L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE DANS LA TRANSITION COLLÈGE-LYCÉE

MRABET* Slim

Résumé – Dans ce travail, nous tentons d'étudier les choix didactiques faits actuellement dans l'enseignement de la géométrie, et la façon dont les thèmes enseignés sont découpés et répartis, notamment dans la transition collège-lycée. A partir de l'analyse d'un thème spécifique de cette période dans les systèmes d'enseignement tunisien et français, nous nous interrogeons sur les conséquences didactiques de nos choix, sur l'apprentissage des élèves.

Mots-clefs : Transition, géométrie, théorème de Thalès, vecteurs, proportion

Abstract – In this work, we try to study the didactic choices made at present in the teaching of the geometry, and on the way the taught themes are cut and distributed, in particular in the transition college - high school. From the analysis of a specific theme of this period, in the Tunisian and French teaching systems, we wonder about the didactic consequences of the choices which we make, for the learning of the pupils.

Keywords: Transition, geometry, Thales theorem, vectors, proportion

I. INTRODUCTION

Nous partons de la conviction que les choix que nous faisons actuellement dans l'enseignement des mathématiques constituent un moment propice pour analyser des problèmes liés à l'enseignement. Un ensemble d'interrogations s'impose concernant les choix didactiques faits actuellement dans l'enseignement de la géométrie, le lien entre mathématiques et réalité physique, le rapport entre espace mathématique et espace empirique, la répartion des thèmes de géométrie enseignés actuellement et l'évolution dans la construction des connaissances. Sur quel *savoir savant* s'appuie-t-on dans l'enseignement de la géométrie ? Et à quel *savoir enseigné* est-on parvenu ? (Chevallard, 1989)

Plus précisément, on pourra s'interroger sur la façon dont la transition entre diffférentes géométries est négociée dans l'enseignement actuel, et si dans ce passage, il y a un changement dans le statut, le rôle et l'importance de la figure.

Dans le présent travail, nous avons l'ambition de donner quelques éléments de réponse à ces questions, et d'étudier les conséquences qui en découlent sur l'apprentissage des élèves.

I. LES GRANDS DOMAINES DE LA GEOMETRIE

Une étude de certains traités historiques et de l'histoire de l'enseignement des mathématiques en Tunisie ou ailleurs que nous avons menée dans notre thèse de doctorat (Mrabet, 2010) nous a permis de fixer trois grands domaines de la géométrie :

1. La géométrie élémentaire

Les *Eléments* d'Euclide constituent un moment important de l'évolution de la géométrie. Dès l'Antiquité, ils étaient considérés comme un moyen de rompre avec l'appréhension perceptive dominante à ce moment. La géométrie d'Euclide et de ses successeurs est basée sur la mesure des grandeurs géométriques à travers des figures. C'est une science où les figures, situées dans un plan ou dans l'espace, occupent une place centrale. Chez Euclide, les figures apparaissent figées et ne peuvent qu'être découpées, superposées ou reconstruites.

* Université de Carthage – Tunisie – mrabet_slim@yahoo.fr

L'un des principes forts de la géométrie chez Euclide est le principe de l'égalité par superposition. Euclide énonce parmi ses axiomes ce qui suit : "Et les choses qui s'ajustent les unes sur les autres sont égales entre elles.". Cette condition d'égalité qui fait appel au mouvement, celui de la superposition, fixe des critères d'égalité à partir desquels le mouvement des figures n'est plus utile. En effet, la démonstration du premier cas d'égalité des triangles utilise le mouvement à partir du principe de l'égalité par superposition. L'énoncé de ce premier cas d'égalité permet de se débarrasser par la suite du mouvement.

Cette géométrie est également caractérisée par la prédominance du raisonnement qui l'emporte sur l'aspect calculatoire, et l'un de ses objectifs est d'établir des relations entre les figures semblables (du plan ou de l'espace) et des proportions.

2. La géométrie des transformations

A partir de l'idée de déplacement, l'étude des relations entre les figures de l'espace a conduit progressivement à la notion de transformation, qui étudie les figures et surtout les relations entre ces figures.

Nous pouvons dire qu'une différence essentielle entre la géométrie élémentaire et la géométrie des transformations réside dans le changement d'appréhension de la figure : dans la géométrie classique**,** nous regardons les figures comme étant des surfaces et nous les comparons en comparant leurs éléments (angles, côtés), mais ces figures sont statiques. La géométrie des transformations met en avant les droites et les points par rapport aux surfaces et favorise le mouvement et le transfert de propriétés entre des figures. Chasles (1889) définit ce point de vue comme permettant de retrouver les propriétés caractéristiques d'une figure de départ par application d'une transformation :

> « Qu'on prenne une figure quelconque dans l'espace, et l'une de ses propriétés connues ; qu'on applique à cette figure l'un de ces modes de transformations, et qu'on suive les diverses modifications ou transformations qui éprouvent le théorème qui exprime cette propriété, on aura une nouvelle figure et une propriété de cette figure qui correspond à celle de la première » (p. 268).

3. La géométrie analytique

Dans le cadre analytique, la signification des transformations peut être occultée par des propriétés où la puissance du calcul remplace les configurations. Les traités de Choquet (1964) et de Dieudonné (1964) montrent la puissance de l'aspect calculatoire dans la résolution des problèmes de géométrie, qui l'emporte sur le raisonnement sur les figures. Dans son traité, Dieudonné mène une comparaison entre la géométrie basée sur l'algèbre linéaire, proche de la géométrie analytique et la géométrie traditionnelle :

L'algèbre linéaire permet, à partir d'axiomes extrêmement simples, d'avoir des résultats importants par un calcul concis et précis. La géométrie traditionnelle part d'axiomes compliqués. Dans la résolution de problèmes, elle fait un détour pour ramener le problème à un cas d'égalité ou de similitude de triangles.

L'algèbre linéaire retrouve tous les résultats de la géométrie classique rapidement et rigoureusement. Elle peut être enseignée à tous les élèves compte-tenu de la simplicité des notions d'espace vectoriel et d'application linéaire.

Contrairement à sa réputation d'être une science abstraite, les possibilités d'avoir des objets représentables à chaque étape permettent de mettre l'accent sur la pratique des graphiques vu leur importance dans plusieurs domaines. La géométrie traditionnelle ne sert qu'aux futurs professeurs de mathématiques. Ses systèmes sont tellement complexes que l'on ne peut les enseigner qu'à des spécialistes. Ceci n'est pas la mission de l'enseignement secondaire, puisque les élèves qui seraient des spécialistes ne forment qu'une minorité de l'ensemble total des élèves.

L'algèbre linéaire traite séparément, dès le début, les propriétés de nature « affine » et celles de nature « métrique » ainsi que leurs conséquences. La géométrie traditionnelle a l'inconvénient de mettre au même niveau deux notions de natures différentes : le parallélisme et la perpendicularité.

Le travail de Rauscher (1994) indique que l'enseignement de la géométrie passe par trois stades différents :

- La géométrie d'observation : c'est la géométrie réservée au primaire. Elle se base sur le visuel et sur les mesures effectuées sur les dessins comme moyens de validation et donne donc au dessin le statut de preuve.

- La géométrie de traitement commence en début de collège et constitue réellement la transition entre la géométrie d'observation et la géométrie déductive. Dans cette période, l'élève est initié à distinguer entre les informations qui définissent une situation et celles qui en résultent, et à effectuer le passage d'un registre à l'autre (texte, figure, codages, symboles…).

- La géométrie déductive qui apparaît en fin de collège et prend appui sur le raisonnement déductif. L'élève est appelé à faire l'articulation entre différents registres d'expression mathématique que ce soit à l'écrit ou à l'oral : des allers-retours entre le texte et le dessin.

Le passage à la géométrie basée sur l'algèbre linéaire doit se faire avec prudence: la puissance du calcul vectoriel occulte le rôle des figures et constitue une rupture avec la géométrie enseignée pour plusieurs années.

II. PROGRESSION DANS L'ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE

1. La géométrie au collège

La géométrie d'Euclide nous paraît la plus pertinente pour les élèves du collège, pour les raisons suivantes :

- Il s'agit de permettre aux élèves de déterminer la signification des objets géométriques et de leurs propriétés à partir de la perception sensible, que les géométries analytique et des transformations vont permettre d'expliquer et d'approfondir.

- Elle permet de travailler sur des figures simples, d'étudier les propriétés communes de ces objets, puis progressivement, l'accession de ces propriétés au statut de théorèmes.

- Elle contribue à l'apprentissage de la démonstration par des raisonnements simples.

La construction d'Euclide, qui passe rapidement d'une perception pragmatique à un développement théorique, correspond à l'acquisition des connaissances géométriques chez les élèves du collège, et à l'évolution du descriptif sensible au théorique. Un exemple qui illustre bien ce passage est le premier cas d'égalité des triangles.

Une question se pose : quelle progression cohérente entre la géométrie élémentaire et les transformations ?

On peut chercher au collège une conception de la notion des transformations cohérente avec le cadre euclidien : **on ne considère les transformations que par leur action sur les figures et non pas sur l'espace tout entier.** En particulier, une transformation agit sur les points situés sur des lignes ou définis par leur intersection, mais pas sur des lignes comme des ensembles de points. Même si les transformations s'appliquent à des points, ceux-ci devraient être considérés comme des objets géométriques faisant partie de figures (comme extrémités de lignes) et non comme constituants élémentaires de figure.

2. La géométrie au lycée

Au lycée, on peut considérer les transformations opérant sur des figures comme une application du plan dans lui-même, qui opère sur des points puis plus généralement et globalement sur des figures

Ce choix est appuyé par le fait que la notion de « fonction » n'apparaît aux élèves qu'en première année du lycée, par les fonctions linéaires et les fonctions affines, et ainsi, on peut passer à l'idée qu'une transformation associe à tout point du plan un point du plan bien déterminé.

La transition collège lycée pourrait être accompagnée d'un changement dans la conception des transformations : l'élève passera d'une transformation opérant sur des figures à une application du plan dans lui-même qui opère sur des points puis plus globalement sur des figures. Ce passage constitue une rupture épistémologique certaine.

III. DISTINCTION : DESSIN-FIGURE EN GEOMETRIE

Le dessin désigne l'objet concrètement tracé sur une feuille de papier alors que la figure appartient au monde de la géométrie dont le dessin n'est qu'une représentation ou encore une matérialisation sur le papier, sur le sable ou sur l'écran de l'ordinateur. Lorsque deux dessins diffèrent par une mobilisation de certaines variables, la non abstraction par l'élève de l'objet théorique auquel renvoient ces dessins peut lui donner l'illusion de l'existence de deux figures différentes (Duval, 1994).

Le changement du statut du dessin vers celui de la figure, qui est une rupture épistémologique, constitue une réelle difficulté dans l'enseignement et l'apprentissage de la démonstration: les élèves ne sont pas prêts à réorganiser leur pensée sur la base des notions abstraites. En même temps, parfois, les enseignants inconcients de cette rupture ne peuvent pas mener un discours explicite pour expliquer ce statut de la figure.

IV. ETUDE D'UN EXEMPLE : LE THEOREME DE THALES

1. Le théorème de Thalès dans l'enseignement tunisien

- Dans l'enseignement tunisien, les trois domaines: géométrie élémentaire, géométrie des transformations et géométrie analytique coexistent au collège et au lycée.

- En 7e et 8e de base[1], utiliser les transformations dans certaines séquences déductives est d'un niveau cognitif élevé pour des enfants de 13 - 14 ans. On pourra remarquer ceci dans certains exemples : les élèves sont plus à l'aise dans l'utilisation du théorème de Thalès appliqué dans un triangle qu'avec l'approche « projection », dans une figure formée de « parallèles et séquentes ».

- En 8e de base, on introduit la symétrie centrale simultanément par ses caractères fonctionnel et global.

[1] Première et deuxième année du collège, élèves de 13 à 14 ans.

- Au lycée, le passage au vectoriel occulte le travail de la géométrie élémentaire, et le recours à la figure est rare.

Pour analyser de près la problématique du passage au vectoriel, nous avons proposé à trois classes de 2ème S (en Tunisie)[2] et à trois classes de 2nde (en France) un test sous deux versions : l'une avec distances, l'autre avec vecteurs. Les deux versions du test proposé ne diffèrent que du point de vue de la forme des énoncés. Les figures étant les mêmes, nous pouvons donc lier les différences éventuelles dans les réponses des élèves à l'influence du type d'énoncé utilisé qui dépend lui-même du programme de chaque pays.

L'objectif principal de ce test est donc de répondre aux interrogations suivantes : existe-t-il une rupture chez les élèves, entre les deux formes possibles du théorème de Thalès. Ce théorème, le plus souvent rencontré dans sa présentation utilisant des distances, est-il reconnu dans les situations vectorielles ?

Énoncé 1 (test B, avec distances)

Dans la figure ci-contre, EFGH est un parallélogramme,

les droites (KL) et (FG) sont parallèles, les droites

(IJ) et (EF) sont parallèles.

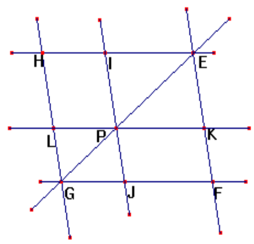
Le point P est tel que EP = 3/5 EG

1) Exprimer EP à l'aide de PG

2) Trouver un réel m tel que PI = m PJ

3) Montrer que PK = m PL

4) En déduire que les droites (IK) et (JL) sont parallèles.



Énoncé 2 (test A, avec vecteurs)

Dans la figure ci-contre, ABCD est

un parallélogramme, les droites (KL) et (BC) sont

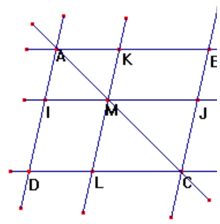
parallèles, les droites (IJ) et (AB) sont parallèles.

Le point M est tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$

2) Trouver un réel a tel que $\overrightarrow{MI} = a\overrightarrow{MJ}$

3) Montrer que $\overrightarrow{MK} = a\overrightarrow{ML}$

4) En déduire que les droites (IK) et (JL) sont parallèles.



Précisons d'abord le choix des moments de la passation des tests. Nous avons fait en sorte de neutraliser autant que possible l'effet des thèmes de géométrie que les élèves ont étudiés durant l'année du test et les années précédentes. Pour que les élèves soient dans des conditions aussi proches que possible, nous avons choisi de placer ce test après les leçons sur le théorème de Thalès et les vecteurs, qui diffèrent en quelques points dans les deux systèmes, et avant l'introduction de l'homothétie et du barycentre. Pour les classes tunisiennes le test a été fait au mois de février 2007, les classes françaises un mois après.

[2] 2ème année du lycée, élèves de 14 à 15 ans.

Consultons les entretiens que nous avons tenus avec les enseignants des classes visitées dans le but d'éclairer les pistes que les élèves pourraient suivre dans leurs réponses, auxquels nous avions posé la question suivante :

« Est-ce que vous vous attendez à une (ou à des) différence(s) dans la manière de résoudre les exercices du test A et du test B ? Si oui, préciser laquelle (lesquelles), si non, préciser ce qui vous fait penser qu'il n'y a pas de différence ».

Les remarques suivantes apparaissent à travers leurs réponses :

- Tous les enseignants (des deux pays) ont prévu que les élèves réussiraient plus facilement la version « distance », la version « vecteur » risquant de les désorienter.

- Les enseignants tunisiens pensent qu'il serait difficile aux élèves de reconnaître une situation de Thalès utilisant les vecteurs, et qu'ils s'engageront dans un calcul vectoriel en utilisant la relation de Chasles. Un enseignant précise que : Il leur est difficile d'appliquer le théorème de Thalès avec des parallélogrammes. La version « vecteur » sera complètement ratée. Chez les élèves, le théorème de Thalès ne sera pas reconnu avec les vecteurs ».

Un enseignant français fait la même remarque et ajoute qu'en l'absence d'un énoncé vectoriel du théorème de Thalès, les élèves ne seront pas en mesure de produire des démonstrations commodes et rigoureuses.

Une deuxième question a été posée aux enseignants :

« Quelles procédures, propriétés utilisées, difficultés et erreurs, attendez-vous dans chacune des deux versions du test ? »

Dans leurs réponses, les enseignants tunisiens prévoient des erreurs dans la version « distance » dans le choix des rapports (rapports faux) dus à un mauvais choix de figure. Ils prévoient aussi beaucoup de non réponses dans la version vectorielle.

Les deux enseignants français s'accordent autour d'une même idée : dans la version vectorielle, certains élèves peuvent donner des démonstrations hybrides où ils mêlent les calculs avec distances et avec vecteurs. Certains types d'erreurs dans ce sens sont cités comme exemple : l'utilisation de la colinéarité des vecteurs, avec des justifications de type Thalès classique, ou des égalités de type : un vecteur = un nombre.

L'un de ces deux enseignants prévoit deux types de réponses :

- Le passage à Thalès classique par l'utilisation des critères de : direction, sens et norme.

- Une utilisation intuitive et non justifiée de Thalès vectoriel.

2. Les résultats du tetst obtenus :

Des points communs

- L'énoncé Thalès-vectoriel n'est pas disponible chez les élèves. Pour les élèves tunisiens ou français, cet énoncé n'est pas cité dans les programmes comme objet d'enseignement. Dans le manuel tunisien[3] de 2ème S, une petite place lui est accordée.

- Dans les deux pays, la version « distance » permet d'avoir un taux de réussite plus élevé que la version vecteur. Avec les vecteurs, les élèves font plus d'erreurs de types divers.

- L'intuition chez quelques élèves tunisiens et français leur a permis d'« inventer » le Thalès-vectoriel sans mettre la réponse sous le titre du « théorème de Thalès ».

[3] En Tunisie, il existe un seul manuel scolaire officiel pour chaque niveau.

- Dans la version « distance », les élèves font des tentatives de passage des écritures « linéaires » aux rapports de distances, mais ils se confrontent à un passage auquel ils ne se sont pas habitués, avec deux écritures littérales : l'une de type $\mathrm{AM} = k\mathrm{AB}$, l'autre de type $\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}} = k$. Remarquons que dans les manuels tunisiens ou français, les écritures sous forme de proportion sont les plus fréquentes dans les applications liées au théorème de Thalès. Nous pensons, avec Cousin-Fauconnet (1995), qu'il faudrait initier les élèves, dans l'apprentissage du théorème de Thalès, à passer de l'écriture de type $\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}} = k$ à l'écriture de type $\mathrm{AM} = k\mathrm{AB}$ dans le but de les préparer à l'arrivée des vecteurs.

Des points de différence

- En Tunisie, dans la version « vecteur », beaucoup d'élèves ne donnent pas de réponse. Certains élèves tentent de donner une réponse et s'engagent dans un calcul vectoriel en utilisant la relation de Chasles, sans reconnaître qu'il s'agit d'une situation de Thalès. Ils font des erreurs de type : produit ou quotient de deux vecteurs

- En France, les élèves tentent de donner une réponse dans la version « vecteur » et font des erreurs de types divers. Ils utilisent rarement le calcul vectoriel à la place du théorème de Thalès et font surtout des erreurs dans le passage des proportions à l'écriture linéaire. La forme vectorielle du théorème de Thalès permet de passer d'une égalité du produit d'un vecteur par un réel à une égalité analogue en considérant les vecteurs images par projection, se réduit chez les élèves à retrouver à partir d'une écriture de type $\mathrm{AM} = k\mathrm{AB}$, déduite de l'énoncé, une écriture de type $\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}} = k$ qui leur est plus familière.

V. CONCLUSION

Dans les systèmes tunisien et français, le passage de la géométrie classique à la géométrie vectorielle est supposé comme allant de soi. Avec l'arrivée des vecteurs, l'algébrisation de la géométrie rend peu utile le recours à la figure et aux théorèmes importants du collège dont celui sur le théorème de Thalès sous sa forme classique. La transition entre deux domaines de la géométrie: la géométrie ponctuelle et la géométrie vectorielle est passée sous silence. L'exemple du théorème de Thalès a montré l'insuffisance des connaissances que les élèves ont dans sa version classique pour traiter des situations qui relèvent du vectoriel. Ceci nous renvoie à la question plus générale : en 1ère S, le terrain est-il bien préparé pour l'arrivée des vecteurs ? Comment est négocié le passage de la géométrie classique, qui domine au collège, au cadre vectoriel ? Avec ses différentes approches, il nous semble que le théorème de Thalès est un outil propice pour assurer cette transition.

REFERENCES

Chasles M. (1889), *Aperçu historique des méthodes en géométrie*, ed. Gauthier- Villars, Paris.

Chevallard Y. (1989), Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel. Acte du Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique, n° 108, Université Joseph Fourier-Grenoble I.

Choquet G. (1964), L'enseignement de la géométrie, Hermann, Paris.

Cousin-Fauconnet A. (1995), Enseigner la géométrie au collège, Armand Colin.

Dieudonné J. (1964), Algèbre linéaire et géométrie élémentaire, Hermann.

Duval R. (1994), Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. Repère-IREM n°7. Topiques édition. Pont – à – Mousson.

Euclide, Les œuvres d'Euclide. Traduites littéralement par F. Peyrard. Nouveau tirage argumenté d'une importante introduction par M. Jean Itard. Librairie Scientifique et Technologique Albert Blanchard. Paris, 1993.

Mrabet S. (2010), « Le théorème de Thalès dans l'enseignement tunisien : conceptions et pratiques des élèves, pratiques des enseignants », Thèse de doctorat, Université Virtuelle de Tunis, Université Paris Diderot (Paris 7).

Rauscher J.C. (1994), Les enjeux de l'enseignement de la géométrie au début du collège et leur prise en compte par les professeurs in 20 ans de didactique des mathématiques en France, Editions la Pensée Sauvage