UN ESEMPIO DI PROBLEM POSING NEI CORSI UNIVERSITARI DI MATEMATICA

Nicla PALLADINO, Roberta PAOLETTI, Emanuela UGHI
Università di Perugia, via Vanvitelli 1, 06123 Perugia, Italy
nicla.palladino@unina.it

ABSTRACT

Il "Divina Proportione" di Luca Pacioli contiene descrizioni ed immagini di nuovi poliedri concavi che durante il Rinascimento furono rappresentati e studiati. Pacioli mostra come costruire due nuove tipologie di solidi, che chiama "abscissi" (troncati) ed "elevati". Gli abscissi si ottengono tagliando via gli angoli solidi dai poliedri regolari convessi; gli elevati sono ottenuti da poliedri regolari o troncati aggiungendo su ogni faccia piramidi aventi come base le facce del poliedro. Pacioli descrive, infine, poliedri prima troncati e poi elevati tra cui il dodecaedro troncato elevato, dichiarando che sei vertici delle piramidi del poliedro giacciono su uno stesso piano. Abbiamo sottoposto lo studio e l'interpretazione del testo originale agli studenti del corso di Storia della Matematica per la laurea magistrale in Matematica. Esponiamo le fasi del laboratorio ma soprattutto vogliamo evidenziare come i risultati sono stati interessanti didatticamente, sia da un punto di vista storico sia per l'attivazione di abilità e competenze in altri ambiti (geometrico, analitico, informatico). Riteniamo infatti che un'attività del genere sia da ritenersi un buon esempio di utilizzo della storia della matematica in didattica.

1 Il corso di Storia delle Matematiche

Nell'anno accademico 2020/21, le due autrici docenti del corso di Storia della Matematica della laurea magistrale in Matematica all'Università di Perugia hanno scelto di trattare l'evoluzione dei concetti di poligono e poliedro, concavi e convessi, ponendo particolare attenzione agli "stellati", a partire dal Medioevo fino a Keplero. L'obbiettivo propostoci per il corso è stato favorire l'acquisizione di una visione storica di determinanti momenti significativi nello sviluppo della matematica mostrando l'evoluzione di alcuni dei principali concetti, metodi e teorie. Il corso è stato frequentato da studenti che hanno seguito anche il corso di Didattica della Matematica e ci siamo quindi soffermati sulla individuazione e comprensione di ostacoli epistemologici emersi nella sistemazione di alcuni concetti matematici nel corso dei secoli. Inoltre, abbiamo mostrato un possibile utilizzo della storia della Matematica nella didattica (in questo caso universitaria ma facilmente riproducibile in classi di scuola secondaria superiore, in quanto la maggior parte dei concetti matematici messi in gioco sono già conosciuti a tale livello scolastico). Il corso è consistito quindi di due parti: nella prima, abbiamo mostrato l'evoluzione dei concetti di poligono e poliedro, soprattutto stellati, studiando la storia dei problemi e delle idee matematiche collegati ad essi; ci siamo soffermati su matematici e artisti, studiandone le biografie, i lavori, contestualizzando nella loro epoca la geometria che presentano, provando a ricostruire rapporti ed influenze reciproche. Nella seconda parte, abbiamo tratto spunto dalle teorie, dai problemi e dalle idee esposti, per sviluppare attività di laboratorio. La lunga storia delle figure stellate inizia, infatti, come scoperta da parte di artisti di figure che essi adoperano nei propri decori; nel medioevo notiamo un primo approccio allo studio di singoli oggetti da parte dei matematici. Con il Rinascimento, lo studio diventa sistematico e apre le porte ad una teoria matematica. Nella cultura occidentale, Adelard of Bath (1080-1152) (Günther 1873) e Thomas Bradwardine (c. 1290-1349) (Bradwardine1989) sembrano essere stati i primi a dare alcune nozioni riguardanti le figure stellate. Durante il Rinascimento, Piero della Francesca (c. 1412-1492) fu uno dei protagonisti della graduale transizione della visione di solidi concavi da figure artistiche a oggetti matematici. Il suo "Libellus" (Davis 1977) fu da Luca Pacioli (c.1445-1514) incorporato in (Pacioli 1509). Il suo contributo è legato al matematico e pittore tedesco Albrecht Dürer (1471-1528) che in (Dürer 1525) intendeva fornire strumenti contemporaneamente pratici e teorici utili per artisti ed artigiani. Egli accenna a corpi ottenibili sovrapponendo piramidi alle facce di corpi originari e poi procede alle descrizioni di sette solidi semiregolari che si ottengono per troncamento dai poliedri regolari. Influenzato da Dürer fu Simon Stevin (1548-1620) che pubblicò (Stevin 1583). Il suo approccio allo studio dei poliedri dà un forte contributo al processo di "matematizzazione" di quelle figure ancora prevalentemente utilizzate in ambito artistico. Affronta lo studio dei solidi regolari e semiregolari e determina procedimenti per costruire poliedri a partire da quelli di Dürer. Le idee di Dürer vengono elaborate dall'italiano Daniele Barbaro (1513-1570) che pubblica (Barbaro 1569). Il processo che conduce ad una esaustiva matematizzazione delle figure stellate può considerarsi giunto ad un punto decisivo con Johannes von Kepler (1571-1630). In (Kepler 1619) troviamo una definizione precisa di "stella", classificata come poligono regolare e la teoria sui poliedri stellati.

L'opera, matematicamente compiuta, conclude la fase di "scoperta", dando definizioni, classificazioni complete, dimostrazioni (si veda Brigaglia *et al.*

2018). Il percorso storico illustrato nella prima parte del corso ha fornito elementi per contestualizzare pensiero, tecniche, procedure, idee su cui sono nate le riflessioni per la fase di laboratorio; questi infatti sono stati, nella seconda parte, elementi su cui ragionare per sviluppare e poi risolvere alcuni problemi. La contestualizzazione storica è stata elemento fondamentale perché abbiamo trattato problemi emersi dallo studio delle conoscenze degli autori presentati e che solo in tale ottica possono essere formulati e affrontati. In generale, molti sono gli studi sull'efficacia in termini di apprendimento, nell'utilizzare la storia della matematica nel suo insegnamento: la storia della matematica riguarda anche il modo in cui si è evoluto un concetto, i diversi approcci dei matematici del passato riguardo ad esso, le loro difficoltà, la loro creatività, le loro idee, fino alla fase di costruzione e formalizzazione. Potremmo allora utilizzare la storia per una sorta di laboratorio epistemologico in cui esplorare lo sviluppo delle conoscenze matematiche (Radford 1997). Dal punto di vista dell'apprendimento, Skemp (1969) afferma che un approccio che fornisce solo il prodotto finale della scoperta matematica, e non i processi attraverso i quali esse vengono raggiunte, non favorisce l'apprendimento. La realizzazione di attività didattiche sotto forma di laboratori facilita invece dialogo, riflessione e apprendimento. Abbiamo portato nell'aula universitaria un tipo di attività laboratoriale; abbiamo esaminato alcuni aspetti e alcuni momenti dello sviluppo dei concetti di poligono e poliedro, lavorando sui testi originali, soffermandoci sulle difficoltà degli autori, sul passaggio graduale avvenuto dalle idee alla formalizzazione matematica, come attività di studio e riflessione in cui abbiamo provato a formulare dei problemi e poi anche ad affrontarli e risolverli. Stoyanova e Ellerton (1996) classificano le attività di problem posing in tre diverse categorie: *free problem posing situations*, *semi-structured problem posing situations* e *structured problem posing situations*. Una situazione di problem posing è considerata "semi-structured" se agli studenti vengono presentati dei problemi aperti o delle situazioni non strutturate e sono invitati ad esplorare la situazione e a completarla applicando conoscenze, abilità e concetti derivati dalle loro precedenti esperienze matematiche. Tra i problemi semi-strutturati, gli autori (rifacendosi a Krutetskii 1976) fanno rientrare anche quelli derivanti dall'interpretazione di figure. Secondo (Bonotto & Dal Santo, 2015) il problem posing corrisponde ad un processo secondo il quale gli studenti, in base alle loro conoscenze, costruiscono delle interpretazioni personali di situazioni concrete e le formulano come problemi matematici significativi. Per gli studenti questo processo diventa perciò una opportunità di interpretazione e di analisi critica che favorisce il pensiero critico, la creatività, l'apprendimento. Abbiamo allora predisposto situazioni di semi-structured problem posing nella didattica universitaria: con gli studenti abbiamo riflettuto, a partire da alcuni spunti sorti dalla lettura di testi originali, sulle possibili interpretazioni dei brani, alla luce delle conoscenze dell'epoca e delle conoscenze attuali sull'argomento; essi sono stati sollecitati a porsi problemi, a esplorarli utilizzando conoscenze, abilità, concetti matematici già acquisiti, nonché le nozioni e le opportune contestualizzazioni storiche presentate nella prima parte del corso. Il laboratorio che qui illustriamo è stato sviluppato a partire dal "Divina Proportione" di Pacioli e dalle figure disegnate da Leonardo da Vinci.[64]

2 *Un esempio nella didattica universitaria*

Pacioli scrisse il "Divina Proportione" tra il 1496 e il 1498; in esso mostra come costruire due nuove tipologie di poliedri, che chiama "abscissi" (o troncati) ed "elevati". Gli abscissi si ottengono tagliando via gli angoli solidi dai cinque poliedri regolari; gli elevati sono ottenuti dai regolari o troncati, aggiungendo su ogni faccia delle piramidi che abbiano come basi le facce del poliedro. Descrive anche poliedri prima troncati e poi elevati tra cui, alla sezione "LII", il "dodecaedro troncato elevato" raffigurato nella Tav. XXXIIII (Fig. 1.). La prima parte della sezione LII riguarda la costruzione del poliedro: si crea a partire dal dodecaedro solido regolare costituito da 12 facce pentagonali regolari congruenti, 20 angoli solidi e 30 spigoli. Il dodecaedro troncato deriva dal dodecaedro a cui vengono tagliati gli spigoli; si crea così un solido con 32 facce (20 triangolari e 12 pentagonali regolari), 60 spigoli e 30 vertici. Infine, Pacioli eleva il solido precedente (riportiamo di seguito la nostra "traduzione" al fine di chiarire la costruzione del poliedro generato): il corpo che si crea in questo modo è composto dal dodecaedro troncato, all'interno, che si mostra alla mente solo attraverso l'immaginazione, e da 32 piramidi, di cui 12 pentagonali, tutte di uguale altezza e di cui le altre 20 sono triangolari, tutte di

[64] La curiosità a questa particolare questione, da parte delle due docenti, è nata dalla lettura di Huylebrouck (2013).

uguale altezza. Le basi delle piramidi sono le facce del suddetto dodecaedro e corrispondono puntualmente, cioè i triangoli alle piramidi triangolari ed i pentagoni alle piramidi pentagonali.

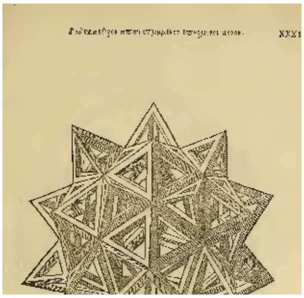

Figure 1. Il dodecaedro troncato elevato di Leonardo

Alla costruzione, Pacioli fa seguire un assunto: proiettando su un piano, questo corpo riposerà sempre su 6 cime delle piramidi, una delle quali è una piramide pentagonale, le altre cinque triangolari. Possiamo pensare l’attività di problem posing suddivisa in diverse fasi. In un primo momento, la studentessa (la seconda coautrice del presente lavoro) ha avuto il compito di leggere e interpretare la sezione LII e gli altri brani a cui fa riferimento. La costruzione è dal punto di vista matematico poco dettagliata, anche perché Pacioli basa le sue osservazioni dai disegni e dai modelli dell’oggetto e ciò riflette l’approccio del periodo medievale e rinascimentale. Si possono allora individuare parole e procedimenti diversamente interpretabili, ognuno dei quali può dar luogo a realizzazioni differenti. A partire dalla lettura e dall’esame del testo, la studentessa ha quindi formulato il problema su cui lavorare: “In quali circostanze l’assunto di Pacioli può considerarsi corretto?”. Nella seconda fase, la studentessa ha preso in esame la situazione dal punto di vista storico ed epistemologico, confrontando la costruzione di Pacioli con i metodi conosciuti dai matematici contemporanei (alla luce della trattazione affrontata nella prima parte del corso).

Tutte le costruzioni del periodo sono approssimative, seppur con approcci e metodi differenti (Dürer e Barbaro provano a chiarire i poliedri di Pacioli); costruzioni matematicamente corrette si avranno solo con Stevin, che descriverà con perizia i diversi metodi di troncamento che conducono a diversi poliedri. Sono state quindi formulate delle congetture sulla base delle riflessioni:

abbiamo prima di tutto assunto che le piramidi di cui si avvale Pacioli siano rette, sicché le facce laterali sono triangoli isosceli (o equilateri). Fissando l'altezza di uno dei triangoli, le altezze delle 32 piramidi rimangono determinate (quella delle piramidi pentagonali sarà diversa da quelle triangolari); viceversa, fissando l'altezza delle piramidi a base pentagonale, i triangoli isosceli rimangono determinati. La fase seguente è stata la modellizzazione matematica, ma per fare ciò la studentessa ha preferito preventivamente costruire un modello in cartoncino del solido. Manipolando ed aprendo a metà il modello, ha realizzato che l'enunciato di Pacioli è reso più semplice limitandosi ad osservare il comportamento del solido ottenuto unendo al dodecaedro iniziale interno una sola piramide pentagonale ed una sua adiacente piramide triangolare (Fig. 2.): l'enunciato sulla complanarità dei sei punti di Pacioli corrisponde al fatto che i vertici delle due piramidi si trovano alla stessa altezza rispetto alla base pentagonale. Il problema è stato poi ricondotto ad un problema piano sulla sezione del solido.

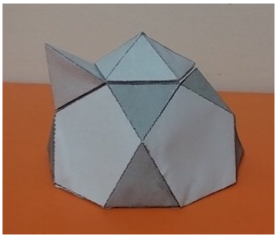

Figure 2. Parte del dodecaedro troncato elevato in cartoncino

La studentessa ha dovuto quindi individuare gli strumenti matematici per risolverlo. Ha scelto di avvalersi di un software di geometria dinamica, riportando in esso le misure fisse note e ponendo variabile l'altezza corrispondente alla piramide pentagonale in modo da osservare diverse configurazioni corrispondenti a differenti altezze di tale piramide (Fig. 3.). L'enunciato risulterà corretto solo quando la retta che unisce i vertici delle due piramidi sarà orizzontale. Quando si fissa l'altezza corrispondente a facce che sono triangoli equilateri, la retta non risulta mai orizzontale. La risposta al problema è che l'enunciato di Pacioli può essere vero solo per un opportuno valore dell'altezza dei triangoli isosceli in questione. L'esistenza di tale soluzione è stata ricavata osservando che l'inclinazione della retta (identificata con la tangente dell'angolo) è una funzione continua dell'altezza rappresentata dallo slider (uno slider è la rappresentazione grafica di un numero che può essere variabile) e che tale tangente passa da valori negativi a valori positivi, per cui deve esistere un punto in cui si annulla. L'altezza della piramide pentagonale corrispondente a tale punto dello slider e i corrispondenti triangoli isosceli forniranno dunque la soluzione per cui l'enunciato di Pacioli risulterà corretto.

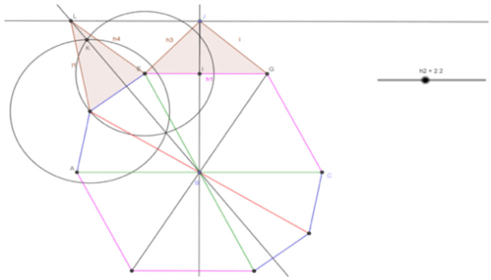

Figure 3. Sezione del dodecaedro troncato elevato

3 Conclusioni

Abbiamo descritto una delle attività di problem posing degli studenti del corso universitario (per la laurea magistrale) di Storia, frequentanti anche il corso di Didattica della Matematica (formativo per i futuri docenti di scuola superiore), elaborate nell'anno accademico 2020/21. Tutti i laboratori hanno avuto origine dallo studio e dall'interpretazione di brani originali (in italiano, latino o tedesco) di autori affrontati durante le lezioni e dalla ricostruzione dei concetti matematici e geometrici descritti. La valutazione si è basata su un colloquio orale su tutti gli argomenti oggetto del corso, compresi quelli relativi al progetto, e nella presentazione del percorso di laboratorio. La metodologia adottata ha consentito agli studenti di raggiungere, secondo noi, un doppio obiettivo: un apprendimento più significativo dei concetti storici e geometrici direttamente utilizzati nel laboratorio, rispetto a quelli presentati dai docenti mediante un approccio più tradizionale. Gli studenti hanno inoltre avuto l'opportunità di ampliare ed applicare conoscenze, competenze e abilità riguardanti concetti e uso di strumenti acquisiti in altri corsi universitari, come algebra lineare, calcolo infinitesimale, uso di software geometrico, geometria proiettiva, etc. Soffermandoci sugli scopi che c'eravamo prefissi, gli studenti hanno scoperto e potuto direttamente lavorare con una nuova metodologia di insegnamento. Essi hanno potuto sperimentare uno dei possibili utilizzi della storia della matematica nell'insegnamento della disciplina, usando testi originali e producendo attività interdisciplinari. Dalle "Indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento" per i percorsi liceali (Ministero dell'istruzione, università e ricerca 2010), si legge che è indispensabile saper "collocare il pensiero scientifico, la storia delle sue scoperte e lo sviluppo delle invenzioni tecnologiche nell'ambito più vasto della storia delle idee" (p. 7). Riguardo poi agli obiettivi per la Lingua italiana, leggiamo che per poterli raggiungere il "percorso utilizzerà le opportunità offerte da tutte le discipline con i loro specifici linguaggi per facilitare l'arricchimento del lessico e sviluppare le capacità di interazione con diversi tipi di testo, compreso quello scientifico: la trasversalità dell'insegnamento della Lingua italiana impone che la collaborazione con le altre discipline sia effettiva e programmata" (p. 257). Nel documento sulle Raccomandazioni del Consiglio dell'Unione europea del 22 maggio 2018 relative alle competenze chiave per l'apprendimento permanente (Gazzetta ufficiale dell'Unione europea del 4 giugno), si sollecita a "promuovere l'acquisizione di competenze in scienza, tecnologia, ingegneria e matematica, tenendo conto dei collegamenti con le arti, la creatività e l'innovazione" (p. 4). Leggiamo poi che le "metodologie di apprendimento quali l'apprendimento basato sull'indagine e sui progetti, misto, basato sulle arti e sui giochi, possono accrescere la motivazione e l'impegno ad apprendere. Analogamente, metodi di apprendimento sperimentali, l'apprendimento basato sul lavoro e su metodi scientifici in scienza, tecnologia, ingegneria e matematica possono promuovere lo sviluppo di varie competenze" (p. 12). Infine, gli studenti hanno avuto modo di riflettere su alcuni ostacoli epistemologici incontrati storicamente nella sistemazione matematica delle definizioni, proprietà, teoremi riguardanti argomenti connessi ai poligoni e poliedri stellati. Ci sembra che i risultati siano stati interessanti didatticamente, sia per l'apprendimento significativo di concetti da un punto di vista storico sia per l'attivazione di abilità e competenze in altri ambiti, come quello geometrico, analitico ed informatico. I risultati sono stati interessanti nell'ottica della formazione di docenti per la scuola secondaria: riteniamo infatti che un'attività del genere sia da ritenersi un buon esempio di utilizzo della storia della matematica in didattica.

REFERENCES

Barbaro, D. (1569). *La pratica della perspettiva*. Borgominieri, Venezia.

Bonotto, C., Dal Santo L. (2015). On the relationship between problem posing, problem solving and creativity in primary school. Singer, F.M., Ellerton, N., Cai, J. (Eds) *Mathematical Problem Posing*. New York: Springer.

Bradwardine, T. (1989). *Geometria speculativa*. Steiner Verlag Wiesbaden.

Brigaglia, A., Palladino, N., Vaccaro, M.A. (2018). Historical notes on star geometries in mathematics, art and nature. Michele, E., Marco, A. (Eds.). *Imagine Math 6 Between Culture and Mathematics*. Springer International Publishing, pp. 197-211.

Davis, M.D. (1977). *Piero della Francesca's mathematical treatises*. Longo, Ravenna.

Dürer, A. (1525). *Underweysung der Messung, mit dem Zirckel und Richtscheyt, in Linien, Ebenen unnd gantzen corporen*. Nuremberg.

Günther, S. (1873). Lo sviluppo storico della teoria dei poligoni stellati nell'antichità e nel medioevo. *Bullettino di Bibliografia e di Storia*, Tomo VI, Roma, Tipografia delle Scienze matematiche e fisiche, pp. 313-340.

Huylebrouck, D. (2013). *De Divino Errore.* www.researchgate.net/publication/260692086_De_Divino_Errore

Kepler, J. (1619). *Harmonices Mundi*. Frankfurt.

Krutetskii, V. A. (1976). The psychology of mathematics abilities in schoolchildren. Chicago: University of Chicago Press.

Pacioli, L. (1509). *Divina proporzione*. Venezia.

Radford, L. (1997). On Psychology, Historical Epistemology and the Teaching of Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 17(1), 26-33.

Skemp, R. (1969). *The psychology of learning mathematics*. Harmondsworth. UK: Penguin.

Stevin, S. (1583). *Problemata Geometrica Libri 5*. Anversa.

Stoyanova, E., Ellerton, N.F. (1996). A framework for research into students' problem posing in school mathematics. Clarkson P. C. (Ed), *Technology in mathematics education* (pp. 518-525), MERGA: The University of Melbourn