LE TEMPS EN MATHÉMATIQUES : EFFICACITÉ, BEAUTÉ ET COMPLEXITÉ DES RÉSULTATS MATHÉMATIQUES

| LAFRENIÈRE* NADIA ET SADJA-NJOMGANG** JUDITH

Résumé | Quel lien entre les mathématiques et le temps ? On explore la notion de temps nécessaire à la découverte, la pratique et l'apprentissage des mathématiques. On aborde ensuite la complexité en temps, une notion mathématique qui permet d'étudier le temps. Enfin, on se questionne sur les vitesses du raisonnement mathématique. Tout au long, on présente nos points de vue croisés d'enseignantes des mathématiques en Afrique et en Amérique du Nord.

Mots-clés : apprentissages, pratique des mathématiques, complexité en temps, vitesse de la pensée

Abstract | What are the connections between mathematics and time? We explore the notion of the necessary time to discover, practice and learn mathematics. We then discuss time complexity, a mathematical concept used to study computation time. Finally, we compare various speeds for thinking about mathematics. All along, we present our points of view as math educators from Africa and North America.

Keywords: Learning, math practice, time complexity, slow thinking

I. LE TEMPS EN MATHÉMATIQUES

Les mathématiques représentent une conquête millénaire. De la géométrie à la théorie des nombres, différents peuples ont raffiné depuis très longtemps les notions qui sont aujourd'hui enseignées, les simplifiant et les enrichissant au passage. Si les mathématiques semblent immuables aujourd'hui, c'est bien parce qu'elles sont un échafaudage d'idées élaboré sur une longue période de temps. On pourrait donc croire qu'elles changent très peu.

Pourtant, plusieurs centaines d'articles scientifiques sont publiés chaque jour en mathématiques, un nombre en forte croissance au cours des dernières décennies (Dunne, 2019, p. 227). C'est notamment parce que nombre de mathématicien.ne.s consacrent beaucoup de temps à la découverte de mathématiques nouvelles.

II. LE TEMPS POUR LA PRATIQUE DES MATHÉMATIQUES

Dans la pratique des mathématiques, on peut observer deux types d'acteurs : les experts et les apprenants. Les experts vont surtout se centrer sur la recherche qui est très exigeante en termes de temps, sur l'application des mathématiques aux métiers d'ingénieur.e, de la finance, à la chimie, la physique… Les apprenants se concentrent sur l'utilisation des concepts de façon contextualisée, dans le cadre scolaire d'une part et au cours d'activités de tous les jours d'autre part. Les mathématiques permettent dans ces cas de figure de construire des modèles ; elles apparaissent alors comme des outils au service de la pensée et de l'action. Or, ceci ne va pas de soi car il faut déjà se familiariser avec ces outils pour pouvoir les manipuler avec dextérité.

* Université Concordia – Canada – nadia.lafreniere@concordia.ca

** Université de Yaoundé 1 – Cameroun – judithnjomg@yahoo.fr

III. LA PRATIQUE DES MATHÉMATIQUES EXIGE DU TEMPS POUR LES APPRENTISSAGES

Dans le cadre de l'école élémentaire, le programme aborde quatre grandes thématiques : les nombres, le calcul, la géométrie et les grandeurs et mesures. Pour chacune de ces thématiques, des concepts sont enseignés et leur complexité peut être appréhendée à partir des quatre composantes du concept (langage, problème, technique et propriété). À ces niveaux d'étude, l'accent est surtout mis sur les composantes problème, technique et langage.

L'apprentissage de la multiplication à l'école élémentaire est complexe et se fait avec une variété de situations :

- La multiplication avec les nombres entiers : l'apprentissage commence avec des opérations où le multiplicateur a un chiffre, puis au moins deux chiffres. Pour ces deux activités, les techniques ne sont pas les mêmes et les éléments théoriques mobilisés sont distincts.
- La multiplication avec les nombres décimaux où la gestion des parties décimales est souvent une source de difficulté chez l'apprenant du fait des représentations erronées provenant des opérations avec les nombres entiers…
- La multiplication avec les fractions : des objets nouveaux s'ajoutent, le numérateur, le dénominateur, la barre de fraction.

Concernant la multiplication avec les nombres entiers, l'algorithme est connu. Mais on peut faire mieux.

IV. LE TEMPS NÉCESSAIRE POUR FAIRE LES CALCULS

Peut-on définir *mathématiquement* ce qu'est un résultat beau ? Ou rapide ? Dans le premier cas, il s'agit certes d'une notion subjective : on aime une idée parce qu'elle est originale, parce qu'elle nous permet de connecter des notions mathématiques qu'on croyait sans lien particulier ou encore parce qu'elle s'exprime simplement. S'il existe plusieurs notions de simplicité en mathématiques – pas toutes liées entre elles –, on retient la définition suivante de son antonyme, la *complexité*. La théorie de la complexité est le domaine des mathématiques qui étudie formellement le temps de calcul (ou l'espace mémoire) nécessaire pour résoudre un problème algorithmique. On calcule ainsi la complexité (en temps) par le nombre d'étapes à accomplir pour résoudre un problème. De ce point de vue, un problème *simple* est un problème qui admet une solution efficace, une solution qui prend peu de temps.

Pour un même problème, on peut trouver des solutions de complexités différentes. Prenons l'exemple bien connu de la multiplication de deux nombres entiers positifs. La méthode apprise à l'école demande de multiplier chaque chiffre du premier nombre avec chaque chiffre du deuxième nombre, pour un total de n^2 multiplications élémentaires pour multiplier deux nombres de n chiffres. Si cette méthode a l'avantage d'être *simple à expliquer*, c'est une méthode d'une grande complexité au sens mathématique, c'est-à-dire qu'elle demande un grand nombre d'opérations élémentaires. Une quête pour simplifier la multiplication a donc été lancée en 1960. En seulement une semaine, Anatoli Karatsuba a trouvé une méthode de multiplication plus rapide, basée sur la technique diviser pour régner. Concrètement, cela veut dire qu'on ramène la multiplication de nombres à n chiffres à trois multiplications de $n/2$ chiffres, ce qui fait que la méthode demande en tout de faire $n^{1,58}$ multiplications élémentaires. Une course était lancée ! On croit aujourd'hui connaître la méthode optimale pour qu'un ordinateur multiplie deux grands nombres ensemble : elle ne requiert que $n\log(n)$ multiplications élémentaires. Et pourquoi sait-on que cette méthode est optimale ? Il est conjecturé qu'une opération aussi élémentaire que la multiplication devrait avoir une expression *simple* pour sa complexité… Encore une fois, ici, l'intuition des mathématiciennes et mathématiciens est guidée par des considérations esthétiques !

Enfin, pourquoi faisons-nous des calculs aussi précis ? Lorsque l'on multiplie 2457 × 6819, est-ce qu'on souhaite vraiment la réponse précise, ou pouvons-nous nous contenter de savoir que c'est entre une et deux dizaines de millions. Cela dépend bien entendu du contexte. Nous faisons l'hypothèse que, bien souvent, on applique des procédures complexes pour vérifier la validité de notre intuition, pourtant beaucoup plus rapide.

```
          2 4 5 7
    ×     6 8 1 9
  ---------------
        2 2 1 1 3
+       2 4 5 7
    1 9 6 5 6
  1 4 7 4 2
  ---------------
  1 6 7 5 4 2 8 3
```

Figure 1 *– L'algorithme de multiplication longue nécessite de multiplier chaque chiffre des deux nombres entre eux.*

V. MATHÉMATIQUES, APPRENTISSAGE ET BEAUTÉ

Les recommandations dans les programmes vont entraîner la mise sur pied de nouvelles pédagogies dans le but de développer la créativité : l'apprentissage coopératif, l'apprentissage par projet, les classes inversées, les classes-ateliers…

Pour cela il faut du temps : le temps d'élaborer les leçons, le temps de l'exercisation, le temps pour des ateliers de formation des enseignants aux activités de développement personnel (activités manuelles, créatives, ludiques, le temps pour entraîner les élèves à l'intégration).

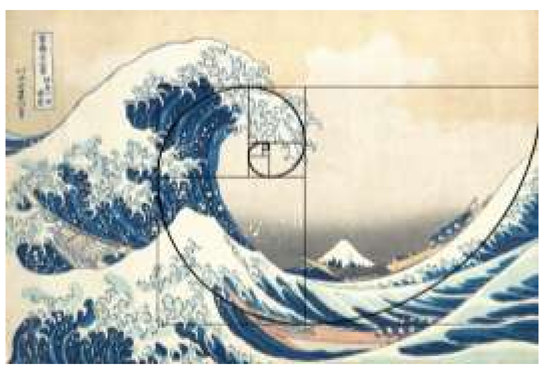

Figure 2 *– La Grande Vague de Kanagawa, par l'artiste Hokusai, suit la forme de la spirale de Fibonacci.*

Les mathématiques permettent de produire de nombreuses réalisations artistiques « justifiées » qui donnent du sens aux concepts ; des graphiques, des dessins, des plans des ouvrages architecturaux, la musique, la liste n'étant pas exhaustive. Bien appréhendées, elles rendent l'esprit fécond. Leur beauté réside entre autres dans la capacité à décrire les motifs de la nature ; c'est le cas par exemple de l'art fractal ou de la suite de Fibonacci qui décrit la Grande Vague de Kanagawa, imaginée par Hokusai.

VI. LE TEMPS DES APPRENTISSAGES, CELUI POUR RÉFLÉCHIR

Puis, il y a le temps nécessaire à la réflexion. Tou.te.s les mathémacien.ne.s aimeraient avoir plus de temps pour la réflexion ! Cela dit, on peut penser mathématiquement à différentes vitesses. Souvent, la pensée rapide est associée à une pensée plus superficielle, alors que la pensée lente correspondrait à une étude méthodique. Cela dit, on peut entraîner notre cerveau à développer des réflexes mathématiques, qui nous permettraient de penser rapidement avec la certitude des longs calculs.

VII. LES TROIS VITESSES DE LA PENSÉE DE BESSIS

Dans *Mathematica : une aventure au cœur de nous-mêmes*, David Bessis présente le problème du temps de calcul différemment, en comparant les résultats de notre intuition et de calculs précis, exécutés en suivant une procédure établie, comme un des algorithmes de multiplication décrits plus haut. Il décrit trois vitesses :

Le système I, rapide, qui correspond à notre intuition. C'est celui qu'on active lorsqu'on doit donner une réponse très rapide ou une approximation. C'est une image mentale qui peut être imprécise et, puisqu'on réfléchit peu, mène souvent à la mauvaise réponse. Elle serait donc peu fiable.

Le système II, lent, nous donne le résultat d'une procédure algorithmique déjà apprise, puis exécutée. C'est notre « capacité de raisonnement rigoureux » (Bessis, p. 167). Dans l'exemple de la multiplication, on exécute soit la multiplication longue ou l'algorithme de Karatsuba, et on aura le bon résultat à l'unité près, pas seulement un ordre de grandeur. C'est un système mécanique dont les avantages sont la précision et la reproductibilité, mais qui a le défaut d'être un peu inhumain.

Le système III, vraiment très lent, établit le dialogue entre les deux autres systèmes. Il est responsable de la mise à jour du système I, grâce aux données obtenues du système II. Ainsi, lorsque l'on confirme notre intuition à l'aide du résultat d'un long calcul, on prend confiance en sa capacité de faire des mathématiques. Si les résultats obtenus avec le système II ne correspondent pas à ce qu'on avait imaginé rapidement avec le système I, on se questionne sur la raison de notre mauvaise intuition, puis on corrige notre intuition.

Enfin, ce système III n'est-il pas vraisemblablement ce que c'est, faire des mathématiques ? Développer une compréhension assez profonde des objets en question pour les manipuler sans avoir à suivre des procédures étape par étape. Comprendre d'où proviennent ces procédures pour trouver des raccourcis – des simplifications – et créer ses propres algorithmes de calcul. C'est grâce à leur système III que les mathématiciennes et mathématiciens peuvent à la fois avoir une intuition souvent correcte, parce qu'il les force à constamment aligner les images mentales et les résultats précis.

RÉFÉRENCES

Bessis, D. (2023). *Mathematica : une aventure au cœur de nous-mêmes*. Points.

Dunne, E. (2019). Looking at the mathematics literature. *Notices of the American Mathematical Society*, 66(2), 227-230.