

DIFFICULTÉS DES ÉLÈVES DU SECONDAIRE AVEC LA NOTION D'INTÉGRALE : UNE ÉTUDE DE CAS

DUPUIS* Antoine

Résumé – Notre mémoire porte sur les difficultés des élèves avec la notion d'intégrale dans l'enseignement secondaire en Belgique. Pour aborder ce questionnement, nous étudions comment la dimension outil-objet de la notion d'intégrale est prise en compte dans le secondaire. Nous présentons ici une analyse des programmes et de trois manuels qui montre comment l'intégrale est introduite en tant qu'objet et comment elle est utilisée comme un outil dans le cours en nous centrant sur les liens entre l'intégrale et la notion d'aire. De plus, nous complétons notre étude par une analyse des résultats obtenus à un questionnaire destiné aux enseignants et à un questionnaire destiné aux élèves. Nous donnons finalement des éléments de réponse à nos questions de recherche.

Mots-clefs : intégrales, aire, conceptualisation, dialectique outil/objet

Abstract – Our master thesis is about difficulties pupils encounter with the concept of integral in secondary school in Belgium. In order to investigate this question, we study how the tool-object dimension of the concept of the integral is taken into account in secondary school. We present here an analysis of the teaching programs in Belgium and of three textbooks which shows how the integral is introduced as an object and how it is used as a tool in the course, focusing on the links between the integral and the concept of area. Moreover, we complete our study by analysing results from a questionnaire for teachers and a questionnaire for pupils. We eventually give some answers to our research questions.

Keywords : integrals, area, conceptualisation, tool/object dialectic

I. CONTEXTE DU TRAVAIL

Cette recherche trouve son origine dans un projet que nous avons mené durant notre première année de master et qui traitait des difficultés d'enseignement de la notion de limite (suite et fonction) en première année universitaire. En Belgique, la définition formelle de limite est peu ou pas travaillée dans le secondaire. Les résultats liés aux limites de suites et de fonctions d'une variable réelle sont en général admis sans démonstration et les exercices proposés se réduisent souvent à des calculs de limites reposant sur l'application de règles de calcul admises elles aussi sans démonstration. Cela rend donc l'introduction de la notion difficile à l'université puisque la nécessité de définir la notion ne se fait pas sentir.

En prenant appui sur notre expérience personnelle lorsque nous étions élève dans le secondaire, nous retrouvons des caractéristiques semblables avec la notion d'intégrale. En effet, le cours sur l'intégration que nous avons suivi dans le secondaire était très algébrisé, centré sur les techniques pour calculer des intégrales (par exemple les calculs de primitives, l'intégration par parties ou par substitution) alors que l'enseignement universitaire s'attache davantage à formaliser la notion d'intégrale et à articuler cette notion avec celles d'aire et de primitive.

Le premier questionnement qui a donc émergé dans notre mémoire consiste à adopter un point de vue plus général que notre expérience personnelle pour étudier quels sont les liens qui sont réellement pris en compte entre les notions d'aire, d'intégrale et de primitive dans l'enseignement secondaire belge francophone.

* UMONS – Belgique – antoine.rsg.dupuis@gmail.com

II. TRAVAUX ANTERIEURS

Des travaux menés sur le plan international révèlent des difficultés récurrentes chez les élèves et les étudiants à articuler les notions d'aire, d'intégrale et de primitive. Les symboles utilisés pour écrire et calculer des intégrales sont eux aussi source de difficultés.

Par exemple, Orton (1983) a proposé la question suivante (Figure 1) à des étudiants universitaires n'ayant pas encore suivi de cours sur l'intégration à l'université. Leurs connaissances pour résoudre cette question sont donc celles acquises dans l'enseignement secondaire.

TASK D4

Calculate the shaded areas below, where possible. If it is not possible, explain why not.

(b)

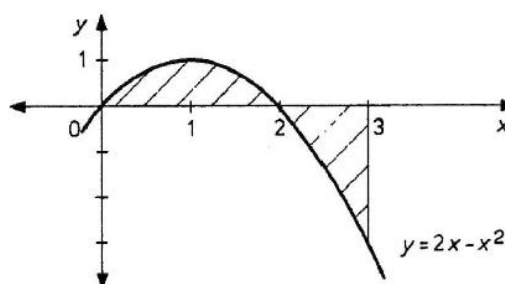


Figure 1 – Extrait du questionnaire d'Orton (1983)

Les résultats obtenus à cette question révèlent que les étudiants sont capables de dire qu'il faut calculer l'expression suivante :

$$\int_0^2 f(x)dx - \int_2^3 f(x)dx$$

En revanche, pratiquement aucun d'entre eux ne peut expliquer pourquoi le calcul de l'aire est découpé en deux intégrales ni pourquoi le signe « - » est présent.

Haddad (2012, 2013) constate elle aussi que l'articulation entre aire, intégrale et primitive pose des problèmes de compréhension chez les étudiants. Comme elle le souligne, « dès que la situation évoque la notion d'aire, la plupart des étudiants interprètent l'intégrale en termes d'aire sans jamais chercher à vérifier les conditions de validité d'une telle interprétation ». Il y a donc une confusion entre la notion d'intégrale et la notion d'aire. Malgré tout, Haddad constate que cela ne pose pas de problème aux étudiants puisqu'ils réussissent bien des exercices stéréotypés. Cette confusion pourrait, selon Haddad, être liée au fait que dans l'enseignement secondaire, une des seules applications du calcul d'intégrales est le calcul d'aire. Ainsi, les élèves « finissent par traiter l'intégrale et l'aire en tant que synonymes » (Haddad, 2013).

Schneider (1988) fait des constats semblables par rapport à l'enseignement belge : « un élève a plus avantage, s'il veut réussir à l'examen, à retenir par cœur 'le truc' des primitives et à connaître les techniques d'intégration, qu'à approfondir le théorème fondamental ».

Dans une étude comparant l'enseignement de l'intégrale en France et au Viêt-Nam, Luong (2006) montre que les programmes prennent en compte les liens entre l'aire, l'intégrale et la primitive mais que l'accent mis sur certains liens varie en fonction du pays. Au Viêt-Nam, les liens sont monodirectionnels en ce sens que les primitives servent à calculer des intégrales qui servent à calculer des aires. En France, en revanche, ces mêmes liens sont présents, mais également les liens réciproques. Ainsi, les aires servent à définir la notion d'intégrale (alors qu'au Viêt-Nam cette dernière est définie par la formule de Newton-Leibniz). Elles permettent aussi de calculer certaines intégrales directement, par exemple l'aire d'un demi-cercle de rayon R pour calculer $\int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx$. Les intégrales permettent aussi de définir des primitives (de par l'intégrale dépendant de la borne supérieure). En effet, le Théorème Fondamental nous dit que si une fonction f est continue sur un intervalle $[a, b]$, alors la fonction $F : x \mapsto \int_c^x f(y) dy$ est dérivable et est la primitive de f s'annulant en c (pour c un point de l'intervalle).

Luong s'intéresse aussi aux notations et plus particulièrement aux symboles $\int$ et « dx ». En ce qui concerne le « s » étiré, il explique que ce symbole fait vivre la notion d'intégrale indéfinie au détriment de celle de primitive. En ce sens, Luong a repéré chez des élèves une confusion entre le calcul de primitives et le calcul d'intégrales où la seule différence *a priori* entre l'intégrale indéfinie et l'intégrale définie serait la présence ou non des bornes.

Au niveau du « dx », Luong (2006) constate que le symbole dx a une signification différente en fonction du contexte : soit il est utilisé comme indicateur de la variable d'intégration, soit il est utilisé comme élément différentiel. Ses analyses montrent également que dans certains manuels, le dx n'est jamais utilisé en tant que différentielle mais dans d'autres oui.

III. QUESTIONS DE RECHERCHE ET METHODOLOGIE

Les travaux qui viennent d'être évoqués montrent les difficultés des élèves et des étudiants à donner du sens d'une part aux symboles utilisés dans la définition de la notion d'intégrale et d'autre part dans les calculs, donc dans les aspects techniques, où il s'agit de mettre en relation les notions d'intégrale et d'aire. Or, selon Douady (1987), mettre en place une dialectique entre le sens et la technique participe à une bonne conceptualisation des notions. Elle souligne ainsi l'importance d'intégrer la dimension outil/objet des notions dans l'enseignement. Elle parle du caractère outil d'une notion lorsque celle-ci est utilisée pour résoudre un problème. Le caractère objet relève quant à lui de la présentation générale de la notion, notamment dans une définition. Douady explique que travailler une notion dans sa double dimension outil/objet s'associe à une certaine disponibilité de la notion et en favorise la compréhension.

De ce point de vue, nous cherchons à étudier comment la dialectique outil/objet est mise en place dans le chapitre sur l'intégration dans l'enseignement secondaire belge puisque les travaux antérieurs ont montré qu'il y a des variabilités en fonction des pays. Plus précisément, nous avons abordé dans notre mémoire les questions suivantes :

- Quel sens les élèves donnent-ils aux symboles associés à l'objet « intégrale » et à une écriture telle que $\int_a^b f(x)dx$?
- Quels liens les élèves sont-ils capables de faire entre les notions d'aire, d'intégrale et de primitive ?

Dans cette communication, nous nous centrons sur l'introduction de la notion d'intégrale pour étudier comment l'objet est introduit et la dimension outil sera étudiée à travers les liens entre l'aire et l'intégrale.

Notre méthodologie repose sur différentes analyses didactiques. À partir d'une analyse des documents officiels, nous avons dans un premier temps élaboré un questionnaire visant à comprendre comment les enseignants du secondaire introduisent la notion d'intégrale et les symboles associés, puis s'ils repèrent des difficultés récurrentes chez les élèves. Nous avons mené 11 entretiens avec des enseignants. Cette première étude a été complétée par une analyse de manuels belges. Enfin, nous avons élaboré un questionnaire destiné aux élèves, dont le but est d'étudier comment les élèves mettent en lien les objets « aire » et « intégrale ».

IV. ANALYSE DES PROGRAMMES

La lecture des anciens et nouveaux programmes révèle une attention portée sur l'introduction de la notion d'intégrale et l'importance d'insister sur la présence de la notion de limite et d'un découpage de plus en plus fin pour évaluer de mieux en mieux une aire. Dès lors, l'aspect « objet » de l'intégrale apparaît très clairement, bien que l'insistance qui y est portée est plus petite dans les anciens que dans les nouveaux programmes.

Ensuite, l'élève est amené à réaliser dans le chapitre sur les intégrales un travail varié puisqu'il lui est demandé d'écrire des intégrales, de calculer des aires et des primitives et de mener également des démonstrations. Il y a donc un focus sur les registres d'écriture. Malgré tout, des implicites subsistent, comme nous pouvons le voir sur la figure 2. On nous indique que les notations sont très importantes, on mentionne le signe sommatoire et les indices, mais rien n'est dit sur le symbole « $\int$ », ni sur le dx .

Rédiger, argumenter, structurer, démontrer : la définition de l'intégrale et les démonstrations requièrent une rédaction soignée, structurée faisant, entre autres, appel au signe sommatoire et aux indices.

Figure 2 - Commentaire sur les notations dans les programmes.

Au niveau de notre seconde question de recherche, les programmes permettent de traiter les liens entre les notions d'aire, d'intégrale et de primitive schématisés à la figure 3.

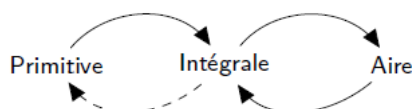


Figure 3 - Liens à traiter entre les notions d'aire, d'intégrale et de primitive dans les programmes belges.

Le lien primitive vers intégrale (désignant le fait qu'on a besoin d'utiliser les primitives pour calculer certaines intégrales (Théorème Fondamental)), le lien intégrale vers aire (désignant le fait qu'une des applications de l'intégrale est le calcul d'aires) ainsi que le lien d'aire vers intégrale (désignant le fait que pour définir l'intégrale, on a besoin de la notion

d'aire (signée) puisque la construction des sommes de Darboux ou de Riemann se base sur l'approximation de l'aire sous la courbe) doivent être enseignés. En revanche, il n'y a aucune obligation de travailler le lien intégrale vers primitive. Ce lien représente le fait qu'une intégrale permet de construire des primitives d'une fonction, via le théorème suivant : Soit $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et soit $c \in [a,b]$. Alors la fonction $F : [a,b] \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \int_c^x f(t) dt$ est l'unique primitive de f s'annulant en c . Sur le schéma, ce lien est en pointillés pour représenter le fait qu'il est libre d'interprétation de l'enseignant à la lecture des programmes.

V. ANALYSE DE MANUELS

Nos analyses portent sur les manuels Actimath 6, Espace Math 66 et CQFD Maths 6^e (6 périodes par semaine). Ces collections sont très utilisées par les enseignants en Belgique.

Dans les trois manuels analysés, la dimension « objet » de la notion d'intégrale est bien présente mais l'insistance qui y est portée est variable en fonction du manuel. Plus précisément, chaque manuel présente la définition formelle de l'intégrale en termes de limite à partir des sommes de Darboux. Au niveau des notations, ce qui est commun aux manuels est que le « dx » indique par rapport à quelle variable il faut intégrer.

Dans l'Actimath et le CQFD, les auteurs ajoutent à cela que le symbole « $\int$ » représente un « s » étiré symbolisant le « s » du mot « somme » pour rappeler les sommes de Darboux et le « dx » symbolise les largeurs des rectangles Δx (ou Δx_i) présentes dans le terme général des sommes de Darboux. A contrario, l'Espace Math ne commente pas les notations.

En ce qui concerne la dimension « outil » de l'objet « intégrale », les trois manuels insistent clairement sur le calcul d'aire (donc ils font le lien de primitive vers intégrale et d'intégrale vers aire). Ils introduisent également l'approximation d'une intégrale définie à partir de la méthode des trapèzes (basée sur la construction de la définition de l'intégrale). En revanche, le fait que l'intégrale sert à donner des primitives n'est que simplement cité dans les trois manuels.

L'utilisation de la définition de l'intégrale varie très fortement entre les manuels. Ainsi, dans l'Actimath, il est dit d'emblée que la définition de l'intégrale en termes de limite n'est pas utilisée pour la suite. Les propriétés sont donc démontrées à partir de la notion de primitive et de la formule de Newton-Leibniz. En revanche, l'Espace Math utilise la définition de l'intégrale pour démontrer ces propriétés mais également pour calculer des valeurs approchées d'intégrales définies. En revanche, dans le CQFD, les propriétés ne sont pas démontrées et la définition d'intégrale est utilisée, à l'instar des deux autres manuels, pour calculer des valeurs approchées d'intégrales définies.

Par ailleurs, le lien « intégrale » vers « aire » est beaucoup plus présent que le lien réciproque. Il reste des implicites autour de la dimension outil de l'intégrale qui pourraient, selon nous, induire des confusions chez les élèves semblables à celles repérées par Haddad (2013). Ces manques peuvent évidemment être comblés par les enseignants dans les classes, d'où l'intérêt des entretiens menés.

VI. ENTRETIENS AVEC LES ENSEIGNANTS

Les interviews ont été réalisées auprès de onze enseignants et ont duré une vingtaine de minutes. Nous leur avons posé des questions à propos des difficultés des élèves qu'ils repèrent, ainsi que sur les liens sur lesquels ils insistent en cours et sur les notations liées à l'intégrale.

De ces interviews, nous en tirons les constats suivants. Un seul enseignant insiste sur le lien direct entre aire et primitive. Deux enseignants parlent du lien intégrale vers primitive. En revanche, tous les enseignants insistent sur le lien primitive vers intégrale ainsi que sur le lien intégrale vers aire (ce qui est logique, étant donné qu'il s'agit du cœur du cours du secondaire sur les intégrales) et tous insistent sur le lien aire vers intégrale, ce qui donne une place assez importante à la dimension « objet » de la notion d'intégrale dans l'enseignement de cette dernière en Belgique.

Nous concluons ainsi en constatant que ce sont donc les liens entre aire et intégrale qui sont mis en avant en classe. Les résultats des interviews sont conformes avec le contenu des programmes. Nous ajoutons que l'oubli du « - » n'est presque pas repéré par les enseignants, contrairement à l'enquête d'Orton (1983).

VII. QUESTIONNAIRE ÉLÈVES

Au vu des résultats des entretiens avec les enseignants, nous avons centré le questionnaire destiné aux élèves sur les liens entre aire et intégrale. Ce questionnaire a été soumis à 78 élèves issus de 5 écoles différentes et de 6 classes différentes. Le temps accordé aux élèves était de vingt minutes. Nous ne ciblerons, dans cette communication, qu'une partie du questionnaire.

La première question du questionnaire était la suivante : « On considère la courbe d'équation $y = x^3$ ainsi que les deux droites verticales d'équations respectives $x = -2$ et $x = 1$. On s'intéresse à la zone délimitée par la courbe, les deux droites verticales et l'axe des x . Détermine l'aire de cette zone en expliquant le plus précisément possible ta démarche. » Parmi les 78 élèves, 45% d'entre eux proposent un raisonnement correct, similaire au raisonnement de la figure 4.

(a) Détermine l'aire de cette zone en expliquant le plus précisément possible ta démarche.

$$\begin{aligned}
 & \int_{-2}^0 (-x^3) dx = \left[-\frac{x^4}{4} \right]_{-2}^0 = 0 + 4 = 4 \\
 & \int_0^1 (x^3 - 0) dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4} \\
 & \int_{-2}^0 (-x^3) dx + \int_0^1 x^3 dx = 4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}
 \end{aligned}$$

Figure 4 - Raisonnement correct d'un élève.

Cependant, un élève sur quatre (25 %) calcule l'aire en question en ne calculant que purement simplement l'expression $\int_{-2}^1 x^3 dx$. Ceci témoigne d'une ambiguïté entre les concepts d'intégrale et d'aire.

Dans la suite de la question, nous leur avons demandé : « Selon toi, peux-tu déduire qu'il existe un lien entre la notion d'aire et la notion d'intégrale ? Explique ta réponse. ». Pour cette question, 51% des élèves jugent que l'intégrale est un outil pour le calcul d'aires. Ceci confirme l'accent très prononcé sur l'aspect « outil » de l'intégrale dans l'enseignement secondaire. Pour 15% d'entre eux, et c'est non-négligeable, l'aire sert à définir l'intégrale. Donc la dimension « objet » de l'intégrale n'est pas totalement occultée par sa dimension « outil ». Enfin, pour 10% des élèves, l'intégrale et l'aire sont deux concepts équivalents.

Enfin, la dernière question que nous présenterons dans cette communication est un vrai ou faux : « Dis si l'affirmation suivante est vraie ou fausse. Coche “je ne sais pas” si tu n'as aucune idée de la réponse. Tu ne dois pas justifier ta réponse. “L'aire de la zone entre la courbe d'une fonction, les droites verticales d'équations respectives $x = a$ et $x = b$ et l'axe des x est toujours donnée par $\int_a^b f(x)dx$.” ». La réponse « faux » a été cochée par 58% des élèves, la réponse « vrai » a été cochée par 35% des élèves et 7% d'entre eux ne répondent rien. Nous interprétons ces résultats dans la conclusion suivante.

VIII. CONCLUSION

Dans cette communication, nous avons étudié la dimension outil/objet de la notion d'intégrale en analysant les programmes, trois manuels et les résultats obtenus à un questionnaire destiné aux enseignants et à un questionnaire destiné aux élèves. Rappelons que nos questions de recherche sont les suivantes :

- Quel sens les élèves donnent-ils aux symboles associés à l'objet « intégrale » et à une écriture telle que $\int_a^b f(x)dx$?
- Quels liens les élèves sont-ils capables de faire entre les notions d'aire, d'intégrale et de primitive ?

Attardons-nous sur la première question, dans un premier temps. Nos analyses montrent que le symbole « $\int$ » est peu souvent mentionné, que ce soit dans les manuels ou par les enseignants, mais quand c'est le cas, le lien est clairement fait entre ce symbole et le « s » de « somme ». De plus, tous les enseignants interrogés et les trois manuels analysés insistent sur le fait que le « dx » provient des Δx_i , largeurs des rectangles dans la construction de la définition. De même, tous les enseignants et manuels insistent sur le fait que le « dx » indique la variable d'intégration. Nous pouvons donc conclure que pour les élèves, l'expression $\int_a^b f(x)dx$ rappelle *a priori* une somme (par l'intermédiaire du symbole « $\int$ ») de rectangles d'« aire » $f(x)dx$, rappelant la formule « longueur fois largeur »).

Intéressons-nous maintenant à la seconde question de recherche, portant sur les liens que peuvent faire les élèves entre les concepts d'aire, d'intégrale et de primitive.

Le lien primitive vers intégrale est introduit dans tous les manuels et par tous les enseignants interrogés. Il semble également compris de tous les élèves puisque, dans le questionnaire, ont réussi à utiliser les primitives pour calculer les intégrales définies. Il y a également une insistance très forte sur la dimension « objet » de l'intégrale puisque tous les manuels et tous les enseignants interrogés insistent sur le lien aire vers intégrale. De plus, 15% des élèves estiment ce lien suffisamment important pour le mentionner dans le

questionnaire. Par ailleurs, en toute cohérence avec nos analyses, de manière générale, le lien intégrale vers primitive n'est que simplement cité et pas travaillé.

Enfin, le lien intégrale vers aire semble connu mais pas totalement compris, étant donné que 45% des élèves peuvent calculer des aires (et ainsi différencier le concept d'aire du concept d'intégrale) alors que 58% des élèves connaissent ce lien puisqu'ils ont répondu correctement au vrai ou faux du questionnaire. Cette différence dans les pourcentages témoigne du fait qu'il reste des implicites autour de ce lien. Ceci est peut-être dû au fait que pour le vrai ou faux, il suffit de mobiliser une connaissance apprise « par cœur » alors que pour le calcul de l'aire sous la fonction cube, plus que connaître le lien il faut également le comprendre, et c'est peut-être cette différence qui explique le clivage entre les deux pourcentages.

Pour conclure, la figure 5 exprime schématiquement ce que nous venons de développer. Ainsi, en résumé, nos analyses semblent montrer que le lien aire vers intégrale ainsi que le lien primitive vers intégrale sont bien ancrés dans l'enseignement belge. Cependant, il ne semble pas y avoir suffisamment d'insistance sur le lien intégrale vers aire, de par les résultats de notre enquête auprès des élèves. Nous notons, pour terminer, qu'il n'y a presque aucune prise en compte du lien direct entre aire et primitive et le lien intégrale vers primitive n'est que simplement cité, comme évoqué ci-dessus.

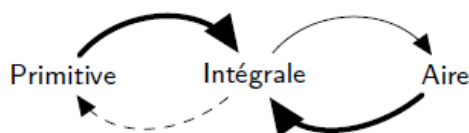


Figure 5 - Liens que les élèves semblent faire entre l'aire, l'intégrale et la primitive en Belgique.

REFERENCES

- Adam, A., Lousberg, F. (2003) *Espace Math 66*, Éditions de Boeck.
- Delfeld, H., t'Kindt-Demulder, I., Sevrin, N., Timmermans, M.-M., (2004) *Actimath 6*, partie 1 : analyse, Éditions Van In.
- Douady, R., (1987) Jeux de cadres et dialectique outil/objet, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7/2, 5-31.
- Haddad, S., (2013) Que retiennent les nouveaux bacheliers de la notion d'intégrale enseignée au lycée ? *Petit x*, 92, 5-30.
- Luong, C. K. T., (2006) *La notion d'intégrale dans l'enseignement des mathématiques au lycée : une étude comparative entre la France et le Vietnam*, Thèse de doctorat.
- Orton, A., (1983) Students' understanding of integration, *Educational Studies in Mathematics*, 14, 1-18.
- Schneider, M. (1988) *Des objets mentaux « aire » et « volume » au calcul des primitives*. Thèse de doctorat, Université catholique de Louvain-La-Neuve.