INTRODUCTION AU CALCUL DIFFERENTIEL PAR UNE ETUDE DES TANGENTES

Carène GUILLET, Marie-Line MOUREAU
IREM des Pays de la Loire, UFR des sciences et techniques, Nantes, France
carene.guillet@gmail.com, mlmoureau@aol.com

ABSTRACT

Dans cet atelier les participants ont pu découvrir, d'abord en se plaçant en situation d'élèves puis en les analysant en tant qu'enseignants, deux séquences autour de l'entrée dans le calcul différentiel. Ces séquences, mises en œuvre auprès d'élèves de 16 ans, sont pour l'une basée sur la méthode des tangentes de René Descartes et pour l'autre sur la notion de « différence » et le calcul des sous-tangentes du Marquis de L'Hospital.

Introduction

Lors de l'atelier, nous avons présenté deux approches élaborées pour amoindrir les difficultés rencontrées par les élèves dans leur apprentissage du calcul différentiel. Construites après la lecture de l'article de Maggy Schneider-Gilot (1991), elles ont pour point commun l'appui sur des éléments géométriques tangibles, tangente ou sous-tangente, *a contrario* du triangle différentiel qui se réduit à un point en cours de calcul. Après avoir testé les dispositifs mis en place pour nos élèves, les participants ont pu les analyser, les comparer et discuter de leur pertinence par rapport à l'objectif pédagogique annoncé.

1 Une progression s'appuyant sur la tangente à un cercle

Avant de présenter le travail mené en classe, nous avons rappelé le contexte français pour l'enseignement de la dérivation. Depuis 2019, la tangente à un cercle n'est plus un objet d'étude obligatoirement proposé aux élèves. Ils doivent donc en classe de première (16-17 ans) à la fois découvrir cette notion et, de manière intuitive selon les termes des programmes, comprendre que la tangente à une courbe en un point est la limite des sécantes et que sa pente est la limite des taux de variation. Cette limite s'obtient en posant égales à 0 des quantités préalablement définies comme non nulles. La tangente, objet nouveau, n'est pas elle-même une sécante, sa pente n'est pas non plus un taux de variation. Cela occasionne de nombreuses incompréhensions. Finalement pour les élèves, une tangente existe-t-elle vraiment, c'est-à-dire la limite est-elle atteinte ? Est-elle unique ?

Nous avons donc élaboré et mis en œuvre en classe une progression commençant par l'étude de la tangente à un cercle dans les *Éléments* d'Euclide, se prolongeant par la tangente à une courbe via les cercles tangents, en suivant la méthode exposée par René Descartes dans sa *Géométrie* (1637), pour terminer par la position limite des sécantes, mais définie comme une droite ayant un point d'intersection double avec la courbe. C'est cette progression qui a été présentée et soumise à discussion dans la première partie de notre atelier.

1.1 Première étape: tangente à un cercle

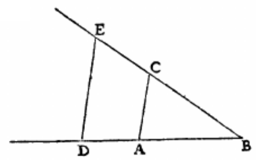
À travers la lecture des définitions 8, 10, 15, 16 et 17 du Livre I des *Éléments* d'Euclide (Euclide, 1804) il s'agit avec les participants, comme avec nos élèves, de prendre conscience de la pérennité des objets géométriques (cercle, droite), mais aussi des pièges d'un vocabulaire ne recouvrant pas les mêmes concepts : la droite euclidienne est infinie en puissance mais pas en acte, la notion de segment n'a donc pas de sens, et le cercle euclidien est un disque. Cette vigilance sur le vocabulaire est indispensable pour ne pas commettre de contresens dans les lectures qui suivent. Nous donnons la définition de la tangente à un cercle : « Une droite qui touchant le cercle et qui étant prolongée ne le coupe point, est appelée tangente du cercle. » (Euclide, 1804, livre III, p.107). Puis nous abordons le cœur de l'activité avec le théorème :

« Proposition 16. Une droite perpendiculaire sur le diamètre d'un cercle et menée par une de ses extrémités, tombe hors de ce cercle ; il est impossible qu'il y ait une droite dans l'espace qui est compris entre cette perpendiculaire et la circonférence » (Euclide, 1804, livre III, p. 141).

Lors de l'atelier, nous avons placé les participants dans les mêmes conditions que nos élèves : la démonstration d'Euclide leur a été distribuée et ils ont dû légitimer chacune des étapes en référence aux connaissances antérieures dans la scolarité. Cela correspond aux renvois dans le texte à des propositions précédentes de l'ouvrage. Les élèves ont compris à cette occasion la structure logique des *Éléments*, où chaque proposition s'appuie sur les définitions et propositions précédentes. Ce travail offre en classe un moment de réflexion sur le mode démonstratif utilisé, c'est-à-dire un raisonnement par l'absurde et la forme axiomatico-déductive de l'argumentation repérée à travers les connecteurs : puisque, donc, or, mais. À la fin de la séance, les élèves ont écrit le théorème : « Une droite est la tangente en un point à un cercle si et seulement si elle est perpendiculaire au diamètre dont ce point est une des extrémités. »

1.2 Étape 2: tangente à une courbe dans la *Géométrie* de Descartes

Lors de l'atelier nous avons pris le temps, avant d'aborder la méthode de Descartes pour déterminer les tangentes, de présenter son essai *La Géométrie* (Descartes, 1637) en soulignant les trois grands apports de Descartes : l'arithmétisation de la géométrie, son algébrisation et une nouvelle classification des courbes. Descartes opère une rupture totale avec la géométrie grecque en définissant des opérations sur les lignes (segments de droites) dont le résultat est encore une ligne. Si cela va de soi pour l'addition ou la soustraction, pour les Grecs le produit de deux longueurs est une surface. Descartes, lui, définit le produit de deux lignes comme une ligne : le produit des lignes (grandeurs) *BD* et *BC* est la ligne *BE* (figure 1) obtenue par construction géométrique.



Soit par exemple A B l'vnité, & qu'il faille multiplier B D par B C, ie n'ay qu'a ioindre les poins A & C, puis tirer D E parallele a C A, & B E est le produit de cete Multiplication.

Oubien s'il faut diuiser B E par B D, ayant ioint les poins E & D, ie tire A C parallele a D E, & B C est le produit de cete diuision.

Figure 1. Multiplication et division de deux lignes (Descartes, 1637, p. 298)

Ainsi tout problème de géométrie se ramène au calcul de quelques lignes et il peut être traité comme un problème d'algèbre. Ce qui signifie qu'il faut le considérer comme déjà fait, nommer les lignes connues et inconnues et produire des équations entre ces lignes, équations qu'il suffit alors de résoudre pour pouvoir construire la solution du problème. Descartes dit pouvoir résoudre ainsi « tous les problèmes de géométrie » (Descartes, 1637, p. 297). Pour ceux relatifs à une courbe il faut que cette courbe soit « géométrique » au sens cartésien, c'est-à-dire pour laquelle tous les points « ont nécessairement quelque rapport à tous les points d'une ligne droite, qui peut être expliqué par quelque équation, en tous par une même. » (Descartes, 1637, p. 319). Par exemple considérons la figure 2. Les points de l'ellipse passant par *C* et *E*, sont appliqués sur la droite (*GA*), *A* étant choisi « pour commencer par lui les calculs » (Descartes, 1637, p. 320), selon une certaine direction, ici perpendiculaire. La droite (ici l'axe de l'ellipse) et le point sont choisis de sorte que l'équation de la courbe soit la plus simple possible. Pour chaque point de la courbe, Descartes produit deux grandeurs (*AB* égale à *CM,* notée *x* et *CB* égale à *AM* notée *y*) qui, puisque la courbe est géométrique, satisfont une équation polynomiale, indépendante du choix de *C* sur la courbe. Dans l'étude de cette méthode, les participants de l'atelier ont pu se convaincre qu'il n'y a pas de « repère cartésien » qui serait défini préalablement à la courbe étudiée. De plus, *x* et *y* ne désignent pas des nombres mais des segments et il n'y a ni axes ni orientation.

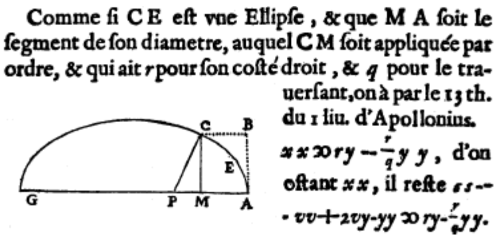

Comme si CE est vne Ellipse, & que MA soit le segment de son diametre, auquel CM soit appliquée par ordre, & qui ait *r* pour son costé droit, & *q* pour le trauersant, on à par le 13 th. du 1 liu. d'Apollonius. $xx \propto ry - \frac{r}{q}yy$, d'on ostant xx, il reste $ss - vv + 2vy - yy \propto ry - \frac{r}{q}yy$.

Figure 2. Mise en équation pour une ellipse (Descartes, 1637, p. 343)

Ce long préambule nous a paru nécessaire lors de l'atelier s'adressant à des formateurs mais a été réduit pour nos élèves au fait que x et y étant des longueurs, ils ne peuvent désigner *in fine* que des nombres positifs. Nous avons bien conscience de procéder à un amalgame entre nombre et longueur mais cela nous a paru difficile à éviter à ce stade de la formation mathématique de nos élèves.

Le cadre étant posé, nous avons soumis le problème de Descartes aux participants. La lecture d'extraits significatifs des pages 342 à 347 de sa *Géométrie* leur a permis de comprendre que son but est de déterminer la normale à la courbe en un point *C,* sachant que cette normale est le diamètre du cercle tangent de centre *P*. Il explique que, un point *P* étant placé sur la droite sur laquelle les points de la courbe sont appliqués, le cercle de centre *P* et passant par *C*, la recoupe « nécessairement » en un autre point *E*. Ce point est confondu avec *E* lorsque le cercle est tangent. Descartes traduit cette configuration par le fait que l'équation, vérifiée par les points d'intersection de la courbe et du cercle, a alors une solution double. Il s'agit donc de déterminer la position de *P* assurant cette contrainte. Les participants ont donc tout d'abord été invités à suivre pas à pas les étapes du raisonnement et des calculs de Descartes sur le cas particulier d'un arc de parabole. Ensuite une étude de l'activité proposée à nos élèves leur a permis d'évaluer les adaptions réalisées et juger de leur pertinence.

Exprimer en fonction de ses coordonnées (x, y) le fait que le point E est sur le cercle de centre P passant par C, puis le fait qu'il est sur la parabole.

Par le moyen d'une de ces deux équations, j'ôte de l'autre équation l'une des deux quantités indéterminées x ou y de façon qu'il reste après cela une équation en laquelle il n'y a plus qu'une seule quantité indéterminée x ou y.

[Éliminer y pour trouver une équation en x]

Or après qu'on a trouvé une telle équation, au lieu de s'en servir pour trouver les quantités x ou y, on la doit employer à trouver v ou s qui déterminent le point P qui est demandé.

Puis aussi il faut considérer que lorsque le cercle touche la courbe sans la couper, les deux solutions de l'équation sont égales. [Autrement dit, il faut trouver v tel que l'abscisse de C soit une solution double.]

Montrer que l'équation équivaut à $(x^2 - 9)(x^2 + 10 - 2v) = 0$

Déterminer v.

Figure 3. Extrait de la fiche élève

En effet d'une part, même si, autant que faire se peut, les questions sont portées par les mots mêmes de Descartes (en gras, sur la fiche) le texte est allégé et réécrit avec notre orthographe. D'autre part les calculs sont fortement modernisés et le problème est placé dans le cadre de la géométrie repérée. Enfin, une fois obtenues les coordonnées de *P*, les calculs sont prolongés par la recherche de la pente de la normale, puis celle de la tangente. Cette activité aboutit ainsi sur la formule donnant la fonction dérivée de la fonction carré.

En 1638, dans une lettre au mathématicien Claude Hardy (Descartes, 1898, p. 170), Descartes précise que les calculs peuvent être simplifiés s'il ne s'agit que de déterminer la tangente, en remplaçant le cercle par une droite sécante en *C*. Reprenant cette idée, nous avons pu établir avec les élèves les formules de dérivation des fonctions cube, inverse et racine carrée. Les élèves ont fait d'eux-mêmes le lien entre les calculs et l'obtention d'une position limite de la sécante. Nous avons donc retrouvé les attendus du programme.

1.3 Bilan de cette approche par la tangente à un cercle

Lors de la discussion qui a suivi cette présentation, nous avons pu argumenter que, malgré la difficulté de l'activité basée sur le texte de Descartes, éprouvée en classe et soulignée par les participants, celle-ci a permis aux élèves d'accéder plus naturellement à l'idée de position limite. En cela notre objectif a été atteint.

2 Une approche de la tangente comme objet d'analyse

Notre expérience d'enseignantes nous a montré à quel point les obstacles à la compréhension des liens entre dérivation et tangente sont nombreux, d'un point de vue épistémologique comme didactique. Nous avons donc exploré plusieurs pistes. Et, parallèlement à l'expérimentation relatée en première partie, notre groupe a travaillé sur une approche plus analytique, objet du second temps de l'atelier.

Nous avons ainsi partagé avec les participants une séquence expérimentée dans d'autres classes et qui cette fois prend appui sur l'ouvrage du Marquis de l'Hospital, *L'analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes,* publié en 1696 (L'Hospital, 1696). Dans son ouvrage, celui-ci présente en français le nouveau calcul de Leibniz, auquel il a été initié par Jean Bernoulli au sein du groupe des malbranchistes, sous une forme axiomatico-déductive très pédagogique, adaptée aux "commençans", et donc également à nos élèves.

2.1 Les « différences » et leur calcul

Durant l'atelier, la lecture d'extraits de la préface de l'ouvrage, des premières définitions, « demandes » ou « suppositions », a permis de mettre en évidence plusieurs points-clés de la théorie du Marquis.

L'« analyse » mise en exergue dans le titre de son livre ne se limite pas à celle des grandeurs finies, comme le fait l'algèbre, mais aux grandeurs infinies, et même au-delà : « L'analyse ordinaire ne traite que des grandeurs finies, celle-ci pénètre jusque dans l'infini même. […] On peut même dire que cette analyse s'étend au-delà de l'infini. ». Il s'agit d'analyse au sens de « calcul infinitésimal » (L'Hospital, 1696, préface).

Sa conception de la ligne courbe est celle d'un « polygone d'une infinité de côtés […] infiniment petits », les positions qu'ont ces côtés entre eux formant alors la « courbure », qu'il associe aux tangentes de la courbe (L'Hospital, 1696, préface). Après avoir distingué les quantités variables des quantités constantes, il définit une « différence » comme « la portion infiniment petite dont une quantité variable augmente ou diminue continuellement » (L'Hospital, 1696, p. 2). Cette définition est ensuite mise en œuvre sur plusieurs grandeurs géométriques issues d'une même figure (figure 4) : segments de droite (*PM*), portions de lignes courbes (*AM*), aires curvilignes (*APM*).

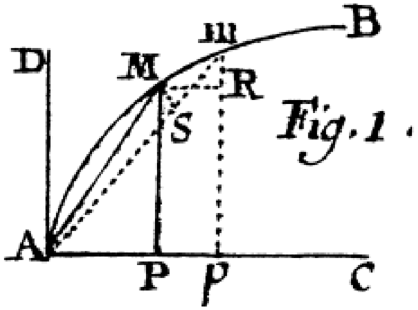


Figure 4. Définition des « différences » (L'Hospital, 1696, planche 1ère, p. 24)

Les règles de calcul sur ces différences sont assez facilement établies. Elles dépendent des règles usuelles de l'algèbre et du principe qui indique que « *dxdy* est une quantité infiniment petite par rapport aux autres termes » (L'Hospital, 1696, p. 4). Durant l'atelier, les participants ont pu tester l'efficacité de cette méthode en déterminant la formule de la différence d'un quotient *x*/*y*. Ils ont découvert que ce texte offre une méthode simple et astucieuse pour démontrer les formules de dérivées des opérations courantes.

2.2 La méthode des tangentes

Un peu plus loin dans l'ouvrage, le Marquis expose sa méthode de détermination des tangentes. Au préalable, il définit une tangente de la façon suivante : « Si l'on prolonge un des petits cotés *Mm* du polygone qui compose une ligne courbe, ce petit côté ainsi prolongé sera appelé la *Tangente* de la courbe au point *M* ou *m*. » (l'Hospital, 1696, p. 11).

Dans le sillage du travail de Leibniz, la méthode exposée par le Marquis repose sur la similitude de deux triangles. En effet (figure 5), les triangles *MRm* et *MPT* sont semblables, d'où l'égalité des rapports : $mR/RM = MP/PT$, soit encore $dy/dx = y/PT$, en posant $MR = dx$, $mR = dy$, $MP = y$ et $AP = x$. La sous-tangente *PT* est alors calculée ainsi : $PT = y.dx/dy$. Puis la méthode est énoncée en ces termes (L'Hospital, 1696, p. 11) :

« Or par le moyen de la différence de l'équation donnée, on trouvera une valeur de *dx* en termes qui sont tous affectés par *dy*, laquelle étant multipliée par *y* et divisée par *dy*, donnera une valeur de la sous-tangente *PT* en termes entièrement connus et délivrés des différences, laquelle servira à mener la tangente cherchée *MT*. »

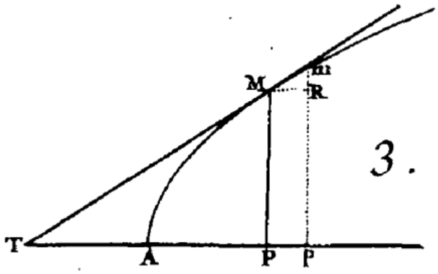


Figure 5. Méthode des tangentes (L'Hospital, 1696, planche 1ère, p. 24)

Sa méthode, certes fondée sur un calcul, est donc une méthode de construction, qui s'appuie sur la détermination de la sous-tangente *PT* pour mener la tangente cherchée. C'est cette particularité qui permettra de lever en classe une partie des difficultés liées à la compréhension du nombre dérivé.

2.3 Application de la méthode

Durant l'atelier, nous avons souhaité faire expérimenter cette méthode sur une courbe non triviale pour des participants aguerris en mathématiques. Nous avons donc choisi le folium de Descartes, que le Marquis traite dans son ouvrage (L'Hospital, 1696, p. 15). Cette courbe d'équation $y^3 - x^3 = axy$ (avec différentes valeurs de a fixées) a été présentée dans un repère, avec un anachronisme assumé. L'objectif était alors de calculer la sous-tangente *PT* avec la méthode du Marquis, puis de construire la tangente demandée. Nous avons même été jusqu'à proposer cette situation pour des coordonnées de point négatives, ce qui n'est pas envisageable dans la vision purement géométrique du Marquis. La méthode fournit néanmoins encore des résultats corrects.

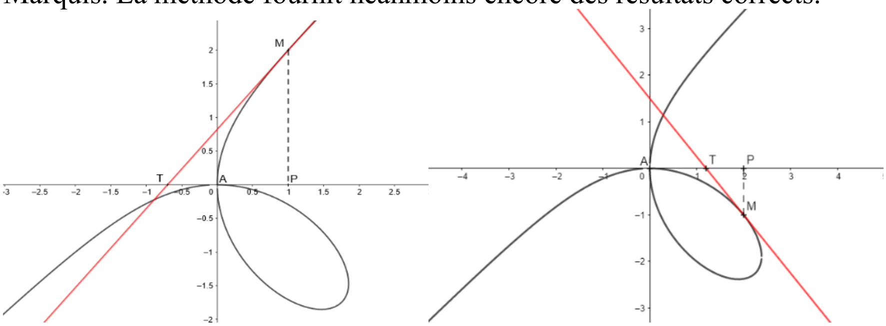


Figure 6. Méthode des tangentes appliquée au folium dans le cas $M\,(1 ; 2)$ et $a = 3{,}5$, puis dans le cas $M\,(2 ; -1)$ et $a = 4{,}5$

En classe, au contraire, la construction des tangentes a été effectuée sur une courbe bien connue des élèves: la parabole représentative de la fonction carré (figure 7).

1G_Mathématiques_Approche historique de la notion de tangente (suite)

3) Le XVII^{ème} siècle :

- **Le Marquis de l'Hospital** (1661 – 1704) est l'auteur de *L'analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* en 1696. Ce texte s'appuie sur les leçons que lui a données Jean Bernoulli, pendant l'hiver 1691-1692, sur le calcul différentiel inventé par Leibniz en 1684. C'est le premier livre en français portant sur cette méthode de calcul.

« *Usage du calcul des différences pour trouver les Tangentes de toutes sortes de lignes courbes.*

DEFINITION.

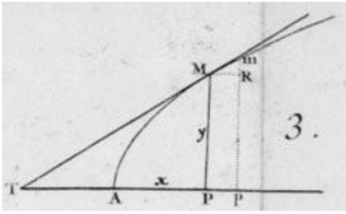
Si l'on prolonge un des petits côtés *Mm* du polygone qui compose une ligne courbe, ce petit côté ainsi prolongé sera appelé la *Tangente* de la courbe au point *M* ou *m*.

PROPOSITION I.

Problème.

9. *Soit une ligne courbe* AM *telle que la relation de la coupée* AP *à l'appliquée* PM, *soit exprimée par une équation quelconque, et qu'il faille du point donné* M *sur cette courbe mener la tangente* MT.

Ayant mené l'appliquée MP, et supposé que la droite *MT* qui rencontre le diamètre au point *T*, soit la tangente cherchée, on concevra une autre appliquée *mp* infiniment proche de la première, avec une petite droite *MR* parallèle à *AP*. Et en nommant les données *AP*, *x*, *PM*, *y* (donc *Pp* ou *MR* = *dx*, et *Rm* = *dy*) les triangles semblables *mRM* et *MPT* donneront $mR\,(dy).RM(dx)::MP(y).PT=\frac{y\,dx}{dy}$. Or par le moyen de la différence de l'équation donnée, on trouvera une valeur de *dx* en termes qui seront tous affectés par *dy*, laquelle étant multipliée par *y* et divisée par *dy*, donnera une valeur de la sous-tangente *PT* en termes entièrement connus et délivrés des différences, laquelle servira à mener la tangente cherchée *MT*. »

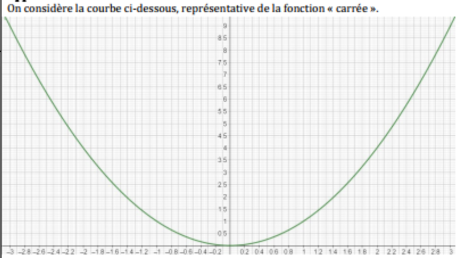


Question :

1) **Justifier avec des calculs effectués en notation actuelle la relation : $PT=\frac{y\,dx}{dy}$.**
2) **Résumer la méthode permettant de tracer la tangente (MT).**

Application :

On considère la courbe ci-dessous, représentative de la fonction « carrée ».



1. Sur cette courbe représentative, placer le point A, origine du repère, le point M de la courbe d'abscisse 2 et le point P, projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses.
2. Dans les cas décrits dans chacune des colonnes du tableau suivant, construire le point m de la courbe tel que $MR = dx$, compléter les lignes suivantes, et tracer le point T et la droite (MT) dans le repère (on prendra soin de tracer d'une couleur différente chacune des cinq droites obtenues) :

dx	1	0,5	0,1	0,01	0,001
$dy\ (= Rm)$					
$PT\ \left(= y\frac{dx}{dy}\right)$					
$\frac{dy}{dx}$					

3. Si l'on choisit de prendre le point m de plus en plus proche de M, que se passe-t-il « à la limite » pour :
   a) La valeur de dx ? b) La position de T ? c) La valeur de $\frac{dy}{dx}$?
4. Quel lien peut-on faire entre la droite (MT) et le nombre $\frac{dy}{dx}$?
5. Refaire le même tableau et les mêmes constructions en choisissant désormais pour point M le point de la courbe d'abscisse -3.
   Peut-on observer le même lien entre (MT) et $\frac{dy}{dx}$ que dans la question précédente ?

Figure 7. Fiche d'activité élève basée sur la méthode des tangentes du marquis de l'Hospital et application à la parabole

Dans la discussion avec les participants, la force didactique de cette approche a été soulignée. En utilisant la similitude du triangle caractéristique, difficile à appréhender du fait que ses côtés tendent simultanément vers 0, et d'un triangle plus tangible, dont un côté est la sous-tangente, l'image abstraite de ce triangle évanouissant est avantageusement remplacée par le triangle *PTM*, ancré sur l'axe des abscisses et dont une dimension *PM* est fixe. Si l'on prend les point *m* et *M* de plus en plus proches l'un de l'autre, soit *dx* de plus en plus proche de 0, la suite des points *T* tend vers une position limite bien identifiable par les élèves, et avec un coefficient directeur qu'ils sont en mesure d'estimer.

2.4 Bilan de cette approche par la sous-tangente

Nous avons partagé avec les participants notre analyse et notre bilan de cette séquence d'enseignement. La perspective historique choisie pour cette activité a porté ses fruits : elle a dépaysé les élèves en les immergeant dans une pensée d'une autre époque et un formalisme qu'ils ne connaissaient pas. Elle a également rempli son objectif en permettant de surmonter l'obstacle épistémologique et didactique que représente le nombre dérivé en tant que coefficient directeur d'une tangente.

Conclusion

Les participants à l'atelier se sont trouvés immergés dans nos dispositifs pédagogiques et ont été à même de les comparer et discuter de leurs avantages respectifs. Les échanges ont permis de relever ce que nos deux approches ont en commun : l'appui sur des objets géométriques, tangentes et sous-tangentes. Ces approches permettent, l'une comme l'autre, d'ancrer la compréhension d'un concept abstrait, le nombre dérivé, dans des configurations plus concrètes pour les élèves. L'objectif de faciliter leur entrée dans le calcul différentiel est donc atteint.

Le débat peut alors porter sur le choix pour l'enseignant de suivre l'une ou l'autre de ces deux voies, choix dépendant essentiellement de la progression dans laquelle il souhaite l'inscrire, plus algébrique avec la méthode de Descartes, et plus analytique avec celle du Marquis de l'Hospital, celle-ci induisant également un autre regard sur les courbes, « polygones d'une infinité de côtés infiniment petits ». Un travail complémentaire peut ainsi être envisagé sur les équations et la géométrie analytique dans le premier cas, et déboucher sur une introduction de la fonction exponentielle par la sous-tangente dans l'autre.

RÉFÉRENCES

Descartes, R., (1637). La Géométrie , *Discours de la méthode,* Leyde, Jan Maire.

Euclide, (1804). *Les éléments de géométrie d'Euclide, traduits littéralement et suivis d'un Traité du cercle, du cylindre, du cône et de la sphère, de la mesure des surfaces et des solides, avec des notes, par F. Peyrard.*, Paris, F. Louis.

L'Hospital (de), G. F. A., (1696). *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes*, Paris: Imprimerie Royale.

Schneider-Gilot M., (1991). Quelques difficultés d'apprentissage du concept de tangente, *Repères-IREM,* 5, 65- 82.

Descartes, R., (1898). Charles Adam et Paul Tannery (Eds), *Correspondances*, tome II, Paris, Léopold Cerf, 170-172.