LA PENSÉE ARITHMÉTICO-ALGÉBRIQUE COMME TRANSITION DU PRIMAIRE AU SECONDAIRE : DES SITUATIONS D'INVESTIGATION DANS LESQUELLES MODÉLISATION ET TECHNOLOGIE JOUENT UN RÔLE CENTRAL

SABOYA[*] Mireille – HITT[*] Fernando – QUIROZ[*] Samantha – ANTOUN[*] Zita

Résumé. Le mouvement *Early algebra* a donné lieu à un nouveau paradigme qui s'oppose à la rupture entre l'arithmétique et l'algèbre. Certains chercheurs se sont attardés à caractériser la pensée arithmétique et la pensée algébrique pour mieux comprendre l'introduction de l'algèbre au primaire. Notre position est sur la construction d'une pensée arithmético-algébrique, dans une idée de continuité, d'une articulation dynamique entre arithmétique et algèbre qui émerge lors de la résolution de *situations d'investigation*.

Mots-clefs : Early algebra, pensée arithmético-algébrique, généralisation, situations d'investigation, méthode ACODESA

Abstract. The Early algebra movement has given rise to a new paradigm that opposes the idea of rupture between arithmetic and algebra. Some scholars have focused on characterizing arithmetic and algebraic thinking to better understand the introduction of algebra in primary school. Our position is on the construction of an arithmetic-algebraic thought, to promote a dynamic articulation between arithmetic and algebra that emerges during the resolution of what we named situations of investigation.

Keywords: Early algebra, arithmetic-algebraic thinking, generalization, situation of investigation, ACODESA teaching method.

I. LE PROGRAMME DE FORMATION DE L'ÉCOLE QUÉBÉCOISE

L'approche par compétences du Québec (MELS, 2001 au primaire et 2004 au secondaire) a mis de l'avant la résolution de situations-problèmes (SP) comme première compétence disciplinaire en mathématiques[2]. Le ministère (MELS 2007) définit une SP comme suit :

> En mathématique, une situation-problème doit satisfaire à l'une ou l'autre des conditions suivantes :
>
> – la situation n'a pas été présentée antérieurement en cours d'apprentissage;
>
> – l'obtention d'une solution satisfaisante exige le recours à une combinaison non apprise de règles ou de principes dont l'élève a fait ou non l'apprentissage;
>
> – le produit, ou sa forme attendue n'a pas été présentée antérieurement. (p. 19)

S'appuyant sur cette définition et sur les suggestions du ministère de l'éducation autour de l'importance de contextualiser les situations, les auteurs des manuels scolaires débutent souvent chaque chapitre par une situation qui s'appuie sur les domaines généraux de formation[3]. Ainsi certaines situations sont liées aux problèmes environnementaux comme le manque d'eau dans certains pays (l'or bleu), la contamination dans le monde, l'abattage des

1 * GRUTEAM, Université du Québec à Montréal – Canada
hitt.fernando@uqam.ca, saboya.mireille@uqam.ca, samanthaq.rivera@gmail.com, antoun.zita@uqam.ca

2 Les deux autres composantes sont *Déployer un raisonnement mathématique* et *Communiquer à l'aide du langage mathématique* (récemment cette dernière a été incluse dans la 2e compétence suite aux problèmes rencontrés par les enseignants lors de l'évaluation de cette compétence).

3 Le programme de formation de l'école québécoise distingue cinq domaines généraux de formation. Ces domaines sont *Santé et bien-être; Orientation et entreprenariat; Environnement et consommation; Médias; Vivre-ensemble et citoyenneté*. Les domaines généraux de formation « permettent de cerner les apprentissages essentiels au développement d'un regard lucide sur les grandes composantes de la réalité » (MELS, 2007, p. 1), ils sont de plus « des leviers pour motiver les élèves, soutenir leurs apprentissages et guider leur éducation citoyenne » (p. 2).

forêts, etc. Un regard sur le traitement de ces situations montre l'importance de la modélisation mathématique ainsi que celle du traitement des données. On pourrait penser que le recours à la technologie, venant supporter la modélisation mathématique et le traitement des données, serait priorisé pour mener la résolution mais ce n'est pas le cas. Ceci peut s'expliquer par le fait qu'*Exploiter les technologies de l'information et de la communication* est une compétence transversale et non disciplinaire. Toutefois, en 2007, le ministère annonce la décision que les écoles du primaire et du secondaire doivent se munir de tableaux blancs interactifs (TBI) mettant ainsi de l'avant l'importance d'utiliser la technologie en classe.

Par ailleurs, si on analyse les exemples de SP que le ministère fournit aux enseignants, on peut remarquer que les énoncés sont longs (certainement un effet de la volonté de contextualiser les situations). Ces SP qui comptent un grand nombre d'informations contrastent avec les propositions de SP provenant des chercheurs (Brousseau 1987; Grenier et Payan 2003). En effet, ces chercheurs proposent des énoncés courts, les actions nécessaires menant à la résolution faisant ressortir la mathématique en jeu. Pour Brousseau, c'est la notion d'obstacle épistémologique qui est le principal facteur d'une SP. Grenier et Payan souhaitent recréer l'activité vécue par les mathématiciens à travers ce qu'ils nomment des situations de recherche. Dans les propositions de ces chercheurs, le contexte ne joue pas un rôle essentiel. Ce sont dans les travaux menés par l'école de Freudenthal que l'on retrouve des similarités avec la notion de SP du ministère du Québec.

En effet, l'école de Freudenthal propose comme approche la *Realistic mathematics Education* (RME) dans laquelle on retrouve des éléments liés à la modélisation mathématique ainsi que le recours à un contexte de la vie réelle. Toutefois, chez les auteurs qui s'inscrivent dans cette approche (comme Streefland, Doorman, Gravemeijer, Drijvers), les activités proposées ne possèdent pas nécessairement de longs énoncés et ne font pas appel à un grand nombre de données ce qui contraste avec la position prise par le ministère du Québec (voir tableau 1).

Elbers (2003, p. 83) – Courant RME	Exemple provenant du ministère de l'éducation du Québec (voir Annexe)
Élisa travaille chez un pharmacien. Elle prépare des médicaments prescrits par le docteur Sterk pour Mme Jansen. Pour Mme Jansen: 40 comprimés de prednison. 6 comprimés par jour pendant 2 jours; puis 5 comprimés par jour pendant 2 jours; puis 4 comprimés par jour pendant 2 jours; puis 3 comprimés par jour pendant 2 jours; puis 2 comprimés par jour pendant 2 jours; puis 1 comprimé par jour pendant 2 jours; Élisa pense: « Ce n'est pas correct! Le docteur a fait une erreur. » Qu'est-ce que tu penses? Est-ce que Élisa a-t-elle raison?	Titre : La lutte Présence de deux pages entières de texte qui présentent la situation On implique l'élève dans l'organisation de la discipline olympique de la lutte. Il doit prendre des décisions en prenant en considération un grand nombre de contraintes. La question finale est : Vous devez déterminer le prix de vente des billets, sans les taxes, pour assister aux compétitions de lutte en tenant compte des différentes contraintes.

Tableau 1 - *Exemple d'une situation issue de l'approche RME et exemple d'une SP provenant du Québec*

Dans la situation proposée par Elbert (RME), on peut procéder par un calcul mental afin de constater qu'il y a une contradiction entre l'ajout des comprimés pris tous les deux jours et le nombre total de comprimés prescrit. D'après notre interprétation, une des préoccupations de ces chercheurs est de promouvoir une sensibilité à la contradiction ce qui rejoint le développement d'une action contrôlée sur l'activité mathématique (Saboya 2010; Saboya, Bernardz et Hitt 2015) qui devrait être privilégiée dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. En ce qui a trait à l'exemple proposé par une commission scolaire du Québec autour de l'achat d'un terrain, on fait appel à un prêt à la banque, au paiement des intérêts et à la construction d'un camping, ce qui requiert un lourd traitement comme l'utilisation d'identités trigonométriques et du calcul d'aires. L'organisation des données est une des activités principales. La résolution de cette SP pourrait être facilitée par la technologie (Excel ou GeoGebra par exemple). En effet, après une lecture attentive du texte, la technologie permet d'organiser les données et ainsi de dégager un chemin menant à la résolution.

Finalement, le Ministère de l'Éducation (MELS 2005) inscrit son programme par compétences sur un cadre théorique socioconstructiviste. Dans une conférence donnée par von Glasersfeld (2004), constructiviste radical, il donne son avis sur le socioconstructivisme en disant que celui-ci ne peut exister puisqu'il n'y a pas de cadre théorique pour le supporter. Il ne critique pas la pratique d'une approche constructiviste et un travail en collaboration. Il signale seulement qu'il n'y a pas un cadre théorique pour donner un support à cette approche pratique.

Confronté à la problématique ici explicitée, notre groupe de recherche suit un autre modèle pour favoriser le développement de compétences en mathématiques. Notre modèle s'appuie sur les distinctions entre les notions d'*exercice*, de *problème*, de *situation problème*, ce qui nous a amené au concept de « situation d'investigation » qui est lié au processus de modélisation mathématique. Les situations d'investigation s'appuient sur une méthode d'enseignement (ACODESA, Apprentissage COllaboratif, DEbat Scientifique et Autoréflexion) sous une approche socioculturelle de l'enseignement et de l'apprentissage.

II. LES SITUATIONS D'INVESTIGATION ET LA MÉTHODE D'ENSEIGNEMENT ACODESA

1. *La tâche comme élément central dans l'activité mathématique*

L'analyse des manuels scolaires et de certains cadres théoriques fait ressortir les différences entre les concepts d'*exercice*, de *problème fermé*, de *problème ouvert*, de *problème qui vise à surmonter un obstacle épistémologique*, de *problème de recherche* et de *situation problème*. L'activité cognitive liée à un *exercice* est associée à une application directe d'un algorithme (action automatique). Dans un *problème fermé*, le but est connu et il découle des informations données dans l'énoncé. Il n'y a pas de chemin direct qui mène à la résolution parce qu'un défi a été mis en place qui peut générer chez l'élève un conflit cognitif. Par contre, les *problèmes ouverts, les problèmes qui visent à surmonter un obstacle*, les *problèmes de recherche* et les SP mobilisent une pensée divergente, parce que l'élève ne perçoit pas le but. Des fois, un chemin est abandonné et l'élève doit revenir en arrière et prendre un autre chemin si lui/elle considère que la solution doit être cherché ailleurs.

Les enseignants au Québec font part de la difficulté qu'ils ressentent pour gérer en classe les SP que l'on trouve au début de chaque chapitre. Ainsi, ces situations ne sont pas toujours discutées avec les élèves, et les enseignants centrent leur enseignement sur la résolution de problèmes. Il nous semble donc que les attentes autour des SP ne sont pas atteintes. Se pose la question de savoir comment favoriser l'utilisation de situations qui déclenchent une pensée diversifiée et qui préparent à un contenu mathématique spécifique. Notre proposition se base sur une approche sociale de l'apprentissage. La situation devrait :

1. Être guidée. Elle ne doit pas être complètement isolée mais s'inscrire dans une séquence de plusieurs situations. L'organisation d'un contenu ou d'un concept mathématique à développer dans la classe devrait être lié à une chaîne d'activités mathématiques guidées (cette idée n'est pas tellement novatrice, Glaeser (1999) et Artigue (2002) ont déjà mis de l'avant cette idée).

2. La résolution de ces situations devrait être menée de façon organisée dans la classe de mathématiques à travers la mise en place d'une méthode d'enseignement. Nous avons choisi une approche d'apprentissage collaboratif, débat, processus d'autoréflexion et institutionnalisation (ACODESA, voir point 2).

3. Le travail autour de ces situations devrait promouvoir la modélisation mathématique et la construction d'une structure de contrôle en accord au contenu ou concept mathématique envisagé.

En considérant ces trois caractéristiques, nous présentons la *situation d'investigation* (SI), définie comme un ensemble de tâches enchainées dans un environnement d'apprentissage socioculturel et technologique. L'enchaînement de ces tâches s'appuie sur une méthode d'enseignement favorisant un apprentissage collaboratif et individuel et vise une approche par compétences (Hitt et Quiroz en préparation).

2. *Une approche socioculturelle pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques (ACODESA)*

Dans la résolution de situations complexes, le travail en équipe est fondamental. Toutefois, il faut bien penser la façon d'enseigner les mathématiques dans une perspective d'apprentissage collaboratif. Depuis quelques années, nous avons développé une méthode d'enseignement basée sur l'apprentissage collaboratif et par compétences, méthode que nous avons appelée ACODESA (Hitt 2007; Hitt et Gonzalez-Martin 2015; Hitt, Saboya et Cortes 2017). La méthodologie suit la démarche suivante :

- Travail individuel : Production de Représentations Fonctionnelles Spontanées pour comprendre la tâche.
- Travail en équipe sur la même tâche : Processus de discussion et validation. Raffinement des Représentations Fonctionnelles.
- Débat (qui peut devenir un débat scientifique dans le sens de Legrand, 1993) : Processus de discussion et validation (Raffinement des Représentations Fonctionnelles).
- Retour individuel sur la tâche : Reconstruction et auto-réflexion. (Production de Représentations Groupales).
- Institutionnalisation. Processus d'institutionnalisation et utilisation des représentations institutionnelles.

III. RUPTURE OU CONTINUITÉ DANS LA TRANSITION DE L'ARITHMÉTIQUE À L'ALGÈBRE

La transition de l'école primaire à l'école secondaire a été marquée par le problème du passage de l'arithmétique à l'algèbre. Des chercheurs se sont attardés à caractériser, d'un côté, la pensée arithmétique (Verschaffel et De Corte 1996) et de l'autre, la pensée algébrique (Kieran 2007). La recherche traditionnellement centrée sur la notion d'obstacle épistémologique a donné lieu à des postures liées à la notion de rupture par exemple avec

Vergnaud (1988, p. 189) : « une rupture épistémologique importante avec l'arithmétique » ou à la notion de coupure de Filloy et Rojano (1989) illustrée dans la Figure 1.

Dans les premières années de notre siècle, un nouveau paradigme est né, le mouvement « Early algebra », fortement dirigé par Kaput (1998, 2000) qui a remis en question l’approche classique de rupture. Ainsi, une nouvelle approche destinée à l’enseignement au primaire est proposée qui mise sur une introduction de l’algèbre dans ce niveau d’étude.

Figure 1 *- Approche classique de la problématique autour de l’apprentissage de l’algèbre*

Un groupe de chercheurs (Carraher et al. 2006 et Schliemann et al. 2012) attaché aux idées de Kaput, suggère d’introduire la notion de fonction au primaire, ce qui ne nous semble pas porteur (Hitt, Saboya et Cortés 2016, 2017). Nous proposons dans nos articles un exemple de situation de généralisation qui vise une continuité entre l’arithmétique et l’algèbre à travers la mise en place d’une pensée arithmético-algébrique.

En effet, Radford (2011) indique qu’une des conditions associées à la pensée algébrique est liée à la possibilité de généraliser. Il montre comment des élèves de 6-7 ans arrivent à généraliser dans une activité portant sur des patterns. Une autre condition est reliée au type de représentations, celles-ci ne reposent pas nécessairement sur l’utilisation de lettres et/ou d’inconnues tel que suggéré par Carraher et al. (2006) et Schliemann et al. (2012). Nos études précédemment citées vont dans ce même sens. Les élèves de 1ère année du secondaire sont capables de calculer n’importe quel nombre triangulaire et ils expriment les relations en mots (la langue naturelle a joué un rôle essentiel). Ainsi, dans le paradigme de l’*Early algebra,* nous proposons de penser le passage de l’arithmétique à l’algèbre comme une continuité au lieu de chercher à caractériser la pensée arithmétique et la pensée algébrique séparément. Nous misons ainsi sur l’émergence d’une pensée arithmético-algébrique. En nous appuyant sur le modèle de Kuzniak, nous proposons le modèle suivant (voir Hitt, Saboya, Cortés 2016).

Kuzniak (2011, p. 14) mentionne trois processus cognitifs impliqués dans l’activité géométrique. Dans notre modèle adapté d’après Kuzniak, au lieu de penser à des flèches pour montrer une interaction, c’est plutôt trois plans qui sont impliqués dans l’activité arithmético-algébrique.

- Un processus de Visualisation-Construction comme 1er plan, où nous allons utiliser l’approche de Zimmermann et Cunningham (1991, p. 4-5) qui définissent la visualisation mathématique comme étant un procédé qui consiste à former des images (mentalement, ou avec du papier-crayon, ou à l’aide de la technologie),
- Un processus Visualisation-Généralisation comme 2e plan, où l’activité visualisation-construction va déclencher une activité mathématique d’organisation de données vers la généralisation,
- Un processus de Construction-Généralisation comme 3e plan, où les deux activités liées aux autres plans vont déclencher avec l’aide de la technologie des processus de validation. Selon la méthode d’enseignement ACODESA, la validation entre pairs, discussion en grand groupe et le processus d’autoréflexion avec les deux autres plans, vont promouvoir l’activité cognitive d’articulation pour fortifier une pensée arithmético-algébrique.

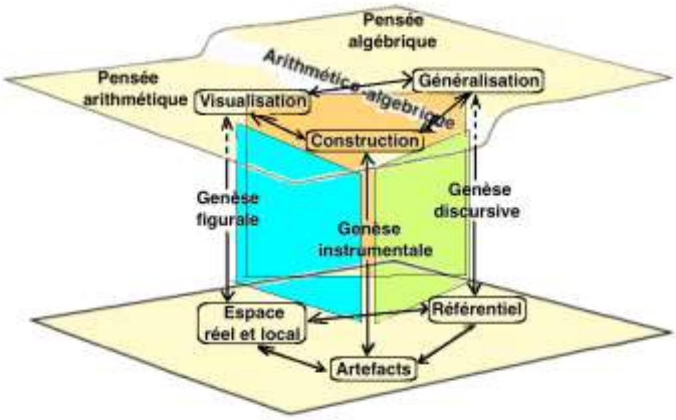


Figure 2 *- Adaptation du modèle de Kuzniak (2011).*

IV. SITUATIONS D'INVESTIGATION PORTANT SUR LA GÉNÉRALISATION ET LES REPRÉSENTATIONS DANS UNE APPROCHE DE LA PENSÉE ARITHMÉTICO-ALGÉBRIQUE

Notre équipe de recherche propose une séquence de 7 situations de généralisation. Certaines de ces situations sont en cours d'expérimentation en 6e année d'une école primaire au Mexique. Nous prévoyons également expérimenter au 1er cycle de l'école secondaire. Dans le cadre de l'EMF en 2018, nous souhaitons présenter les premiers résultats issus de l'expérimentation au primaire. Ainsi, la séquence de situations comprend : 1. Le restaurant, 2. La bijouterie *El Dorado*, 3. Les fenêtres, 4. Le jardin et les citrouilles, 5. Les rectangles et cercles, 6. Les nombres triangulaires, 7. Les nombres pentagonaux. Les premières 5 situations seront expérimentées à l'école primaire, et la séquence au complet sera proposée au début de l'école secondaire avant l'introduction formelle de l'algèbre. Les trois premières situations sont des situations bien connues dans la littérature, nous avons inventé les deux situations, celle des rectangles et des cercles et du jardin des citrouilles. Les situations des nombres triangulaires et des nombres pentagonaux sont également connues dans la littérature. Ces situations reposent sur l'analyse de patterns (voir tableaux 2 et 3), nous avons fait le choix de présenter les patterns de façon désordonnée. En effet, nous souhaitons privilégier l'émergence de différentes formules, ce qui ouvrira la porte vers un travail sur l'équivalence d'expressions algébriques (Denis, 1997). Ce n'est pas l'apprentissage des suites qui est ici visé avec le vocabulaire associé (rang, terme…) mais bien l'émergence d'un symbolisme naturel pour l'élève. C'est dans ce sens qu'ont été rédigées les questions qui accompagnent les situations (voir tableau 4, la situation du jardin et des citrouilles). Les quatre premières situations sont contextualisées.

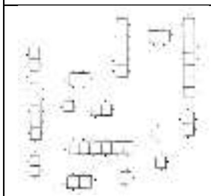
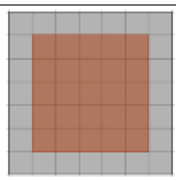
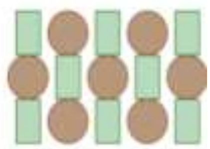
Le restaurant de Marcel	La bijouterie El Dorado	Les fenêtres	Le jardin et les citrouilles	Rectangles et cercles
				

Tableau 2 *– Situations prévues pour le primaire*

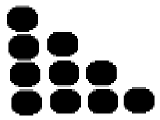
Les nombres triangulaires	Les nombres pentagonaux
	

Tableau 3 *– Situations qui s'ajoutent pour le secondaire*

Toutes les situations comprennent une composante technologique (dans notre cas l'Ipad). En effet, nous pensons qu'un appui numérique (comme celui présenté dans Hitt, Saboya et Cortés 2017) va favoriser chez les élèves une action contrôlée sur les conjectures émises, sur les argumentations et sur les processus de validation. Ainsi, l'enseignant n'est plus le seul responsable de la validation. Celui-ci est un guide, la technologie (dans notre cas l'iPad) apportant un rôle de soutien pour les conjectures émises par les élèves.

Le tableau 4 présente la situation du jardin de citrouilles. La première page qui n'est pas présentée ici donne des indications générales et demande de spécifier le nom de chaque équipier.

Page 2 (Travail individuel)

La Ville de Montréal se prépare pour son spectacle « Jardins de lumière » au Jardin botanique.

Le directeur, responsable du Jardin botanique, a pensé à un « Chemin de citrouilles » tel que présenté sur l'image ci-dessous. Celui-ci est balisé par un chemin sur lequel sont placées des citrouilles et des dalles vertes lumineuses qui montrent le chemin pendant la nuit. Des dalles marrons complètent le chemin.

Le directeur souhaite savoir le nombre de dalles lumineuses et de dalles marrons nécessaires pour construire un chemin quelle que soit sa longueur.

Peux-tu l'aider à trouver une façon de faire?

Pour cela, réponds aux questions qui suivent.

Voici des exemples de chemins possibles. Ils sont toujours construits de la même façon.

Les dalles lumineuses

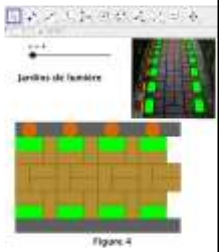
1) Quel est le nombre de dalles lumineuses sur un chemin composé de 3 citrouilles ?
2) Si on cherche le nombre de dalles lumineuses pour un chemin qui compte 4 citrouilles, as-tu besoin de dessiner ce chemin pour trouver ce nombre ? Explique comment tu procèdes.
3) Peux-tu trouver une stratégie pour calculer le nombre de dalles lumineuses pour un chemin composé de 17 citrouilles sans avoir à les compter une à une ?

Les dalles marrons

4) Quel est le nombre de dalles marrons pour un chemin composé de 3 citrouilles ?
5) Si on cherche le nombre de dalles marrons pour un chemin qui compte 4 citrouilles, as-tu besoin de dessiner ce chemin pour trouver ce nombre ? Explique comment tu procèdes.
6) Peux-tu trouver une stratégie pour calculer le nombre de dalles marrons pour un chemin composé de 17 citrouilles sans avoir les compter une à une ?

Page 3 (Travail en équipe)

7) En équipe, discutez des stratégies que vous avez trouvées précédemment pour calculer le nombre de dalles lumineuses et de dalles marrons nécessaires. Procédez-vous tous de la même façon ? Trouvez au moins 2 stratégies pour calculer à la fois le nombre de dalles lumineuses et le nombre de dalles marrons pour un chemin de 17 citrouilles.
8) Une fois que vous avez écrit les différentes stratégies et que vous avez décidé qu'elles sont correctes, utilisez chacune de ces stratégies pour calculer le nombre de dalles lumineuses et de dalles marrons nécessaires pour un chemin composé de 21 citrouilles et pour un chemin composé de 54 citrouilles.
9) L'application GeoGebra vous donne le nombre de dalles lumineuses et de dalles marrons pour n'importe quel chemin. Vous pouvez l'utiliser pour vérifier votre travail réalisé en 8.
10) Écrivez des messages en mots au directeur qui vont lui permettre de calculer le nombre de dalles lumineuses et de dalles marrons nécessaires pour n'importe quelle longueur de chemin et sans avoir à les compter une à une.
11) Les messages sont longs à lire. Le directeur est pressé, il souhaite que tu raccourcisses les messages en indiquant les opérations à faire pour que ça rentre dans un message texte. Écris ces messages simplifiés.



Page 4 Suite- Discussion en grand groupe animée par l'enseignante

Discussion de ce qui a été fait et recherche d'un consensus basé sur l'argumentation et la validation. Il sera demandé aux élèves d'essayer de comprendre les stratégies de leurs compagnons. L'enseignant écrit au tableau les différentes stratégies ressorties avec le visuel correspondant. Commencer si possible par les messages qui sont erronés pour que les élèves les valident en grand groupe. Toutes les productions des élèves sont collectées.

Page 5 (Travail individuel, autoréflexion)

Un nouveau questionnaire est utilisé par chaque élève pour travailler à la maison. Il s'agit de reconstruire les résultats qui permettent de résoudre la situation.

Ajouter la question : si le directeur veut calculer le total de dalles pour chaque figure, peux-tu calculer sans compter le nombre total de dalles et ce, pour n'importe quelle longueur de chemin ?

Page 6 (Processus d'institutionnalisation mené par l'enseignante)

L'enseignant effectue une analyse des productions des élèves sous l'angle de l'évolution des représentations spontanées ainsi que des possibles processus algébriques. Il présente aux élèves le processus algébrique en tant que processus de généralisation basé sur les processus numériques des élèves en construisant une expression algébrique qui permet le calcul demandé.

Tableau 4 *– Situation du jardin des citrouilles*

V. DISCUSSION

Une expérimentation a été menée dans le cadre d'un projet Québec-Mexique. Dix élèves de 6^{e} année du primaire au Mexique classés en difficultés d'apprentissage (dans ce pays, l'école primaire s'étale sur 6 ans, les enfants ont 6 ans en rentrant en première année et ont 11 ans à la fin du primaire) ont résolu 5 situations. Un IPad leur a été distribué dans lequel ils ont pu vérifier les stratégies qu'ils ont construites (voir tableau 2, la page 3 de la situation). Nous pouvons partager à ce stade quelques résultats préliminaires :

- Les situations déclenchent chez les élèves des processus de généralisation comme nous l'avons prévu lors de l'*analyse a priori*.

- Le travail en équipe sous une méthodologie d'enseignement comme ACODESA semble donner de bons résultats pour promouvoir une réflexion approfondie de l'activité mathématique chez les élèves.
- L'utilisation de la technologie (IPad dans notre cas, avec les applets faits avec GeoGebra), semble jouer un rôle important, comme un moyen de contrôle numérique pour les prédictions faites par les élèves.

Nous pouvons souligner que les élèves utilisent différentes symbolisations pour répondre à la question « Les messages sont longs à lire. Le directeur est pressé, il souhaite que tu raccourcisses les messages en indiquant les opérations à faire pour que ça rentre dans un message texte. Écris ces messages simplifiés ». Au départ, les élèves sont amenés à écrire des messages en mots. La consigne qui leur demande d'écrire un message plus court (qui peut être justifié par la nécessité d'écrire un texto), amène les élèves à simplifier leur message en utilisant une symbolisation parlante pour eux. Nous avons ainsi remarqué une panoplie de différentes symbolisations utilisées par les élèves pour représenter leur générateur : un trait, un petit carré, un point d'interrogation, des lettres qui sont reliées en général avec la première lettre du générateur (exemple « t » pour désigner le nombre de *tables*), des dessins,... La situation du jardin et des citrouilles (voir figure 3) a fait émergé le recours à deux générateurs : le dessin d'un squelette qui permet de trouver le nombre de dalles vertes (désigné par « verdes » et « v »). Ces deux générateurs vont permettre de trouver le nombre de dalles marrons (désigné par m).

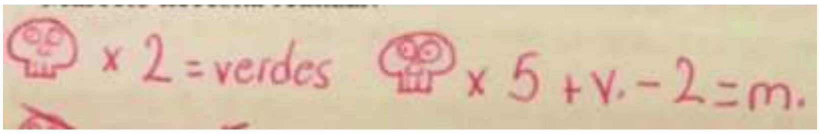


Figure 3 *– Situation du jardin et des citrouilles- Production d'un élève*

Ces situations présentent une richesse pour le développement de la pensée arithmético-algébrique.

RÉFÉRENCES

Artigue M. (2002) L'intégration de calculatrices symboliques à l'enseignement secondaire : les leçons de quelques ingénieries didactiques. In D. Guin et L. Trouche (Eds), *Calculatrices symboliques transformer un outil en un instrument du travail mathématique : un problème didactique* (p. 277-349), Grenoble : La Pensée Sauvage.

Brousseau G. (1998) Théorie des Situations Didactiques. Grenoble, La Pensée Sauvage.

Carraher D. W., Schliemann A. D., Brizuela B. M. et Earnest D. (2006) Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(2), 87-115.

Denis C. (1997) Une introduction à l'algèbre en secondaire 3 généralisation et construction de formules. Mémoire de maîtrise. Université du Québec à Montréal, Montréal, Québec.

Elbers E. (2003) Classroom interaction as reflextion: Learning and teaching in a community of inquiry. *Educational Studies in Mathematics*, 54, 77-99.

Filloy E. et Rojano T. (1989) Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics*, 9(2), 19-26.Glaeser (1999).

Grenier D. et Payan C. (2003) Situations de recherche en « classe », essai de caractérisation et proposition de modélisation. *Les cahiers du Laboratoire Leibniz, 92*.

Hitt F. (2007) Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d'une méthode d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'auto-réflexion. In M. Baron, D. Guin et L. Trouche (Éds.), *Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage. Conception et usages, regards croisés* (pp. 65-88). Paris : Hermès.

Hitt F. et González-Martín A.S. (2015) Covariation between variables in a modelling process: The ACODESA (Collaborative learning, Scientific debate and Self-reflexion) method. *Educational Studies in Mathematics*, *88*(2), 201-219.

Hitt F., Saboya M. et Cortés C. (2016) Arithmetic-algebraic work space to promote free transit between the arithmetic and algebraic thinking: triangular numbers. *ZDM Mathematics Education*. Dordretch: Springer. Hitt F., Saboya M. et Cortes C. (2017)

Hitt F. et Quiroz S. (en préparation) Evolution of a theoretical framework on activity theory, mathematical modeling and the role of non-institutional representations in the construction of knowledge. UQAM.

Kaput J. (1998) Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by 'algebrafying' the K-12 Curriculum. In *The nature and role of algebra in the K-14 curriculum* (pp. 25–26). Washington: NCTM and the Mathematical Sciences Education Board, National Research Council.

Kaput J. (2000) Transforming Algebra from an Engine of Inequity to an Engine of Mathematical Power By "Algebrafying" the K-12 Curriculum. Paper from National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science, Dartmouth, MA. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 441 664).

Kieran C. (2007) Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In F. K. Lester, Jr., (Ed.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 707-762). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Kuzniak A. (2011) L'espace de travail mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, Vol. 16, pp. 9-24.

Legrand M. (1993) Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse. *Repères*, no. 10, 123-159, janvier 1993.

Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport (2005) Cadre théorique. Curriculum de la formation générale de base. *Apprendre tout au long de la vie*.

Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport (2007) Programme de Formation, Deuxième Cycle du Secondaire. http://www1.mels.gouv.qc.ca/sections/programmeFormation/secondaire2/index.asp?page=math. Acceced Sept 2015.

Radford L. (2011) Grade 2 students' non – symbolic algebraic thinking. In J. Cai & E. Knuth (eds.), *Early Algebrization, Advances in Mathematics Education* (pp. 303-322). Dordrecht: Kluwer.

Saboya M. (2010) *Élaboration et analyse d'une intervention didactique co-construite entre chercheur et enseignant, visant le développement d'un contrôle sur l'activité mathématique chez les élèves du secondaire*. Thèse de doctorat non publiée, Université du Québec à Montréal.

Saboya M., Bednarz N. et Hitt F. (2015) Le contrôle en algèbre: analyse de ses manifestations chez les élèves, éclairage sur sa conceptualisation. La résolution de problèmes. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. Vol. 20, 61-100.

Schliemann A., Carraher D. et Brizuela B. (2012) Algebra in elementary school. *Recherche en Didactique des Mathématiques*. Special issue. 107-122.

Vergnaud, G. (1988). Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algèbre. En: C. Laborde (Ed.) *Actes du Premier Colloque Franco-Allemand de Didactique des Mathématiques et de l'informatique*, (pp. 189-199), Grenoble: La Pensée Sauvage.

Verschaffel L. et De Corte E. (1996) Number and arithmetic. In A. J. Bishop et al. (Eds.), *International handbook of mathematical education* (p. 99-137). Dordretch: Kluwer Academic Publishers.

von Glasersfeld E. (2004) Questions et réponses au sujet du constructivisme radical. In P. Jonnaert et Masciotra D. (Eds.), *Constructivisme choix contemporains. Hommage à Ernst von Glasersfeld* (pp. 291-323). Presses de l'Université du Québec.

Zimmermann W. et Cunningham S. (1991) What is Mathematical Visualization ? Dans W. Zimmermann et S. Cunningham (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* (pp. 1-8). *19*, USA : MAA Series.

ANNEXE

CDI

LA LUTTE

Depuis 1996, la lutte est une discipline olympique. Le comité organisateur des Jeux veut que la vente des billets pour assister aux compétitions de lutte permette de recueillir suffisamment d'argent pour couvrir les dépenses liées à leur tenue.

Vous devez déterminer le prix de vente des billets pour assister aux compétitions de lutte.

Les renseignements nécessaires pour vos calculs sont présentés ci-dessous. Les coûts incluent les taxes.

DURÉE DES COMPÉTITIONS

- Il y aura 7 jours de compétitions de lutte.

LES DÉPENSES

Location et décoration du stade et location des panneaux d'affichage

- La location du stade coûte 10 000 $ par jour.
- La décoration du stade coûte 20 000 $ en tout.
- Des panneaux d'affichage doivent être loués pour la durée des compétitions. Ces panneaux indiqueront le classement des lutteurs ainsi que l'horaire des compétitions de la journée. La location de ces panneaux coûte 12 000 $ par jour.

Salaire des employés

- Chaque jour, 150 employés travaillent à la réalisation des compétitions de lutte. Le diagramme et le tableau suivants montrent la répartition de ces employés et leur salaire selon leur domaine de travail.

RÉPARTITION DES 150 EMPLOYÉS SELON LEUR DOMAINE DE TRAVAIL

SALAIRE DES EMPLOYÉS SELON LEUR DOMAINE DE TRAVAIL

Domaine de travail	Salaire ($ par jour)
Entretien	160
Guichet et sécurité	190
Officiels	600

Aménagement des plateformes

- À l'intérieur du stade, 3 aires de combat isométriques seront aménagées. Chaque aire de combat sera constituée d'une plateforme sur laquelle un tapis de lutte sera installé. L'illustration de la page 4 montre les aires de combat.
- Chaque plateforme est un prisme droit à base octogonale régulière. Le périmètre de la base est de 85,76 m. L'apothème de la base mesure 12,94 m. Le coût d'une plateforme est proportionnel à l'aire de sa base. La table de valeurs suivante présente l'aire de la base et le coût de deux plateformes de ce genre.

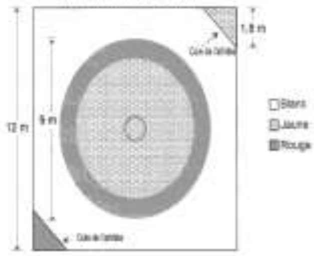
COÛT D'UNE PLATEFORME SELON L'AIRE DE SA BASE

Aire de la base	Coût de la plateforme
80 m^2	2 000 $
265 m^2	6 625 $

Achat des tapis

- On doit acheter 4 tapis de lutte : un pour chaque plateforme et un tapis supplémentaire en cas de bris.
- Le coût d'un tapis dépend de l'aire et de la couleur de ses différentes sections. Le coût de la section blanche est de 70 $ par m^2. Le coût des sections jaunes et rouges est de 74 $ par m^2.
- Le dessus de chaque tapis a la forme d'un carré dont chaque côté mesure 12 m.
- Les combats ont lieu dans une zone circulaire de 9 m de diamètre située au centre du tapis.
- Chaque athlète a un espace dans un coin du tapis. Cet espace a la forme d'un triangle rectangle isocèle dont les côtés formant l'angle droit mesurent 1,8 m.

DESSUS D'UN TAPIS DE LUTTE



LES REVENUS

- Il y a 2 000 sièges dans ce stade. Ces sièges sont répartis dans trois catégories : A, B et C.
  - Dans la catégorie B, il y a 600 sièges de plus que dans la catégorie A.
  - Le nombre de sièges de la catégorie C est le double de celui de la catégorie A.
- Pour chaque journée de compétition, un billet est mis en vente pour chaque siège.
- **On prévoit que seulement les $\frac{3}{5}$ des billets mis en vente pour chaque catégorie seront vendus.**
- Le prix minimum d'un billet est de 20 $.
- Le prix d'un billet de catégorie B doit être d'au moins 15 $ de plus que celui d'un billet de catégorie C.
- Le prix d'un billet de catégorie B doit être égal à la moitié de celui d'un billet de catégorie A.
- Le revenu provenant de la vente des billets ne doit pas représenter plus de 120 % des dépenses.

Vous devez déterminer le prix de vente des billets, sans les taxes, pour assister aux compétitions de lutte en tenant compte des différentes contraintes.