pas assez reculé, il faut reculer encore de ce qui manque, de 1 pas », ou « si je dois retirer un bande de mesure de longueur 3, je peux retirer d'abord une bande de mesure de longueur 2, mais je n'ai pas encore assez retiré, j'en ai trop, je dois encore retirer ce qui reste à retirer, une bande de mesure de longueur 1 ». Ce sont ces technologies que j'inclurai dans la fonction des technologies « justifier ».

IV. D'UNE FORMATRICE À DES ÉVÈNEMENTS DE CLASSE : LE CAS DE M.

Les données que j'analyse ici concernent une formatrice M. qui a suivi une formation par le GIREM2.0 et qui met en œuvre une formation continue (FC) en calcul mental pour une équipe d'école élémentaire. Les données sont des documents, des vidéos de formation et de classe fournis par la formatrice.

1. Évolution de ses praxéologies mathématiques personnelles et professionnelles

M. est une formatrice, enseignante pendant 18 ans et Maitre Formatrice au cours des 10 dernières années puis devenue Conseillère Pédagogique de Circonscription. M. n'a pas de formation scientifique ; elle se sent plutôt à l'aise en mathématiques mais pas du tout en calcul mental (« passif douloureux »), ni personnellement ni professionnellement. Deux moments permettent d'exemplifier l'évolution de ses techniques professionnelles personnelles.

	calculs	Forme choisie M pour mental C pour calculatrice
1	28 x 15	C
2	36,1 + 36,2 + 36,3 + (7 x 36,2)	C
3	62 474 x 9 587	C
4	564 758 – 4 700	M
5	0,2 + 0,60 + 0,4 + 0,80	M
6	(102 – 27) x 4	C
7	307 – 10,8	C

Figure 5

Lors de la première formation à laquelle M. assiste (18/10/2019), des calculs sont proposés dont les deux tâches complexes qui sont des niches pour travailler les compensations internes de l'addition et de la soustraction[12] : $(102-27)\times 4$ et $36{,}1+36{,}2+36{,}3+(7\times 36{,}2)$. Elle utilisera la calculatrice pour les résoudre et ne résout de tête que deux calculs sur les sept proposés.

[11] D*iminuende :* le plus grand des deux termes de la soustraction, celui qui va être diminué.

[12] Ces deux calculs sont hérités des travaux du GIREM1.0 (Chambris, C, Haspekian , M., Melon, I, Pasquet Fortune, N., 2018).

Moi, j'en ai fait que deux mentalement. Parce que, pour moi, et c'est mon vécu, après, ça, en tant qu'élève, on n'était que dans, c'est la rapidité, la rapidité, la rapidité, donc si je peux pas te le sortir là dans les secondes qui arrivent, j'ai même pas cette capacité d'analyse. Voilà c'est tout de suite, Ah bah celui-ci, je peux pas, je passe au suivant, etc.

Du côté des techniques, ses notes (voir annexe 1) nous permettent de voir qu'elle recopie les techniques des mises en commun. Pour transformer 36,1 + 36,2 + 36,3 en $36{,}2 + 36{,}2 + 36{,}2$, les étapes de deux technique sont écrites (aucun discours) et correspondent à l'utilisation de : - la compensation interne de l'addition ; - la troncature à la partie entière (ou ordre de grandeur), calcul sur les parties entières puis compensation externe en y ajoutant le calcul sur les dixièmes. Concernant le 102 – 27, elle recopiera les deux techniques de la mise en commun : compensation interne de la soustraction et compensation externe (retrait d'une somme). On repère, sur ce calcul, des éléments de technologie concernant la compensation interne : nom et énoncé générique de la propriété (fonction *décrire* de la technologie). Aucun ajout ou commentaire sur l'autre technique.

J'interprète ces deux comportements de la façon suivante : 1 - la compensation de la soustraction est un savoir reconnu institutionnellement par l'école en France sous le nom d'écart constant. Pour M., il semble nécessaire de maitriser des éléments de discours pour l'enseigner et donc les acquérir pour la formation qu'elle va développer ; 2 - la compensation interne de l'addition n'est pas reconnue par l'école et, à ce moment-là de la FFIREM, n'est pas non plus stabilisée.

Lors du premier présentiel de sa FC, M. propose les mêmes tâches de mises en situation de calcul que celles de la FFIREM et demande aux enseignants de décrire leurs techniques qu'elle prend note.

M *: Alors, comment tu arrives à du 36,2 alors qu'il y a du 36,3 et 36,1.*
PE2 *: C'est une moyenne en fait.*
PE5 *: Parce que j'ai pris un dixième du 36,3 que je mets sur le 36,1.*
PE1 *: Elle a fait une moyenne.*
PE5 *: Et ça me fait, enfin voilà…c'est une moyenne.*
M. *: On est en effet sur la moyenne.*

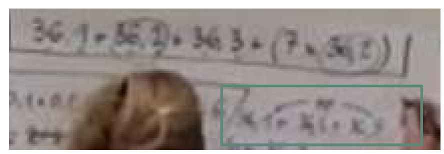


Figure 6 – *Prise de note en FC lors de la mise en commun de procédures*

Elle reste sur la proposition de nom de procédure des formés : « une moyenne ». M. ne demande pas d'explication à la technique, se contente de la description de la technique (« J'ai pris 1 à ... que je mets sur le … »). Les deux diapositives de synthèse (issues de la FFIREM) montrent un savoir non stabilisé, même pour la FFIREM (cf. annexe 2).

Deux hypothèses : la compensation interne de l'addition n'est pas stabilisée ni pour M. ni en FFIREM ; la description de la technique lui parait sans doute suffisante.

Lors de ce premier présentiel, lors de la mise en commun sur la tâche $(102 - 27) \times 4$ seront explicitées plusieurs techniques dont deux compensations internes et deux externes.

Deux techniques utilisant la compensation interne de la soustraction : arrondir le 1^er^ terme à 100 (102 – 27 = 100 – 25) , arrondir le 2^nd^ à la dizaine supérieure (102 – 27= 105 – 30).

PE2 : Alors, le 102 moins 27, on l'a transformé en 100 moins 25, parce qu'on a bien écouté PE3 tout à l'heure avec l'écart constant.
M : 100 moins 25. Alors, qu'est-ce que tu as fait ?
PE2 : Ben, l'écart constant.
CPC : L'écart constant qui consiste en quoi ?
PE2 : J'ai enlevé deux unités à chaque membre.
M : Si je fais 100 moins 2, je fais la même chose de l'autre côté.

PE3 : Avec l'écart constant, on aurait pu faire aussi 105 moins 30. De 10 dizaines, on pourrait enlever 3 dizaines, donc c'est 75.
M : 105 moins 30, parce qu'à 105, t'as rajouté…
PE3 : J'ai rajouté 3.
M : T'as rajouté 3 et, du coup,
PE2 : À 102, elle a rajouté 3.
M : 102 plus 3 moins 27 plus 3. Donc, tu es arrivée à la même chose. Et après…
PE3 : Non, 105 moins 30.

Là encore, côté technologie, on reste sur de la description de la technique et non sur de l'explication. La technique est justifiée par l'utilisation de l'écart constant mais sans d'explication qui lui donne du sens concrètement. Il n'y a pas de discours autour du transfert de son enseignement en classe à ce stade-là.

Les deux compensations externes (E4) discutées sont : 102 – 20 – 7 ; 102 – 2 – 25. Voici un extrait des échanges qui ont eu lieu pour la première :

PE2 : Oui, y'en a pour faire le 102 moins 27, je pense qu'ils auraient fait le 102 – 20 – 7 […]
M : Comment tu fais pour 102 moins 20 ?
PE2 : Un peu comme PE3. En fait, c'est moins 2 dizaines.
M : On est sur ce qu'on appelle la troncature, quand on va chercher ce qui nous intéresse. Donc, on est sur 10 dizaines moins 2 dizaines.
PE2 : 82.
M : Donc, on a 8 dizaines, et il nous reste…
PE2 : 2 unités.
M : Les 2 unités, donc 8 dizaines plus 2 unités donc 82. Et après, le 82 moins 7 ?
PE9 : moins 2 moins 5 ?
M : Ah. 82 – 7, 82 – 2 – 5. Donc là, on est sur quoi, quand on est sur le 2 moins 5 à la place du 7 ?
PE : La décomposition.
M : Voilà, là, on est encore sur la décomposition.

On note encore ici une description des étapes de la technique mais pas de demande d'explication ni de justification. À nouveau ici, la compréhension de la transformation semble partagée.

Lors du deuxième présentiel de sa FC (26/02/2021), elle propose aux formés de « vivre » une séquence d'enseignement co-construite au sein de la FFIREM. Elle change la modalité de communication des techniques en demandant aux formés de les écrire sur ardoise. La première tâche est 31 – 18. Techniques échangées : deux compensations internes (31 – 18 et 33 – 20) ; trois compensations externes (31 – 10 – 1 – 7 ; 31 – 10 – 8 (E4) ; 31 – 20 + 2 (E 3)). Lors de cette FC, M. évoquera davantage la transposition en classe, sans doute aussi car la situation s'y prête davantage. Elle repère les différentes techniques, provoque et accueille les explications qui, cette fois, doivent aller au-delà du nom d'une propriété ou d'une simple description des étapes d'une technique (cf. annexe 3). Elle insiste auprès des PE sur la nécessité de développer des technologies dans un registre de langage nécessaire à la compréhension des techniques pour des élèves (fonction explication).

> Alors là, moi, j'ai mis les termes euh (avec un geste exprimant des guillemets) voilà, les termes euh professionnels entre guillemets, nous, parce qu'on est entre enseignants mais, là, **l'idée, ce serait de pouvoir euh utiliser le vocabulaire des, des élèves** du coup. Tu vois, quand tu as dit tout à l'heure, bah oui mais comme y'en avait trop, après il a fallu euh, comme **j'en ai enlevé trop, il a fallu que j'en rajoute**. Euh, pourquoi ? parce que bah du coup **on a davantage de chances que les élèves mettent de sens et retiennent** euh si c'est eux qui sont à l'origine là euh, des, des noms entre guillemets.
>
> […] complément, ça euh, ça, ils, ils maîtrisent. Mais voilà, jalonnement, compensation, conservation des écarts, etc., savoir comment est-ce qu'on peut euh verbaliser tout ça euh avec eux.

Pour le calcul suivant, 91 – 37, M. évoque son rapport à l'écart constant qui évolue :

> L'écart constant c'est quelque chose que, moi à l'école, je n'ai jamais jamais travaillé. Ni en tant qu'élève, ni en tant qu'enseignante, que j'ai découvert euh sur le tard et là, depuis que j'ai, j'ai découvert ça, et bah en fait, je n'utilise plus que ça. Par contre, l'écart constant, je l'utilise euh de… première méthode. C'est-à-dire que, moi, je cherche là le nombre rond mais à soustraire. Ce que euh toi tu fais [91 – 37 = 90 – 36], le complément, ça, parce que pour moi, c'est trop coûteux. C'est trop coûteux d'aller chercher en plus un complément. Mais c'est propre à chacun. […] Moi, ça a été la révélation.

2. *Deux évènements fortuits dans la classe de P. enseignant de CE1 formé par M*

P. est un des enseignants de l'école GP, qui a suivi les formations avec M. depuis 2019. C'est un enseignant chevronné qui enseigne en CE1 (élèves de 7 ans). En 2021-2022, l'école rentre en

« constellation »[13]. Pendant ces visites entre collègues, lorsqu'elle le peut, M. est présente comme formatrice. Elle filme les séances, prend des photos des productions d'élèves et des traces laissées par les enseignants, dont elle se sert parfois comme matière pour ses formations. Parfois, elle prend la parole, notamment pour questionner les élèves sur l'explication de leurs procédures. Pendant les deux temps de visite chez P., deux évènements fortuits sont filmés (cf. annexes 5 et 6 pour les extraits de verbatim). Leur analyse nous permet un constat en demi-teinte.

P. dit : « *Elle compense* » quand il voit que son élève S. utilise la compensation interne de l'addition. M. demande à S. *« Comment tu as fait pour transformer le 5 et le 7 ? » :* S. décrit son calcul. Cependant, aucun des deux ne va jusqu'à lui demander d'expliquer dans un registre qui permettrait à tous les élèves de comprendre ce qui permet de « prendre à l'un pour donner à l'autre sans changer le résultat ». De même, P. accueille l'utilisation de la compensation interne de la soustraction et tente d'en faire une explication : *« pour garder le même écart, pour garder la même différence »* mais qui n'aboutit pas. Dans aucun des cas, P. n'a a priori de projet d'apprentissage de ces techniques : « Très bonne technique, compliquée pour certains encore je pense. », « Ça, je vais en reparler après // si j'ai le temps ».

Plusieurs hypothèses sont possibles : l'une d'entre elle est que l'enseignement de la propriété interne de la soustraction est long, complexe (cf. l'ingénierie pédagogique de (Rinaldi , 2016)). L'autre hypothèse, qui n'exclue pas la première, est que c'est une première étape nécessaire dans la transposition didactique : repérer et accueillir les techniques des élève, mais pas les expliquer, ni les représenter, ni les enseigner.

V. CONCLUSION

Pour moi, former à l'intelligence du calcul passe obligatoirement par une explicitation mais surtout une explication des procédures. Pour aider les formateurs à former les enseignants à enseigner l'intelligence du calcul, il me parait indispensable de leur fournir des outils qui leur permettent d'identifier les savoirs en jeu, et ce dans les trois catégories de savoirs (Boule, 1994) : faits numériques, propriétés de la numération et propriétés des opérations. Une des contributions de ma recherche a consisté à mettre au jour des propriétés transparentes pour l'institution école primaire (les compensations restreintes au champ additif) et d'élaborer un discours autour de ce propriétés (fonction « justifier/expliquer » des technologies) afin de permettre aux élèves de donner du sens à des transformations d'écritures qui s'appuient sur ces propriétés dans des procédures de calcul mental.

M. est une formatrice « angoissée » par le calcul mental qui a participé à un dispositif collaboratif de formation de formateurs autour d'un dispositif pédagogique appelé « défi-calcul ». Cela lui a permis de développer des praxéologies mathématiques personnelles et professionnelles, se formant pour former à son tour l'équipe d'une école. Ses discours se développent au fur et à mesure que les savoirs issus de la formation se développent également (voir thèse), démarrant par des justifications formelles en appui sur des mathématiques savantes à des explications portées par une compréhension de propriétés.

Dans la classe d'un des enseignants formés, deux évènements nous questionnent : lors d'une séance d'une demi-heure sur des calculs additifs, l'enseignant est capable de repérer l'utilisation de la compensation interne de l'addition dans la technique de l'élève mais il ne semble cependant pas prêt, à ce moment-là, à l'enseigner. De même, plus tard dans l'année, il repère et décrit l'utilisation de la

[13] Modalité de formation issue du Plan Villani-Torossian (2018) : en plus de temps de formation en présentiel, les enseignants de l'école doivent participer à des « visites croisées » qui consistent à aller voir d'autres collègues de la même école faire classe. Un travail d'analyse suit ces visites.

compensation interne de la soustraction (« pour garder le même écart ») par un élève. Cela nous semble participer à une première étape de la transposition didactique.

Ma recherche consiste à m'intéresser aux savoirs dans la perspective de développer l'intelligence du calcul. J'ai donc été amenée à identifier des propriétés qui permettent de décrire les raisonnements et d'en rendre compréhensible les mécanismes par les élèves par des technologies explicatives dans différents cadres et registres. Même si je ne n'en ai pas décrit ici les imbrications, pour moi, ce type de dispositif collaboratif permet de créer un espace partagé, à la rencontre de multiples acteurs provenant d'institutions diverses (EN[14], INSPE et Recherche). Par des activités partagées autour d'un même objet, le défi-calcul, cela permet la construction de praxéologies communes.

RÉFÉRENCES

Artigue, M. (2004). L'enseignement du calcul aujourd'hui : problèmes, défis et perspectives. *Repères IREM*, (54), 23-39. https://bibnum.publimath.fr/IWR/IWR04001.pdf

Batton, A., Becqueriaux, M., Freguis, G. et Boillerault, S. (2024). Défi calcul année 2 : accompagner les formateurs et les enseignants pour enseigner le raisonnement en calcul mental [Atelier]. Dans *Actes du 49e colloque de la Copirelem, juin 2023*, *Marseille, France* (p. 438-472). https://hal.science/hal-04614927

Bautier, E. et Goigoux, R. (2004). Difficultés d'apprentissage, processus de secondarisation et pratiques enseignantes : une hypothèse relationnelle. *Revue française de pédagogie, 148*, 89-100. https://doi.org/10.3406/rfp.2004.3252

Boule, F. (1994-1995). 31 - 18 = ? Regards sur le calcul mental. *Grand N*, (58), 39-52. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/58n4_1583009268086-pdf

Castela, C. (2008). Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'enseignement. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *28*(2), 135-182. https://revue-rdm.com/2008/travailler-avec-travailler-sur-la/

Chambris, C. (2008). *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20e siècle. Connaissances des élèves actuels* [Thèse de doctorat, Université Paris Diderot]. HAL theses. https://theses.hal.science/tel-00338665

Chambris, C. et Subramaniam, K. (2023, août). Can school arithmetic be seen as theory building? Dans *Actes de l'International Symposium Elementary Mathematics Teaching, Charles University, Faculty of Education, Czech Republic, aout 2023, Prague* (p. 123-133). https://hal.science/hal-04188452

Chevallard, G. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques. Dans R. Noirfalise (dir.), *Actes de l'université d'été de l'ARDM, 4-11 juillet 1998, La Rochelle, IREM de Clermont-Ferrand* (p. 91-120). https://www.univ-irem.fr/IMG/pdf/analyse_des_pratiques_univ_d_ete_la_rochelle.pdf

Margolinas, C. et Laparra, M. (2011). Des savoirs transparents dans le travail des professeurs à l'école primaire. Dans J.-Y. Rochex et J. Crinon (dir.), *La construction des inégalités scolaires* (p. 19-32). Presses universitaires de Rennes.

Ma, L. et Kessel, C. (2018). The theory of school arithmetic: Whole numbers. Dans M. Bartolini Bussi et X. Sun (dir.), *Building the foundation: Whole numbers in the primary grades* (p. 439-463). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-63555-2_18

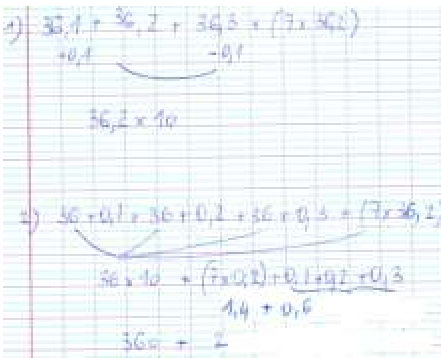
[14] Éducation Nationale.

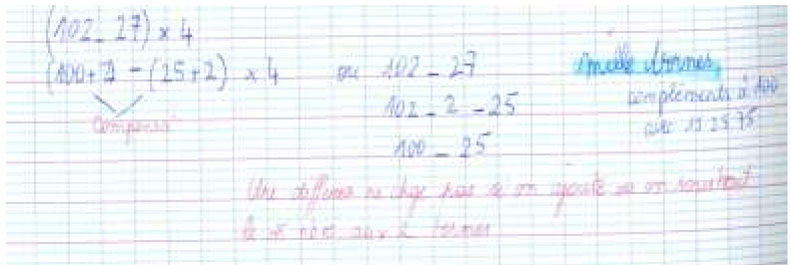
Rinaldi, A.-M. (2016). *Place et rôle des technologies dans l'enseignement et l'apprentissage du calcul soustractif en CE2 : proposition d'ingénierie* [Thèse de doctorat, Université Paris Diderot]. https://www.theses.fr/2013PA070039

Villani, C. et Torossian, C. (2018). *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques*. Ministère de l'Éducation nationale et de la Jeunesse.

ANNEXES

1)Notes de M. en formation :
18/10/2019





Synthèse extraite du diaporama de l'atelier COPIRELEM, juin 2018 (Batton et al., 2019)

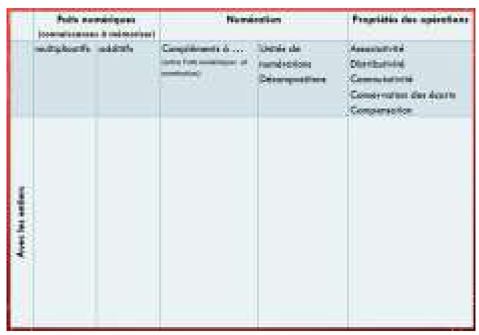


Tableau des savoirs adapté de celui de la FFIREM par une CPC pour la formation

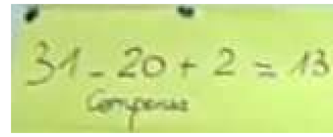
2) FC 18-12-2019

Deux diapositives, extraites du diaporama du présentiel 1 de la Formation continue, dressant un bilan des savoirs :

- un tableau sans,

- un tableau avec la compensation.

(3) M. comme formatrice 2020-02-26 : tâche : 31 - 18



P : 31 moins 20 plus 2 égal 13.
M : Alors du coup, comment est-ce qu'il a procédé là X ?
PE1 : Il est allé à la dizaine supérieure.
M : Alors, il a utilisé, là, une dizaine entière. Pourquoi il nous a rajouté, là, un plus 2 ?
PE1 : Parce que il a 18 pour aller jusqu'à 20, faut ajouter 2
M : Alors, est-ce que c'est l'écart constant ça ?
Plusieurs PE (PE2 , PE3 ..): non. PE3 : non ce n'est pas l'écart constant.
M : C'était quoi déjà l'écart constant ?
PE3 : C'est quand j'enlève autant aux deux termes (geste des mains) ou je rajoute autant aux deux.
[…] **M** : C'est quand je mets… j'ajoute la même chose ou j'enlève la même chose. Mais alors qu'est-ce qui se passe là, pourquoi on a un plus 2 ? Pourquoi à un moment donné…
PE2 : Parce que **j'ai trop retiré en enlevant 20 il fallait enlever que 18**.
M : Voilà, tu as trop retiré, du coup ?
PE2 : Je rajoute 2.
M : Voilà, donc, pour compenser … **pour compenser du coup tu as rajouté du plus 2**. **Compensation**.

(4) M. comme formatrice 2020-02-26 : tâche : 91 - 37

PE : Moi, j'ai fait 91 - 1, pour avoir 90. Ensuite j'ai fait euh, je suis passée à, j'ai fait euh, 90 - 30.
M : Voilà, on est là alors (en passant à l'affichage du gauche). […]

PE : Ça fait 60, et après moins 7 euh, moins 7 et plus, plus 1.

M : Donc t'as fait 91.

91 – 37
= 90 – 30 – 7 + 1
= 60 – 7 + 1

PE : Parce que j'ai enlevé 1 au début et je rajoute 1 après.
M : 91 moins 1, 90. Après, 90 moins, moins 30, ça fait 60.
PE : Moins 7.
M : Et après 60 moins 7.
PE : Ça fait 53. Plus 1, 54.
M : Ah, ah oui, donc, là, **t'as un petite, t'as une petite compensation du coup**.
PE : Voilà. J'ai fait un moins 1 au début et plus 1 après.

<u>(5) Chez JP. en CE1 (7 ans) : épisode 1 du 22/11/2021</u>

Tâche : calculer 27 + 5

PE : Tout à l'heure, on avait **27 + 5**. 7 et 5 et 5 et 7 c'est la même chose. On pouvait se rappeler que le 5 avec le 7 ça faisait 12. Maintenant la question que je vous pose c'est, si moi je ne le connais pas par cœur que 7 + 5 ou 5 + 7 ça fait 12 ? Puisqu'on n'a pas appris la maison du 12. Comment on peut faire ? Stratégina je t'écoute.

S : On peut faire un double avec. Comme 6 +6.

PE : T'as transformé ton calcul en 26 + 6. Celle-là je ne l'avais pas vu venir celle-là ! (rires des collègues) Et donc comment tu as transformé ton 25 + 7 en 26 + 6.

S : En fait 6 + 6 c'est un double. Et comme ça fait 12 et ben tu calcules. [..]

PE : Mais moi je t'avais demandé 25 + 7. Pourquoi tu as changé ton 25 + 7 et tu t'es dit oh c'est pareil que 26 + 6 ?

M : Comment tu as fait pour transformer le 5 et le 7 ? Tu as fait comment pour les transformer en 6 ?

S : Ben en fait j'ai fait 7 plus « moins 1 » après ça fait 6 et après j'ai fait 5 + 1 ça fait 6.

M : D'accord. Donc ça veut dire que tu as, hop dans le 7 tu t'es dit il y a du 6, ça m'arrangerait. Donc je vais en retirer 1, et tu en as fait quoi de celui que tu lui as retiré ?

S : Et ben sur le 5 j'ai fait +1.

M : Tu lui as donné. Tu en as retiré 1 au 7 et tu l'as donné au 5.

[PE(s) en aparté : « elle compense »]

PE : Très bonne technique, compliquée pour certains encore je pense.

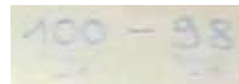
<u>(6) Même classe : épisode 2 du 30/03/2022</u>

Tâche : calculer 100 – 98 (avant, les élèves posent)

PE : J'ai quelqu'un d'autre là, qui m'a pas fait le calcul que j'ai écrit au tableau. Je comprends pas, j'ai besoin d'une explication. J'ai H. qui m'a fait ça comme calcul. Pourquoi t'as fait ce calcul ? (99-97) [inaudible…]

H : 100-98 c'était trop difficile. J'ai enlevé une unité à 100, ça fait 99 et 98, restait 97 et après j'ai calculé.[…]

PE : Alors H. , il a transformé son calcul pour qu'il soit plus facile. ça l'embêtait, le 100. Il savait pas où casser, casser, c'est tout nouveau là, casser, là (nombre de dizaines). Ce qu'il est en train de faire, c'est pas quelque chose qu'on a appris, je ne sais pas d'où il sort ça mais bravo !



Là il a enlevé 1 ici (écrit -1 sous le 100). Et pour garder le même écart, pour garder la même différence, là aussi il a enlevé 1 (écrit -1 sous 98). 100 moins 1 ça fait 99 et 98 moins 1, ça fait 97. Et donc il a transformé son calcul en 99-97 parce qu'il sait que la différence entre les deux, ça va rester la même. Donc après, il fait son calcul.

Ça, je vais en reparler après // si j'ai le temps.