

APERÇU DE L'HISTOIRE DE LA DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES FRANCOPHONE

Jean-Luc DORIER
Équipe DiMaGe – Université de Genève

RÉSUMÉ

Ce texte présente l'origine et la constitution du champ de recherche qui a le nom de didactique des mathématiques. Ce champ se constitue en France, et plus largement dans le monde francophone, avec des contacts en Espagne et en Italie au début de 1970 autour des deux théories fondatrices: celle des situations didactiques de Guy Brousseau et celle des champs conceptuels de Gérard Vergnaud. Nous montrons qu'en 40 ans la didactique des mathématiques francophone s'est très largement développée. Non seulement elle a élargi ses objets d'étude, mais elle a aussi étendu son champ théorique et s'est fait une place particulière dans le champ des sciences de l'éducation, sans pour autant renier son attachement aux mathématiques.

INTRODUCTION

Les problèmes posés par l'enseignement des mathématiques ont depuis longtemps intéressé les mathématiciens à l'échelle internationale. Ainsi, en 1908, lors du 4^e *Congrès International des Mathématiciens* à Rome, la *Commission International pour l'Enseignement des Mathématiques* (CIEM)², regroupant 19 pays a été instituée sous la présidence du mathématicien allemand Felix Klein. L'histoire de cette commission, mise en sommeil entre les deux guerres, montre qu'à l'échelle internationale, depuis plus d'un siècle, des questions relatives à l'enseignement des mathématiques, mais aussi à la formation des enseignants se sont posées au sein de la communauté mathématique (Coray et al. 2003 ; Menghini et al. 2008). En particulier, à partir des années 50, cette commission a joué un rôle important, avec un remarquable consensus international, dans ce qui va déboucher dans la fin des années 60 sur la réforme des mathématiques modernes. Cette réforme, qui a bouleversé l'enseignement des mathématiques à l'échelle planétaire, et son échec rapide ont joué un rôle important dans la dynamique qui va voir émerger à l'échelle internationale un champ académique de « mathematics education » de plus en plus autonome des mathématiciens (Kilpatrick et Dorier 2008). En 1969 a ainsi lieu à Lyon le premier International Congress on Mathematics Education (ICME), ceux-ci ont lieu depuis au rythme de tous les 4 ans. En 1986, la CIEM lance aussi les études qui visent, au rythme d'une tous les ans, à produire, par l'intermédiaire d'un congrès sur invitation, un ouvrage de référence sur un thème d'éducation mathématique. La CIEM est aussi à l'origine de la création du groupe Psychology of Mathematics Education (PME), en 1976 lors du congrès ICME3 à Karlsruhe. Ce groupe organise un congrès international annuel.

1. Les origines et les structures

Dès le départ, la communauté francophone a joué un rôle important dans les instances internationales concernant l'éducation mathématique. Elle a ainsi donné quatre présidents de la CIEM : Jacques Hadamard (1932–1939), André Lichnérovicz³ (1963–1966), Jean-Pierre

² La CIEM est actuellement plus connue sous son acronyme anglais ICMI : *International Commission for Mathematical Instruction* voir <https://www.mathunion.org/icmi>.

³ Il fut également en France le président de la commission qui porte son nom et qui eut pour mission de mettre en place la réforme des mathématiques modernes.

Kahane (1983–1990) et enfin Michèle Artigue (2006–2010). De plus, le bureau exécutif de la CIEM comprend régulièrement des francophones. Gérard Vergnaud a joué un rôle central dans la création du groupe *Psychology of Mathematics Education* (PME) ; en 1976, il est significatif également que le premier congrès ICME ait eu lieu en France. La *Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques* (CIEAEM) créée en 1950 est aussi une initiative dans laquelle nous trouvons de nombreux fondateurs francophones tels que Gustave Choquet (qui, bien qu'il n'ait jamais appartenu au groupe Bourbaki, a beaucoup œuvré dans la réforme des mathématiques modernes) et Jean Piaget (Felix, 1985). En Suisse romande, certaines recherches, en s'appuyant sur les travaux piagétiens, se sont attelées, dès la fin des années 1960 (Morf, Grize et Pauli, 1969), à l'étude scientifique des conditions de possibilité de la transmission des savoirs mathématiques (Morf, 1972).

Comme nous l'avons déjà expliqué (Dorier, 2012), la CIEM a joué un rôle important dans la réforme des mathématiques modernes. Cette réforme s'appuie à la fois sur un contexte socioéconomique favorable (besoin de main d'œuvre scientifique et technique qualifiée, aspiration à une démocratisation de l'éducation, etc.), sur une rénovation des mathématiques savantes (Bourbaki) et sur de nouveaux champs de la psychologie comme l'épistémologie génétique de Jean Piaget. Elle vise donc non seulement à enseigner un nouveau contenu, mais aussi à promouvoir de nouvelles méthodes dans une visée de démocratisation. André Lichnérowicz, président de la CIEM de 1964 à 1966, écrit dans l'introduction du rapport de la commission qu'il a présidée pour la mise en place de la réforme en France :

Pour se sentir citoyen de plein droit de la société des humains, un homme de la seconde moitié du XXe siècle doit savoir se localiser dans l'espace et le temps, doit pouvoir communiquer avec des communautés étrangères à la sienne, mais il doit surtout percevoir quelques-unes des méthodes de pensée et d'action qui constituent le savoir-faire qu'est notre science et notre technique. La mathématique joue là un rôle privilégié pour l'intelligence de ce que nous nommons le réel, réel physique comme réel social. (Cité par Gispert, 2002, p. 160)

Nous voyons donc que la réflexion ne porte plus seulement sur des changements de contenus des mathématiques enseignées, une idée que Hans Freudenthal (président de CIEM de 1967 à 1970) exprimait déjà en 1963 :

Depuis son origine au début de ce siècle, la CIEM s'est principalement occupée de l'organisation de l'enseignement mathématique dans les différents pays, y compris les programmes d'études et d'examens, actuels ou désirables. L'histoire a démontré la stérilité des problèmes d'organisation pure. (Freudenthal, 1963, p. 29)

Celui-ci met bien en avant la question de l'évolution sociale de l'éducation mathématique et réclame une approche plus didactique, en référence aux nouvelles recherches dans le champ de la psychologie :

Les implications sociales de l'enseignement ont beaucoup changé pendant les dernières dizaines d'années. De plus en plus la tâche éducative se déplace ; du transfert d'acquisitions culturelles à l'initiation aux activités culturelles. (...) Les psychologies pédagogiques savent montrer pourquoi l'assimilation de nouveaux sujets est plus profonde et plus durable, si elle est de caractère réinventif. (Ibid., p. 31)

De fait, la réforme des mathématiques modernes, et peut-être plus encore son échec rapide, ont joué un rôle important dans la dynamique qui va voir émerger à l'échelle

internationale, un champ académique de « mathematics education » de plus en plus autonome des mathématiciens (Kilpatrick, 2008 ; Dorier, 2008).

Si la réforme des mathématiques modernes a eu une vocation internationale (avec des variantes, en particulier dans les pays du bloc soviétique), les réflexions sur sa mise en place et, plus encore, sur le bilan de son échec ont toutefois donné lieu à des distinctions fortes d'ordre national, conduisant à l'échelle de pays ou de communautés linguistiques et culturelles à des structurations distinctes de la recherche en éducation mathématique. Ainsi, en France, et plus largement dans le monde francophone, avec des contacts en Espagne et en Italie, un champ de recherche qui prend le nom de *didactique des mathématiques* se constitue au début des années 1970 autour de deux théories fondatrices : celle des *situations didactiques* de Guy Brousseau (1972 et 1986 pour des textes fondateurs et 1998 pour une compilation d'articles) et celle des champs conceptuels de Gérard Vergnaud (1981 et 1991). Toutefois, avant d'en venir à la présentation de ces deux théories et du rôle central qu'elles ont joué dans la création du champ de recherche qui nous occupe, il faut rappeler ici quelques faits importants qui ont précédé ou ont été concomitants de l'avènement de ce champ de recherche. Ainsi, en 1969, se mettent en place les quatre premiers *Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques* (IREM) à Bordeaux, Lyon, Paris et Strasbourg, bientôt suivies par les autres académies. Par ailleurs, en 1970, *l'Institut Pédagogique National*⁴ devient *l'Institut National de Recherche et de Documentation Pédagogique* (INRDP) qui se scindera en 1976 en *l'Institut National de la Recherche Pédagogique* (INRP) et en *Centre National de la Documentation Pédagogique* (CNDP), pour finalement donner en 2012 l'actuel *Institut Français de l'Éducation* (IFÉ). Ces lieux, qui regroupent des enseignants de la maternelle à l'université, ainsi que *l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public* (l'APMEP créée en 1910) vont jouer un rôle important tant pour la formation des enseignants aux mathématiques modernes que pour le développement des premières recherches de terrain que nous qualifierions aujourd'hui de recherches actions. Dans ces lieux, les mathématiciens concernés par des questions éducatives s'intéressent à des recherches venues des champs de la psychologie, en particulier les travaux de Piaget, dont nous connaissons les relations en particulier avec Jean Dieudonné et d'autres membres du groupe Bourbaki. De plus, la nécessité de mettre en place des cadres théoriques propres se fait sentir. Dans ce mouvement, il serait trop long de faire une liste exhaustive des précurseurs. Citons toutefois à Strasbourg le travail de Georges Glaeser, qui a su impulser une dynamique qui a longtemps animé l'IREM de Strasbourg et au-delà (Reigner et Perrier, 2002). À Paris, André Revuz a aussi joué un rôle essentiel suscitant de nombreuses vocations et créant les conditions universitaires d'une recherche académique (Colmez et al., 2010), comme dans une moindre mesure Jean Kuntzmann à Grenoble.

2. Des théories constitutives du champ de recherche

C'est dans ce contexte que les théories de Brousseau et de Vergnaud ont vu le jour et ont permis l'émergence d'un champ de recherche autonome des mathématiques et de la psychologie, bien que les liens avec ces deux disciplines aient toujours été source de questionnement et d'enrichissement. Les théories sont importantes dans le développement d'un champ scientifique, pour au moins deux raisons fondamentales. D'une part, parce qu'elles permettent des travaux plus unifiés. Ainsi, les idées de différents travaux de recherche sont partagées par une communauté de chercheurs qui ne travaillent pas individuellement de façon isolée, ce qui permet une cohésion, des échanges, des rapprochements. D'autre part, les concepts d'une théorie sont organisés entre eux, les

⁴ L'IPN avait été créé en 1956, suite de l'éphémère Centre National de Documentation Pédagogique créé en 1954, lui-même issu de la transformation du Musée de la Pédagogie qui datait de 1878!

chercheurs peuvent ainsi mettre en lien des phénomènes qu'ils observent avec une portée qui dépasse le seul cadre de leurs observations. Les théories de Brousseau et Vergnaud se sont constituées en parallèle, mais ont toujours entretenu des liens forts et se veulent complémentaires. Si la théorie des situations didactiques (TSD) se revendique plutôt des mathématiques et celle des champs conceptuels plutôt de l'épistémologie génétique, toutes deux partagent des caractéristiques fondamentales qui fondent certaines particularités essentielles de la didactique des mathématiques francophone. Elles se placent tout d'abord en rupture avec l'application et l'innovation qui prévalaient dans les premiers temps de la réforme des mathématiques modernes (Artigue et Douady, 1986 ; Margolinas, 2005a). En ce sens, elles visent à mettre en place une théorisation, qui se situe au niveau de la recherche fondamentale, dans une interaction dialectique constante avec l'expérimentation. Ainsi, les expérimentations en didactique des mathématiques ne sont pas le moyen de tester directement la réussite des élèves (comme nous le ferions classiquement dans une comparaison avec un groupe témoin), mais bien de mettre à l'épreuve les modélisations théoriques tout autant qu'en être la source d'inspiration. C'est une des particularités de la didactique des mathématiques francophone que de mettre en place une validation interne de la théorie qui, dans le cas de la TSD, s'appuie sur la confrontation entre analyse a priori et analyse a posteriori. Dans ce sens, le dispositif exceptionnel du *Centre pour l'Observation et la Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques* (COREM) mis en place en collaboration avec l'IREM de Bordeaux à l'école Michelet est fondamental dans le processus de théorisation que Brousseau a accompli. Une autre caractéristique commune des deux théories concerne la distinction et la mise en rapport qu'elles proposent entre *connaissance* (développée par un individu, souvent un élève) et *savoir* (avéré et reconnu par une institution) (Rouchier 1996 et Conne, 1992). C'est en particulier dans cette mise en rapport subtile que se nouent les relations entre la didactique des mathématiques et l'épistémologie⁵ (Dorier, 2000).

Pour une présentation succincte des deux théories, nous renvoyons à Margolinas (2005a) qui en montre à la fois les parentés dans les fondements et les différences dans les théorisations en jeu. Par ailleurs, ces deux théories créées dans le champ de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques ont produit des concepts qui ont migré dans d'autres didactiques et même au-delà dans les sciences de l'éducation.

À ses débuts, la TSD s'intéresse aux conditions de la production de connaissances significatives d'un savoir identifié. Il s'agit de mettre en évidence les éléments nécessaires (non factuels) qui fondent la raison d'une connaissance à travers la recherche de situations fondamentales (c'est-à-dire des situations proposant des tâches aux élèves pour lesquelles il est nécessaire de construire des connaissances liées au savoir visé pour les résoudre, voir glossaire). La réalisation et l'analyse d'ingénieries didactiques (Brousseau 1981 ; Artigue 1988) est avant tout un moyen d'éprouver la théorie par la mise en place de situations d'enseignement dans des classes, et s'oppose ainsi à l'idée d'innovation. La question de leur reproductibilité à plus grande échelle dans l'enseignement scolaire ne se posait pas à l'origine⁶, le dispositif du COREM restait le laboratoire au sein duquel elles prenaient sens. C'est dans ce cadre que se mettent en place les concepts centraux de situation adidactique (une situation associée à un enjeu mathématique véritable, et donc pour laquelle l'objectif d'enseignement peut être au moins temporairement oublié par les élèves), de dévolution (le

⁵ Rappelons que Brousseau et Vergnaud ont envisagé un temps de dénommer le champ de recherche « épistémologie expérimentale » plutôt que « didactique des mathématiques ».

⁶ On se reportera ici aux actes de la 15^e école d'été de didactique des mathématiques qui a eu lieu en août 2009 et entièrement consacrée au thème de l'ingénierie didactique, particulièrement au cours de Annie Bessot (Margolinas et al., 2011, p. 29-56).

fait que les élèves se saisissent de cet enjeu), de milieu ou de contrat qui permettent une modélisation de l'activité de classe. Vergnaud s'intéresse au rapport entre psychologie et didactique et à la « question des contenus d'enseignement à l'intérieur d'une psychologie du développement cognitif » (Brun, 1994, p.71). La théorie des champs conceptuels, outre le fait qu'elle place les processus cognitifs, les schèmes (et plus tard les activités) de l'élève au centre, adopte d'emblée une analyse à un grain plus gros que celui de la TSD qui reste essentiellement au niveau micro de l'analyse d'une situation à l'échelle de la classe.

À partir des années 80, ces deux théories fondatrices vont s'enrichir d'une nouvelle façon de penser les questions d'enseignement et d'apprentissage avec ce qui deviendra la *Théorie Anthropologique du Didactique* (TAD) d'Yves Chevallard (1985, 1992, 1997, 2002a et b). C'est d'abord avec la *transposition didactique* que Chevallard (1985) apporte sa contribution. Ce concept est, sans doute avec celui de contrat didactique, l'un des plus utilisés à l'extérieur de la didactique des mathématiques, peut-être aussi l'un des plus galvaudés. Il apporte un point de vue original par rapport à la TSD en élargissant le champ d'intervention de la didactique des mathématiques à l'environnement extérieur au seul système didactique de la classe. L'étude de la transposition didactique consiste en effet à analyser les conditions qui permettent à des éléments du savoir savant (c'est-à-dire reconnu par une communauté scientifique productrice de ce savoir) d'être apprêtés (au sein d'un groupe de spécialistes, par exemple en France l'inspection générale) pour devenir des candidats au savoir à enseigner, lui-même ensuite « mis en texte » au sein du système didactique (le professeur et sa classe, et plus globalement l'École en tant qu'institution) pour devenir du savoir enseigné. Dans un texte fondateur, Chevallard délimite ainsi ce qui le distingue de Brousseau :

[La théorie des situations] tend à privilégier le point de vue de l'économie et à laisser un peu en retrait le point de vue de l'écologie des systèmes. Ou, pour le dire plus concrètement, elle tend à se centrer sur le fonctionnement de la machine, en laissant un peu de côté l'étude des conditions de possibilité de ce fonctionnement. [...] je suis, quant à moi, davantage fasciné par l'étude des conditions de possibilité de leur fonctionnement tout court – bon ou moins bon. (Chevallard 1992, p.103)

Les théorisations successives de Chevallard vont ensuite envisager tour à tour, dans une perspective qui s'affichera comme anthropologique, les rapports des individus dans des institutions aux objets de savoir, les conditions écologiques de vie des éléments de savoir dans des institutions données, la modélisation de l'activité mathématique. La TAD propose de modéliser cette activité, dans une institution donnée, par des types de tâches, des techniques permettant de les accomplir, des discours explicatifs de la technique appelés technologies et des théories fondant elles-mêmes les technologies. L'entreprise théorique dépasse alors le seul champ de la didactique des mathématiques, mais l'appui épistémologique reste toutefois très centré sur les mathématiques (dans ce sens les évolutions plus récentes comme les parcours et activités d'étude et de recherche replacent au centre des préoccupations la question des raisons d'être du savoir, ouvrant vers une relecture du concept de situation fondamentale de la TSD). D'ailleurs, même si ce n'est pas la partie la plus connue du travail de Chevallard, celui-ci s'appuie sur une pratique constante d'expérimentation et d'observation de terrain. Dans ce sens, il est conforme à une tradition forte en didactique des mathématiques francophone qui, tout en se plaçant en rupture face aux pratiques de l'innovation, met au cœur de ses préoccupations le rapport de la théorisation à l'expérimentation qui en éprouve les construits.

Nous pouvons citer ici Joshua s'interrogeant sur la nature de ce que peut être un résultat en didactique :

Un résultat en didactique est un bloc composé d'un cadre théorique explicite et de données empiriques. [...] À l'intérieur de ce bloc, il est nécessaire que le résultat résiste, qu'il soit stable. [...] En conséquence, la marque principale d'un résultat en didactique, c'est de renforcer le paradigme où il s'abrite. [...] Finalement la marque essentielle d'un résultat, c'est sa capacité à produire de nouveaux résultats. » (Joshua, 1996, p. 214–215)

Cette vision semble bien caractériser la didactique des mathématiques francophone, au moins les trois théories principales que nous avons abordées.

3. Évolution des thèmes et développements théoriques

Ce rapide tour d'horizon ne donne bien sûr qu'une vision très parcellaire de l'évolution de la didactique des mathématiques des années 70 aux années 90. S'il est vrai que les trois théories que nous avons rapidement évoquées en constituent les principaux piliers, cette vision ne rend pas compte de l'ampleur des travaux réalisés dans ce champ qui portent sur l'enseignement et l'apprentissage de nombreux contenus mathématiques étudiés à l'école primaire, au collège, au lycée ou dans les premières années d'études supérieures. Il suffit d'examiner les articles parus dans la revue scientifique *Recherches en Didactique des Mathématiques* qui a publié depuis 1980 une dizaine d'articles de référence par an, les actes des écoles d'été qui ont lieu depuis la même période tous les deux ans, les revues *Grand N* et *Petit x* (respectivement à destination des enseignants du primaire et du secondaire), les actes des séminaires nationaux ou de divers laboratoires, les nombreuses publications des IREM, les thèses, etc. Au début, les recherches ont surtout porté sur le niveau de l'enseignement primaire, avec des travaux d'ingénierie fondateurs⁷ sur le numérique, la proportionnalité, la mesure, les aires et la géométrie, mais rapidement ils ont aussi porté sur l'enseignement secondaire et l'enseignement supérieur, ou encore sur l'enseignement professionnel. Si la plupart de ces travaux se réclament explicitement de l'une ou l'autre des trois théories précédentes, plusieurs faisant d'ailleurs le pont entre elles, l'usage qu'ils en proposent est plus ou moins lâche. Par ailleurs, d'autres contributions théoriques ont rapidement été proposées, comme des points d'appui complémentaires. Nous pouvons ici citer les jeux de cadres et la dialectique outil/objet de Régine Douady (1986) qui se fonde sur une observation très fine de la pratique des mathématiciens. La notion de registres de représentation sémiotique de Raymond Duval (1996), issue du champ de la linguistique, place la question de la représentation des objets mathématiques au cœur des phénomènes cognitifs. De nombreux travaux se sont par ailleurs intéressés à la question de la démonstration (avec les notions proches d'argumentation et de preuve) et à celle de la pratique de résolution de problème et d'entrée dans la démarche scientifique. Il serait trop long d'en faire ici l'inventaire⁸, mais ces travaux qui ne forment pas un tout uniforme ont conduit à enrichir les outils théoriques de la didactique des mathématiques. Dans le champ de l'analyse statistique des données, plusieurs recherches ont contribué à la réflexion sur les questions de méthodologie. L'un des plus innovants qui s'est développé au sein même de la didactique des mathématiques est celui de l'analyse implicite de Régis Gras (2009⁹). Dans un tout autre domaine, une collaboration originale a réuni didacticiens des mathématiques et psychologues autour de la notion d'espace, en particulier en lien avec les enseignements professionnels et les milieux professionnels des métiers du bâtiment et de la mécanique (Bessot et Vérillon 1993). Dans les

⁷ Il serait trop long de donner ici des références.

⁸ On citera un des travaux pionnier de Balacheff (1982), qui a par ailleurs été à l'origine d'une recension sur le net de travaux internationaux sur le domaine dans la lettre de la preuve, encore en vigueur aujourd'hui : <http://www.lettredelapreuve.it/>.

⁹ Nous donnons ici une référence récente, mais les premiers travaux remontent à la fin des années 80.

années 80, avec les développements de l'informatique et les tentatives d'instituer des enseignements de cette discipline dès le lycée, quelques tentatives ont été faites pour développer une didactique de l'informatique (essentiellement à Grenoble et Montpellier). Dans les années 90, les développements des calculatrices et des micro-ordinateurs ont conduit à se centrer sur l'usage des outils informatiques (maintenant TICE) dans les enseignements de mathématiques. Le développement d'outils informatiques propres à l'enseignement des mathématiques (Logo, Cabri-géomètre, Maple, etc.) ont conduit à des théorisations autour du concept de micromonde, comme un élément central du milieu didactique. Par exemple, l'équipe grenobloise autour de Colette et Jean-Marie Laborde, développant l'outil Cabri-géomètre en lien direct avec les études didactiques (dans le paradigme de la TSD), a joué un rôle théorique important dans les années 80-90 (Capponi et Laborde 1994, pour un texte fondateur). L'intelligence artificielle, bientôt supplantée par les *Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humains* (EIAH) a aussi donné naissance à un courant important de travaux spécifiques en didactique des mathématiques (Balacheff 1994). Actuellement, les recherches portant sur un usage des TICE dans l'enseignement des mathématiques sont très variées. Un apport théorique notable a été engendré par les travaux de Rabardel (1999) issus du champ de l'ergonomie cognitive (avec une origine dans les travaux de Vygotsky). Son approche, dite instrumentale, distingue l'artefact de l'instrument : le premier est l'objet matériel seulement, alors que le second est constitué de la rencontre d'un sujet et d'un artefact et met en valeur l'étude des schèmes d'utilisation des artefacts dans des situations précises. La genèse instrumentale, qui modélise les rapports du sujet et de l'artefact, se réalise alors dans une dialectique entre instrumentalisation (prise en main de l'artefact par le sujet) et instrumentation (processus par lequel l'artefact conditionne l'action du sujet). Cet apport à la didactique des mathématiques est à présent utilisé dans de nombreux travaux. Il a récemment donné lieu à un élargissement dans des travaux sur l'usage des ressources documentaires par les enseignants à travers le concept de genèse documentaire (Gueudet et Trouche, 2010).

Le catalogue rapidement brossé ci-dessus, qui ne saurait être exhaustif¹⁰, montre la grande diversité des travaux francophones en didactique des mathématiques qui se sont développés dans des directions très variées dans un rapport plus ou moins distant avec les trois théories que nous avons cataloguées de centrales (TSD, Théorie des champs conceptuels et TAD). Par ailleurs, nombre d'entre eux ont permis des collaborations avec des chercheurs étrangers de divers horizons montrant que la didactique des mathématiques francophone ne vit pas en autarcie, même si le cœur de son ouvrage théorique a parfois du mal à diffuser, en particulier dans le monde anglo-saxon.

4. Expansion des travaux sur les pratiques enseignantes

Pour terminer ce rapide tour d'horizon, nous nous proposons à présent d'en venir à une évolution importante du champ amorcée dès les années 90 et qui a vu un élargissement de la TSD et de la TAD aussi bien qu'une ouverture plus grande vers des champs connexes de la didactique des mathématiques, en particulier des sciences de l'éducation. Nous voulons parler ici de la multitude de travaux qui ont vu le jour sur les pratiques enseignantes et de l'impact de ceux-ci sur les contenus de la formation des enseignants. Nous donnons dans la bibliographie plusieurs références qui permettront aux lecteurs de se faire une idée plus précise de ce que nous allons ici rapidement survoler.

¹⁰ Nous n'avons en particulier pas évoqué ici les travaux de Mercier, Sensevy ou Schubauer-Leoni, qui s'ils trouvent leur origine dans la didactique des mathématiques ont été fondateurs du champ de la didactique comparée, que nous n'aborderons pas ici en tant que telle.

Nous l'avons dit plus haut, les travaux fondateurs en didactique des mathématiques étaient avant tout centrés sur le couple connaissance/savoir. En ce sens, dans les modélisations, l'élève et surtout l'enseignant étaient considérés comme génériques, en quelque sorte transparents. Rapidement, la diffusion des ingénieries didactiques, dont nous avons rappelé qu'en rupture avec les pratiques d'innovation, elle était avant tout le lieu de mise à l'épreuve de la théorie dans des conditions contrôlées, a montré la nécessité de prendre en compte dans la modélisation les élèves et le professeur. C'est dans ce sens que Brousseau va être alors amené à introduire un modèle de la structuration du milieu, qui permet de traduire différentes positions de l'élève en interaction avec différentes strates du milieu dans une situation didactique. Margolinas (2002¹¹) va compléter ce modèle en introduisant des positions « symétriques » pour l'enseignant, enrichissant ce qui va être connu sous le terme de « modèle de l'oignon », par les niveaux sur-didactiques, qui détermine des positions de l'enseignant en amont de la situation didactique, en classe. À partir de cette construction théorique, les chercheurs vont alors utiliser et modifier les concepts de la TSD (en particulier le couple milieu, contrat) pour les appliquer à l'analyse des pratiques dites « ordinaires ». Nous trouverons des illustrations et des recensions de ces travaux dans (Hersant 2001 et 2010, Margolinas 1999, 2002, 2004 et 2005b, Perrin-Glorian et Hersant 2003). Cet élargissement de la TSD est aussi un détournement de ses origines qui, loin de dénaturer cette théorie, en montre en quelque sorte la portée. Perrin-Glorian rendant compte de ces travaux dans le cadre de la XV^e école d'été sur l'ingénierie didactique a montré comment les recherches se dirigeaient actuellement vers la production de ressources pour les enseignants, appelant ainsi de ses vœux la création et diffusion « d'ingénieries de deuxième génération » communicables à des enseignants « ordinaires » pour des classes « ordinaires » (Margolinas et al. 2011, p. 57-78).

Mais, les recherches sur les pratiques enseignantes en didactique des mathématiques ne se limitent pas à ce seul élargissement des outils de la TSD. Nous trouverons, dans Margolinas et Perrin-Glorian (1998), quatre approches très différentes, l'une issue de la TAD, qui propose des praxéologies didactiques construites sur le même modèle en quatre composantes que les praxéologies mathématiques évoquées ci-dessus (plusieurs travaux dans ce sens ont depuis été réalisés¹²), un autre dans le cadre élargi de la TSD (comme ce que nous venons d'évoquer), une utilisant des apports de la psychanalyse par Claudine Blanchard-Laville (1997) et enfin une autre centrée sur le discours de l'enseignant. Cette dernière étude de Hache et Robert entre dans un cadre qui s'est depuis développé et est connu sous le nom de « double approche » (Robert et Rogalski 2002 et 2005). Ces auteurs empruntent en effet des outils théoriques du champ de l'ergonomie cognitive pour analyser le travail de l'enseignant. Ces travaux visent à mettre en particulier en évidence les écarts entre les activités potentielles proposées aux élèves par les enseignants et les activités effectivement réalisées. Ces dernières sont en effet le fruit d'adaptations incontournables liées aux contraintes de la gestion didactique, mais aussi plus globalement de l'exercice du métier. Nous pourrions nous faire une idée assez large des travaux de cette équipe dans (Robert 1998, 1999, 2001 et 2008, Roditi 2005 et 2008, Rogalski 2003 et Vandebrouck 2008). Ces travaux qui se sont souvent intéressés aux problèmes d'enseignement dans les milieux socialement défavorisés (ZEP) tentent de mettre en rapport les effets des pratiques enseignantes sur les apprentissages effectifs des élèves (Peltier 2004). S'ils utilisent des outils de la TSD et la théorie des champs conceptuels, en particulier pour faire des analyses a priori des activités proposées aux élèves, ils s'outillent largement de concepts propres (niveau de conceptualisation, types de notion,

¹¹ C'est un texte de référence, mais le travail est antérieur.

¹² Nous n'avons plus la place d'aborder ici l'étendue des travaux réalisés en France mais aussi en Espagne dans le cadre de la TAD. Nous renvoyons le lecteur aux actes des colloques organisés tous les deux ans depuis 2006.

classification des tâches, etc.), mais aussi d'approches issues du champ de l'ergonomie cognitive, et plus largement des sciences de l'éducation (notamment des théories de Vygotski), voire de la sociologie.

Nous terminerons ici ce tour d'horizon, forcément incomplet, qui montre qu'en 40 ans la didactique des mathématiques francophone s'est très largement développée. Non seulement elle a élargi ses objets d'étude, mais elle a aussi étendu son champ théorique et s'est fait une place particulière dans le champ des sciences de l'éducation, sans pour autant renier son attachement aux mathématiques.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- ARTIGUE (1988) Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 281–308.
- ARTIGUE, M. et DOUADY, R. (1986). La didactique des mathématiques en France. *Revue Française de Pédagogie*, 76, 69-88.
- BALACHEFF, N. (1982). Preuve et démonstration en mathématiques au collège. *Recherches en didactique des mathématiques*, 3(3), 261–304.
- BALACHEFF, N. (1994). Didactique et intelligence artificielle. *Recherches en didactique des mathématiques*, 14(1/2), p. 9–42.
- BESSOT, A. et VÉRILLON, P. (1993). *Espaces Graphiques et Graphismes d'Espaces – Contribution de psychologues et de didacticiens à l'étude de la construction des savoirs spatiaux*. Grenoble : La pensée Sauvage.
- BLANCHARD-LAVILLE, C. (1997). L'enseignant et la transmission dans l'espace psychique de la classe. *Recherches en didactique des mathématiques*, 17(3), 151-176.
- BROUSSEAU, G. (1972). Processus de mathématisation. In *La mathématique à l'Ecole Elémentaire*. 428–442. Paris : APMEP.
- BROUSSEAU, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux : deuxième partie. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2(1), 37–127.
- BROUSSEAU, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33–115.
- BROUSSEAU, G. (1990). Utilité et intérêt de la didactique. *Grand N*, 47, 93-114.
- BROUSSEAU, G. (1995a). Les mathématiques à l'école. *Bulletin de l'APMEP*, 400, 831-850.
- BROUSSEAU, G. (1995b). L'enseignant dans la théorie des situations didactiques. In R. Noirfalise (éd.), *Actes de la 8ème Ecole d'Eté de didactique des mathématiques* (p. 3–46). Clermont-Ferrand : IREM.
- BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Textes rassemblés et préparés par N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, V. Warfield. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- BROUSSEAU, G. (2004). L'émergence d'une science de la didactique des mathématiques : motifs et enjeux. *Repères IREM*, 55, 19–34.
- BRUN, J. (1994). Evolution des rapports entre la psychologie du développement cognitif et la didactique des mathématiques. In M. Artigue, R. Gras, C. Laborde et P. Tavinot.

- (éd.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France* (p. 51–66). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- BRUN, J. (1996) *Didactiques des mathématiques*. Lausanne : Delachaux et Niestlé.
- CAPPONI, B. et LABORDE, C. (1994). Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(1/2), 165–210.
- CHEVALLARD, Y. (1985/1991) *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble : La pensée Sauvage.
- CHEVALLARD, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 73–111.
- CHEVALLARD, Y. (1997). Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 17(1), 17–54.
- CHEVALLARD, Y. (2002a). Organiser l'étude. Structures et fonctions. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, R. Floris (éd.), *Actes de la 11ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques* (p. 3–22). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- CHEVALLARD, Y. (2002b). Organiser l'étude. Ecologie et régulation. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, R. Floris (éd.), *Actes de la 11ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques* (p. 41–56). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- CHEVALLARD, Y. (2003). Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques. In S. Maury et M. Caillot (éd.), *Rapport au savoir et didactiques* (p. 81–104). Paris : éditions Fabert.
- COLMEZ, F. DE HOSSON, C., PICHAUD, J. et ROBERT, A. (2009). *Hommage à André Revuz – L'engagement universitaire – L'héritage didactique*. Paris : Publication du laboratoire de didactique André Revuz.
- COMENIUS, J.A. (1648/2005). *Novissima linguarum methodus*. Genève: Droz.COMITI, C.,
- GRENIER, D. et MARGOLINAS, C. (1995). Niveaux de connaissances en jeu lors d'interactions en situation de classe et modélisation de phénomènes didactiques. In G. Arsac, J. Gréa, D. Grenier et A. Tiberghien (éd.), *Différents types de savoirs et leur articulation* (p. 92–113). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- CONNE, F. (1992). Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(2/3), 221–270.
- CORAY, D., FURINGHETTI, F., GISPERT, H., HODGSON, B. et SCHUBRING, G. (éd.) (2003). *One Hundred Years of L'Enseignement Mathématique – Moments of Mathematics education in the Twentieth Century – Proceedings of the EM-ICMI Symposium – Geneva, 20–22 October 2000*. Geneva : L'enseignement Mathématique. <http://www.mathunion.org/icmi/digital-library/other-icmi-conferences-proceedings/>
- DORIER, J.-L. (2000). Recherche en histoire et en didactique des Mathématiques sur l'Algèbre linéaire - Perspectives théorique sur leurs interactions, note se synthèse HDR Université J. Fourier – Grenoble1, Cahier du laboratoire Leibniz n°12. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00338400/document>
- DORIER, J.-L. (2008). The development of mathematics education as an academic field, In M. Menghini, F. Furinghetti, L. Giacardi et F. Arzarello (éd.), *The first century of the*

- International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008). Reflecting and shaping the world of mathematics education (p. 40-46). Roma: Istituto della Enciclopedia Italiana.
- DORIER J.-L. (2012). La didactique des mathématiques : émergence d'un champ autonome au carrefour des mathématiques, de la psychologie et des sciences de l'éducation. In M.-A. Elaouf, A. Robert, A. Belhadjin et M.-F. Bishop (éd.), *Les didactiques en question(s) - Etat des lieux et perspectives pour la recherche et la formation* (p. 42–48). Bruxelles : de Boeck (col. Perspectives en éducation et formation).
- DORIER J.-L. (2014). Aperçu de l'histoire de la didactique des mathématiques francophone. *Perspectivas da Educação Matemática*, 7, 365–379.
- DOUADY, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 5–31.
- DUVAL, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Berne : Peter Lang.
- FELIX, L. (1985). Aperçu historique (1950–1984) sur la CIEAEM. Bordeaux : IREM. http://www.cieaem.net/CIEAEM9bis/index_france.htm
- FREUDENTHAL, H. (1963) Enseignement des mathématiques modernes ou enseignement moderne des mathématiques. *L'Enseignement Mathématique*, 2^o série 9(1-2), 28–44.
- GISPERT, H. (2002). Pourquoi, pour qui enseigner les mathématiques? Une mise en perspective historique de l'évolution des programmes de mathématiques dans la société française au XX^{ème} siècle. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 34(4), 158–163.
- GRAS, R. (2009). *L'analyse statistique implicative*. Toulouse : éditions Cépaduès.
- GRECO, P. (1980). Pédagogie et Mathématiques. In *Encyclopedia Universalis* t.12, pp. 675-677.
- GUEUDET, G. et TROUCHE, L. (2010). *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques*. Rennes : Presse universitaire de Rennes et INRP.
- HERSANT, M. (2001). *Interactions didactiques et pratiques d'enseignement, le cas de la proportionnalité au collège*. Thèse de l'Université Paris 7.
- HERSANT, M. (2010). *Le couple (contrat didactique, milieu) et les conditions de la rencontre avec le savoir en mathématiques : de l'analyse des séquences ordinaires au développement de situations pour les classes ordinaires*. Note de synthèse HDR Université de Nantes.
- JOHSUA, S. (1996). Qu'est-ce qu'un « résultat » en didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16(2), 197–220.
- KEITEL, C. BAZZINI, L. SCHOPFER, E. LUELMO, M.-J. KRAEMER, J.-M. et INCHLEY C. (2002). La Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques est le plus ancien groupe international de travail et de réflexion de spécialité éducation mathématique. <http://www.upc.es/info/cieaem54/cieaem-fra/cieaem-presen.htm>
- KILPATRICK, J. (2008). The development of mathematics education as an academic field. In M. Menghini, F. Furinghetti, L. Giacardi et F. Arzarello (éd.), *The first century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008). Reflecting and*

- shaping the world of mathematics education (p. 33-39), Roma: Istituto della Enciclopedia Italiana.
- MARGOLINAS, C. (1992). Eléments pour l'analyse du rôle du maître: les phases de conclusion. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 113–158. Grenoble.
- MARGOLINAS, C. (1999). Les pratiques de l'enseignant : Une étude de didactique des mathématiques: recherche de synthèses et perspectives. In M. Bailleul (éd.), *Actes de la 10ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques* (p. 10–33). Caen : IUFM de Caen et A.R.D.M.
- MARGOLINAS, C. (2002). Situations, milieux, connaissances – analyse de l'activité du professeur. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, R. Floris (éd.), *Actes de la 11ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques* (p. 141–156). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- MARGOLINAS, C. (2004). Points de vue de l'élève et du professeur : Essai de développement de la théorie des situations didactiques. *Habilitation à diriger les recherches en sciences de l'éducation*, Université de Provence.
- MARGOLINAS, C. (2005a). Essai de généalogie en didactique des mathématiques. *Revue Suisse des sciences de l'éducation*, 27, 343–360.
- MARGOLINAS, C. (2005b). La dévolution et le travail du professeur. In P. Clanché, M.-H. Salin et B. Sarrazy (éd.), *Autour de la théorie des situations* (p. 329–333). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- MARGOLINAS, C. et PERRIN-GLORIAN M.-J. (1998). *Cinq études sur le thème de l'enseignant*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- MARGOLINAS C. , ABOUD-BLANCHARD M., BUENO-RAVEL, L., DOUEK, N., FLUCKIGER A., GIBEL P., VANDEBROUCK F. et WOZNIAK F. (éd.) (2011), *En amont et en aval des ingénieries didactiques – XVe école d'été de didactique des mathématiques, Clermont-Ferrand (Puy de Dôme) du 16 au 23 août 2009*. Grenoble : La pensée Sauvage.
- MENGHINI, M., FURINGHETTI, F., GIACARDI, L. et ARZARELLO, F. (éd.) (2008). *The first century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008). Reflecting and shaping the world of mathematics education*. Roma: Istituto della Enciclopedia Italiana.
- MORF, A. (1972). La formation des connaissances et la théorie didactique. *Dialectica*, 26/2, p. 103–114.
- MORF, A., GRIZE, J.-B., PAULI, L. (1969). Pour une pédagogie scientifique. *Dialectica*, 23/1, p. 24–31.
- PELTIER, M.-L. (éd.) (2004). *Dur dur d'enseigner en ZEP*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- PERRIN-GLORIAN, M.-J. (1994). Théorie des situations didactiques: naissance, développements, perspectives. In M. Artigue, R. Gras, C. Laborde, P. Tavnogot, (éd.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France* (p. 97–147). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- PERRIN-GLORIAN, M.-J. et HERSANT, M. (2003). Milieu et contrat didactique, outils pour l'analyse de séquences ordinaires. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 23(2), 217–276.

- PERRIN-GLORIAN, M.-J. et REUTER, Y. (éd.) (2006). Les méthodes de recherche en didactiques. Villeneuve d'Ascq : Presses Universitaires du Septentrion.
- PIAGET, J. (1973). Remarques sur l'éducation mathématique. *Math Ecole*, 58, 1–7.
- POLE, Y. (éd.) (1994). Dossier : La didactique des mathématiques. *Animation et éducation*, 123, 9–14.
- RABARDEL, P. (1999). Eléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. In M. Bailleul (éd.) *Actes de la 10e école d'été de didactique des mathématiques – Houlgate août 1999* (p. 203–213). Caen : IUFM et ARDM.
- REGNIER, J.-C. et PERRIER, F. (2002). La didactique des mathématiques au travers d'un récit de vie – entretiens avec Georges Glaeser. Strasbourg : IREM.
- REVUZ, A. (1980). Mathématiques (Enseignement). In *Encyclopedia Universalis* t.10, p. 617–619.
- ROBERT, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en didactique des mathématiques*, 18(2), 139–190.
- ROBERT, A. (1999). Recherches didactiques sur la formation professionnelle des enseignants de mathématiques du second degré et leurs pratiques en classe. *Didaskalia*, 15, 123–157.
- ROBERT, A. (2001). Les recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l'exercice du métier de l'enseignant. *Recherches en didactique des mathématiques*, 21(1.2), 57–79.
- ROBERT, A. (2008). Problématique et méthodologie communes aux analyses des activités mathématiques des élèves en classe et des pratiques des enseignants de mathématiques. In F. Vandebrouck (éd.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (p. 31–69). Toulouse : Octares éditions.
- ROBERT, A. et ROGALSKI J. (2005). A cross-analysis of the mathematics teacher's activity. An example in a French 10th-grade class. *Educational Studies in Mathematics* 59(1–3), 269–298.
- ROBERT, A. et ROGALSKI, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Revue Canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, 2(4), 505–528.
- RODITI, E. (2005). Les pratiques enseignantes en mathématiques, entre contraintes et liberté pédagogique. Paris : L'Harmattan.
- RODITI, E. (2008). Des pratiques enseignantes à la fois contraintes personnelles, et pourtant cohérentes. In F. Vandebrouck (éd.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (p. 73-95). Toulouse : Octares éditions.
- ROGALSKI, J. (2003). Y a-t-il un pilote dans la classe ? Une analyse de l'activité de l'enseignant comme gestion d'un environnement dynamique ouvert. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 23(3), 343–388.
- ROUCHIER, A. (1994). Naissance et développement de la didactique des mathématiques. In M. Artigue et al. (éd.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France* (p. 149–160). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- ROUCHIER, A. (1996). Connaissances et savoirs dans le système didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16(2), 177–196.

- VANDEBROUCK, F. (éd.) (2008). La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants. Toulouse : Octares éditions.
- VERGNAUD, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, 10(2/3), 133–169.
- VERGNAUD, G. (1981). Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques. In *Actes du 5e colloque PME* (vol. 2.2, p. 7–17). Grenoble.
- VERGNAUD, G. (1981a). *L'enfant la mathématique et la réalité*. Berne : Peter Lang.
- VERGNAUD, G. (1994a). *Apprentissages et didactiques, où en est-on ?*. Paris : Hachette.
- VERGNAUD, G. (1994b). Le rôle de l'enseignant à la lumière des concepts de schème et de champ conceptuel. In M. Artigue, R. Gras, C. Laborde et P. Tavinot (éd.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France* (p. 177–191). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- VERGNAUD, G. (2005). Repères pour une théorie psychologique de la connaissance. In A. Mercier et C. Margolinas. (éd.). *Balises en didactique des mathématiques* (p. 123–136). Grenoble : La Pensée Sauvage.