**Titre:** Résolution de problèmes déconnectés de partage inéquitable par des élèves français de fin de primaire et de début de secondaire et lien avec l'enseignement reçu

**Auteurs:** ALLARD Cécile, HOROKS Julie, JEANNOTTE Doris et PILET Julia

**Publication:** Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

**Directeur:** Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

**Éditeur:** Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

**Année:** 2023

**Pages:** 646 - 660

**ISBN:** 978-2-7622-0366-0

**URI:**

**DOI:**

# Résolution de problèmes déconnectés de partage inéquitable par des élèves français de fin de primaire et de début de secondaire et lien avec l'enseignement reçu

ALLARD[1] Cécile – HOROKS[2] Julie – JEANNOTTE[3] Doris – PILET[4] Julia

**Résumé –** Cette communication contribue à étudier la nature des raisonnements mobilisés par les élèves français de fin de primaire et de début de collège pour résoudre des problèmes déconnectés de partage inéquitable reconnus pour développer la pensée algébrique avant l'introduction au symbolisme. Nous portons également un regard sémiotique sur les écrits des élèves en analysant les registres de représentation qu'ils utilisent. Nous mettons les résultats en perspective de leur niveau de classe et de l'enseignement qu'ils ont reçu.

**Mots-clefs :** Pensée algébrique, problèmes de partage inéquitable, problèmes déconnectés, schéma, registre de représentation sémiotique

**Abstract –** This paper contributes to study the nature of the reasoning mobilized by French students at the end of primary and beginning of secondary school to solve disconnected problems of inequitable sharing recognized to develop algebraic thinking before the introduction of symbolism. We also take a semiotic approach to the students' writing by analyzing the registers of representation they use. We put the results in perspective of their class level and the instruction they received.

**Keywords:** Algebraic thinking, inequitable sharing problems, disconnected problems, diagram, semiotic representation register

1. Univ Paris Est Creteil, Université de Paris, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille, UNIROUEN, LDAR, F-94010, Creteil, France, cecile.allard@u-pec.fr

2. Univ Paris Est Creteil, Université de Paris, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille, UNIROUEN, LDAR, F-94010, Creteil, France, julie.horoks@u-pec.fr

3. Université du Québec à Montréal, Canada, doris.jeannotte@uqam.ca

4. Univ Paris Est Creteil, Université de Paris, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille, UNIROUEN, LDAR, F-94010, Creteil, France, julia.pilet@u-pec.fr

## Introduction

Cette communication[5] contribue à établir des liens entre pratiques d'enseignement et apprentissages des élèves autour de la résolution de problèmes de partage inéquitable déconnectés. Bednarz et Janvier (1996) ont étudié ces problèmes afin de déterminer ceux qui aideraient le passage à l'algèbre dans un contexte de résolution de problèmes. Les problèmes de partage inéquitable déconnectés sont des problèmes où il est impossible de mettre en œuvre un raisonnement synthétique (du connu vers l'inconnue) à partir des relations explicitement données contrairement à un problème connecté où un tel raisonnement est possible. Historiquement, ces problèmes se retrouvent autant en arithmétique qu'en algèbre puisque ces derniers peuvent être résolus par divers raisonnements, certains étant associés à une pensée algébrique, d'autres non. Ces problèmes ont été repris dans plusieurs recherches en contexte québécois (voir par exemple Squalli et al (2020), Adihou *et al* (2015), Oliviera *et al*, 2017) dans le but d'étudier les types de raisonnement des élèves mais aussi les registres de représentation utilisés par les élèves. Nous revenons sur leurs caractéristiques au fur et à mesure du texte.

Dans cette communication, nous nous intéressons aux problèmes de partage inéquitable déconnectés dans l'enseignement français selon deux axes de réflexion. Premièrement, nous souhaitons contribuer à leurs intérêts pour le développement de la pensée algébrique en questionnant davantage la façon dont les élèves représentent les relations du problème. Ces problèmes reposent sur des relations de comparaison reconnues difficiles pour les élèves.

Deuxièmement, une autre fonction jouée par ces problèmes, qui reste assez peu explorée, serait de contribuer à déconstruire des croyances présentes chez les élèves et les enseignants, notamment au primaire au sujet de la résolution de problèmes. D'après beaucoup d'enseignants, une des raisons pour lesquelles les élèves français seraient en échec tient au fait que ces derniers n'appliqueraient pas « la bonne méthodologie ». C'est ainsi que toutes sortes d'aides dites « méthodologiques » leur sont proposées comme souligner les données utiles, entourer la question, trouver la bonne opération, qui risquent de renforcer des croyances fortes chez les élèves, comme le fait que chercher se fait dans sa tête sans avoir droit à l'erreur et qu'il faut trouver du premier coup la réponse juste. En fin de primaire, les problèmes déconnectés pourraient mettre à défaut ces croyances parce qu'ils nécessitent l'écrit pour organiser les différents essais et faire apparaître certaines relations entre les données. C'est pourquoi nous apportons un nouveau regard, de nature sémiotique, sur les écrits produits par les élèves sur ces problèmes.

D'après Adihou et al. (2015) et Oliveira et Rhéaume (2014), les élèves québécois de 6e et 1e secondaire peuvent résoudre ces problèmes avant toute introduction de l'algèbre mais qu'en est-il des élèves

5. Cette communication s'inscrit dans le projet de recherche franco-québécois intitulé « *Croisement des perspectives didactiques et praticiennes pour favoriser le développement de la pensée algébrique chez les élèves du primaire et du début du secondaire* », subventionné par le programme Samuel-de-Champlain.

français et des caractéristiques de leurs raisonnements, en particulier ceux de nature algébrique ? Sont-elles spécifiques au niveau scolaire des élèves et à l'enseignement qu'ils ont reçu ? Quels sont les signes et symboles mobilisés par les élèves dans leurs écrits pour mettre en relation les données ? Dans quelle mesure contribuent-ils à l'avancée de la résolution de ces problèmes ? Après la présentation de nos appuis théoriques et de notre méthodologie, nous analysons des productions d'élèves de fin de primaire et de début de collège sur un même problème, puis nous ouvrirons la discussion vers des pratiques potentiellement porteuses de l'enrichissement des écrits et des raisonnements.

## Les problèmes déconnectés de partage inéquitable et la pensée algébrique

La pensée algébrique se déploie au moyen de raisonnements particuliers, de manières d'approcher les concepts ainsi que de modes de représentation et d'opérer sur ces dernières (Squalli, 2015). Un élément essentiel de la pensée algébrique est son caractère analytique (Radford (2010), Squalli (2015)). Un raisonnement est dit analytique s'il considère les valeurs inconnues recherchées comme des objets de pensée en opérant sur ces dernières comme si elles étaient connues. Squalli *et al* (2020) et Adihou *et al* (2015) ont élaboré une catégorisation des raisonnements déployés par les élèves selon leur degré d'analycité. Les raisonnements dits *analytiques* utilisent un symbolisme algébrique institutionnalisé ou non. Les raisonnements dits *analytique-parts* sont un bon exemple de raisonnements analytiques qui n'utilisent pas un symbolisme algébrique institutionnalisé. Les élèves qui mettent en œuvre un tel raisonnement s'appuient sur les relations du problème pour déterminer le nombre de parts associés aux relations multiplicatives après avoir ajusté le total en fonction des relations additives s'il y a lieu. Les raisonnements dits *à tendance analytique* font référence aux raisonnements comme celui de *fausse position* qui attribue une valeur fictive à l'inconnue pour opérer sur cette dernière. Enfin, les raisonnements *non analytiques* sont ceux davantage associés à l'arithmétique et aux raisonnements dits synthétiques (du connu vers l'inconnue) tels que les raisonnements par essais-ajustements (Favier, 2022). Les raisonnements dits *jeu de nombres*, c'est-à-dire les raisonnements qui utilisent les informations du problème sans lien avec la structure du problème sont aussi des raisonnements non analytiques.

## Regard sémiotique sur les écrits des élèves en résolution de problèmes numériques

### *Une catégorisation des écrits heuristiques produits par les élèves*

L'écrit en mathématique constitue une trace sur laquelle l'élève peut s'appuyer pour effectuer un retour réflexif sur sa démarche de résolution. Le brouillon, support de cet écrit, représente un outil incontournable pour produire un texte. En mathématique, son utilisation est trop souvent réduite à l'effectuation de calculs, alors qu'il pourrait constituer une aide pour s'approprier et mettre en relation les données du problème afin de se construire une représentation du problème au sens de Julo (1996). En classe, les consignes du type « *Explique comment tu as fait* », « *Fais un dessin ou un schéma* », formulées par les enseignants pour solliciter leurs élèves à passer par l'écrit, amènent ces derniers à produire différents écrits regroupés en trois catégories (Allard & Cavelier, 2020 ; Allard et Moussy, 2022).

La première catégorie est constituée des dessins figuratifs sans mise en relation des données. Ces dessins peuvent être utiles en début de scolarité parce qu'ils constituent un support pour soutenir la mémoire et raconter une histoire, mais, ils présentent peu d'intérêt dans la résolution d'un problème et ne sont plus attendus à partir de la fin de primaire. Des élèves, souvent « faibles », continuent pourtant de les produire pour répondre à un contrat didactique ou pour montrer qu'ils sont en activité. La deuxième catégorie, que nous appelons des dessins MER, pour « dessin avec des Mises En Relation de données », sont des écrits qui utilisent des signes graphiques empruntés à différents registres de représentation sémiotique (Duval, 1993) et qui pourraient être un support à la pensée algébrique (Hitt, 2004). Le registre graphique, mobilisé par les élèves, est souvent peu conventionnel, ils entourent par exemple des nombres (nombres dans des bulles) ou mettent en relation des nombres grâce à des flèches au-dessus desquelles figurent parfois une relation (+5, x7, etc.). Toutefois, ces signes peuvent être interprétés par un élève ou une classe sans l'être par d'autres. Ces signes, qui ne sont pas le résultat d'un apprentissage spécifique, résultent d'une rencontre en dehors du système scolaire ou d'une utilisation fréquente par certains enseignants. Ils sont alors reconnus par certains élèves comme des outils pouvant être mobilisés dans des situations différentes de celles dans laquelle ils ont été rencontrés. La troisième catégorie est composée de dessins de MER conventionnels, c'est-à-dire avec des règles d'usage, et partagés par une plus grande communauté que la classe, l'établissement, le système scolaire. Les schémas en barre en sont un bon exemple (Clivaz & Dindyal, 2021).

### *Aide potentielle des dessins MER conventionnels*

Une question vive, au moins en France, est celle du rôle des schémas conventionnels comme moyen d'aide à la résolution de problèmes. Vergnaud (1983 a, 1983 b, 1991) ont fourni une représentation schématique des problèmes relevant du champ additif en précisant que leur utilisation pouvait être une aide pour comprendre les structures sémantiques chez les élèves en difficulté mais que ces schémas n'avaient pas à être enseignés. D'après eux, leur statut devait d'être transitoire « *en tant que support pour les problèmes, ces diagrammes sont faits pour être oubliés au fur et à mesure de la maîtrise de ces problèmes* » (*ibid*, p. 34). Récemment, Ducharme et Polotskaia, (2008, 2009, 2010) ont développé différents scénarios de mise en œuvre d'utilisation du schéma en barre. Même si ces schématisations ont l'avantage d'être adaptables à des problèmes de structures sémantiques différentes, elles nécessitent, d'après nous, un apprentissage et par conséquent un accompagnement des enseignants dans la construction des séances d'apprentissage relatives à cette représentation. L'utilisation de la schématisation requiert de savoir utiliser à bon escient les signes et symboles mobilisés tels que les segments, les accolades, les pointillés ou le point d'interrogation. Comme tout apprentissage, il est sûrement nécessaire d'automatiser chez les élèves de tels usages pour qu'ils les mobilisent et les adaptent à d'autres problèmes.

Nous allons enquêter ce point dans nos expérimentations, en présentant des schémas, notamment en barre, mais pas uniquement, à des élèves de 9 à 12 ans, et chercher à évaluer s'ils les mobilisent dans des problèmes déconnectés de partage inéquitable. Quels types d'écrits produisent-ils ?

## Méthodologie

### *Présentation des données*

Des élèves (de 9 à 12 ans), de fin primaire et début de collège, issus de niveaux de classes et d'établissements différents, ont résolu le même problème déconnecté de partage inéquitable, appelé « problème des Pokémon » (voir figure 1) avec une variation sur le total de cartes qui ne change pas l'analyse *a priori* du problème. Ils ont reçu un enseignement sur ces problèmes différents et n'ont pas rencontré le symbolisme algébrique avant. Nous résumons les données recueillies dans le tableau 1.

**Problème :** Trois amis comptent leurs nombres de cartes Pokémon. Lucile a 2 fois plus de cartes que Malik. Pierre a 4 fois plus de cartes que Malik. Malik, Lucile et Pierre ont ensemble 189 cartes. Combien de cartes ont Malik, Lucile et Pierre ?
**Problème bis :** même énoncé mais Malik, Lucile et Pierre ont ensemble 91 cartes.

**Figure 1 -** Le problème des Pokémon.

Le fait que les élèves soient dans des niveaux de classe différents nous permet d'étudier les évolutions éventuelles, d'un niveau de classe à l'autre, sur les raisonnements et les types d'écrits qu'ils utilisent. Le fait qu'il y ait des variations dans l'enseignement reçu avant le problème de Pokémon, notamment sur les schémas en barre, permet d'interroger les effets de certaines pratiques sur les raisonnements et les écrits des élèves pour ce type de problème.

Dans toutes les classes, sauf celle de 5$^{e}$, le schéma en barre a été présenté à partir de problèmes de comparaison additifs et multiplicatifs (relations du type "x de moins/de plus que", "x fois moins/fois plus que" dans des problèmes où on cherche la troisième donnée connaissant les deux autres). Soulignons que les élèves ont été amenés à interpréter des schémas en barre mais pas forcément à en produire.

Dans les classes de primaire, les enseignantes ont présenté d'autres dessins de types MER que les schémas en barre, par exemple, pour isoler les données par les bulles et les mettre en relation avec des flèches. De plus, les élèves ont résolu le problème des Pokémon après avoir fréquenté quelques (pas plus de cinq) problèmes déconnectés de partage inéquitable avec des variations sur les relations et sur le nombre total. À l'issue de chaque problème, une affiche présentant une rédaction possible de la réponse et un dessin MER possible a été réalisée (Allard et Cavelier, 2020).

| Enseignant | Établissement | Classe | Élèves (total 171) | Total de cartes Pokémon | Présentation et utilisation des schémas en barre avant le problème des Pokémon | Problèmes de partage fréquentés avant celui des Pokémon |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **M** | Primaire | CM1 | 19 | 91 | Oui et autres MER | Oui |
| **An** | Primaire | CM1 | 9 | 91 | Oui et autres MER | Oui |
| **Ca** | Primaire | CM2 | 8 | 189 | Oui et autres MER | Oui |
| **D** | Collège | 6$^e$ | 44 | 189 | Oui | Non |
| **A** | Collège | 6$^e$ | 36 | 189 | Oui | Non |
| **D** | Collège | 5$^e$ | 55 | 189 | Non | Non |

**Tableau 1 -** Présentation synthétique des données récoltées

Dans toutes les classes, les élèves ont eu à résoudre individuellement le problème et avaient un brouillon à leur disposition. Les consignes préalables et les modalités qui ont suivi ce temps de résolution diffèrent d'une classe à l'autre.

Au collège, le problème a été donné à l'écrit. En primaire, il a été présenté à l'oral et les élèves ont eu comme consigne de représenter les relations entre les données du problème à l'aide de différents signes et symboles. Au collège, dans les classes de 6$^e$ et de 5$^e$, les élèves ont résolu individuellement pendant une quinzaine de minutes le problème. Les enseignants A et Ca évoquent les schémas en barre rencontrés préalablement.

### *Analyse a priori du problème*

Le problème des Pokémon est de type source avec deux relations multiplicatives. Un problème source (Bednarz et Janvier, 1996) est un problème énoncé de manière à ce qu'une des inconnues génère les deux autres directement. Pour le problème des Pokémon, la source est le nombre de cartes de Malik puisque l'énoncé stipule que Lucile a 2 fois plus de cartes que Malik et que Pierre a deux fois plus de cartes que Malik.

Les élèves peuvent mobiliser un raisonnement analytique – parts, mettant en jeu l'analycité, qui consiste dans les Pokemon, à identifier les 7 parts qui forment le tout, et à diviser le total par 7. Ils peuvent également raisonner par essais et ajustements. Les nombres en jeu dans le problème ont été choisis afin de détecter différents raisonnements qui s'appuient sur des éléments superficiels du problème. En effet, dans un problème source à deux relations multiplicatives, si le nombre de parts est équivalent à la multiplication des deux relations en jeu, le raisonnement incorrect de type « jeu de nombres » consistant à diviser par le produit des relations fournit la bonne réponse. Par exemple, si les relations du problème de la figure 1 étaient x2 et x3, un élève pourrait réussir à résoudre le problème en divisant par 6, non pas parce qu'il est en mesure de repérer que 6 parts sont nécessaires pour former le tout (raisonnement analytique-parts correct), mais plutôt parce que 6 c'est 2 fois 3 (raisonnement incorrect de type jeu de nombres). Or, les traces ne permettent pas toujours de distinguer les deux types de raisonnement. Le choix de « x2 » et « x4 » permet d'éviter cet écueil.

De plus, le total de cartes a été choisi de sorte que l'élève ne puisse pas s'appuyer sur la décomposition positionnelle du nombre. Par exemple, si le total avait été plutôt de 175, une décomposition en 100 + 75 permet de s'appuyer sur des faits numériques familiers pour reconnaitre que 100 c'est 4x25 et donc que Malik a 25, Lucile 50 et Pierre 100. Quoique ce raisonnement soit intéressant, il a un champ d'application très limitée.

Comme les élèves n'avaient pas été introduits à l'algèbre, il est improbable qu'ils utilisent le symbolisme algébrique conventionnel dans un raisonnement algébrique. Toutefois, selon les résultats de Oliveira et Rhéaume (2014), l'utilisation de lettres et d'une écriture proto-algébrique est possible. Puisque l'utilisation de calculs est essentielle à la résolution de ces problèmes sans algèbre, des traces dans le registre numérique sont attendues. L'utilisation du langage naturel est aussi attendu, notamment en primaire puisque les énoncés des problèmes sont lus à haute voix. De plus, étant donné l'enseignement reçu, nous anticipions aussi de retrouver les traces de schémas en barre, des bulles et des flèches dans certaines classes.

### *Démarche et critères d'analyse*

Notre analyse s'est centrée sur deux principaux aspects : les types de raisonnements utilisés par les élèves pour résoudre le problème et les types d'écrits qu'ils produisent.

Selon l'analyse *a priori* et la partie II, les raisonnements sont distingués selon qu'ils mettent en jeu ou non l'analycité : des raisonnements analytiques (algébrique, analytique-parts) et des raisonnements non analytiques (essais et ajustements, jeux de nombres comme diviser par 2, 4 ou 6, ou diviser par 3 avec ou sans ajustements, ou encore effectuer d'autres calculs qui ne s'appuient pas sur la structure du problème).

Nous identifions *a priori* quatre types d'écrits : (1) ceux qui mobilisent des éléments du registre graphique et qui mettent en relation des données dans des dessins MER non conventionnels (utilisation de bulles, de flèches, d'accolades, de signes de ponctuation (« ? », « … », etc.)), (2) ceux qui mobilisent des éléments similaires dans des dessins MER conventionnels (segments, tableaux), (3) ceux qui mobilisent des éléments du registre numérique ou algébrique, (4) ceux qui mobilisent des éléments du registre naturel.

Par exemple, dans la figure de l'annexe, l'élève utilise les quatre types d'écrits. En effet, il utilise des bulles, des traits obliques et mots pour représenter la structure du problème. Il représente la relation additive dans le registre algébrique (en haut à gauche), les relations additives et multiplicatives à l'aide d'un schéma en barre, qui lui permet certainement d'obtenir les 7 parts et de mobiliser un raisonnement analytique-parts qui se retrouve dans le registre numérique avec une division par 7.

## Résultats

Les tableaux 2 et 3 informent sur la validité des réponses des élèves et les raisonnements des élèves selon le niveau de classe. Pour chaque élève, nous avons identifié le raisonnement qui a abouti. Dans le tableau 2, sur les 171 copies analysées, 21% montrent des réponses correctes, 19% des réponses fausses et 60% n'ont pas abouti (dont 22 copies étaient sans traces de raisonnement, outre une réécriture d'une partie du problème). Ces pourcentages évoluent lorsqu'on les étudie selon le niveau de classe. Les élèves de primaire, ayant reçu un apprentissage plus conséquent sur les problèmes de partage, réussissent davantage (70%), n'ont pas de réponse erronée et restent moins sans réponse (30%).

| Validité | Primaire CM1-CM2 | Collège 6e | Collège 5$^e$ | Total |
|---|---|---|---|---|
| Correcte | 25 (70%) | 1 (1%) | 10 (18%) | 36 (21%) |
| Incorrecte | 0 (0%) | 15 (19%) | 17 (31%) | 32 (19%) |
| Non réponse | 11 (30%) | 64 (80%) | 28 (51%) | 103 (60%) |
| Total | 36 (100%) | 80 (100%) | 55 (100%) | 171(100%) |

**Tableau 2 -** Validité de la réponse selon le niveau de classe

| Raisonnement | Primaire CM1-CM2 | Collège 6$^e$ | Collège 5$^e$ | Total |
|---|---|---|---|---|
| Algébrique | | | 1 (2%) | 1 (1%) |
| Analytique - parts | 6 (17%) | 1 (1%) | 6 (11%) | 13 (8%) |
| Essais et ajustements | 25 (69%) | 3 (4%) | 5 (9%) | 32 (20%) |
| Jeux de nombres | 2(6%) | 44 (55%) | 32 (58%) | 78 (46%) |
| Jeux de nombres, division par 2 et 4 ou par 6 | | 15 (19%) | 9 (16%) | 24 (14%) |
| Pas de raisonnement | 3 (8%) | 17 (21%) | 2 (4%) | 22 (13%) |
| Total | 36 (100%) | 80 (100%) | 55 (100%) | 171 (100%) |

**Tableau 3 -** Raisonnements mobilisés par les élèves selon le niveau de classe

Dans l'ensemble (Tableau 3), les élèves déploient très peu de raisonnements analytiques (1 algébrique et 13 analytique-parts) mais lorsqu'ils le font, cela les conduit à un résultat correct. Ceux qui les mobilisent sont d'une part, les élèves de 5$^e$, les plus âgés, et, d'autre part, les élèves de primaire, plus accompagnés par l'enseignement qu'ils ont reçus sur les problèmes de partage inéquitables. Concernant les raisonnements non analytiques, les élèves de primaire procèdent davantage par essais et ajustements que les élèves de collège qui utilisent en grande majorité des jeux de nombres.

| Raisonnement | Réponse correcte | Réponse incorrecte | Non réponse | Total |
|---|---|---|---|---|
| Algébrique | 1 | | | 1 |
| Analytique/parts | 12 | | 1 | 13 |
| EE | 23 | 3 | 7 | 33 |
| Jeux de nombres | | 29 | 73 | 102 |
| Pas de raisonnement | | | 22 | 22 |
| Total | 36 | 32 | 103 | 171 |

**Tableau 4 -** Raisonnements mobilisés par les élèves selon la validité de la réponse

Selon les résultats présentés dans le tableau 4, les raisonnements avec essais et ajustements aboutissent en majorité à une réponse correcte (23/33). Les jeux de nombres conduisent tous à une réponse incorrecte (29/102) ou à une absence de réponse (73/102). L'âge, dans une certaine mesure, et l'accompagnement semblent donc des facteurs en faveur de l'utilisation de raisonnements à caractère analytique et au recours à des essais et ajustements et à l'abandon de jeux de nombres. Les résultats des classes de 6ème et de primaire, ayant reçu une présentation des schémas en barre, semblent tendre vers le fait qu'avoir fréquenté des schémas en barre sur quelques séances (de 3 à 5 séances) n'est pas suffisant pour engager les élèves dans un raisonnement analytique.

| Type d'écrit | Primaire CM1-CM2 | Collège 6e | Collège 5e | Total |
|---|---|---|---|---|
| Bulles-flèches | 26 | 20 | 7 | 53 |
| Schémas en barre | 10 | 8 | 0 | 18 |
| Tableau | 5 | 0 | 1 | 6 |
| Écritures numériques | 36 | 64 | 53 | 149 |
| Algébrique | 17 | 6 | 5 | 28 |
| Langage naturel | 27 | 12 | 5 | 44 |

**Tableau 5 –** Types d'écrits utilisés par les élèves selon leur niveau de classe

Le tableau 5 présente les types d'écrits utilisés par les élèves selon leur niveau de classe. Dans ce tableau, nous prenons en compte qu'un élève peut utiliser plusieurs registres de représentation. C'est pourquoi le total par colonne n'est pas celui de l'effectif de chaque niveau de classe.

Tous les élèves qui produisent un écrit utilisent les écritures numériques (149/171). Par ordre décroissant d'utilisation, les élèves utilisent ensuite des MER non conventionnels de type bulles et flèches (53/171), puis le registre du langage naturel (44/171), le registre des écritures algébriques (28/171), des MER conventionnels de type schémas en barre (18/171) et enfin de type tabulaire (6/171). Soulignons que les élèves de collège (27/135) utilisent des bulles et des flèches sans enseignement explicite. Cela nous questionne, certaines représentations graphiques seraient-elles plus utilisées que d'autres par les élèves parce qu'elles sont montrées sans être explicitement enseignées ? Y aurait-il une spécificité française sur cette utilisation des flèches et des bulles ?

Les MER conventionnels de type schémas en barre sont utilisés par seulement 18 élèves sur les 116 élèves qui ont rencontré ces schémas préalablement. Les 55 élèves de 5$^{e}$ qui n'ont pas rencontré ce type de schéma n'en produisent pas. Sur ces 18 élèves, 8 produisent un schéma en barre pour représenter la relation additive (total des parts), 12 pour représenter les relations multiplicatives entre les parts et 8 pour représenter d'autres relations erronées. 17 de ces 18 élèves utilisent également des éléments du registre graphique qui mettent en relation des données dans des dessins MER non conventionnels ce qui questionne l'apprentissage d'un dessin MER conventionnel. Sur ces 18 élèves, 6 s'engagent dans un raisonnement analytique-parts (5 réponses correctes et une non-réponse), 4 dans des essais et ajustements, 5 dans des jeux de nombres et 3 ne vont pas au-delà de la production du schéma.

En bilan, il nous semble que parmi les signes utilisés par les élèves, peu semblent véritablement opérationnels, hormis le registre des écritures numériques pour écrire les calculs. Les écrits de type MER non conventionnels, qui reposent sur des flèches et des bulles, semblent être une représentation plus proche des élèves, qui permet de représenter facilement les relations mais ne faisant pas apparaître le nombre de parts, elle ne permet pas d'opérer sur l'inconnue et donc ne conduit pas à un raisonnement analytique.

Elle rend alors possible l'organisation des essais et ajustements (certains brouillons montrent des essais sous les bulles qui sont barrés). Rappelons que Bednarz et Janvier (1996) ont introduits des représentations proches pour catégoriser les problèmes en formation des maîtres mais pas comme objet d'enseignement. Quant au schéma en barre qui présente l'intérêt de donner le nombre de parts, il semble éloigné des élèves français qui s'en emparent peu même lorsqu'il leur a été présenté préalablement. Ce schéma nécessite certainement un apprentissage plus que celui reçu, notamment pour expliciter ses conventions de représentation des données et des relations (respects des proportions, lien avec les fractions, etc.).

## Discussion et Conclusion

Cette étude vient compléter celles déjà menées sur les problèmes déconnectés de partage inéquitable. Du côté des raisonnements, les résultats contrastent avec ceux des élèves d'âges similaires au Québec. En effet, si les élèves québécois de 6e et 1e secondaire réussissent un problème similaire à respectivement 48 % et 61 % (Oliveira et Rhéaume, 2014), seuls 21 % de l'échantillon des élèves français produisent une réponse valide. Toutefois, les taux de réussite québécois sont certainement à être discutés notamment parce que, dans l'étude citée, il n'est pas possible de détecter des raisonnements erronés liés aux choix des nombres. Le problème résolu par les élèves québécois met en effet en relation deux relations multiplicatives (x2 et x3) pour lesquelles diviser le total par 2 puis par 3 fournit l'équivalent de la part contrairement aux relations choisies ici.

Les résultats des élèves français montrent l'importance de travailler les relations mathématiques, notamment dans des problèmes déconnectés de partage inéquitable, quasiment absentes de l'enseignement français avant l'introduction du symbolisme algébrique, afin de développer l'activité numérico-algébrique en jeu à la transition entre le primaire et le secondaire (Pilet & Grugeon-Allys, 2021). Une enquête à mener serait de comparer la place du travail et des modes de représentation sur les relations mathématiques entre les enseignements français et québécois.

Par ailleurs, combiner une analyse des raisonnements avec celle du type d'écrit utilisé par les élèves nous semble enrichir les résultats sur les problèmes déconnectés de partage inéquitable. Même si les élèves prennent en compte les données et les relations dans leurs écrits, les signes qu'ils utilisent ne leur permettent pas d'opérer sur l'inconnue et de tendre vers un raisonnement analytique. Les élèves se tournent vers des raisonnements arithmétiques portés par des calculs, de type essais et ajustements, pour les élèves les plus accompagnés (primaire), et jeu de nombre pour les autres (collège). D'une part, cela interroge sur la place du raisonnement essais et ajustement dans l'enseignement français. D'autre part, selon nous, les résultats viennent nourrir l'existence de connaissances cachées (Houdement, 2011) et socialement différenciatrices pour les élèves liées à l'usage de signes et de symboles de type MER conventionnels ou non, pour outiller la pensée.

## Références


Adihou, A., Squalli, H., Saboya, M., Tremblay, M., et Lapointe, A. (2015). Analyse des raisonnements d'élèves à travers des résolutions de problèmes de comparaison. Dans *Actes du colloque EMF-2015 Pluralités culturelles et universalité des mathématiques: enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* (pp. 1-16).

Allard, C. et Cavelier, S. (2020). *Résoudre des problèmes mathématiques*. Paris : Nathan.

Allard, C. et Moussy, C. (2022). LéA 2 territoires en mathématiques : résoudre des problèmes complexes au cycle 3: exemple d'un dispositif de travail collaboratif. *Actes du 47[eme] colloque de la Copirelem, Grenoble en distanciel*.

Bednarz, N., et Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: Continuities and discontinuities with arithmetic. Dans N. Bednarz, C Kieran et L. Lee (dir.). *Approaches to algebra* (pp. 115-136). Springer.

Clivaz, S. et Dindyal, J. (2021). Représentations graphiques et résolution de problèmes : le cas de Singapour. *Grand N, 108*, 5-25.

Ducharme, M. et Polotskaia, E. (2008). Développement du raisonnement algébrique par résolution de problèmes textuels chez les enfants au primaire (ingénierie didactique) 1. *Envol, GRMS, 145*, 21-27.

Ducharme, M. et Polotskaia, E. (2009). Développement du raisonnement algébrique par résolution de problèmes textuels chez les enfants au primaire (ingénierie didactique) 2. *Envol, GRMS, 146*, 33-38.

Ducharme, M., et Polotskaia, E. (2010). Two Scenarios for Problem Solving and Pro-algebraic Reasoning Development in Primary School Children. *Petroleum-Gas University of Ploiesti Bulletin*, *Educational Sciences Series, 62*(1B), 170-184.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 5*(1), 37-65.

Favier, S. (2022). Étude des processus de résolution de problèmes par essais et ajustements en classe de mathématiques à Genève. Thèse Université de Genève. doi: 10.13097/archive-ouverte/unige:159466 https://archive-ouverte.unige.ch/unige:159466

Hitt, F. (2004). Les représentations sémiotiques dans l'apprentissage de concepts mathématiques et leur rôle dans la démarche heuristique. *Revue des sciences de l'éducation, 30*(2), 329–354.

Houdement, C. (2011). Connaissances cachées en résolution de problèmes arithmétiques ordinaires à l'école. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives, Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de Paris (IREM), 16*, 67-96.

Oliveira, I., et Rhéaume, S. (2014). Comment s'y prennent-ils ? La résolution de problèmes de partage inéquitable par des élèves avant enseignement formel de l'algèbre. *Revue Canadienne d'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies, 14*(4), 404-423.

Pilet, J. et Grugeon-Allys, B. (2021). L'activité numérico-algébrique à la transition entre l'arithmétique et l'algèbre ». *Éducation et didactique, 15*(2), 9-26, mis en ligne le 02 janvier 2023, consulté le 30 mai 2022. URL : http://journals.openedition.org/educationdidactique/8580 ; DOI : https://doi.org/10.4000/educationdidactique.8580

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education, 12*(1), 1-19.

Squalli, H., Larguier, M., Bronner, A., et Adihou, A. (2020). Cadre d'analyse des raisonnements dans la résolution de problèmes algébriques de type partage inéquitable. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation, 22*(1), 36-62.

Vergnaud, G. (1983 a). A classification of cognitive task and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In T.P. Carpenter, J.M. Moser, & T.A. Romberg (Eds.), *Addition and Subtraction : a cognitive perspective*. Hillsdale : Erlbaum.

Vergnaud, G. (1983 b). Multiplicative structures. In R. Lesh, & M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 127-174). Academie Press : New York.

Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques, 10*, 2.3, 135-169.

# Annexe : Traces d'un élève de primaire