QUELLE MÉTHODOLOGIE D'ANALYSE DU SAVOIR *À ENSEIGNER* OUTILLÉE PAR LA THÉORIE ANTHROPOLOGIQUE DU DIDACTIQUE (TAD)?

Mirène LARGUIER
Université de Montpellier

RÉSUMÉ

Dans cette conférence je propose une méthodologie destinée à analyser le curriculum officiel d'une institution d'enseignement. Sa visée est double : permettre d'analyser le *savoir à enseigner* - au sens de Chevallard (1985) - et de la définition de la transposition didactique d'une institution donnée, mais aussi permettre la comparaison des choix curriculaires officiels de plusieurs institutions d'enseignement selon des critères communs. Un exemple utilisé dans cet exposé concerne les programmes officiels de la France et du Québec pour des élèves de l'école primaire au moment où il est possible d'édifier un socle de connaissances « avant la lettre » (Arcavi et al., 1990; Bronner 2015) qui prépare l'avènement de l'algèbre (« avec la lettre ») au secondaire. La méthodologie proposée s'inscrit dans le cadre théorique de la TAD - théorie anthropologique du didactique développée par Yves Chevallard (1999, 2002) - et reprend des travaux menés dans le cadre de l'OIPA (Observatoire International de la Pensée Algébrique).

INTRODUCTION

1. Présentation générale

Dans cette conférence je parle essentiellement d'une méthodologie d'analyse du savoir à *enseigner* d'une entité géographique (selon les cas pays, état, région, etc.). Ce savoir est en général fixé par des textes et des instructions officielles émanant du ministère de l'éducation, ce qui représente également le curriculum officiel (CO). Je parlerai également du domaine algébrique et de ses prémisses se situant dès l'école primaire, voire maternelle, ainsi que du cadre théorique de la théorie anthropologique du didactique (TAD définie par Yves Chevallard) qui outille la méthodologie présentée.

Mon objectif est de proposer une méthodologie dont l'ambition est de faciliter l'analyse puis la comparaison de différents choix curriculaires, mais aussi de permettre la diffusion de certains concepts de la didactique des mathématiques auprès d'un auditoire dont les cadres théoriques sont différents. Il s'agit également de permettre le repérage de ces concepts didactiques pour la formation initiale et continue en mathématiques.

Le domaine mathématique étudié peut se dénommer « pré-algèbre » ou « algèbre avant la lettre » et se situe avant l'avènement officiel dans le curriculum scolaire de l'algèbre avec la lettre. En effet, dans tous les curriculums de tous les pays arrive le moment de l'introduction officielle de l'algèbre avec des objets comme les équations, les expressions algébriques, les identités, l'usage de la lettre avec ses différents statuts (inconnue, variable, indéterminée, etc.). Ces objets sont travaillés avec des types de tâches comme : produire une expression algébrique, factoriser, développer, résoudre une équation, vérifier une égalité, etc. Une question se pose : sur quelles connaissances antérieures s'établit *l'algèbre avec la lettre* à partir de la maternelle et du primaire? Comment s'édifie cette *algèbre avant la lettre* dans le curriculum officiel et quelle est l'analyse du chercheur sur ces propositions curriculaires? La dernière question nécessite de la part du chercheur la définition d'un modèle épistémologique de référence de cette pré-algèbre (MERPA).

Ainsi ce sont ces trois questions qui se posent :

- Quelles connaissances peuvent être construites avant l'avènement officiel de « l'algèbre avec la lettre »?
    - Voir le modèle épistémologique de référence (Gascon, 1994 ; Bolea et al., 2005 ; Chevallard, 2012 ; Coulange L., Drouhard J-P. et al., 2012) du pré-algèbrique (le MERPA).
- Quel enseignement de « l'algèbre avant la lettre » est inscrit dans le *savoir à enseigner* d'un pays de la maternelle jusqu'au début du secondaire (âges de 3 à 12 ans) ?
    - Voir l'exemple de la France et du Québec pour les élèves de 9 à 12 ans
- Quelle méthodologie pour analyser le savoir à enseigner?
    - Une méthodologie commune permet alors la comparaison du savoir à enseigner dans différents pays.

2. Présentation du réseau OIPA

Les questions précédentes ont été travaillées dans le cadre de l'Observatoire International de la Pensée Algébrique (OIPA) qui est présenté ci-dessous.

Les objectifs du réseau OIPA sont les suivants :

- Étudier les conditions de l'enseignement de « l'algèbre avant la lettre » dès le primaire, voire même dès la maternelle ;
- Confronter des cadres théoriques différents et permettre leur coopération sinon montrer leur incompatibilité ;
- Développer un réseau international de chercheurs et de formateurs sur l'entrée dans l'algèbre (ou pré-algèbre) ;
- Constituer un lieu virtuel d'archivage, d'échange et de diffusion de connaissances sur le thème concerné ;
- Documenter les programmes de formation initiale et continue des enseignants, les ressources en lien avec le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et secondaire.

Ce réseau OIPA résulte de la mise en place d'un projet réalisé grâce au soutien du conseil franco-québécois de coopération universitaire (CFQCU) dans le cadre du programme de développement de partenariats stratégiques en matière d'enseignement et de recherche.

Les axes principaux de recherche du réseau OIPA sont les quatre axes définis ci-dessous :

- axe 1 : définition d'un modèle épistémologique de référence du pré-algébrique (MERPA) pour les chercheurs, formateurs et enseignants ;
- axe 2 : comparaison des programmes de différents pays basée sur une méthodologie d'analyse commune ;
- axe 3 : expérimentations de problèmes de comparaison et de généralisation reconnus comme étant pertinents pour développer la pensée algébrique dès le primaire ;

- axe 4 : réalisation et expérimentation d'un outil d'analyse des productions des élèves pour caractériser leur pensée sur un axe allant d'une pensée arithmétique jusqu'à une pensée algébrique (Cf. séminaire dans ce colloque).

3. Des éléments du cadre théorique de cet exposé

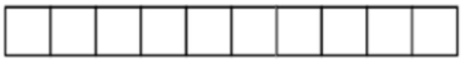
Le cadre théorique est essentiellement la TAD (théorie anthropologique du didactique) d'Yves Chevallard avec notamment les concepts suivants qui outillent la méthodologie d'analyse des programmes : transposition didactique, praxéologie, organisation mathématique (réponse à la question « qu'est-ce qui est étudié ? »), échelle des niveaux de codétermination didactique.

3.1. Transposition didactique Le concept de transposition didactique postule qu'il existe une distance nécessaire entre le *savoir savant* (ou *savoir de référence*) et le *savoir à enseigner,* c'est la transposition didactique externe, ainsi qu'une distance entre le *savoir à enseigner* et le *savoir enseigné,* c'est la transposition didactique interne :

> Le savoir-tel-qu'il-est-enseigné, le savoir enseigné, est nécessairement autre que le savoir-initialement-désigné-comme-devant-être-enseigné, le savoir à enseigner. (Chevallard, 1982, p. 3)

Voici une illustration de l'utilisation du concept de transposition didactique avec un problème dit « le problème du bijoutier » (Cf. figure 1) qui a été travaillé dans le cadre de l'OIPA au Québec à la fin du primaire (11 à 12 ans) puis en France en fin de primaire (CM2, 10 à 11 ans). Ce sont les données recueillies en France qui vont être utilisées par la suite.

Laurent, un bijoutier, fabrique des chaines en or à mailles de forme carrée comme celle-ci :



Il fait des chaines de différentes longueurs pour diverses utilisations (au cou, au pied, comme boucles d'oreilles).

L'or coûte cher. Quand il fait une commande, il compte les tiges une par une pour être sûr de ne pas en commander de trop ni en oublier. Mais c'est long. Il voudrait pouvoir trouver le nombre de tiges dont il a besoin sans être obligé de compter les tiges une par une. Vous devez envoyer un message au bijoutier dans lequel vous allez lui expliquer comment il pourrait faire pour trouver combien de tiges il a besoin selon le nombre de mailles.

Figure 1 : Énoncé du problème du bijoutier

3.1.1. *Savoir de référence*

Une première question est la suivante : quel est le *savoir de référence* pour résoudre ce problème ? Il s'agit des suites arithmétiques. La réponse au problème est alors triviale :

Quel que soit le nombre n de mailles, le nombre de tiges est égal à 1 + 3 n.

3.1.2. Savoir à enseigner

Une deuxième question est de se demander quel est le *savoir à enseigner* correspondant au curriculum officiel d'une classe de CM2 en France ? Le *savoir à enseigner* des programmes de 2015 en vigueur au moment de l'étude permet-il de proposer ce problème en primaire en France au cycle 3 (âge de 9 à 12 ans) ? Voici des extraits de ce programme qui peuvent permettre de répondre positivement à la question précédente. Le premier extrait se situe dans le secteur nombres et calculs :

> Les problèmes arithmétiques proposés au cycle 3 permettent d'enrichir le sens des opérations déjà abordées au cycle 2 et d'en étudier de nouvelles. […] Le calcul contribuant aussi à la représentation des problèmes, il s'agit de développer simultanément chez les élèves des aptitudes de calcul et de résolution de problèmes arithmétiques. (Programme du cycle 3, 2015, p. 200)

Le deuxième extrait est dans le même secteur et dans le thème « Résoudre des problèmes en utilisant des fractions simples, les nombres décimaux et le calcul » :

> Enrichir le répertoire des problèmes additifs et multiplicatifs […] (Programme du cycle 3, 2015, p. 203)

En conclusion, un type de problème comme le bijoutier est légitimé par le texte du *savoir à enseigner* même si les différents types de problèmes arithmétiques correspondant à ces instructions ne sont pas proposés explicitement.

3.1.3. Savoir enseigner

La transposition didactique interne nous amène à nous poser la question relative au *savoir enseigné.* Il s'agit ici d'une mise en œuvre en 2017 dans une classe de CM2 (cycle 3 du primaire, 10 à 11 ans) de Montpellier en France dans le cadre de travaux du réseau OIPA des chercheurs Alain Bronner et Mirène Larguier de l'Université de Montpellier. Je précise les conditions de la mise en œuvre dans la classe de CM2 située dans une école située dans un réseau d'éducation prioritaire (REP).

Avant l'intervention des deux chercheurs, aucun problème de généralisation du type le bijoutier n'avait été proposé aux élèves de cette classe. En revanche, les élèves avaient plusieurs fois travaillé en groupe lors de la résolution de problèmes. Avec l'intervention et la coopération des chercheurs, le professeur de la classe a accepté d'introduire le problème du bijoutier avec l'organisation didactique suivante proposée par les chercheurs :

- travail par groupe sans intervention du professeur (situation adidactique au sens de Brousseau, 1998) ;
- une première situation pour 1, 2, 3, 5 puis pour 9 mailles avec mise à la disposition des élèves de bâtonnets ;
- le cas de 44 mailles ;
- le cas général : formuler un programme de calcul du nombre de tiges en fonction du nombre de mailles d'une chaine.

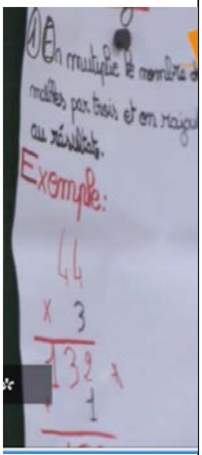
3.1.4. Savoir appris

En lien avec les différentes étapes de la transposition didactique, il est évidemment essentiel d'analyser le savoir appris. Les propositions écrites et orales de trois groupes d'élèves vont être analysées pour cerner les apprentissages des élèves concernant le domaine pré-algébrique.

Le groupe de Keziah (Cf. Tableau 1)

Les élèves de ce groupe ont appris à exprimer la généralisation dans le registre (au sens de Duval, 1995) du langage naturel. Leur exemple avec 44 illustre cette généralisation, mais 44 est un nombre marque place comme si c'était un nombre indéterminé (ou une variable).

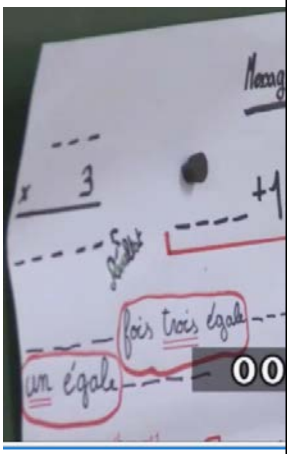
Tableau 1
Réponse du problème du bijoutier pour le groupe de Keziah

	**Keziah**: (*elle lit la première phrase de l'affiche*) on multiplie le nombre de mailles par trois et on rajoute un au résultat **Maëlle**: (*elle lit le calcul posé*) exemple quarante-quatre fois trois cent trente-deux plus un// cent trente-trois **Keziah**: en fait on a/ on a (xxx) euh c'est/ on va faire avec trois/ en fait trois fois trois **Le professeur** : alors en fait je te coupe/ je pense que la stratégie on l'a comprise/ là si vous/ si vous étiez bijoutier que vous entriez ce message est-ce que ce serait clair pour vous **Des élèves** : non **Le professeur** : on multiplie le nombre de mailles par trois et on rajoute un au résultat et ils ont mis un exemple/ est-ce que c'est clair pour vous **Des élèves** : oui

Groupe de Lina (Cf. tableau 2)

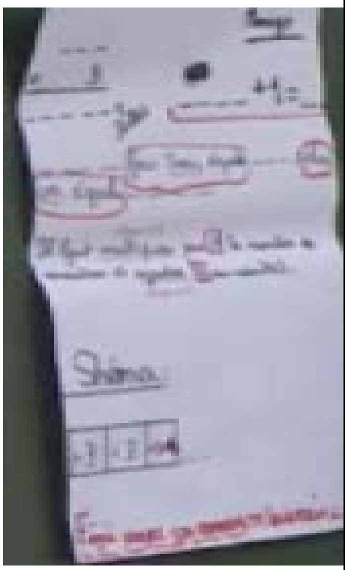
Les élèves de ce groupe ont imaginé un ostensif (au sens de Bosch et Chevallard, 1999) original pour signifier le nombre indéterminé. C'est un ostensif sonore signifié à l'écrit par « hum » répété deux ou trois fois.

Tableau 2
Problème du bijoutier, groupe de Lina

	**Lina**: alors/ euh/ en fait là on a fait un exemple mais avec des trous **Le professeur** : un exemple à trous **Lina**: voilà alors en fait euh c'est un peu comme euh ce message (le groupe de Keziah) il faut multiplier par trois le nombre de maillons et euh ajouter un au résultat/ par exemple euh// quarante-quatre fois trois égal hum hum hum et après on rajoute un à la fin et ça fait un (xxx) **Le professeur** : un nombre de tiges **Lina**: […]/ et là on a fait aussi par trous et on a écrit les nombres en fait qu'il faut toujours multiplier ou rajouter **Le professeur** : tu peux nous le lire ça/ cette euh/ ligne là **Lina**: alors hum hum hum fois trois/ égal hum hum/ plus un égal hum hum hum **Le professeur**: d'accord et en-dessous

En bas de l'affiche (Cf. tableau 3), les élèves expliquent qu'ils ont utilisé une phrase en langage naturel et qu'ils ont également réalisé un schéma montrant les mailles à trois tiges et une dernière tige pour fermer la dernière maille.

Tableau 3
Problème du bijoutier, groupe de Lina (bas de l’affiche)

	**Lina**: en-dessous euh ben c'est la phrase réponse enfin le/ le message (xxx) c'est-à-dire il faut multiplier par trois le nombre de maillons et ajouter un au résultat/ et à la fin (xxx) **Le professeur** : d'accord/ le schéma c'est un peu le même que là-haut/ je le refais en grand/ sauf que dans chaque maille t'as écrit plus trois/ plus trois/ plus/ et de la même couleur et la dernière tige plus un **Lina**: ouais **Le professeur** : et en bas y a écrit quoi **Lina**: euh euh/ fini avec ça vous n'aurez plus de souci **Le professeur** : fini avec ça vous n'aurez plus de souci

Ce groupe utilise une grande diversité d’ostensifs :

- les opérations posées et en ligne ;
- le langage naturel écrit et un symbole original pour signifier la variable : - - - -
- un ostensif sonore pour lire cette affiche : « hum, hum » ;
- le registre graphique.

En conclusion, en complète autonomie et sans aucun apprentissage préalable sur ce type de problème de généralisation, les élèves du groupe de Lina ont réussi à exprimer cette généralisation en trouvant un signe écrit et un autre sonore pour exprimer la variable. Ils montrent ainsi qu’ils utilisent une procédure que nous pouvons qualifier d’algébrique dans ce domaine de la pré-algèbre au primaire. Les élèves du groupe de Keziah n’ont pas recours à un signe particulier pour signifier la variable. Cependant, elle est bien exprimée grâce au registre du langage naturel, à savoir « le nombre de mailles ».

Les apprentissages de ces élèves de CM2 montrent l’intérêt de ce type de problème de généralisation et ce constat est conforté par des expérimentations du problème du bijoutier au Québec. Cela fait écho à cette citation d’Artigue (2017) qui décrit les hypothèses qui fondent le courant de l’ « early algebra » et qui décrit l’une d’entre elles en ces termes :

L’hypothèse que la généralisation, l’identification de structures, de régularités, et leur représentation sous des formes sémiotiques appropriées mais pouvant aller jusqu’à des formes symboliques conventionnelles ne sont pas inaccessibles à de jeunes enfants.

3.2. **Praxéologie** (Chevallard, 1999)

3.2.1 Définition générale d'une praxéologie

Une praxéologie est un quadruplet (les « 4T ») composée par un type de tâches, une technique, une technologie et une théorie. Le bloc (type de tâches, technique) est le bloc pratique ou savoir-faire, toute tâche se réalisant par la mise en œuvre d'une technique. Le bloc (technologie, théorie) est le bloc théorique ou savoir, toute pratique devant être décrite, justifiée, contrôlée.

Voici un exemple de praxéologie qui se dégage d'un entretien individuel réalisé en France entre une élève de 3e (15 ans), Sophie, et un professeur (Bellard et al., 2005).

> P : transforme $(x+1)^2$.
>
> S : x^2+2x+1
>
> P : $(x+1)^3$
>
> S : x^3+3x+1
>
> P : Tu es sûre ?
>
> S : Oui.
>
> P : Qu'est ce qui fait que tu en es sure ?
>
> S : C'est pareil que là, c'est pareil que le carré, ça répète trois fois la même chose.
>
> P : Que veux tu dire par ça répète trois fois la même chose?
>
> S : Ce produit est répété trois fois.

Pour analyser cet extrait en tant qu'expression d'une praxéologie, il faut identifier chaque élément du quadruplet :

- Le type de tâches : développer $(a+b)^n$
- une première tâche avec $(x+1)^2$
- une deuxième tâche avec $(x+1)^3$
- la technique de Sophie : l'application de la règle $(x+1)^3= x^3+3x+1$
- la technologie : « C'est pareil que là, c'est pareil que le carré, ça répète trois fois la même chose. ».
- Sophie généralise l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ pour tout exposant entier naturel.
- La théorie pour Sophie : $(a+b)^n = a^n+nab+b^n$

Cet exemple montre qu'une praxéologie peut rendre compte des erreurs et que les termes technique, technologie et théorie ne sont pas toujours conformes aux connaissances et savoirs mathématiques du savoir de référence.

3.2.2 Praxéologie arithmétique ou algébrique?

Pour revenir au domaine de l'algèbre, l'exemple suivant montre que la description d'une activité mathématique sous la forme d'une praxéologie permet de mettre au jour précisément le travail mathématique en jeu. Dans le tableau 4, deux praxéologies différentes sont décrites, l'une ne nécessite que des connaissances arithmétiques élémentaires de calcul, l'autre nécessite le maniement de l'écriture d'une fraction pour la transformer grâce à des opérations algébriques sous une autre écriture. La première praxéologie est arithmétique et la seconde est algébrique.

Tableau 4
Extrait de Larguier (2009)

T : déterminer la nature d'un nombre (c'est-à-dire le plus petit ensemble auquel il appartient) ▪ t : quelle est la nature du nombre $\frac{84}{14}$? ▪ τ_1 : la division posée de 84 par 14 donne 6, le nombre $\frac{84}{14}$ est donc entier naturel ▪ $\tau_2 : \frac{84}{14} = \frac{7\times6\times2}{7\times2} = 6$ ▪ θ_1 : connaissance de la division posée et connaissance de $\frac{a}{b} = a{:}b$ (avec a et b entiers et b non nul) ▪ θ_2 : connaissance de la décomposition multiplicative d'un entier, connaissance de la règle fondamentale des quotients $\frac{a\times c}{b\times c} = \frac{a}{b}$ (a, b et c étant des réels avec b et c non nuls)

Ainsi, une même tâche dont l'énoncé est dans le domaine numérique peut convoquer des savoirs de deux domaines mathématiques différents et ainsi deux praxéologies différentes : l'une arithmétique, l'autre algébrique.

3.3. Transposition didactique et MER

3.3.1 Modèle épistémologique de référence

Dans ce secteur je décris l'articulation entre le processus de transposition didactique (Chevallard, 1985) et la nécessité d'une référence épistémologique dans une approche anthropologique (Chevallard, 1992, 1999; Bosch 2005, 2013). Leur articulation est représentée dans la figure 2.

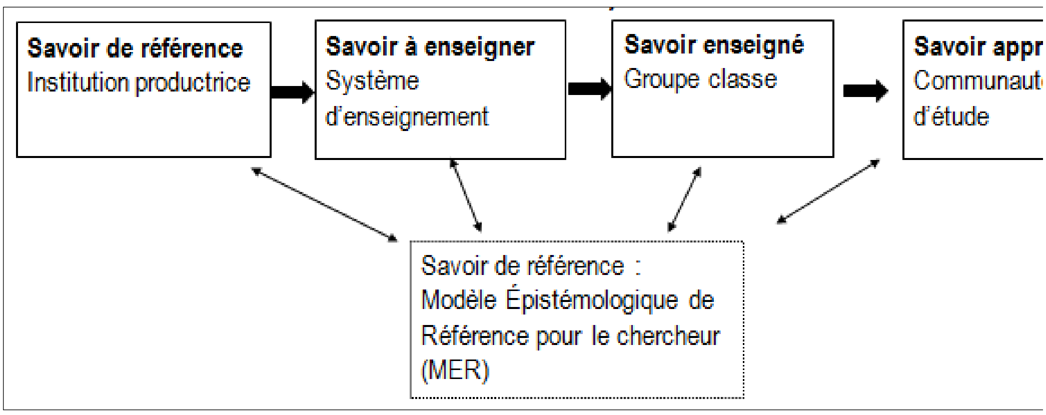


Figure 2 : La transposition didactique et un modèle épistémologique de référence

Un fait et une critique sont à l'origine du concept de modèle épistémologique de référence (MER), c'est la présence dans les recherches en didactiques de modèles empiriques, mais implicites.

> On peut considérer qu'il existe, dans toute institution didactique où l'on enseigne des mathématiques, des modèles implicites des différents domaines du savoir mathématique enseigné, d'où émerge par extension un modèle implicite de la nature même du savoir mathématique. Ces différents modèles implicites locaux, ainsi que le supposé modèle général (global) du savoir mathématique, vont de soi et ne sont pas généralement mis en cause. (Gascon, 1994, p.43)

Ce constat amène Gascon (Ibid) à définir le MER :

> On ne peut donc que souligner l'importance de construire au moins un modèle spécifique de chaque domaine mathématique étudié, construction qui constitue un instrument indispensable pour l'étude des phénomènes relatifs à l'enseignement et à l'apprentissage de ce domaine. Par conséquent, il serait souhaitable que le modèle épistémologique utilisé soit explicite - ou, en tout cas, potentiellement explicitable -, étant donné qu'il conditionne de façon décisive ce que l'on entendra par "enseigner et apprendre l'algèbre élémentaire" (par exemple). (Gascon, 1994, p.44)

Chevallard (2012) invite également à bannir « les pratiques d'implicitation qui fonctionnent innocemment mais plus souvent encore délibérément comme des signes de connivence entre "ceux qui savent". ». Aussi, un travail nécessaire pour une analyse didactique consiste à élaborer et décrire un MER sur le contenu mathématique en jeu relativement aux institutions étudiées (Bolea, Bosch, Garcia, Gascon, Ruiz, Sierra, 2005).

3.3.2 Le MERPA

Concernant les recherches de l'OIPA présentées dans ce texte, il s'agit de définir un MERPA ou modèle épistémologique de référence du pré-algébrique (le MERPA peut être également traduit par modèle épistémologique de la pensée algébrique.

Une définition du pré-numérique est proposée par Grugeon et Pillet (2018) comme un « ensemble de praxéologies qui sont dans le domaine numérique mais dont la praxis relève de l'algèbre. Ces praxéologies se situent avant l'introduction du symbolisme algébrique. » Le MERPA répond à la question : quelles sont les connaissances à construire du primaire, voire de la maternelle, jusqu'au début du secondaire pour constituer un socle favorisant l'entrée de l'algèbre avec la lettre ? Le MERPA se définit grâce à un ensemble de résultats de recherche sur ce sujet, il est constitué par un ensemble d'objets, de concepts, un ensemble de situations et de types de tâches.

Le MERPA se caractérise d'abord par des objets. Ces objets sont des nombres, des signes opératoires, des expressions littérales, des expressions « algébriques » (comme 3 ×… + 1), des formules, des programmes de calcul, des égalités, des « équations » (comme 32 = 3 + …), etc. Ces objets n'ont pas toujours le même sens selon qu'ils sont utilisés dans le domaine numérique ou le domaine algébrique. Le signe d'égalité est à ce tire un exemple important.

Le MERPA a pour socle les très nombreuses recherches sur l'algèbre dont la liste suivante est très loin d'être exhaustive :

- L'aspect procédural et structural (Sfard, 1991) des expressions algébriques,
- L'aspect syntaxique et sémantique des expressions algébriques (Kouki, 2006),
- Le triplet signe, sens et « dénotation » (Frege, 1900 ; Drouhard et al, 1992),
- Le sens du signe égal et de l'égalité vue comme équivalence entre deux écritures (Reynès, 1995),
- Le statut de la lettre : indéterminée, variable, inconnue, paramètre et flexibilité pour passer d'un statut à un autre dans une technique de résolution,
- La caractérisation d'une pensée algébrique d'après Radford (2006) selon trois critères :
    - Indétermination : recours à un nombre non connu,
    - « Dénotation » : expression de ce nombre,
    - Analycité : traitement de ce nombre comme s'il était connu.

Le MERPA se caractérise par des types de situations. Trois grand types de situations sont favorables pour développer des praxéologies pré-algébriques (ou développer la pensée algébrique) :

- Situations de généralisation comme le problème du bijoutier avec l'étude de suites numériques ou de configurations géométriques (Krysinska et al., 2009; Squalli et al., 2011);
- Situations où l'algèbre est nécessaire pour prouver (ex : démontrer que la somme de 3 entiers consécutifs est un multiple de 3);
- Situations de résolution de certains problèmes numériques comme les problèmes de partage inégaux et les problèmes de comparaison déconnectés (Bednartz et Janvier, 1992) qui ne peuvent se résoudre avec des techniques strictement arithmétiques (Cf. figure 3 dans laquelle les cases noires contiennent des nombres donnés et les cases blanches des nombres inconnus).

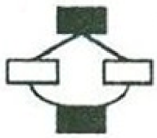
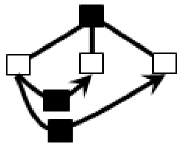
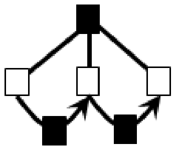
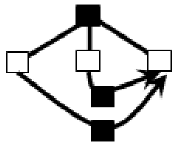
Problèmes à 2 branches	Problèmes avec UNE relation de comparaison (additive ou multiplicative)	
Problèmes à 3 branches	**SOURCE** Les deux relations on la même donnée comme point de départ.	
	COMPOSITION Une des données est le point d'arrivée d'une relation et le point de départ de l'autre.	
	PUITS Les deux relations on la même donnée comme point d'arrivée.	

Figure 3 : Typologie des problèmes déconnectés

Le MERPA peut également se caractériser par des types de tâches dont la résolution est à la frontière entre le numérique et l'algébrique (Bronner, 2007) :

- Modéliser une structure numérique (Chevallard, 1985) ;
- Réaliser un calcul numérique demandant la mise en œuvre d'une règle de calcul (fractions, radicaux, ..) ;
- Montrer l'égalité de nombres ou d'expressions numériques ;
- Étudier la structure de certains types de nombres ;
- Étudier des propriétés arithmétiques (ex. de la somme de 3 entiers consécutifs) ;
- Modéliser des situations intra ou extra mathématiques par des équations ;
- Étudier des programmes de calculs (Ruiz-Munzon, 2010 ; Chevallard et Bosch, 2012 ; Alvès et al., 2013).

3.4. Échelle des niveaux de codétermination didactique (Chevallard, 2008)

Cette échelle (Cf. figure 4) représente un concept et un outil essentiels pour développer la méthodologie d'analyse du *savoir à enseigner*.

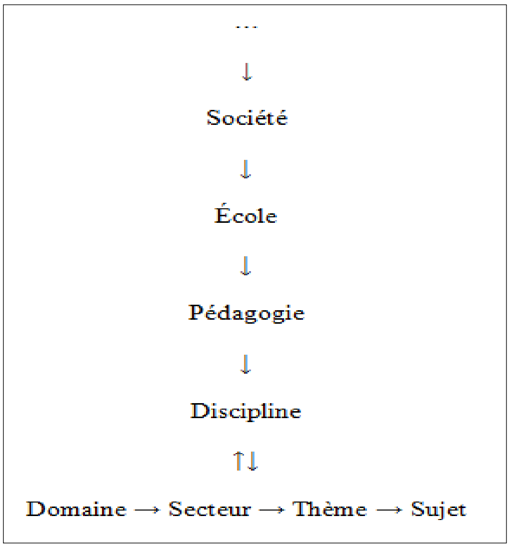


Figure 4 : Échelle des niveaux de codétermination didactique

Cette échelle montre que chacun des niveaux exerce des conditions et des contraintes sur les autres. Par exemple, le niveau de l'école définit les institutions d'enseignement. Si nous considérons par exemple l'enseignement primaire, en France, il comprend 5 années et se termine en CM2 pour des élèves de 11 ans alors qu'au Québec il comprend 6 années et se termine à l'âge de 12 ans. Ces conditions doivent être prises en compte dans des analyses didactiques. Quant au niveau de la pédagogie, il représente l'organisation interne dans une institution donnée en fonction des disciplines enseignées, de la durée de l'enseignement, des effectifs des classes, etc.

4. Méthodologie d'analyse du savoir à enseigner

4.1 Les questions motivant cette méthodologie

Dans le cadre de l'OIPA, un certain nombre de questions ont été travaillé et la première d'entre elles est la suivante : quelle méthodologie partager entre chercheurs de différentes nationalités pour étudier le *savoir à enseigner* d'une institution d'enseignement ou pour réaliser des comparaisons entre différents pays ? Cette question a donc motivé l'élaboration de cette méthodologie qui cherche à répondre à ces questions :

- Comment fonder un socle de connaissances dès l'école primaire, et même dès la maternelle (Boily et al., 2015), qui permet une première rencontre avec des situations qui nécessitent des praxéologies à tendance algébrique comme outils de résolution ?
- Quels sont les choix didactiques inscrits dans le texte du savoir à enseigner qui permettent explicitement la possibilité d'un développement de la pensée algébrique, ou bien représentent implicitement un potentiel exploitable pour développer la pensée algébrique ?
- Dans le *savoir à enseigner* quels sont les types de tâches et les situations qui favorisent l'entrée dans l'algèbre en distinguant deux catégories :
    - explicites : celles qui sont explicitement proposées pour contribuer à ce développement ;
    - implicites : celles qui sont reconnues par le chercheur comme étant propices à ce développement.

Le caractère implicite/explicite est important, car le chercheur peut identifier un potentiel favorable au développement de la pensée algébrique, mais en détournant une proposition curriculaire qui n'avait pas été proposée avec cette raison d'être. C'est ainsi que le problème du bijoutier a été proposé en France.

4.2 Méthodologie d'analyse du *savoir à enseigner*

Cette méthodologie va être décrite en différentes phases qui suivent l'échelle de codétermination didactique (Cf. figure 4).

Phase 0 : développer un MER de l'objet étudié (Ex : le MERPA)

Phase 1 : délimiter l'objet mathématique étudié

C'est par exemple l'algèbre avant la lettre qui se situe au Québec de la 4^{e} à la 6^{e} année du primaire (de 9 ans jusqu'à 12 ans) et en France au cycle 3 de l'école primaire, incluant la fin de l'école primaire et la première année du premier cycle du secondaire (de 9 ans jusqu'à 12 ans).

Phase 2 : décrire le contexte institutionnel des institutions qui dictent ce que les enseignants doivent faire.

Au niveau de la *société* il s'agit d'identifier :

3. les institutions concernées (pays, état, région, etc.) ;

4. les textes promulgués par ces institutions ainsi que leur statut (loi, décret, recommandation, explicitation, etc.).

Au niveau de *l'école* il s'agit de décrire l'organisation des institutions d'enseignement (école primaire, secondaire, etc. ; âge des élèves dans chacune des institutions ; etc.)

Au niveau de la *pédagogie* cela consiste à décrire l'organisation de l'enseignement des mathématiques dans une institution donnée (ex : un seul maître pour toutes les disciplines ou pas ; durée d'une séance de mathématiques ; etc.)

Phase 3 : à partir du niveau de la *discipline*

Il s'agit de répondre aux questions suivantes :

- Quelle est la place d'une pré-algèbre dans le savoir à enseigner? Dans quels domaines? Quels thèmes? Etc.
- Quelle est l'organisation mathématique locale, voire régionale, proposée?
- Quelles indications concernant l'organisation didactique?
- Autrement dit, quels sont les habitats du développement d'une pré-algèbre?

Phase 4 : à partir du niveau de la *discipline*

Il s'agit d'analyser le *savoir à enseigner* avec un grain plus fin en se posant les questions suivantes :

- Quels sont les types de tâches pertinents ? (en précisant s'ils sont ou non dans la catégorie explicite ou implicite)
- Si elles sont présentes, quelles sont les techniques préconisées pour réaliser ces types de tâches? Sont-elles justifiées par des éléments technologiques?
- Quelles sont les situations pertinentes proposées explicitement ou non?

- Quelles sont les raisons d’être des types de tâches ou situations repérées précédemment? Qu’est-ce qui les motive?

Phase 5 : à partir du niveau de la *discipline*

Il s’agit d’analyser les éléments relatifs à l’organisation didactique en répondant à cette question : est-ce que des éléments de l’organisation didactique apparaissent et, si oui, quels sont-ils ?

4.3 Quelques résultats concernant le Québec et la France.

La phase 0 est la définition du MERPA (Cf. secteur 2-3-2)

Pour la phase 1, au niveau de la *société*, nous trouvons des textes qui définissent le curriculum officiel. Le tableau 5 présente ces textes.

	Québec	France
Dénomination	1 - Programme de formation de l’école québécoise. 2 - Progression des apprentissages au primaire	1- BO spécial n° 11 du 26 novembre 2015 2 – Socle commun de connaissances, de compétences et de culture. BO n°17 du 23 avril 2015
Diffusion	- Gouvernement du Québec. Ministère de l’Éducation. (version 2001)	- Bulletin Officiel - Ministère de l’Éducation nationale
Statut légal	?	1 : Arrêté - 2 : décret
Textes complémentaires	?	Documents ressources. - le nombre aux cycles 2 et 3 - le calcul en ligne

Figure 5 : Textes officiels qui définissent le savoir à enseigner

Les liens entre le programme et la progression sont explicités ainsi au Québec :

> Le présent document [celui des progressions] constitue un complément au programme. Il apporte des précisions sur les connaissances que les élèves doivent acquérir au cours de chacune des années du primaire dans les différents champs de la mathématique […]. Ce document devrait faciliter le travail de planification de l’enseignement. PAP-primaire, 2009, p.3)

Par ailleurs, les liens entre programme et socle sont eux aussi définis pour la France :

Les objectifs de connaissances et de compétences de chaque domaine de formation [5 domaines] et la contribution de chaque discipline ou enseignement à ces domaines sont déclinés dans les programmes d'enseignement prévus à l'article L. 311-1 et suivants. (Socle, 2015, p.1)

Au niveau de l’école, il est possible de comparer l’organisation des institutions d’enseignement comme le montre le tableau 5.

Tableau 5

Organisation de l’enseignement en France et au Québec entre 3 et 14 ans

	Enseignement primaire au Québec								Enseignement secondaire au Québec	
	Préscolaire		1^{e}	2^{e}	3^{e}	4^{e}	5^{e}	6^{e}	2^{e}	1^{e}
3ans à 4 ans	4 – 5	5 - 6	6 - 7	7 - 8	8 – 9	9 - 10	10 - 11	11 - 12	12 - 13	13 - 14
PS	MS	GS	CP	CE1	CE2	CM1	CM2	6^{e}	5^{e}	4^{e}
Maternelle			Enseignement élémentaire					Collège		
Enseignement primaire en France								Enseignement secondaire en France		

Lors de la phase 3, l’analyse se situe au niveau général de la discipline ou encore au niveau du domaine du domaine, où s’élabore la construction de l’espace numérique. Au Québec, les objets nombres - entiers, décimaux et fractions – se trouvent dans un domaine intitulé « arithmétique » et, en France, ce domaine se nomme « nombres et calculs ». En France, la préoccupation essentielle, qui apparait à maintes reprises tout au long du texte du programme, est liée à la maitrise du calcul.

En France, nous trouvons un habitat implicite au niveau de la *discipline* « mathématiques » au cycle 3 :

> On veille aussi à proposer aux élèves des problèmes pour apprendre à chercher qui ne soient pas directement reliés à la notion en cours d’étude, qui ne comportent pas forcément une seule solution, qui ne se résolvent pas uniquement avec une ou plusieurs opérations mais par un raisonnement et des recherches par tâtonnements. (programme, 2015, p. 197)

La technique de résolution d’un problème arithmétique par tâtonnement ou par essai-erreur est un outil très pertinent pour développer des praxéologies à tendance algébrique (Adihou et al., 2016). Les auteurs du programme ne relient certainement pas cette technique à une pré-algèbre, mais c’est typiquement une préconisation implicite qui peut servir le développement d’une activité pré-algébrique.

Les domaines « arithmétique » pour le Québec et « nombres et calculs » pour la France sont ensuite subdivisés en secteurs selon deux logiques différentes :

- au Québec (Cf. tableau 6), en fonction du sens des nombres eux-mêmes et du sens des opérations sur les nombres, la partie opérations est à part. C’est le nombre en tant qu’objet (au sens de Douady, 1984) qui est présenté ;
- en France (Cf. tableau 7), en fonction de l’utilisation et de la représentation des différents types de nombres, d’une part, et de la résolution de problèmes utilisant ces nombres, d’autre part (statut du nombre comme objet puis comme outil).

Habitats dans la discipline « la mathématique » dans l'enseignement primaire au Québec			
Domaine	**Secteur**	**Thème**	**Sujet**
D1 : Arithmétique « En arithmétique, l'élève est invité à construire le sens des nombres, de la numération et des opérations » (p. 128)	**S1 : Sens et écriture des nombres**	**Th1 : Nombres naturels**	Expressions équivalentes – régularités – nombres pairs – nombres impairs - nombres carrés –nombres premiers ou composés.
		Th2 : fractions	Expressions équivalentes – Fractions équivalentes
		Th3 : nombres décimaux	Expressions équivalentes - décomposition
		Th4 : utilisation des nombres	Passage d'une forme d'écriture à une autre : notation fractionnaire, notation décimale, pourcentage.
	S2 : Sens des opérations sur des nombres	**Th1 : nombres naturels**	Terme manquant -Sens de la relation d'égalité (équation), sens de la relation d'équivalence – relations entre les opérations – commutativité – associativité – distributivité.
	S3 : opérations sur des nombres	**Th1 : nombres naturels**	- régularités : suites de nombres, famille d'opérations – décomposition en facteurs premiers.
		Th2 : fractions	Etablissement de fractions équivalentes – réduction de fraction, fraction irréductible.

Tableau 6

Habitats dans la discipline « mathématiques » au cycle 3 en France			
D.	**Secteur**	**Thème**	**Sujet**
Domaine 1 : Nombres et calculs	**S1 :** Utiliser et représenter les grands nombres entiers, des fractions simples, les nombres décimaux	**Th1 :** Comprendre et utiliser la notion de fractions simples.	- Diverses désignations des fractions (orales, écrites et décompositions - Etablir des égalités entre des fractions simples. - Ecrire une fraction sous forme de somme d'un entier et d'une fraction inferieure à 1.
		Th2 : Comprendre et utiliser la notion de nombre décimal.	- Associer diverses désignations d'un nombre décimal (fractions décimales, écritures à virgule et décompositions).
		Th3 : Mémoriser des faits numériques et des procédures élémentaires de calcul	- Elaborer ou choisir des stratégies de calcul à l'oral et à l'écrit. - Propriétés des opérations : • $2+9=9+2$ • $3\times5\times2=3\times10$ • $5\times12=5\times10+5\times2$
		Th4 : calcul en ligne	- Utiliser des parenthèses dans des situations très simples. - Règles d'usage des parenthèses.
	S2 : Résoudre des problèmes en utilisant des fractions simples, les nombres décimaux et le calcul	**Th1 :** Résoudre des problèmes mettant en jeu les quatre opérations.	- Problèmes relevant : • des structures additives ; • des structures multiplicatives.

Tableau 7

Lors de la phase 4, la comparaison entre la France et le Québec est possible en termes de types de tâches.

Type de tâches	Québec	France
- Reconnaitre, produire, associer des expressions équivalentes de deux nombres	Forte présence pour tous les types de nombres	Sous-type de tâches sur des cas très précis (absence du terme équivalence, mais présent au cycle 2)
- Identifier et utiliser des nombres entiers qui ont une structure particulière	Pair, impair, premier, composé, carré	Rien
- Rechercher un terme manquant dans une égalité	Avec toutes les opérations	Rien (présent au cycle 2)
- Identifier et utiliser les propriétés des opérations	Commutativité ; associativité ; distributivité (termes non connus pas les élèves)	Commutativité ; associativité ; distributivité sous la forme d'exemples numériques
- Identifier des régularités	En particulier sur des suites de nombres	Rien (présent au cycle 1)

Tableau 8

La comparaison peut se réaliser également en termes de situations. Nous allons restreindre la présentation aux situations de généralisation qui apparaissent très pertinentes dans le MERPA.

Pour le Québec, voici un extrait de la progression des apprentissages au primaire :

> Décrire dans ses mots et avec un vocabulaire mathématique approprié des régularités numériques (ex. : nombres pairs, nombres impairs, nombres carrés, nombres triangulaires, nombres premiers, nombres composés). (PAP primaire, 2009, p. 6)

Et dans la partie consacrée au domaine « arithmétique » le concept de régularité est repris :

> Les situations qui lui sont proposées doivent comporter des régularités numériques ou non numériques (couleurs, formes, sons, etc.). Elles lui permettront d'observer et de décrire diverses régularités, des suites de nombres et d'opérations telles que la suite des nombres pairs, la suite des multiples de 5, la suite des nombres triangulaires. Elles le conduiront ainsi à ajouter des termes à une suite, à énoncer des règles générales ou à construire des modèles. Il pourra alors énoncer ou déduire des définitions, des propriétés et des règles. (PAP primaire, 2009, p.11)

En France, rien n'est proposé au cycle 3 comme travail sur des régularités ou des généralisations. Pourtant ce travail est amorcé en maternelle, mais il n'est pas du tout poursuivi en primaire :

> dès la petite section, les enfants sont invités à organiser des suites d'objets en fonction de critères de formes et de couleurs ; les premiers algorithmes qui leur sont proposés sont simples. Dans les années suivantes, progressivement, ils sont amenés à reconnaître un rythme dans une suite organisée et à continuer cette suite, à inventer des « rythmes » de plus en plus compliqués, à compléter des manques dans une suite organisée. (BO spécial n°2 du 26 mars 2015, p. 18).

En France, il existe des « ressources » sur certains thèmes d'enseignement qui explicitent les programmes. C'est le cas de la ressource intitulée « le calcul en ligne au cycle 3 » (2016), ce type de calcul étant introduit comme une nouveauté dans le programme de 2015. Nous trouvons dans ce document une référence explicite concernant l'intérêt de ce type de calcul pour préparer le travail algébrique sur les expressions littérales et les équations :

> En fin de cycle, on tend progressivement vers un calcul organisé en une seule ligne, utilisant si nécessaire des parenthèses. La capacité à écrire de telles expressions numériques prépare les attendus du cycle 4 liés à la production d'expressions littérales et à la mise en équation de problèmes. (le calcul en ligne au cycle 3, 2016, p.4)

Dans ce même document, un long développement concerne le statut du signe égal et de l'égalité ce qui, conformément au MERPA, est une nécessité pour préparer l'avènement du travail algébrique.

> Le calcul en ligne et le travail sur les décompositions se fondent sur une signification du signe « = » comme lien entre deux écritures distinctes d'un même nombre, à lire dans les deux sens, de façon symétrique, comme par exemple, $26 \times 5 = 13 \times 2 \times 5$. (le calcul en ligne au cycle 3, 2016, p. 6)

5. Éléments de conclusion à propos du savoir enseigné en France et au Québec

La définition du MERPA nous a servi de référence pour mener l'analyse des programmes de ces deux pays selon une méthodologie outillée par la TAD. Ce MERPA a permis de mettre au jour des éléments implicites ou explicites du *savoir à enseigner* pertinents pour travailler une pré-algèbre mais aussi pour repérer des vides didactiques. La comparaison entre les deux pays est à ce titre intéressante pour montrer comment ces vides pourraient être comblés. Ainsi, en France, un exemple de vide peut être donné avec l'absence de nombres aux formes particulières : carrés, pairs, impairs, triangulaires, etc. ou encore l'absence d'un travail sur les régularités et les généralisations comme la poursuite en primaire de l'étude de suites numériques ou géométriques amorcée pourtant en maternelle.

Les deux curriculums officiels de la France et du Québec sont différents dans leurs objets et leurs logiques. En France, l'objectif de préparer explicitement le développement d'activités pré-algébriques n'apparait pas du tout dans le programme, où l'aspect calculatoire est mis en relief. L'objectif concernant l'édification d'un socle pour préparer l'avènement de l'algèbre apparait explicitement dans le document ressource sur le calcul en ligne, mais ce document n'a pas le même statut que celui du programme officiel et peu d'enseignants s'y réfèrent.

Ainsi, la comparaison des deux pays fait apparaitre des conditions meilleures au Québec pour développer des connaissances d'une pré-algèbre et c'est bien une volonté explicitement proclamée qui est à l'œuvre, comme nous pouvons le lire dans cette citation du programme du cycle 1 du secondaire au Québec :

> Au primaire, par ses diverses activités mathématiques, l'élève a été initié, à son insu, à des préalables à l'algèbre. Mentionnons notamment la recherche de termes manquants par l'utilisation des propriétés des opérations et des relations entre elles, l'appropriation du sens des relations d'égalité et d'équivalence, l'utilisation des priorités des opérations et la recherche de régularités dans différents contextes. (p. 29)

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ADIHOU, A., SQUALLI, H., SABOYA, M., TREMBLAY, M. et LAPOINTE, A. (2016). Analyse des raisonnements d'élèves en lien avec différentes structures des problèmes de comparaison. *In Actes du colloque de l'Espace Mathématique Francophone* (EMF 2015), Alger.

ADIHOU A., LARGUIER M., SQUALLI H., BRONNER A. (à paraitre). Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début du secondaire. Actes du colloque Recherche et perspectives curriculaires. Du 7 au 9 mai 2018 à Longueuil, Université de Sherbrooke

ALVES, C., COPPE, S., DUVAL, V., GOISLARD, A., KUHMAN, H., DAMETTO M., PIOLTI S., LAMOTHE C. et ROUBIN (2013). Utilisation des programmes de calcul pour introduire l'algèbre au collège. REPERES IREM N° 92 numéro spécial Algèbre. 9-30

ARCAVI A., FRIENDLER A., HERSHKOWNZ R. (1990), L'algèbre avant la lettre, Petit x n°24, 61-71

ARTIGUE M. (2017). La recherche didactique en algèbre : que nous apprennent les perspectives sémiotiques ? Journées bisontines de didactique et d'épistémologie, 4 et 5 mai 2017 http://epiphymaths.univ-fcomte.fr/algebre/JBDE-2017-Artigue.pdf

BEDNARZ, N. et DUFOUR-JANVIER, B. (1992). L'enseignement de l'algèbre au secondaire : une caractérisation du scénario actuel et des problèmes qu'il pose aux élèves. Actes du colloque international du 20 au 22 mai 1992 : didactique des mathématiques, formation normale des enseignants. École normale supérieure de Marrakech, 21-40

BELLARD N., BRONNER A., BOULLIS M., GIRMENS Y., LARGUIER M., LEWILLION M., PELLEQUER S., REBILLARD E., ROCHE M., SECO M. et VERGNE C. (2005), La règle dans tous ses états. Institut de Recherche de l'Enseignement des Mathématiques de Montpellier et Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, Brochure APMEP n° 165.

BOILY M., LESSARD G., POLOTSKAIA E., ANWANDTER CUELLAR N. (2015) Étude du développement de la pensée algébrique au préscolaire. In Theis L. (Ed.) Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage – Actes du colloque EMF2015 – GT3, pp. 220-230.

BOLEA, P., BOSCH, M., GARCIA, J., GASCON, J., RUIZ HIGUERAS, L., et SIERRA, T. A. (2005). Analyse de « La mesure en CM1 » d'aprés la TAD. En M. H. Salin, P. Clanché, & B. Sarrazy (Eds.), Sur la Théorie des Situations Didactiques (pp. 153-166). Grenoble, Francia: La Pensée sauvage Bosch 2005, 2013

BOSCH M. et CHEVALLARD Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Recherches en didactique des mathématiques, 19(1), 77-124.

BRONNER, A. (2007) La question du numérique : le numérique en questions. Habilitation à diriger des recherches. Montpellier : Université Montpellier 2.

BRONNER A., (2015) Développement de la pensée algébrique avant la lettre - Apport des problèmes de généralisation et d'une analyse praxéologique. In Theis L. (Ed.) Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage – Actes du colloque EMF2015 – GT3, pp. 247-264.

BROUSSEAU G. (1998). Théorie des situations didactiques. Grenoble : La pensée sauvage.

CHEVALLARD 1995

CHEVALLARD Y. (1982). Pourquoi la transposition didactique ? Communication au Séminaire de didactique et de pédagogie des mathématiques de l'IMAG, Université scientifique et médicale de Grenoble. Paru dans les *Actes* de l'année 1981-1982, 167-194.

CHEVALLARD Y. (1985). *La transposition didactique – Du savoir savant au savoir enseigné*, La Pensée sauvage, Grenoble, deuxième édition augmentée, 1991.

CHEVALLARD Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12/1, 73 - 112.

CHEVALLARD Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2), pp. 222-265.

CHEVALLARD Y. (2002). Organiser l'étude. Structures & fonctions. In Dorier J.-L., Artaud M., Artigue M., Berthelot R., Floris R. (Eds.) *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques.* Grenoble : La Pensée sauvage, 3-22

CHEVALLARD (2008). Extrait de l'enseignement donné en licence de sciences de l'éducation en 2008-2009 à l'université de Provence par Yves Chevallard. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=136.

CHEVALLARD Y. (2012) Théorie Anthropologique du Didactique & Ingénierie Didactique du Développement. Journal du séminaire TAD/IDD.

CHEVALLARD Y. et BOSCH M. (2012) L'algèbre entre effacement et réaffirmation aspects critiques de l'offre scolaire d'algèbre. *Dans J.L. Dorier et A. Robert (Eds). Enseignement de l'algèbre élémentaire.* Hors série de Recherches en Didactique des Mathématiques, 19-40. La Pensée Sauvage : Grenoble.

COULANGE L., DROUHARD J-P. et al. (2012). Enseignement de l'algèbre élémentaire, bilan et perspectives. Recherches en didactique des mathématiques, numéro spécial hors-série. La pensée sauvage.

DOUADY R. (1984). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. Recherches en didactique des mathématiques 17/2, 5-31.

DROUHARD J-P., MAUREL M., PECAL M. et SACKUR C. (1997) Comment recueillir des connaissances cachées en algèbre et qu'en faire ? Repères-IREM, n°28, 37-68

DUVAL R. (1995). Sémiosis et pensée humaine, Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels, Peter Lang SA

FREGE G. (1892). Sens et dénotation, in Écrits logiques et philosophiques, trad., Paris : Seuil, 1971, pp. 102-126.

GASCON J. (1994), Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'algèbre généralisé, Petit x, n°37, 43–63.

KOUKI R. (2006) L'articulation syntaxe/sémantique au cœur des analyses didactiques au niveau de l'algèbre élémentaire ? Actes EMF Sherbrooke

KRYSINSKA, M., MERCIER A. et SCHNEIDER M. (2009). Problèmes de dénombrement et émergence de premiers modèles fonctionnels. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 29 (3), 247-304.

LARGUIER M. (2009). *La construction de l'espace numérique et le rôle des reprises en classe de seconde : un problème de la profession*. Thèse de doctorat. Université Montpellier 2.

RADFORD L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. Dans S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz, A. Méndez (Eds.), Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter, Mérida: Universidad Pedagógica Nacional, November 9 – 12, Vol. 1, 2-21.

REYNES F. (1993). Le concept d'égalité : clé ou verrou, *Petit x, 35*, 61-73. IREM de Grenoble, RUIZ-MUNZON N. (2010). La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional. Doctoral dissertation, Universitat Autònoma de Barcelona, Spain.

SFARD, A. (1991). On the dual nature of mathematics conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. Educational Studies in Mathematics, 22, 1-36.

SQUALLI, H., MARY, C. et MARCHAND, P. (2011). Orientations curriculaires dans l'introduction de l'algèbre : cas du Québec et de l'Ontario. Dans Lebeaume, J., Hasni, A. et Isabelle Harlé, I. (eds). Recherches et curriculums : le cas de l'enseignement des mathématiques, sciences et technologie. Bruxelles : DeBoeke

Textes des programmes officiels

PAP-primaire (2009). Progression des apprentissages au primaire – Progression des apprentissages – Mathématique. 2009. http://www1.education.gouv.qc.ca/progressionSecondaire/pdf/progrApprSec_Mathematique_fr.pdf

PFÉQ-primaire (2006). Programme de formation de l'école québécoise – Éducation pré-scolaire – Enseignement primaire. Bibliothèque nationale. 2006. http://www1.education.gouv.qc.ca/sections/programmeFormation/pdf/prform2001.pdf.

PFÉQ-secondaire (2006). Programme de formation de l'école québécoise – Éducation secondaire, premier cycle. http://www1.education.gouv.qc.ca/sections/programmeFormation/secondaire1/pdf/chapitre001v2.pdf- de l'école québécoise

Programmes d'enseignement (2015). Programmes d'enseignement du cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2), du cycle de consolidation (cycle 3) et du cycle des approfondissements (cycle 4). Arrêté du 9 novembre 2015. http://www.education.gouv.fr/ pid285/ bulletin_officiel. html?cid_bo=95184

Socle (2015). Socle commun de connaissances, de compétences et de culture. Décret du 31 mars 2015.

https://www.legifrance.gouv.fr/eli/decret/2015/3/31/MENE1506516D/jo

Programme d'enseignement de l'école maternelle (2016) BO spécial n°2 du 26 mars 2015

Le calcul en ligne au cycle 3 (2016), EDUSCOL