HISTOIRE DES MATHEMATIQUES EN CLASSE : POUR UNE ANALYSE AU NIVEAU DES CONCEPTIONS DES ELEVES

DE VITTORI[*] Thomas*

Résumé – Après une rapide présentation du modèle cK¢ du didacticien des mathématiques Nicolas Balacheff, cet article se propose d'en montrer l'intérêt pour l'analyse de certaines tâches données aux élèves lors de l'utilisation de l'histoire des mathématiques en classe.

Mots-clefs : histoire des mathématiques, didactique, épistémologie, modèle cK¢

Abstract – After a short presentation of Balacheff's works, his cK¢ model is applied on an example in order to show how a study at the students' conceptions level enlightens the way historical elements interact with mathematical tasks.

Keywords: history of mathematics, didactics, epistemology, cK¢ model

I. DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES ET ETUDES EMPIRIQUES SUR L'UTILISATION DE L'HISTOIRE DES MATHEMATIQUES EN CLASSE

1. Rappel sur le contexte à l'échelle internationale

Depuis une trentaine d'années, la pertinence de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement des mathématiques a toujours été réaffirmée par de nombreux enseignants et chercheurs presque partout dans le monde. Mais dans le même temps, ce qui rend intéressante une telle approche pédagogique reste obscur surtout quand on s'intéresse aux apprentissages des élèves. Face à cette situation paradoxale, depuis le début du 21^{e} siècle, la communauté internationale réclame des recherches empiriques qui pourraient éclairer le rôle des éléments historiques dans l'enseignement des mathématiques. Très récemment, Fried, Guillemette & Jahnke (2016) ont tenté de résumer cette quête de cadres théoriques adaptés mais à l'exception de quelques résultats dans les travaux de Jankvist (2009), Guillemette (2017), Jahnke (2014) et Fried lui-même (2008, 2014a, 2014b), leur conclusion principale fut que cette question demeure encore aujourd'hui à l'état de question. Pour Fried et al., un point important soulevé dans cette recherche réside dans le fait que les études sur l'utilisation pédagogique de l'histoire ne doivent pas manquer les spécificités du savoir historique. Ainsi, Fried et al. rejettent l'idée d'un cadre théorique uniquement porté par une histoire pensée comme *outil* et selon eux un bon cadre théorique devrait être guidé par des questions centrées sur le caractère historique des mathématiques (Fried et al., 2016). Un bon exemple d'utilisation de l'histoire des mathématiques en classe qui tienne compte de ces mises en garde est certainement l'approche herméneutique de Jahnke dont les principaux points ont été rappelés par son auteur lui-même dans un texte récent (Fried et al., 2016). Selon Jahnke, l'approche herméneutique est l'une des approches les plus sophistiquées pour l'histoire des mathématiques en classe. Cette procédure pédagogique peut être résumée en six principes (Fried et al., 2016). (1) Les élèves étudient une source historique après avoir acquis une bonne compréhension du sujet mathématique respectif dans sa forme et sa perspective moderne. (2) Les élèves étudient le contexte et la biographie de l'auteur. (3) La particularité historique de la source est conservée autant que possible. (4) Les élèves sont encouragés à produire librement des associations d'idées. (5) L'enseignant insiste sur l'importance des arguments rationnels sans chercher une interprétation unique. (6) La compréhension historique d'un concept

[*] Laboratoire de Mathématiques de Lens – Université d'Artois – ESPE Lille Nord de France – France – thomas.devittori@espe-lnf.fr

s'oppose à la vision moderne, c'est-à-dire que la source historique encourage les processus de réflexion. Ainsi résumée, l'approche herméneutique peut être conçue comme un processus dont l'aboutissement réside dans une confrontation entre une compréhension moderne et historique des objets mathématiques (point 6). Néanmoins, l'idée proposée par Jahnke de fusion de l'horizon du lecteur et de l'horizon du texte consiste avant tout en une perspective globale dont les différents aspects peuvent et doivent être analysés en profondeur (c'est-à-dire en ayant en vue les apprentissages mathématiques des élèves) *a priori* et *a posteriori*. De même, le rôle des contenus historiques dans l'acte pédagogique reste à étudier. Jahnke en fait un élément central *a priori* alors que Chorlay (2016) lui préfère une approche plus centrée sur les tâches des élèves (c'est-à-dire sans inviter à faire, en classe, de l'histoire des mathématiques pour elle-même). L'étude proposée dans cet article s'inscrit elle aussi dans ce type de questionnement et se situe dans la suite de travaux précédents portant sur des analyses de pratiques (Barrier, Mathé & de Vittori, 2012, de Vittori web, 2015, 2016, 2017). L'approche se veut toutefois plus théorique et je me concentrerai ici uniquement sur la manière dont certains outils tirés de la didactique des mathématiques peuvent être adaptés à l'analyse de l'activité des élèves dans des situations de classe mêlant histoire et mathématiques. Ainsi, dans une première partie, je présenterai rapidement le modèle cK¢ de Balacheff choisi pour cette étude et dans un second temps, j'utiliserai ce modèle sur un exemple pour souligner quelques spécificités dans l'utilisation de l'histoire dans l'enseignement des mathématiques.

2. *Le modèle cK¢ de Nicolas Balacheff*

Nicolas Balacheff est un didacticien français dont les travaux portent principalement sur l'apprentissage assisté par ordinateur et sur la démonstration. Dès les années quatre-vingts, son intérêt pour l'enseignement des mathématiques l'amène à élaborer un modèle dont la visée est l'analyse de l'apprentissage des mathématiques lorsque les exercices sont implémentés sur ordinateur. Le cadre théorique dans lequel Balacheff travaille est la Théorie des Situations Didactiques (TSD) de Brousseau avec pour projet le rapprochement de l'intelligence artificielle et de la didactique des mathématiques afin d'améliorer la conception des environnements d'apprentissage informatisés (Balacheff, 2013, p.2). L'intérêt d'un tel modèle pour notre étude sur l'histoire dans l'enseignement des mathématiques réside dans le fait que la réflexion de Balacheff s'ancre profondément à un niveau épistémologique. Comme nous le verrons plus tard, cette spécificité est l'un des principaux aspects qui fait de ce cadre un outil précieux pour une analyse de l'utilisation de l'histoire des mathématiques en classe.

Cherchant à étendre les apports de Vergnaud sur les champs conceptuels, l'idée principale de Balacheff est un nouveau travail sur les *conceptions* qu'il définit comme un «état d'équilibre dynamique d'une boucle action / rétroaction du système» (Balacheff, 2005, p.6). Le couple actions / rétroactions est un élément clé de la théorie Brousseau qui est, rappelons-le, le cadre théorique principal de Balacheff. Les actions sont ce que l'apprenant fait (ou peut faire) et les rétroactions soulignent la manière dont tout ce avec quoi l'apprenant est en contact (contenus matériels mais aussi les relations avec les autres étudiants) lui donne une information en retour. Dans ce contexte, la conception doit être comprise comme une connaissance locale d'un apprenant dans une situation spécifique. Balacheff la définit comme un «équilibre dynamique» car elle est construite sur des boucles d'actions et de rétroactions qui pourraient, à chaque moment, déstabiliser les connaissances de l'apprenant. Par exemple, faire des multiplications avec des entiers tend à donner à cette opération certaines propriétés (comme, par exemple, multiplier deux nombres donne un résultat supérieur à chacun d'eux) qui peuvent être mise en défaut avec des nombres décimaux (0,2 fois 5 donne 1 qui n'est pas supérieur à 5). Jusqu'ici, tout ce qui vient d'être présenté est déjà, d'une certaine manière, dans la TSD de Brousseau. Ce qui est nouveau chez Balacheff apparaît lorsqu'il fait de la *conception* une notion opérationnelle (pour l'apprentissage par ordinateur par exemple). Voici la caractérisation qu'il propose :

> « Une « conception » est caractérisée par un quadruplet (P, R, L, Σ) composé de :
>
> P : un ensemble de problèmes
>
> R : un ensemble d'opérateurs
>
> L : un système de représentation
>
> Σ : une structure de contrôle. » (Balacheff, 2005, p.6)

P, l'ensemble des problèmes, est directement inspiré par le contexte épistémologique de la TSD. Selon Brousseau, et donc pour Balacheff, une connaissance mathématique est élaborée comme une réponse à un problème ou une catégorie de problèmes, une partie du travail du mathématicien résidant dans l'identification des problèmes qui peuvent être résolus de la même manière, c'est-à-dire avec les mêmes outils conceptuels. Ainsi, un «ensemble de problèmes» est ce qui donne à une conception son sens et son utilité. Balacheff donne l'exemple de la notion de tangente qui, selon les situations, peut être pensée de différentes manières, c'est-à-dire, selon différentes conceptions. R, l'ensemble des opérateurs, vise à rendre compte de toutes les techniques qui permettent la transformation du problème. En effet, lors de la résolution d'un problème, il convient généralement de modifier la situation initiale, étape par étape, pour la rendre finalement compatible avec un théorème connu ou une procédure de calcul. Dans l'analyse d'une conception, l'ensemble des opérateurs contient donc toutes les procédures mathématiques disponibles pour l'apprenant. Le troisième item du quadruplet, le système de représentation L, est peut-être le plus simple des quatre car il fait référence à la façon dont un problème est présenté. L'algèbre moderne en est un exemple, mais comme nous le verrons plus loin, d'anciens systèmes de représentation tels que des nœuds sur des cordes sont également possibles. Le dernier point est Σ, la structure de contrôle. Comme l'explique Balacheff (2013, p.6), c'est quelque chose qu'il introduit afin de rendre visible ce qui est en jeu lorsque l'apprenant identifie à quel point il est proche de la solution. En d'autres termes, chaque fois que quelqu'un résout un problème mathématique, consciemment ou non, il utilise des éléments qui l'aident à contrôler ce qui est fait. Par exemple, lorsque les élèves multiplient 456 par 123, ils utilisent un algorithme dans lequel chaque étape donne un moyen de contrôler l'avancement du calcul. Pour Balacheff, ce quatrième élément de sa définition de la conception est incontournable pour l'apprentissage assisté par ordinateur car il permet une analyse avant l'action de ce qui peut être fait par l'étudiant.

Avec ce modèle, les relations dans un ensemble de problèmes peuvent être anticipées afin d'analyser comment les conceptions des étudiants peuvent être activées, renforcées, déstabilisées ou liées à d'autres. Dans l'un des articles de Balacheff (2013, p.12), un petit diagramme résume cette idée (*Diagramme 1*, P est pour les problèmes et C pour les conceptions). En accord avec le TSD en toile de fond, l'auteur explique que l'apprentissage est un processus dont le résultat est une évolution des conceptions en cours de renforcement, d'interrogation ou de transformation ; le moteur de ce processus étant les problèmes qui sont pensés comme des déstabilisations du système apprenant / milieu.

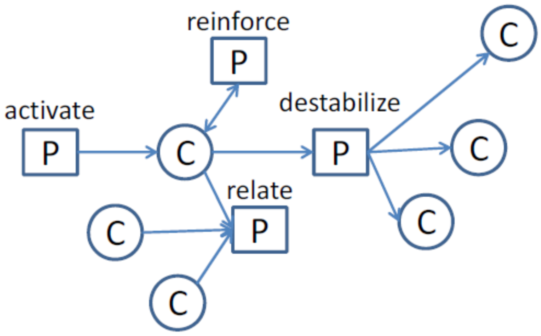

***Diagramme 1** – Relations entre problèmes (P) et conceptions (C)*

Le modèle présenté dans cette première partie est appelé cK¢ par son concepteur et chacune des trois lettres est soigneusement définie. Le nom cK¢ vient des trois piliers du modèle: conception (conception en anglais), savoir (Knowledge en anglais), concept (concept en anglais) où le savoir K désigne une conception qui est identifiée et formalisée par une institution (Balacheff, 2013). Quant à ¢, le concept, c'est l'ensemble de toutes les conceptions ayant un même objet. D'une certaine manière, Balacheff crée des classes d'équivalences pour montrer les liens entre les mathématiques les plus abstraites (les concepts), ce qui est enseigné (la connaissance) et ce qui est effectivement utilisé par les élèves (les conceptions), ce qu'il résume dans le diagramme suivant (*Diagramme 2*, Balacheff 2005, p.25).

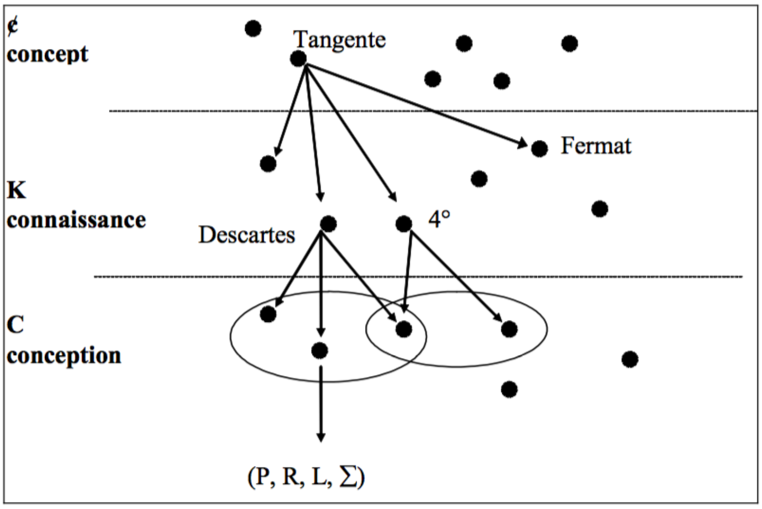

***Diagramme 2** – Les trois niveaux de cK¢ : les conceptions, les connaissances et les concepts*

Il est important de noter que ce processus est avant tout ascendant car l'entrée principale reste la conception au niveau des élèves. cK¢ est un modèle qui fonctionne *in fine* à un niveau épistémique et il pourra donc convenir à une analyse de l'histoire dans l'enseignement des mathématiques lorsque l'histoire partage cette orientation vers la construction de concepts.

II. ETUDE DIDACTIQUE D'UNE ACTIVITE A DIMENSION(S) HISTORIQUE(S)

L'exemple que je vais analyser porte sur un travail autour de grands nombres réalisé avec des élèves d'une classe de sixième (11-12 ans). Les grands nombres sont difficiles à manipuler par les élèves et des travaux récents de didactique des mathématiques ont montré que de nombreuses difficultés sont liées à un manque de maîtrise du système numérique. Tempier (2016) explique qu'un bon moyen d'analyser l'enseignement de la numération est de considérer le rôle des différents rangs (nommés unités et classes) dans l'écriture des nombres. Ce que rappelle Tempier, c'est que les grands nombres sont construits dans la répétition d'un système d'unités (unités, dizaines, centaines) et de classes (unités, milliers, millions, milliards). Par exemple, 23456 se lit vingt-trois-mille-quatre-cent-cinquante-six où un bon élève peut identifier deux dizaines et trois unités dans la classe des milliers et quatre centaines, cinq dizaines et six unités dans la classe des unités. Selon Tempier, la compréhension des grands nombres requiert une bonne capacité à séparer leur écriture pour pouvoir, par exemple, dire combien il y a de centaines dans 23456 (234 centaines et 56 unités). De nombreuses erreurs commises par les élèves peuvent être expliquées par l'une ou l'autre de ces considérations (Tempier, 2016).

Comment l'histoire des mathématiques peut-elle être utile dans ce contexte ? Dans le cadre d'un cours d'histoire des mathématiques, une activité expérimentale à destination d'élèves de sixième a été préparée par des étudiants de niveau licence se destinant au professorat des écoles (de Vittori, 2017). La partie centrale de cette séance était basée sur l'utilisation de quipus incas. Les quipus sont des cordelettes (une ou plusieurs) où des nœuds sont faits pour exprimer des nombres. Ce système est simple et il fonctionne sur un système décimal tout comme le nôtre (Asher & Asher, 1997). Ce qui est intéressant, c'est que ce système peut être utilisé pour mettre en évidence la distinction entre unités et classes pointée par Tempier. En effet, pour chaque classe (des milliers, des millions, des milliards) une nouvelle cordelette est attachée sur le quipu et ainsi sur chacune d'elles, les nombres ne sont jamais supérieurs à 999 ce qui permet une identification rapide des centaines, des dizaines et des unités. En pratique, après une brève présentation du contexte et la manière de faire les nœuds, l'activité proposée consiste principalement en une alternance de phases où les élèves réalisent des quipus et des phases où ils essaient de les lire, l'objectif étant alors d'inciter les élèves à travailler sur les *bons* regroupements en puissances de 10 (unités, milliers, millions) dans les deux systèmes. Bien sûr, les nombres deviennent de plus en plus grands au fur et à mesure que la séance avance. Voyons sur cet exemple comment le modèle cK¢ peut être utilisé pour rendre compte de la manière dont l'histoire interagit avec l'enseignement des mathématiques. Pour cette analyse, dans les différents items du quadruplet définissant une conception, je noterai « cont » en indice pour indiquer ce qui renvoie à une épistémologie contemporaine des mathématiques (généralement celle issue du vécu scolaire des élèves) et « hist » en indice pour marquer ce qui fait référence à une vision et/ou pratique ancienne (ici celle liée aux quipus incas) que nous connaissons uniquement *via* l'histoire.

Cette activité sur les quipus porte sur les grands nombres. L'ensemble des problèmes P est lié à ce sujet dans la mesure où les nombres, lorsqu'ils tendent à devenir très grands, nécessitent l'élaboration d'un système approprié pour leur écriture et leur manipulation. Il y a ensuite deux systèmes de représentation en jeu. Le premier, L_{cont}, notre système de numération contemporain, est toujours présent dans un contexte scolaire. Les élèves connaissent les nombres depuis leur plus jeune âge et l'activité proposée tente de compléter ces connaissances antérieures. Le deuxième système de représentation, L_{hist}, est le système inspiré par l'histoire. Au travers des quipus, une nouvelle façon d'écrire les nombres est donnée et les élèves sont invités à utiliser ce nouveau système pour communiquer entre eux. Comme l'explique Asher & Asher (1997, p.62), l'utilisation de ficelles en lieu et place de papier ou de papyrus a de nombreuses conséquences. Contrairement à la plupart des systèmes de numération les nœuds sur les cordelettes sont tridimensionnels. L'enregistrement des nombres sur un quipu est non linéaire et cette non-linéarité est une conséquence du matériau souple utilisé. Selon les historiens Asher & Asher (1997 p.62), c'est la position relative, associée aux couleurs et aux types de nœuds, qui rend l'enregistrement significatif. Le quipukamayok (maitre des quipus) devait donc avoir la capacité à concevoir et à agir sur les nombres en trois dimensions et avec de la couleur. Dans ce contexte, le système contemporain des opérateurs R_{cont} utilisé par les élèves est exactement ce qui a été remarqué par Tempier. En présence de grands nombres, les élèves doivent les séparer en différentes classes, pour identifier les unités, les dizaines, etc. Toutes ces opérations font partie d'un ensemble d'actions techniques et intellectuelles qui permettent l'utilisation correcte et la compréhension des nombres. Mais dans cette activité, les élèves doivent aussi gérer R_{hist}, une manière de travailler avec des nombres notés au moyen de nœuds sur des cordes. Enfin, tous ces aspects sont contrôlés par Σ_{cont} *via* une confrontation lecture / écriture par les pairs (les élèves travaillaient en groupes) et une vérification de l'exactitude du décodage, et par Σ_{hist} en particulier lors de l'utilisation de l'alignement (assez naturellement, les élèves laissent pendre les cordes pour vérifier les positions). Au final, on constate dans cette activité deux manière de concevoir les mathématiques, la première au travers de (P, R_{cont}, L_{cont}, Σ_{cont}) et la seconde, qui trouve sa source dans l'histoire, (P, R_{hist}, L_{hist}, Σ_{hist}) et ce de manière concomitante. Ce que nous pouvons résumer dans le tableau suivant :

	Exemple : Quipus et grands nombres	
P	écriture, transmission de grands nombres (pour l'archivage de données comptable par exemple)	
R	$\mathbf{R_{cont}}$ décomposition algébrique en unités, en dizaines, en centaines et en unités, en milliers, en millions, en milliards; ajouter ou soustraire des unités à n'importe quel rang; ajouter ou supprimer des chiffres	$\mathbf{R_{hist}}$ décomposition en unités, dizaines, centaines et en unités, des milliers, des millions, des milliards; ajouter ou supprimer des nœuds, changer le type de nœud, ajouter ou supprimer des cordes
L	$\mathbf{L_{cont}}$ le système de numération décimal de l'école, écriture chiffrée, désignation orale des nombres	$\mathbf{L_{hist}}$ le système des Incas avec des noeuds sur les cordes
Σ	$\mathbf{\Sigma_{cont}}$ la confrontation lecture / écriture par les pairs; précision du décodage	$\mathbf{\Sigma_{hist}}$ le savoir-faire de quipukamayok (maitre du quipu) : utilisation des couleurs, alignement des différentes ficelles (comparaison de position)

***Tableau 1** – Analyse des conceptions dans l'activité sur les quipus incas*

L'interprétation de cette activité dans le modèle cK¢ donne l'occasion de montrer comment la dimension historique crée de nouvelles tâches dans lesquelles les élèves doivent passer d'une conception à une autre, voire les confronter. Dans la séance sur les quipus, l'objectif était avant tout de créer un conflit cognitif qui devient visible dans le modèle cK¢ par la co-présence de deux conceptions différentes (notifiées ici par le jeu des indices « cont » et « hist »)

III. CONCLUSION : HISTOIRE DES MATHEMATIQUES ET DUALITE PROBLEME/CONCEPTION CHEZ BALACHEFF

Au début de cet article, j'ai souligné l'importance de l'ancrage épistémologique du modèle cK¢. Ce modèle propose une analyse basée sur trois niveaux différents, du plus individualisé (conceptions des élèves) au plus abstrait (concepts mathématiques). Dans cette organisation, la connaissance se situe quelque part entre les deux et est représentative de toute situation d'enseignement dans laquelle les contenus scolaires doivent, au final, être stabilisés. Dans le diagramme suivant (*Diagramme 3*), les trois niveaux du modèle cK¢ sont rappelés pour notre exemple de l'activité avec les quipus dans laquelle les contenus mathématiques visés sont des nombres et le système numérique.

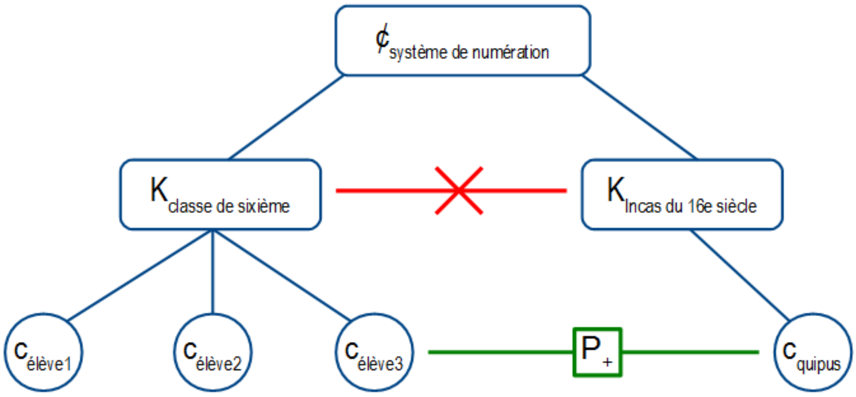

Diagramme 3 *– Application du modèle cK¢ à l'histoire des mathématiques en classe*

Dans cette utilisation de l'histoire, il est important de noter que les élèves ne peuvent être *réellement* des Incas du XVI^e siècle. Ainsi, nos élèves de sixième ne peuvent pas vivre ce que les anciens Incas vivaient car pour ce faire, ces élèves du XXI^e siècle devraient complètement oublier ce qu'ils ont appris depuis leur naissance. Pour notre sujet, cette limitation structurelle signifie que les connaissances mathématiques utilisées dans une classe de sixième ne peuvent être directement enrichies par celles des Incas, ce qui est symbolisé par la croix dans le diagramme. Ce que nous avons vu dans l'exemple précédent, c'est qu'un bon niveau peut consister dans une analyse des conceptions. De nos jours, dans toute classe, sur n'importe quel sujet mathématique, de nombreuses conceptions ($c_{\text{élève1}}$, $c_{\text{élève2}}$, etc.) peuvent être mises en jeu par les élèves. La principale spécificité de l'utilisation de l'histoire est l'addition d'un nouveau quadruplet (P, R, L, Σ) dans lequel apparaît une distance plus ou moins grande avec les conceptions contemporaines. Dans le modèle cK¢, problèmes et conceptions sont profondément liés. Comme nous l'avons rappelé au début de cet article, le travail de Balacheff est ancré dans la théorie de Brousseau selon laquelle la connaissance mathématique est une réponse à certains problèmes. Les relations entre les problèmes et les conceptions sont multiples (voir *Diagramme 1*) ; un problème pouvant activer, renforcer, déstabiliser ou simplement se rapporter à une ou plusieurs conceptions. Ces possibilités sont typiquement celles qui sont utilisées dans les séances alliant mathématiques et histoire. Comme le montre l'exemple précédent, les conceptions empruntées au passé sont mises en contact avec les élèves par l'introduction d'un nouveau problème P_+ (*Diagramme 3*) comprenant des tâches nouvelles (comme faire des nœuds sur des cordes ou les *lire*). P_+ crée un pont entre les conceptions contemporaines des élèves et celles issues du passé. Notons que pour qu'elles prennent sens pour les élèves, les conceptions dans lesquelles P_+ se situe doivent renvoyer à un même ensemble de problèmes. Ainsi, dans l'exemple précédent, le problème P_+ fait partie de deux types de conceptions : un ancrage historique (P_+, R_{hist}, L_{hist}, Σ_{hist}) et son sens contemporain (P_+, R_{cont}, L_{cont}, Σ_{cont}). De fait, une nouvelle conception (c_{quipus} dans notre exemple, *Diagramme 3*) rejoint l'ensemble des conceptions utilisables par l'élève et permet ainsi un enrichissement des connaissances associées ($K_{\text{classe de sixième}}$ dans notre exemple, *Diagramme 3*).

Notons pour terminer que notre exemple sur les quipus se veut avant tout générique car, l'application du modèle cK¢ n'est en rien spécifique à cette activité. En effet, chaque fois qu'une situation d'enseignement des mathématiques est basée sur la mise en place d'un pas de côté par le biais de l'histoire, une analyse précise des conceptions en jeu est possible. Dès lors, cette analyse permet d'identifier des relations subtiles entre les contenus historiques et les mathématiques contemporaines apprises par les élèves.

REFERENCES

Asher M., Asher R. (1997) *Mathematics of the Incas – Code of the Quipu*, Dover, 1997.

Balacheff N., Margolinas C. (2005) cK¢ Modèle des connaissances pour le calcul de situation didactiques. In Mercier A. & Margolinas C. (eds.) *Balises pour la didactique des mathématiques* (pp.1-32). Grenoble : Éditions La Pensée Sauvage.

Balacheff, N. (2013) cK¢, a model to reason on learners' conceptions. In M. V. Martinez, A. Castro Superfine (Eds). *PME-NA 2013 - Psychology of Mathematics Education*, North American Chapter, Nov 2013, Chicago, IL, United States. pp.2-15.

Chorlay, R. (2016) Historical sources in the classroom and their educational effects. In Radford, L., Furinghetti, F & Hausberger, T. (Eds), *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between History and Pedagogy of Mathematics* (HPM 2016, 18-22 July 2016). Montpellier, France: IREM de Montpellier, 5-23.

de Vittori, T. (web) EDU-HM website, Etudes Didactiques de l'Utilisation de l'Histoire des Mathématiques en classe et en formation, http://eduhm.univ-artois.fr (identification is required to access videos. Login: region-npdc, password : region-npdc).

de Vittori, T. (2015) Les tâches des élèves dans une activité mathématique à dimension historique. *Petit x* 97, 5-26.

de Vittori, T. (2016) Analysis of pupils tasks in the use of history in mathematics teaching, in Radford, L., &al. *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics*. Montpellier, France: IREM de Montpellier.

de Vittori, T., Leroy, A. (2017) Travailler la numération décimale avec les quipus incas : bienfaits et limites autour d'une expérience en classe de sixième. *Repères-IREM* 107, 21-44.

Fried, M. N. (2008) History of mathematics in mathematics education: A Saussurean perspective. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 5(2), 185–198.

Fried, M. N. (2014a) History of Mathematics and Mathematics Education. In Michael Matthews (Ed*.), History, philosophy and science teaching handbook*, volume I (pp. 669-705). New York: Springer.

Fried, M. N. (2014b) Our relationship to the mathematical past. *Lecture for the MAA-AMS Joint Conference - Short Course on Historiography*. Baltimore, Maryland, USA.

Fried, M., Guillemette, D., & Jahnke, H.N. (2016) Theoretical and/or conceptual frameworks for integrating history in mathematics education. In Radford, L., &al. *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics*. Montpellier, France: IREM de Montpellier.

Guillemette, D. (2017) History of mathematics in secondary school teachers' training: towards a nonviolent mathematics education. *Educational Studies in Mathematics* 96(3), 349–365.

Jahnke, H. N. (2014) History in mathematics education. A Hermeneutic Approach. In M. Fried, & T. Dreyfus (Eds.), *Mathematics & mathematics education: Searching for common ground* (pp. 75-88). Dordrecht: Springer 2014.

Jankvist, U. T. (2009) A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics* 71, 235–261.

Tempier F. (2016) New perspectives for didactical engineering. An example for the development of a resource for teaching decimal number system. *Journal of Mathematics Teacher Education* 19(2), 61-76 .