ENSEIGNEMENT DES PROBABILITÉS DANS L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE AU BÉNIN : RAPPORT DES ÉLÈVES AU CALCUL ÉLÉMENTAIRE DES PROBABILITÉS

Henri DANDJINOU
Institut de Mathématiques et de sciences physiques

Alain BRONNER
Université de Montpellier et Laboratoire LIRDEF

RÉSUMÉ

Dans ce travail, nous avons étudié l'apprentissage du calcul élémentaire des probabilités. Pour cet effet, nous nous sommes d'abord appuyés sur la notion de praxéologie développée par Yves Chevallard (1999) dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (TAD), pour étudier l'enseignement du calcul des probabilités. Ensuite, en nous basant sur la notion d'anthropologie cognitive de la TAD (Chevallard, 1992), nous proposons une typologie des rapports personnels des élèves à chacun des deux premiers principes de Laplace, à partir d'un test administré à des élèves ayant fraîchement suivi un enseignement sur les probabilités. Nous sommes arrivés à la conclusion que les élèves mobilisent dans des proportions variées les deux principes de Laplace, mais le rapport au calcul élémentaire des probabilités n'est pas conforme au rapport de l'institution d'enseignement pour un grand nombre d'élèves.

MOTS CLÉS

TAD, Probabilités, Premier principe de Laplace, Deuxième principe de Laplace, Apprentissage.

INTRODUCTION

Depuis l'introduction des probabilités dans les programmes béninois, dans les années 1960, leur enseignement est de tout temps basé sur l'axiomatique de Kolmogorov et débouche immédiatement sur le premier principe de Laplace, le deuxième principe de Laplace n'étant qu'implicite. D'après les travaux de Michel Henry (1999, 2010), cette manière d'introduire les probabilités a conduit à un échec de l'apprentissage du calcul des probabilités. Comment cet échec peut-il être étudié et se traduire, voire s'expliquer en termes de praxéologies du calcul des probabilités?

La réponse à cette préoccupation nécessite l'étude de l'apprentissage du calcul des probabilités en lien avec son enseignement. Dans une récente communication, présentée au premier colloque de l'Association des Didacticiens de Mathématiques Africains (ADiMA), nous avons étudié l'enseignement du calcul élémentaire des probabilités au Bénin (H. Dandjinou et A. Bronner, 2016). Le présent travail, qui en est un prolongement, est une étude diagnostique qui a pour but d'appréhender l'état de l'apprentissage du calcul des probabilités au Bénin par l'étude du rapport des élèves aux deux premiers principes de Laplace.

Nous organisons la présente communication en trois parties. Dans un premier temps, nous allons préciser la problématique, suivie du cadre théorique et de la méthodologie de recherche. Nous ferons ensuite le point de l'enseignement du calcul des probabilités au Bénin. Enfin nous étudierons l'apprentissage du calcul élémentaire des probabilités au Bénin, en analysant les types de rapports des élèves aux deux premiers principes de Laplace.

1. Problématique, cadre théorique et méthodologie

Dans cette partie, après avoir posé le problème de notre étude, nous préciserons nos éléments théoriques et la méthodologie utilisée pour étudier l'enseignement et l'apprentissage du calcul élémentaire des probabilités au Bénin.

1.1. Problématique

Depuis leur introduction dans les programmes béninois d'enseignement, les probabilités ont été présentes dans tous les programmes qui se sont succédés et ont porté presque sur les mêmes objets d'enseignement. Leur enseignement, concentré dans les classes terminales, est essentiellement basé sur l'axiomatique de Kolmogorov et débouche rapidement sur le premier principe de Laplace. Le deuxième principe de Laplace n'y apparait qu'implicitement à travers l'axiome d'additivité dénombrable et l'utilisation de la loi de probabilité d'une variable aléatoire dans le calcul de la probabilité d'un événement. L'enseignement des probabilités à partir de l'approche classique, utilisée aujourd'hui au Bénin, conduit à l'échec de l'apprentissage, qui se traduit par le fait que le calcul des probabilités se ramène à l'analyse combinatoire dont la plupart des élèves ont un mauvais souvenir (Henry, 1999). Il nous semble important de préciser les praxéologies des élèves qui pourraient expliquer cet échec aussi bien par rapport au premier principe de Laplace qu'au deuxième principe.

Pour étudier ainsi le rapport personnel des élèves béninois des classes terminales aux deux premiers principes de Laplace qui fondent le calcul élémentaire des probabilités, nous nous posons la question suivante : « Quelles sont les praxéologies des élèves béninois par rapport au calcul élémentaire des probabilités ? » Par calcul élémentaire des probabilités, nous entendons la partie des probabilités concernant l'introduction au calcul des probabilités et nous excluons la probabilité conditionnelle, les variables aléatoires et les lois classiques. C'est donc la partie qui permet d'observer effectivement l'enseignement/apprentissage des approches de définition de la probabilité d'un événement. Nous formulons pour la présente étude la double hypothèse que d'une part, les élèves béninois dans une grande majorité ont une bonne connaissance du premier principe de Laplace sans être capables de l'appliquer avec succès dans le calcul des probabilités et d'autre part, ils ont une connaissance insuffisante du deuxième principe de Laplace.

1.2. Cadre théorique

Pour étudier le rapport des élèves aux deux premiers principes de Laplace, nous avons mobilisé fondamentalement la théorie anthropologique du didactique (TAD) développée par Yves Chevallard (1992) dans sa composante d'anthropologie cognitive. Il y est défini les termes primitifs d'objet O, de personnes x et Y et d'institutions I. L'objet O d'enseignement de notre étude est constitué par le calcul élémentaire des probabilités, l'élève est la personne x et le professeur est la personne Y, tandis que l'institution où l'objet O est programmé est la classe terminale des séries scientifiques. Les rapports personnels $R_x(O)$ et $R_Y(O)$ sont respectivement les connaissances que les personnes x et Y ont d'un objet O donné, et pour une institution I et un objet O donnés, le rapport institutionnel $R_I(O)$ est ce qu'il est prévu de l'objet O, autant pour l'élève que pour le professeur dans cette institution. Pour attraper le rapport personnel des élèves béninois au calcul élémentaire des probabilités, nous allons nous intéresser aux deux premiers principes de Laplace.

La notion d'organisation praxéologique, issue également de la TAD (Chevallard, 1999), a servi à étudier les différents types de savoir de la transposition didactique (Chevallard, 1991), liés au calcul élémentaire des probabilités dans le cadre de l'étude de l'enseignement du calcul des probabilités. Les résultats de cette étude sont exploités dans l'étude de l'apprentissage du calcul des probabilités à travers l'analyse de l'organisation mathématique des élèves face à des problèmes de calcul de probabilités. Les éléments composant l'organisation praxéologique sont respectivement les notions de type de tâches, de techniques, de technologies et de théories. Le type de tâches précise l'objet de ce que l'on veut décrire, analyser ou évaluer, etc. Pour un type de tâches donné, une technique est une manière de réaliser les tâches qui y relèvent et la technologie relative à une technique est tout discours rationnel sur cette technique, la technologie se justifiant elle aussi par une théorie.

1.3. Méthodologie de recherche

Les données empiriques utilisées pour l'étude de l'apprentissage du calcul élémentaire des probabilités sont essentiellement constituées des réponses des élèves à un test après un enseignement du calcul des probabilités. Mais il a fallu faire d'abord une présentation et une analyse de l'enseignement, à partir d'enregistrements audio, de notes de cours d'élèves et de fiches pédagogiques. De façon précise :

- Nous avons observé en 2012-2013 des séances de cours de probabilités (deux séances de trois heures par classe) de deux professeurs dans quatre classes terminales des séries scientifiques de trois établissements de Lokossa, ville située au Sud-Ouest du Bénin, où nous avions été en service ;
- Nous avons récupéré les notes de cours des élèves et la fiche pédagogique de l'un des deux professeurs ;
- Nous avons administré simultanément aux élèves des quatre classes un test portant sur le calcul des probabilités, allant des définitions aux calculs effectifs de probabilités ;
- Nous avons analysé les enregistrements audio, les notes de cours des élèves et la fiche pédagogique pour étudier l'enseignement du calcul des probabilités, que nous avons présenté au premier colloque de l'Association des Didacticiens de Mathématiques Africains, et que nous rappelons dans le présent travail ;
- Nous avons analysé les réponses des élèves à deux exercices du test pour étudier leur rapport personnel aux deux premiers principes de Laplace.

Ayant des âges compris entre 17 ans et 23 ans et d'une moyenne d'âge estimée à 20 ans, les élèves des quatre classes sont au nombre de 115 parmi lesquels 100 ont accepté composer le test.

2. L'enseignement du calcul élémentaire des probabilités au Bénin

L'étude de l'apprentissage d'un objet d'enseignement nécessite au préalable celle de son enseignement, car le savoir appris ne peut qu'être appréhendé par rapport au savoir enseigné. L'enseignement du calcul élémentaire des probabilités a fait de notre part l'objet d'une étude préalable que nous résumons dans cette partie. Cette étude organisée dans le cadre de la transposition didactique a consisté à déterminer l'organisation mathématique du calcul des probabilités à partir du seul type de tâches T : « calculer la probabilité d'un événement ».

2.1. L’organisation mathématique du calcul des probabilités

L’organisation mathématique révèle globalement au niveau de l’ensemble des étapes de la transposition didactique l’existence de quatre techniques relevant du type de tâches T, que nous avons respectivement notées et nommées (Dandjinou, Bronner, 2016) :

- Technique d’équiprobabilité (TE) ;
- Technique de non équiprobabilité (TNE) ;
- Technique « Démarche expérimentale » (DE) ;
- Techniques « Addition des probabilités des événements élémentaires » (APEE).

Ces techniques se déclinent comme ci-dessous détaillées.

2.1.1. Technique d’équiprobabilité (TE)

La technique « Technique d’équiprobabilité », se décline de la manière suivante :

- déterminer le nombre de cas possibles ;
- déterminer le nombre de cas favorables à l’événement ;
- calculer le rapport du nombre de cas favorables au nombre de cas possibles.

À cette technique TE est associée la technologie que nous nommons « Premier principe de Laplace » comprenant :

- le vocabulaire des probabilités (expérience aléatoire, univers des éventualités, événements, …) ;
- l’analyse combinatoire ;
- la formule $p(A) = \frac{\mathrm{Card(A)}}{\mathrm{Card(\Omega)}}$.

La théorie qui fonde cette technologie est l’approche laplacienne du calcul des probabilités.

2.1.2. Technique de non équiprobabilité (TNE)

La « Technique de non équiprobabilité » se décompose comme suit :

- réaliser une partition de l’événement en des événements dont on peut connaître les probabilités, ces événements pouvant être des événements élémentaires;
- déterminer la probabilité de chaque événement de la partition;
- calculer la somme des probabilités des événements de la partition de l’événement.

A cette technique, nous associons la technologie que nous nommons « Additivité dénombrable » qui se compose :

- du vocabulaire des probabilités;
- de la partition d’un ensemble;
- de l’axiome d’additivité dénombrable.

L’axiomatisation de Kolmogorov est la théorie qui fonde cette technologie.

2.1.3. Technique « démarche expérimentale » (DE)

Cette technique se décline comme il suit :

- réaliser l'expérience aléatoire un certain grand nombre de fois n;
- déterminer progressivement la fréquence F_n de l'événement lorsque n évolue;
- estimer la limite de F_n lorsque n tend vers $+\infty$.

La technologie qui justifie la technique « démarche expérimentale est la « Approche fréquentiste »; elle se décompose comme suit :

- le vocabulaire des probabilités ;
- la fréquence d'une modalité en statistique ;
- la limite à l'infini d'une fonction numérique de variable réelle ;
- la loi des grands nombres.

Les théorèmes de limite centrale et les lois de grands nombres constituent la théorie qui fonde cette technologie.

2.1.4. Technique « Addition des probabilités des événements élémentaires » (APEE)

La technique que nous désignons par « Addition des probabilités des événements élémentaires (APEE) » se définit comme suit :

- écrire en extension l'événement;
- déterminer éventuellement les probabilités des événements élémentaires;
- additionner les probabilités des événements élémentaires qui composent l'événement.

A cette technique nous associons la technologie que nous nommons « Deuxième principe de Laplace » et qui se définit par :

- le vocabulaire des probabilités;
- le deuxième principe de Laplace.

La théorie associée à cette technologie est l'approche laplacienne du calcul des probabilités.

2.2. La transposition didactique du calcul élémentaire des probabilités

Les quatre techniques ci-dessus identifiées, qui relèvent du type de tâches T, intègrent les différents niveaux de la transposition didactique comme le résume le tableau ci-dessous (Dandjinou, Bronner, 2016).

	Savoir savant	Savoir à enseigner	Apprêt didactique	Savoir enseigner
Techniques relevant du type de tâches	TE, TNE, APEE et DE	TE et TNE	TE et APEE	TE et TNE ou TE et APEE

Il ressort de ce tableau récapitulatif que les techniques TE et TNE proposées par les instructions officielles sont effectivement enseignées par les professeurs de mathématiques au Bénin. Cependant, chez certains enseignants, l'enseignement du calcul des probabilités est basé sur la technique APEE présente dans l'apprêt didactique.

En somme, les différentes praxéologies montrent que, par rapport au calcul de la probabilité d'un événement lié à une expérience aléatoire, le savoir savant diffère des autres savoirs par l'approche fréquentiste. Le deuxième principe de Laplace, qui n'apparaît pas dans les programmes béninois comme un élément technologique pouvant justifier le calcul des probabilités, est présent dans l'apprêt didactique et dans la pratique enseignante de certains enseignants.

3. Apprentissage du calcul élémentaire des probabilités

L'approche laplacienne, l'approche fréquentiste sont les deux approches de définition de la probabilité reconnues sur le plan épistémologique. Si avec l'approche fréquentiste, on peut donner du sens à la notion de probabilité d'un événement, l'approche laplacienne s'appuie sur les deux premiers principes de Laplace, qui intégrés dans l'axiomatique de Kolmogorov permettent de calculer la probabilité d'un événement. Nous estimons ainsi que l'appréhension du calcul élémentaire des probabilités passe par l'étude du rapport des élèves aux deux premiers principes de Laplace.

Dans cette partie, nous présentons les deux exercices choisis pour notre étude puis nous faisons une analyse des réponses des élèves à ces exercices.

3.1. Les exercices du test

Le test que nous avons administré aux élèves comporte sept exercices dont nous avons choisi deux représentatifs pour l'étude de l'apprentissage des deux premiers principes de Laplace. Nous présentons dans cette section les énoncés des exercices choisis pour l'étude suivis de leur analyse a priori.

3.1.1. Énoncés des exercices

Exercice 1

Un sac contient trois jetons blancs et deux jetons noirs, tous indiscernables au toucher. On tire successivement sans remise trois jetons dans le sac.

Calcule la probabilité qu'exactement deux des trois jetons tirés soient blancs.

Exercice 2

L'univers des éventualités d'une expérience aléatoire étant $\Omega = \{0; 1; 2; 3\}$, on donne dans le tableau ci-dessous les probabilités des événements élémentaires.

e_i	0	1	2	3
$p(\{e_i\})$	0,17	0,64	a	0,01

- 1) Détermine le nombre réel a.

- 2) Calcule la probabilité que le résultat de l'expérience aléatoire soit un nombre impair.

3.1.2. Analyse a priori

Exercice 1

L'exercice 1 est un exercice classique du modèle d'urne. Il vise à vérifier le rapport des apprenants au premier principe de Laplace : le rapport du nombre de cas favorables au nombre de cas possibles. La résolution experte ci-après est attendue des élèves : Si Ω désigne l'univers des éventualités de l'expérience aléatoire, alors $\mathrm{Card}(\Omega) = \mathrm{A}_5^3$. L'événement A : « exactement deux des trois jetons tirés sont blancs » ayant pour cardinal $A_3^2 \times A_2^1 \times \frac{3!}{2!1!}$, on a $(A) = \frac{A_3^2 \times A_2^1 \times \frac{3!}{2!1!}}{\mathrm{A}_5^3} = \frac{3}{5}$. Une difficulté souvent constatée chez les élèves en analyse combinatoire peut les amener à poser $p(A) = \frac{A_3^2 \times A_2^1}{\mathrm{A}_5^3} = \frac{1}{5}$. De même, le contrat didactique, traduit ici par la plus grande fréquence des exercices résolus utilisant les combinaisons, peut entraîner certains élèves à écrire $p(A) = \frac{C_3^2 \times C_2^1}{\mathrm{C}_5^3} = \frac{3}{5}$.

Exercice 2

La résolution de la première question nécessite l'utilisation du deuxième principe de Laplace et de l'axiome $p(\Omega) = 1$, Ω étant l'univers des éventualités de l'expérience aléatoire. L'exploitation des données de l'exercice permet alors d'aboutir à $0{,}17 + 0{,}64 + a + 0{,}01 = 1$. Ce qui donne : $a = 0{,}18$. La résolution de la deuxième question 2 ne nécessite que le deuxième principe de Laplace. Pour répondre à cette question, il faut d'abord remarquer que l'événement A dont on veut calculer la probabilité est composé des éventualités 1 et 3, et obtenir ensuite après utilisation du deuxième principe de Laplace : $\mathrm{p(A)} = \mathrm{p}(\{1\}) + \mathrm{p}(\{3\}) = 0{,}64 + 0{,}01 = 0{,}65$.

Des exercices similaires à l'exercice 2 ont été traités dans l'étude des variables aléatoire. C'est donc normal qu'on s'attende à des réponses correctes. C'est même possible que la question soit bien résolue sans que l'élève ne soit conscient de l'utilisation du deuxième principe de Laplace. Il n'est cependant pas exclu que certains élèves virent au premier principe de Laplace compte tenu de la fréquence très forte de son utilisation. Des difficultés d'ordres algébrique et numérique peuvent être constatées chez d'autres élèves.

3.2. Apprentissage du premier principe de Laplace

À partir des productions des élèves relatives à l'exercice 1, nous nous proposons d'étudier le rapport des élèves au premier principe de Laplace. Dans un premier temps nous allons présenter et analyser les résultats pour ensuite déduire une typologie des types de rapports des élèves au premier principe de Laplace.

3.2.1. Présentation et analyse des résultats relatifs à l'exercice 1

Parmi les techniques de calcul de probabilités TE, APEE et TNE, identifiées au niveau du savoir enseigné, c'est bien la technique TE qui convient pour a résolution de l'exercice 1. Les productions des élèves par rapport à l'exercice 1 peuvent être réparties en quatre catégories que nous désignons respectivement TE-C, TE-PC, TE-I, TNA et qui se caractérisent comme il suit.

Le groupe TE-C : Nous disons qu'un élève est dans la catégorie « Technique d'équiprobabilité complète (TE-C) » lorsqu'il utilise la technique TE avec succès. Un seul élève sur les cent a pu être inscrit dans ce groupe pour l'exercice 1 avec la production ci-après.

> Notons les boules blanches : B_1, B_2 et B_3, puis les boules noires : N_1 et N_2. Voici dans le désordre, les résultats désirés : {(B_1, B_2, N_1), (B_1, B_3, N_1), (B_2, B_3, N_1), (B_1, B_2, N_2), (B_1, B_3, N_2), (B_2, B_3, N_2)}. Chaque résultat admet 6 permutations c'est-à-dire ordres d'arrivée différents. Les évènements élémentaires sont équiprobables. Aussi, le nombre de résultats possibles est $\mathrm{A}_5^3 = 60 = \mathrm{Card}(\Omega)$ avec Ω l'univers des évènements associés à l'expérience. Désignons par S, l'évènement « exactement deux des trois jetons tirés sont blancs ». On a : $\mathrm{Card}(A) = (6+6+6+6+6+6) = 36$. $\mathrm{p}(S) = \frac{\mathrm{Card(S)}}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{36}{60}$ d'où $\mathrm{p}(S) = \frac{3}{5}$.

Cette production montre une grande maîtrise, non pas seulement du premier principe de Laplace, mais surtout du dénombrement avec une compréhension parfaite de l'expérience aléatoire et de l'événement dont la probabilité est à calculer. Tous les éléments technologiques de la technique TE sont présents dans la production. Il importe de remarquer que la technique de dénombrement utilisée diffère de celle proposée dans la résolution experte de notre analyse a priori. En effet, dans la production, l'élève a cherché à déterminer toutes les éventualités favorables à l'événement.

Le groupe TE-PC : La catégorie « Technique d'équiprobabilité presque complète (TE-PC) » est composée des élèves ayant utilisé le premier principe de Laplace avec la détermination correcte du nombre de cas possibles et qui n'ont pas tenu compte du facteur multiplicateur qui intervient dans la détermination du nombre de cas favorables à l'événement. Les élèves du groupe TE-PC ont une bonne compréhension de l'expérience aléatoire et de l'événement en jeu. À des mots près, leur réponse à la question posée est la production suivante.

Soit Ω l'univers associé à cette expérience aléatoire. $\mathrm{Card}(\Omega) = \mathrm{A}_5^3 = 60$. Pour que deux des trois jetons tirés soient blancs il doit avoir deux jetons blancs parmi les trois puis un jeton noir. Soit p(A) cette probabilité. $\mathrm{p(A)} = \frac{\mathrm{A}_3^2 \times \mathrm{A}_2^1}{\mathrm{A}_5^3} = \frac{6\times 2}{60} = 0{,}2$.

Dans cette production, l'élève montre une bonne analyse de la situation et une bonne connaissance des éléments technologiques nécessaires à l'application du premier principe de Laplace. La nature des cas favorables à l'événement est connue mais leur nombre n'a pas pu être déterminé avec succès.

Le groupe TE-I : Les réponses de la catégorie « Technique d'équiprobabilité incomplète (TE-I) » sont celles des élèves qui ont utilisé le premier principe de Laplace et qui n'ont pas utilisé un mode correct de dénombrement des cas favorables ou des cas possibles. Ce sont les réponses dans lesquelles on note soit un manque de maîtrise des outils de dénombrement, soit une analyse non réussie de la situation. Les productions suivantes sont des réponses caractérisant les élèves du groupe TE-I.

Soit Ω l'univers de cette expérience aléatoire. $\mathrm{Card}\Omega = \mathrm{A}_5^3 = \frac{5\times 4\times 3!}{3!} = 20$. Soit A, l'événement : « tirer exactement deux des trois jetons blancs ». $\mathrm{CardA} = \mathrm{A}_3^2 + \mathrm{A}_2^1 = 3 + 2 = 5$. $\mathrm{p(A)} = \frac{\mathrm{CardA}}{\mathrm{Card}\Omega} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$.

Soit Ω l'univers associé à cette expérience aléatoire. $\mathrm{Card}(\Omega) = \mathrm{C}_3^1 + \mathrm{C}_2^1 = 5$. Soit A l'événement «deux des trois jetons tirés soient blancs». $\mathrm{p(A)} = \frac{\mathrm{Card(A)}}{\mathrm{Card}(\Omega)}$, $\mathrm{Card(A)} = \mathrm{C}_3^1 = 3$. $\mathrm{p(A)} = \frac{3}{5}$.

Dans ces deux productions, on remarque la mobilisation du premier principe de Laplace. Dans le premier cas, on note une bonne analyse de la situation et une maîtrise insuffisante des outils de dénombrement. Par contre, la deuxième production montre une mauvaise analyse de la situation caractérisée par des dénombrements qui ne mettent pas l'accent sur le choix de trois jetons parmi 5.

Le groupe TNA : Le groupe que nous dénommons « Technique non appropriée (TNA) » est celui des élèves chez lesquelles on ne note pas l'intention d'utiliser ni le premier principe de Laplace, ni le deuxième principe de Laplace comme dans l'exemple suivant.

Soit Ω l'univers associé à l'expérience aléatoire.
$\mathrm{Card}(\Omega) = \mathrm{A}_3^3 \times \mathrm{A}_3^2 = 3 \times 2 \times 3 = 18.$

La probabilité qu'exactement deux des trois jetons tirés blancs est 18.

En dehors de l'absence de l'élément technologique principal de la technique TE, on note une mauvaise analyse de la situation et une méconnaissance de la définition de la probabilité.

Les proportions des élèves des catégories ci-dessus mentionnées sont indiquées dans le tableau ci-après.

Classe	TE-C	TE-PC	TE-I	TNA	Pas de réponse	Total
Nombre d'élèves	1	15	58	23	3	100

Résultats statistiques relatifs à l'exercice 1

Ce tableau révèle qu'environ trois quarts des élèves soumis au test ont mobilisé l'élément technologique du premier principe de Laplace pour résoudre l'exercice 1. Mais les autres éléments technologiques de la technique TE dont notamment l'analyse combinatoire et la bonne lecture de la situation ont fait défaut à la quasi-totalité de ces élèves. La complexité relative de la situation de dénombrement de l'exercice 1 se fait remarquer à travers la proportion presque insignifiante des élèves ayant pu dénombrer avec succès les cas favorables.

En somme, il nous semble qu'en face d'un problème nécessitant l'utilisation du premier principe de Laplace, les élèves, ayant une compréhension convenable du problème, optent effectivement et majoritairement pour l'utilisation de ce principe. Parmi eux, ceux qui ne parviennent pas à résoudre le problème butent simplement sur l'analyse combinatoire. A côté de la majorité appliquant le principe requis, il y a une minorité non négligeable qui montre une certaine non maîtrise des connaissances sur les probabilités en général.

3.2.2. Typologie des rapports personnels au premier principe de Laplace

A partir des types de réponses des élèves à l'exercice 1, nous conjecturons une classification des types de rapports au premier principe de Laplace en prenant en compte les éléments technologiques de la technique TE relevant du type de tâches « calculer la probabilité d'un événement ». Nous dégageons ainsi quatre types de rapports au premier principe de Laplace, correspondant respectivement aux quatre types de réponses enregistrés et qui sont :

- « rapport conforme au premier principe de Laplace (RC-PPL) »;
- « rapport presque conforme au premier principe de Laplace (RPC-PPL) »;
- « rapport incomplet au premier principe de Laplace (RI-PPL) »;
- « rapport absence du premier principe de Laplace (RA-PPL) ».

Le type de rapports « RC-PPL » est celui développé par les élèves ayant une bonne maîtrise de tous les éléments technologiques de la technique TE. La bonne maîtrise des outils d'analyse combinatoire chez ces élèves fait qu'ils arrivent à bout de la plupart des problèmes dont la résolution nécessite le premier principe de Laplace. Ce type de rapports est de notre point de vue conforme au rapport institutionnel au calcul des probabilités dans les situations d'équiprobabilité. Nous estimons par exemple que les élèves qui ont une bonne maîtrise de l'analyse combinatoire comme ceux de la catégorie TE-C sont susceptibles d'avoir le rapport RC-PPL.

Le type de rapports « RPC-PPL » est caractérisé par une bonne maîtrise du vocabulaire des probabilités, du premier principe de Laplace et une maîtrise partielle de l'analyse combinatoire, caractérisée uniquement par la réussite des problèmes portant sur des situations relativement simples de dénombrement telles que celles assimilables par exemple soit au tirage d'un objet parmi un nombre donné, soit au lancé d'un dé une seule fois, soit le choix simultané de plusieurs objets. Nous estimons que dans une certaine mesure, le rapport RPC-PPL est aussi conforme au rapport institutionnel.

Le type de rapports « RI-PPL » est caractérisé par la connaissance par l'élève du premier principe de Laplace et du langage des probabilités, mais par une maîtrise insuffisante de l'analyse combinatoire. Ce type de rapports n'est pas conforme au rapport institutionnel du calcul des probabilités dans les situations d'équiprobabilité.

Le type de rapports « RA-PPL » est caractérisé par l'absence de mobilisation de l'énoncé du premier principe de Laplace. Des trois éléments technologiques de la technique TE, seul le vocabulaire des probabilités peut être remarquable au niveau de ce type de rapports, qui ne serait être conforme au rapport institutionnel au calcul des probabilités dans les situations d'équiprobabilité.

Sur la base de la typologie des rapports personnels au premier principe de Laplace, nous sommes en mesure de faire l'hypothèse que bien que les trois quarts des élèves ayant fraîchement reçus un enseignement de probabilités au Bénin aient une bonne connaissance du premier principe de Laplace, moins de 25% ont un rapport personnel conforme au calcul des probabilités suivant le premier principe de Laplace. Ce qui paraît très peu pour conclure à un enseignement réussi.

3.3. Apprentissage du deuxième principe de Laplace

Dans cette section, les réponses des élèves à l'exercice 2 seront analysées en vue de proposer une typologie des rapports calcul des probabilités suivant le deuxième principe de Laplace.

3.3.1. Présentation des résultats relatifs à l'exercice 2

Étant donné que la deuxième question de l'exercice 2 nécessite uniquement l'utilisation du deuxième principe de Laplace, nous faisons le choix de nous contenter des réponses des élèves à cette question pour notre étude. Nous rappelons que la technique APEE est celle qui convient à la résolution de l'exercice 2 parmi les praxéologies enseignées. Nous avons regroupé les réponses des élèves en quatre catégories que nous nommons respectivement APEE-C, APEE-I, BE et TNA et qui sont définies comme il suit :

- Technique complète d'Addition des probabilités d'événements élémentaires (APEE-C),
- Technique incomplète d'Addition des probabilités d'événements élémentaires (APEE-I),
- Biais d'équiprobabilité (BE),
- Technique non appropriée (TNA).

Le type de réponses APEE-C : Il est constitué des réponses dans lesquelles le deuxième principe de Laplace est appliqué avec succès. L'exemple qui suit est la production type de ce groupe.

On a deux nombres impairs 1 et 3. La probabilité de chacun d'eux est 0,64 et 0,01. Soit A l'événement : « le résultat est impair ». On a : $p(A) = p(\{1\}) + p(\{3\}) = 0{,}64 + 0{,}01 = 0{,}65$.

Cette réponse proposée par 25 élèves ayant participé au test indique la présence de tous les éléments technologiques de la technique APEE.

Le type de réponses APEE-I : Nous avons dans ce groupe les réponses dans lesquelles le deuxième principe de Laplace est appliqué mais sans succès. En effet la caractérisation fondamentale des éléments de ce groupe est la mauvaise identification de l'événement dont la probabilité est à calculer.

Soit A l'événement « le résultat de l'expérience aléatoire est un nombre impair ». A(0 ;3). $p(A)= p(e_0)+ p(e_3) \Longrightarrow p(A)=0{,}17+0{,}01 \Longrightarrow p(A)=0{,}18$

Soit p(A) cette probabilité. P(A)= 0,17+0,64+0,01. P(A)=0,82

Sur les cent élèves ayant composé pour le test, sept ont eu des réponses semblables à celles présentés dans ces deux productions.

Le type de réponse BE : Il est constitué des réponses dans lesquelles il est utilisé le premier principe de Laplace. Les productions ci-après sont caractéristiques des élèves de ce groupe.

Soit A « événement désignant les nombre impair » et Ω l'univers des éventualités de l'expérience. On a : $P_A = \frac{\mathrm{Card}A}{\mathrm{Card}\Omega}$. CardA=2, card (Ω)=4. Donc $P_A = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Soit A un événement aléatoire. CardΩ=6 et CardA=2. P(A)=$\frac{CardA}{Card\Omega} = \frac{2}{6}$. P(A)= $\frac{1}{3}$

La première production est la réponse de la plus grande majorité des élèves du groupe BE. Dans la deuxième, le nombre 6 représente la somme des éventualités et non leur nombre. La catégorie BE est la plus représentée avec 31 élèves.

Le type de réponses TNA : Il comprend les élèves dont les réponses n'utilisent aucun des deux principes de Laplace. Les réponses proposées par les élèves de ce groupe montrent de leur part soit une certaine non-maîtrise de la notion de probabilité, soit une mauvaise compréhension de la consigne comme on peut le constater dans les exemples ci-dessous.

Soit Ω une éventualité d'une expérience aléatoire. Ω={0; 1; 2; 3}; p(D)={0, 1, 3}.

E(X)=0+1(0,64)+2(3,72)+3(0,01) =0+0,64+7,44+0,03 ; E(X)=8,11.

Dans le premier exemple, bien que l'univers des éventualités soit bien donné, l'élève confond la probabilité avec un événement qui n'est même pas celui recherché. Dans le deuxième exemple, l'élève a calculé l'espérance mathématique par effet de contrat didactique relatif à l'étude des variables aléatoires.

En dehors des quatre types de réponses, signalons qu'un nombre important d'élèves, ont déclaré n'avoir aucune idée sur la question posée. La répartition quantitative des types de réponses relatifs à l'exercice 2 se résume dans le tableau ci-après.

Classe	APEE-C	APEE-I	BE	TNA	Pas de réponse	Total
Exercice 2	25	7	31	11	26	100

Résultats statistiques relatifs à l'exercice 2

L'interprétation que nous avons de ce tableau récapitulatif est :

- le taux bas des élèves ayant utilisé le deuxième principe et les taux élevés d'élèves ayant utilisé une technique non appropriée ou n'ayant pas donné de réponse montrent qu'un grand nombre d'élèves n'arrivent pas à reconnaître les problèmes dont la résolution nécessite le deuxième principe de Laplace ;
- la grande majorité de ceux qui reconnaissent comme telles les situations faisant intervenir le deuxième principe de Laplace, l'appliquent avec succès ; quant à la minorité qui l'applique sans succès, la mauvaise compréhension de l'événement dont ils ont en charge le calcul de probabilité est à la base de cet échec ;
- face à des problèmes portant sur le deuxième principe de Laplace, un nombre non négligeable d'élèves utilise à tort le premier principe de Laplace.

3.3.2. Les types de rapports au deuxième principe de Laplace

En nous inspirant des types de réponses à l'exercice 2 et en nous basant sur les éléments technologiques de la technique APEE que sont l'énoncé du deuxième principe de Laplace et le vocabulaire des probabilités, nous dégageons les quatre types de rapports suivants relatifs au calcul des probabilités selon le deuxième principe de Laplace.

- « rapport conforme au deuxième principe de Laplace (RC-DPL) »,
- « rapport presque conforme au deuxième principe de Laplace (RPC-DPL) »,
- « rapport biais d'équiprobabilité au deuxième principe de Laplace (RBE-DPL) »,
- « rapport absence des deux premiers principes de Laplace (RA-PL) ».

Le type de rapports « RC-DPL) » est celui développé par les élèves ayant une bonne maîtrise de tous les éléments technologiques de la technique APEE. Les élèves ayant ce type de rapports ont une bonne connaissance de l'énoncé du deuxième principe de Laplace et reconnaissent aisément les situations nécessitant l'utilisation de ce principe qu'ils appliquent avec succès. Le type de rapports « RC-DPL » est conforme au rapport institutionnel au calcul des probabilités selon deuxième principe de Laplace.

Le type de rapports « RPC-DPL » est caractérisé par une connaissance certaine du deuxième principe de Laplace et du vocabulaire des probabilités, mais aussi par une mauvaise identification de l'événement dont la probabilité est à calculer. Dans une certaine mesure, on peut affirmer que le type de rapport « RC-DPL » est aussi conforme au rapport institutionnel.

Le type de rapports « RBE-DPL » est caractérisé par l'utilisation de la technique TE à la place de la technique APEE requise. Il est évident que ce type de rapports n'est pas celui voulu par l'institution d'enseignement.

Le type de rapports « RA-PL » est caractérisé par l'absence de mobilisation des éléments technologiques fondamentaux des deux premiers principes de Laplace. Un tel rapport ne saurait être conforme au rapport de l'institution enseignante au deuxième principe de Laplace.

Revenant aux élèves concernés par notre étude, nous estimons que les élèves ayant les types de réponses APEE-C et APEE-I peuvent se faire attribuer respectivement les types de rapport « RC-DPL » et « RPC-DPL ». Le type de rapports « RBE-DPL » correspond au type de réponses BE, tandis les élèves des catégories « TNA » et « Pas de réponses » peuvent être classés dans le compte du type de rapports « RA-PL ». La répartition quantitative des types de rapports identifiés dans la population d'élèves concernés par notre travail est récapitulée dans le tableau ci-après.

Types de rapports	RC-DPL	RPC-DPL	RBE-DPL	RA-PL	Total
Nombre d'élèves	25	7	31	37	100

Répartition quantitative des types de rapports au deuxième principe de Laplace

À la lecture du tableau nous arrivons à la conclusion globale que le tiers des élèves concernés par notre étude a un rapport conforme au calcul des probabilités suivant le deuxième principe de Laplace.

3.3.3 Synthèse sur l'apprentissage du calcul élémentaire des probabilités

Après les études séparées des rapports des élèves béninois aux deux premiers principes de Laplace, nous nous proposons de récapituler dans cette sous-section le rapport des élèves au calcul élémentaire des probabilités, en mettant en exergue le bilan comparé des apprentissages des deux principes de Laplace. En effet, mis à part les propriétés liant les probabilités de plusieurs événements, établies dans le cadre de l'axiomatique de Kolmogorov, le calcul de la probabilité d'un événement se fonde sur l'un de ces principes, étant entendu que l'approche fréquentiste n'a pas fait objet d'étude dans les programmes actuels.

Dans les conditions actuelles de l'enseignement des probabilités au Bénin, les résultats suivantes semblent se préciser par rapport à l'apprentissage du calcul des probabilités.

- les élèves arrivent dans leur majorité à reconnaître aussi bien les problèmes dont la résolution nécessite le premier principe de Laplace que ceux pouvant faire intervenir le deuxième principe de Laplace ; toutefois ils sont plus nombreux dans le premier cas que dans le second;

- Pour chacun des deux principes, on peut envisager quatre types de rapports personnels des élèves et selon ces types de rapports, moins du tiers des élèves ont un rapport conforme au calcul des probabilités. Ce qui ne permet pas de conclure à un apprentissage réussi;
- Face à des problèmes de probabilités nécessitant l'utilisation du deuxième principe de Laplace, un nombre important d'élèves applique le premier principe de Laplace;
- l'analyse combinatoire fait défaut au grand nombre de ceux qui appliquent sans succès le premier principe de Laplace tandis que le défaut d'appréhension des éventualités composant les événements est à la base de l'échec de ceux qui appliquent sans succès le deuxième principe de Laplace.

En somme, le rapport au calcul des probabilités, aussi bien à partir du premier principe de Laplace qu'avec le deuxième principe, n'est pas conforme au rapport institutionnel pour un grand nombre d'élèves. Ils ont une meilleure connaissance du premier principe de Laplace que du deuxième, mais ils réussissent mieux l'application de ce dernier.

CONCLUSION

Dans ce travail, nous avons identifié quatre praxéologies de l'élève par rapport à chacun des deux premiers principes de Laplace qui ont permis d'évaluer la conformité du rapport personnels des élèves par rapport au calcul des probabilités. Concrètement les élèves ayant reçu l'enseignement des probabilités dans le système scolaire béninois ont une compréhension certaine des deux premiers principes dans des proportions variées. Toutefois un bon apprentissage du calcul des probabilités à partir de chacun de deux principes n'est pas assuré pour un grand nombre d'élèves. Pour le premier principe de Laplace, la non maîtrise de l'analyse combinatoire est la principale cause de la non-conformité du rapport des élèves au rapport de l'institution d'enseignement. La concentration de l'enseignement autour du premier principe de Laplace pourrait être la cause de la non-conformité du deuxième principe de Laplace au rapport institutionnel.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

CHEVALLARD Yves. (1991). La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné, Recherches en didactique des mathématiques, La pensée sauvage, Éditions, 1991, 239 pages

CHEVALLARD Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une anthropologie, *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 12, n°1, p. 73-112

CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19(2). La Pensée Sauvage.

DANDJINOU H. et BRONNER A. (2016). Enseignement du calcul élémentaire des probabilités au Bénin, à paraître dans les *Actes du premier colloque de ADiMA*, tenu à Yaoundé au Cameroun du 17 au 19 août 2016 :

HENRY M. (1999). L'introduction des probabilités au lycée : un processus de modélisation comparable à celui de la géométrie, *Repères-IREM, N°36,* pp. 15-34

HENRY M. (2010). Évolution de l’enseignement secondaire français en statistique et probabilités, *Statistique et Enseignement*, *1(1)*, pp 35-45, SFdS, Avril 2010