

MATHÉMATIQUES ET DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES : QUELLES RELATIONS ?

ARTIGUE* Michèle – EL YACOUBI** Nouzha – HODGSON*** Bernard

Résumé – La didactique des mathématiques a émergé comme champ scientifique dans la deuxième moitié du 20^e siècle, en revendiquant l'importance épistémologique de ses liens avec les mathématiques, mais en affirmant aussi la nécessité de s'émanciper des discours existant sur l'enseignement des mathématiques, pour comprendre les processus d'enseignement et apprentissage de cette discipline et fonder l'action didactique. Au fil de son développement, la question des rapports entre mathématiques et didactique des mathématiques et, avec elle, celle des rapports entre communautés didactique et mathématique s'est régulièrement posée, donnant lieu à des débats souvent vifs. Que retenir de cette histoire et où en sommes-nous aujourd'hui ? Dans ce texte, nous essayons de répondre à ces questions en croisant nos expériences et visions respectives.

Mots-clés : mathématiques, didactique des mathématiques, épistémologie, histoire de l'enseignement, interactions maths-didactique

Abstract – The didactics of mathematics emerged as a scientific field in the second half of the 20th century, claiming the epistemological importance of its links with mathematics, but also affirming the need to emancipate from existing discourses on mathematics teaching, in order to understand the teaching and learning processes of this discipline and to base didactic action. Along its development, the question of the relationship between mathematics and the didactics of mathematics, and that of the relationship between the didactic and mathematical communities, has been regularly raised, leading to often heated debates. What can we learn from this story and where are we today? In this text, we address these questions by combining our respective experiences and visions.

Keywords: Mathematics, didactics of mathematics, epistemology, history of mathematics education, math-didactic interaction

I. INTRODUCTION

La didactique des mathématiques a émergé comme champ scientifique dans la deuxième moitié du 20^e siècle, en revendiquant l'importance épistémologique de ses liens avec les mathématiques. Mais, elle a aussi d'emblée affirmé la nécessité de questionner les discours existant sur l'enseignement des mathématiques, dont ceux des mathématiciens, pour arriver à comprendre les processus d'enseignement et apprentissage de cette discipline et fonder l'action didactique, et elle s'est développée comme un champ scientifique à l'interface des sciences humaines et des sciences mathématiques. Au fil de ce développement, la question des rapports entre mathématiques et didactique des mathématiques et, avec elle, celle des rapports entre communautés didactique et mathématique, s'est donc régulièrement posée, donnant lieu à des débats souvent vifs. Que retenir de cette histoire et où en sommes-nous aujourd'hui ? C'est à ces questions que nous essayons de répondre dans ce texte, en croisant nos expériences et visions respectives, comme nous avons essayé de le faire dans notre conférence à trois voix, au colloque EMF 2018 centré sur la nécessaire collaboration entre disciplines et communautés.

Nos expériences sont en effet bien différentes. Nous venons de trois des continents que rassemble l'Espace mathématique francophone : Afrique, Amérique et Europe. Nous avons eu des parcours professionnels différents qui impactent la façon dont nous avons perçu et vécu les relations entre mathématiques et didactique des mathématiques. Nouzha el Yacoubi — qui a été amenée à remplacer le professeur Saliou Touré, président de l'Université de Grand-

* Université Paris Diderot – Paris 7 – France – michele.artigue@univ-paris-diderot.fr

** Faculté des Sciences de Rabat – Maroc – n.elyacoubi@yahoo.fr

*** Université Laval, Québec – Canada – Bernard.Hodgson@mat.ulaval.ca

Bassam à Abidjan en Côte d'Ivoire, initialement invité pour cette conférence à trois voix — est, comme lui, mathématicienne, plus particulièrement spécialiste d'analyse fonctionnelle. D'abord professeur de lycée puis professeur à l'École normale supérieure de Rabat chargée de la formation des enseignants du secondaire, elle a ensuite intégré la Faculté des sciences, et elle a toujours eu un contact étroit avec l'enseignement et la formation des enseignants. Bernard Hodgson est aussi un mathématicien, logicien plus précisément, mais le fait qu'il ait été recruté à l'Université Laval à Québec en 1975 sur une chaire dédiée à la formation mathématique des enseignants du primaire et ait assuré cette mission jusqu'à aujourd'hui, y englobant aussi progressivement la formation des enseignants du secondaire, lui a permis un contact avec l'enseignement et la didactique bien plus étroit que celui de la plupart des mathématiciens universitaires. Quant à Michèle Artigue, si elle a débuté sa carrière comme logicienne, tout comme Bernard Hodgson, ayant été attirée à l'IREM Paris 7 (Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques) par son premier directeur André Revuz qui avait été son professeur à l'ENS de Sèvres, elle a assez vite réorienté son activité de recherche vers la didactique des mathématiques.

Nous sommes donc différents, nous vivons dans des contextes différents, mais nous partageons cependant une vision des mathématiques comme science ouverte sur le monde et essentielle pour répondre, en collaboration avec d'autres, aux défis qu'affronte l'humanité. Nous partageons aussi la conviction de l'importance des liens entre mathématiques, enseignement des mathématiques et didactique de cette discipline, et le souci de contribuer sans cesse à les faire vivre et les renforcer. Une autre dimension aussi nous rapproche. Nous avons eu tous les trois des responsabilités internationales qui nous ont amenés à nous décentrer, vis-à-vis de ces questions, de perspectives locales, de les appréhender à une échelle beaucoup plus large. Nouzha el Yacoubi a été impliquée depuis 1991 dans les activités et la gouvernance de l'Union mathématique africaine (UMA), qu'elle préside depuis 2017. Bernard Hodgson et Michèle Artigue ont été simultanément membres du Comité exécutif de l'ICMI, la Commission internationale de l'enseignement mathématique (CIEM), de 1999 à 2009, le premier comme secrétaire général, la seconde comme vice-présidente puis présidente.

Ce sont ces expériences locales, régionales, nationales et internationales qui ont tissé les visions des relations entre mathématiques et didactique des mathématiques que nous présentons dans ce texte, combinant un regard sur l'histoire de ces relations et sur la situation actuelle. Le texte est constitué de trois sections, respectivement écrites par chacun de nous, et se termine par une conclusion élaborée en commun, comme l'a été cette introduction.

II. DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES ET MATHÉMATIQUES EN AFRIQUE : ÉMERGENCE, RELATIONS ET PERSPECTIVES

Nouzha el Yacoubi

1. Introduction

Il n'est plus à démontrer que tout développement économique est forcément dépendant d'une éducation de qualité et que ceci suppose une didactique adéquate basée sur les spécificités culturelles, épistémologiques, historiques, mais aussi ouverte sur les tendances universelles et tenant compte de l'évolution, au fil des ans, des exigences et des ressources, d'où la nécessité d'une recherche permanente en didactique. Le monde est, en effet, en perpétuel changement et il connaît actuellement une transformation historique majeure de nature multidimensionnelle : scientifique, technologique, économique, sociale, culturelle,

politique et géopolitique. Des innovations et de nouvelles recherches sont nécessaires pour faire face à de tels changements et répondre aux nombreuses exigences de ce nouveau millénaire.

Le continent africain, notamment, s'efforce de réaliser la croissance socio-économique dont il a tant besoin grâce aux innovations scientifiques et technologiques. Les innovations et les avancées mondiales dans les sciences, la technologie, l'ingénierie et les mathématiques (STEM) ont une pertinence forte et un impact potentiel sur la réalisation du développement durable et l'éradication de la pauvreté (qui touche 50 % de la population en Afrique subsaharienne). Ainsi, l'enseignement des STEM devrait-il être au cœur des stratégies des développements nationaux. En particulier, les faibles performances en mathématiques au niveau de l'école sont perçues comme un obstacle important pour atteindre les objectifs d'un développement économique et social, tant au plan individuel que national.

Il faut reconnaître qu'à cet égard, pour des raisons historiques, l'Afrique est partie de loin. Des progrès certains ont été enregistrés, mais beaucoup reste à faire afin qu'une grande majorité des pays du continent, plus particulièrement de l'Afrique subsaharienne, réussisse à combler l'écart avec les pays concurrents potentiels. Cela est en partie dû, comme l'a rapporté la Banque Mondiale, à « la faible qualité de l'éducation de base en sciences et en mathématiques au sein de l'Afrique subsaharienne ; (et) un système d'enseignement supérieur orienté vers des disciplines autres que les STEM telles que les sciences humaines et sociales » (Bethell, 2016, p. 34, traduction personnelle). Ainsi, la didactique des mathématiques a-t-elle de plus en plus un rôle important à jouer en Afrique.

2. *La didactique des mathématiques en Afrique : émergence et relations avec les mathématiques*

Les mathématiques ont une très longue histoire en Afrique. L'Égypte est généralement considérée avec la Mésopotamie comme le berceau des mathématiques. Alexandrie a servi, pendant l'Antiquité, de foyer mathématique et des mathématiciens comme Euclide, Ptolémée, Héron et Diophante y ont travaillé et enseigné. De nombreuses études ont montré la contribution, ensuite, des mathématiciens du Maghreb et plus généralement de l'Afrique au développement des mathématiques et à leur circulation internationale (Djebbar, 2015 ; Traoré & Barry, 2006). Ces mathématiciens qui ont contribué de façon remarquable au développement des mathématiques, durant des siècles, ont-ils été juste des mathématiciens, ou bien étaient-ils aussi didacticiens des mathématiques par la force des choses, avant même que ne naisse la didactique des mathématiques ?

La didactique des mathématiques comme champ de recherche n'a émergé en effet que dans la seconde moitié du 20^e siècle, d'abord dans les pays développés, et, même là, sa reconnaissance institutionnelle n'a été que très progressive. En Afrique, ce développement est plus récent. Souvent, il s'est effectué en lien avec celui de l'ethnomathématique (Gerdes, 1995), avec comme préoccupation majeure le rapprochement des mathématiques enseignées à l'école du vécu quotidien et de la culture des apprenants, ou alors en se centrant sur des questions particulièrement importantes pour ces pays comme le multilinguisme (Adler, 2001). Pour des raisons historiques de plus, l'émergence de la didactique s'est opérée différemment en Afrique anglophone et francophone, et la coupure linguistique n'a pas favorisé les interactions.

Dès les années 1970, par exemple, la France et le Québec se sont intéressés à l'Afrique francophone et y ont initié une recherche en didactique des mathématiques fortement influencée par leurs cultures didactiques propres. La coopération franco-africaine

(respectivement québéco-africaine) a consisté aussi à accueillir en France et au Québec des licenciés africains de mathématiques pour préparer des thèses en didactique¹, à organiser des échanges avec les IREM pour la France et des laboratoires universitaires, en France et au Québec, et à inciter à la création de centres semblables en Afrique, tels l'IREMPT créé à Dakar dès 1975. Cela a permis de former des didacticiens africains en mathématiques dont certains font actuellement partie de la diaspora africaine, tandis que beaucoup d'autres ont regagné leur pays d'origine. Les uns et les autres ont contribué au développement de la didactique des mathématiques à l'échelle internationale et aussi à la formation de didacticiens africains. Ces interactions et collaborations n'ont pas manqué de porter leurs fruits et de favoriser l'émergence, en Afrique francophone, d'une didactique des mathématiques qui est progressivement devenue plus autonome et a enrichi la recherche de ses propres problématiques. En témoignent les programmes de master et de doctorat qui existent maintenant dans plusieurs de ces pays, comme le montrent les quatre études de cas concernant le Bénin, le Mali, le Sénégal et la Tunisie présentées dans (Artigue, 2016) et l'analyse détaillée concernant la Tunisie proposée dans (Abdeljaouad, 2009).

Au plan international, l'ICMI, constatant la faible participation du continent africain à ses activités, s'est aussi impliquée dans ce développement, à partir des années 2000 notamment. Elle l'a fait d'abord en voyant dans la création de l'Espace mathématique francophone (EMF), à l'initiative de sa sous-commission française, la CFEM, un moyen de favoriser l'intégration internationale de l'Afrique francophone, et en donnant aux conférences EMF le statut de conférences régionales ICMI. À ce jour, trois conférences EMF ont effectivement été organisées en Afrique, à Tozeur (Tunisie) en 2003, à Dakar (Sénégal) en 2009 et à Alger (Algérie) en 2015, et la prochaine est prévue au Bénin en 2021. Ensuite, en 2005, ont été initiées les conférences AFRICME (Africa Regional Congress of ICMI on Mathematical Education), qui visent plus particulièrement l'Afrique anglophone. Cinq ont eu lieu à ce jour, en Afrique du Sud (2005), au Kenya (2007), au Botswana (2010), au Lesotho (2013) et en Tanzanie (2018). En revanche, en dépit des efforts déployés, les interactions entre communautés anglophones et francophones restent limitées du fait de la coupure linguistique, malgré les problèmes communs à affronter. Plus récemment, le programme CANP (Capacity and Networking Project) de l'ICMI a complété ce dispositif avec le soutien de l'UNESCO et de l'Union mathématique internationale, en visant plus précisément la formation de formateurs et les synergies entre les différents acteurs de la formation, notamment mathématiciens universitaires et didacticiens, ainsi que la constitution ou le renforcement de réseaux régionaux. La première édition, EDiMath, a eu lieu au Mali en 2011 et la quatrième en Tanzanie en 2014, et elles ont conduit à des rapports détaillés réalisés collectivement sur la formation initiale et continue des enseignants dans les pays participants (voir par exemple (Halai & Tennant, 2016) pour CANP4)².

À cela s'ajoutent les différents rapports publiés sur l'enseignement des mathématiques en Afrique dans des actes de congrès, colloques ou ateliers spécialisés organisés en Afrique ou en dehors de l'Afrique.

Dans ce panorama, force est de constater que la Commission de l'Union mathématique africaine (UMA) sur l'enseignement des mathématiques en Afrique (AMU-CMEA), qui se devait d'être concernée au premier chef par cette problématique, a été très peu active, si l'on excepte le fait qu'elle s'est inspirée de la structure EMF pour créer l'Espace Mathématique

¹ Le recensement effectué pour le congrès ICME-13 des thèses en didactique d'étudiants africains dirigées ou co-dirigées par un chercheur français mentionne 17 thèses soutenues avant 1990 et 39 entre 1990 et 2015, 12 pays africains étant concernés.

² <https://www.mathunion.org/icmi/activities/developing-countries-support/capacity-networking-project-canp>

Pan Africain (EMPA), ce qui fut une excellente initiative. Deux conférences lui ont été associées en Tunisie, en 2006 et 2008, mais malheureusement aucune autre activité n'a été enregistrée depuis. Le nouveau Comité exécutif de l'UMA élu en juillet 2017, conscient de l'importance de cette commission, a renouvelé ses membres suivant des critères précis, et demandé à la commission un agenda d'activités. C'est ainsi que le 3^e EMPA est prévu du 26 au 30 août 2019 en Angola, sur le thème : « Professional development of mathematics teachers », et le 4^e EMPA du 24 au 26 juin 2020 au Rwanda, sur le thème « International Conference on innovation in teaching and learning of mathematics and sciences for sustainable development goals ».

Par ailleurs, en 2009 lors du Congrès Pan Africain des Mathématiciens à Yamoussoukro, la création d'un Réseau Africain de Didactique des Mathématiques (RADMA) avait été décidée. Cette initiative louable n'a malheureusement pas réussi à déboucher sur une structure opérationnelle. En revanche, la création récente de l'Association des Didacticiens des Mathématiques Africains (ADiMA), lors d'un colloque tenu à Yaoundé en août 2016 sur le thème « La didactique des mathématiques : entre spécificité et ouverture vers d'autres sciences — enjeux et perspectives », permet d'espérer la constitution d'une structure propre soutenant le développement de la didactique des mathématiques en Afrique, une didactique prenant en compte les spécificités des contextes socio-culturels africains tout en étant ouverte sur l'universel. Le choix du thème du second colloque d'ADiMA tenu en août 2018 au Bénin, « Place de la didactique des mathématiques dans la formation des enseignants en Afrique : états des lieux, enjeux et perspectives », fut réellement pertinent. Je regrette sincèrement que l'UMA n'y ait pas été associée, et je formule le souhait que l'UMA soit partenaire de l'organisation du 3^e colloque d'ADiMA.

En ce qui concerne l'Afrique anglophone, il existe d'autres structures telles que la Southern African Association for Research in Mathematics, Science and Technology Education (SAARMSTE), qui organisera en 2020 son 28^e colloque annuel ; l'Association pour le Développement de l'Éducation en Afrique (ADEA) créée en 1988, qui a lancé en 2004, en partenariat avec l'Agence japonaise de coopération internationale (JICA) et le Ministère de l'Éducation, de la Science et de la Technologie du Kenya, un groupe de travail sur l'enseignement des mathématiques et les sciences : « Working Group on Mathematics and Science Education » (WGMSE), pour intervenir de manière ciblée dans le but de relever les défis de l'enseignement des mathématiques et des sciences en Afrique. Un Centre pour l'enseignement des mathématiques, de la science et la technologie en Afrique (CEMASTE) a ainsi été créé à Nairobi pour abriter les travaux du groupe WGMSE. Ce groupe a fonctionné en collaboration avec le Réseau pour le renforcement de l'enseignement des mathématiques et des sciences en Afrique (SMASE–Africa), qui regroupe 35 pays africains. SMASE–Africa constitue une plate-forme où les membres peuvent échanger et dialoguer sur les programmes, les politiques et les pratiques en matière d'enseignement des sciences et des mathématiques. Dix ans plus tard, lors de la 40^e réunion du comité directeur de l'ADEA, tenue à Tunis en mai 2014, le groupe WGMSE a été transformé en ICQN-MSE (Inter-Country Quality Node on Mathematics and Sciences Education)³.

À l'instar de l'ISEFC (Institut Supérieur de l'Éducation et de la Formation Continue) de Tunisie et de l'IMSP (Institut pour les Mathématiques et Sciences Physiques) du Bénin, qui abritent un programme de formation et de recherche en didactique des mathématiques de haut niveau, un centre d'excellence a été aussi créé à l'Université du Rwanda: « African Centre of Excellence for Innovative Teaching and Learning Mathematics and Science (ACEITLMS) »⁴.

³ <http://www.adeanet.org/en/working-groups/mathematics-and-science-education>

⁴ <https://ce.ur.ac.rw/?q=node/249>

Les principales activités du centre consistent à apporter qualité et innovation dans les domaines de l'enseignement et de l'apprentissage, de la recherche et de la formation. En décembre 2017, le centre a inscrit la première cohorte formée d'une quinzaine d'étudiants du Rwanda et de la sous-région (neuf hommes et six femmes) au doctorat en didactique des mathématiques et des sciences.

Comme on le voit à cette description succincte, la didactique des mathématiques en Afrique est aujourd'hui en plein développement. Même si beaucoup reste à faire pour renforcer les interactions entre mathématiciens et didacticiens des mathématiques et nourrir des collaborations fructueuses, les relations entre communautés ne sont pas conflictuelles, et certaines évolutions semblent prometteuses. Ceci me conduit à la troisième partie de cette contribution, dédiée aux perspectives.

3. *Perspectives*

Je voudrais commencer par citer Jill Adler, sud-africaine et actuelle présidente de l'ICMI, à propos des spécificités de la didactique des mathématiques : « Tenir notre passé, vivre notre présent, imaginer et créer un avenir meilleur, sont au cœur de ce que j'appellerais l'*ethos*, la philosophie, d'une grande partie du travail de recherche et développement dans l'éducation sud-africaine, et donc aussi dans la formation des enseignants » (Adler, 2005, p. 164, traduction personnelle). En tant que mathématicienne marocaine, soucieuse et engagée dans les questions d'éducation et ayant aujourd'hui la responsabilité d'être présidente de l'UMA, j'adhère fortement à cette vision et je considère important et indispensable que les didacticiens, africains ou autres, s'intéressant à l'Afrique prennent en compte les contraintes et paramètres actuels de ce continent dans leurs recherches, et aident à rendre possible un futur meilleur.

L'Union mathématique africaine, quant à elle, en tant qu'union mathématique continentale, plus de quarante ans après sa création, a jugé pertinent de réfléchir sur ses objectifs, d'essayer de les adapter aux exigences de ce nouveau millénaire et de définir une nouvelle vision de sa mission. C'est ainsi que l'UMA s'engage dès ce nouveau mandat à œuvrer pour le développement de mathématiques qui, d'une part pourraient avoir un impact sur certains secteurs critiques, tels l'agriculture, l'énergie, l'environnement, la santé, l'exploitation minière, la sécurité et l'eau, et d'autre part viseraient une employabilité de plus en plus importante dans le monde de l'industrie et de l'entreprise. Un accompagnement judicieux des didacticiens des mathématiques, africains comme non africains, ayant contribué à l'émergence de la didactique des mathématiques en Afrique serait vraiment précieux.

4. *Conclusion*

Les didacticiens, les enseignants et chercheurs en mathématiques sont fortement interpellés pour travailler ensemble pour faire des mathématiques un atout en vue de relever les défis de la science, technologie et innovation en Afrique. Il est de notre devoir à tous de repenser les programmes d'enseignement des mathématiques en usage actuellement en Afrique, d'en élaborer de mieux adaptés, répondant aux exigences de ce nouveau millénaire dominé par l'expansion rapide, voire vertigineuse, des nouvelles technologies. Notre souci doit être qu'un apprenant est appelé à s'approprier la logique mathématique, à comprendre le raisonnement mathématique, à formuler, utiliser et interpréter les mathématiques dans diverses circonstances, à utiliser les outils mathématiques pour décrire, expliquer et prévoir des phénomènes.

À cette fin, une collaboration plus étroite entre mathématiciens et didacticiens des mathématiques est à encourager et à soutenir. Personnellement, j'y adhère totalement. Déjà, en tant que présidente du Comité local d'organisation du Congrès Pan Africain des Mathématiciens (COPAM 2017) tenu à Rabat en juillet 2017, j'ai tenu à inviter parmi les conférenciers pléniers deux didacticiens des mathématiques : Jill Adler, déjà mentionnée, et Hee-Chan Lew de Corée du Sud, didacticien des mathématiques et actuel président de la KNUE (Korean National University of Education, South Korea). Pour la première fois également, *Afrika Matematika* (le journal officiel de l'UMA) publiera des articles de didactique des mathématiques dans son numéro spécial réservé aux Actes du COPAM 2017. En ma capacité de présidente de l'UMA, dans les années qui viennent, je ferai tout pour initier et développer une coopération fructueuse entre l'UMA et toute instance africaine ou internationale œuvrant pour le développement d'une relation collégiale entre mathématiciens et didacticiens des mathématiques, en soutenant notamment les efforts importants déjà investis pour le développement de la didactique des mathématiques en Afrique. Personnellement, comme la plupart des mathématiciens africains, malgré mon intérêt pour l'enseignement des mathématiques, je n'avais qu'une vision très limitée de la recherche didactique menée en Afrique quand j'ai accepté de remplacer le professeur Saliou Touré pour cette conférence à trois voix, quelques jours avant le début du colloque EMF 2018. C'est en fait grâce aux échanges que j'ai eus lors du colloque avec les participants africains et ensuite avec mes co-auteurs, et notamment avec Michèle Artigue, lors de l'élaboration de ce texte pour les Actes du colloque, que j'ai réellement pu apprécier le dynamisme de cette recherche. Ces échanges ont renforcé ma volonté de contribuer à développer et renforcer les collaborations entre mathématiciens et didacticiens des mathématiques.

III. MATHÉMATIQUES ET DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES : QUELLES RELATIONS ? ÉPISODES TIRÉS DE LA VIE DE LA CIEM / ICMI ET D'AILLEURS

Bernard R. Hodgson

Tel que mentionné dans l'introduction de ce texte, j'aborde ici le thème des relations entre mathématiques et didactique des mathématiques — et entre les communautés de mathématiciens et de didacticiens des mathématiques — selon la double perspective d'un mathématicien impliqué depuis plus de quatre décennies, au sein d'un département de mathématiques, dans la formation des enseignants des ordres primaire et secondaire, et aussi de secrétaire général de la CIEM / ICMI pendant onze ans, avec un intérêt personnel pour son histoire. Je souhaite offrir un survol de quelques aspects choisis de ces relations, principalement en m'inspirant de contributions de mathématiciens. Certains des épisodes que je vais évoquer sont en lien direct avec les activités de l'ICMI. Mais je compte aussi m'inspirer de mes expériences personnelles à l'Université Laval, non pas que celles-ci revêtent un caractère exemplaire, mais simplement en tant que cas d'« histoires vécues ». On trouvera dans (Hodgson, 2015) des commentaires additionnels sur l'interconnexion entre mathématiques et didactique, mais selon une perspective davantage ancrée dans l'évolution de l'ICMI au fil des ans.

Il peut être opportun de souligner d'entrée de jeu que le poste que j'occupe à l'Université Laval a un caractère plutôt inusité — à tout le moins dans le cadre québécois ou canadien. Il résulte d'un alignement des astres au Québec, au tournant des années 1970, alors que mon département (j'insiste : de mathématiques) avait été invité par la direction de l'Université à offrir aux futurs enseignants du primaire deux cours de mathématiques. La toile de fond derrière cette singulière invitation est le célèbre rapport de la « Commission Parent » qui, au milieu des années 1960, proposait une réforme globale du système d'éducation québécois, du

primaire à l'université.⁵ L'une des recommandations fortes du rapport Parent visait l'enrichissement de la qualification des enseignants du primaire et du secondaire, par le truchement de l'abolition du réseau alors en place d'écoles normales et le transfert à l'université de la formation des enseignants. D'où l'invitation faite à mon département et la création du poste — que j'occupe depuis 1975 — de mathématicien œuvrant en formation mathématique des enseignants du primaire.⁶ Le lecteur désireux d'en savoir davantage sur certains aspects du rapport Parent pourra consulter (Hodgson, 2017).

Une conséquence du contexte dans lequel je me suis retrouvé dès le début de ma carrière de professeur d'université fut une nécessaire collaboration avec mes collègues lavallois didacticiens des mathématiques œuvrant au sein de la Faculté des sciences de l'éducation, principalement en lien avec la formation initiale des enseignants du primaire et du secondaire, mais aussi à propos de perfectionnement des enseignants — j'en dirai quelques mots plus bas. Cette collaboration a bien sûr pu varier au fil des ans, mais elle a toujours été (de mon point de vue à tout le moins) pertinente et productive. Une cristallisation récente en est la possibilité maintenant offerte aux étudiants inscrits à une maîtrise en mathématiques à l'Université Laval d'y inclure une concentration en enseignement des mathématiques — principalement aux ordres postsecondaires (cégep, université) mais aussi possiblement au secondaire. Des collègues didacticiens participent à certaines des activités offertes dans le cadre de cette maîtrise.

1. *Premiers aspects de la relation mathématiques / didactique : à l'aube de la didactique des mathématiques*

En vue d'évoquer quelques aspects du spectre des relations possibles entre mathématiques et didactique des mathématiques, il est utile de distinguer deux trames, si je puis dire, où on voit d'une part des mathématiciens s'intéresser sincèrement (et avec parfois plus ou moins de naïveté) à certains aspects de l'enseignement des mathématiques — j'y reviens plus bas —, et d'autre part des mathématiciens évoluant dans un cadre où la didactique des mathématiques est devenue un domaine du savoir en bonne et due forme. Cette émergence, au cours des années 1960 et 1970, de la didactique des mathématiques comme une discipline à part entière, il est sans doute bon de le rappeler, ne s'est toutefois pas toujours réalisée sans heurts.

J'en prends pour preuve les comptes rendus d'un séminaire organisé à Aarhus en 1960 par l'ICMI, à l'instigation de son président Marshall Stone — voir (Bundgaard, 1960). L'objectif de cette rencontre était de préparer le terrain pour une activité en lien avec l'enseignement devant se tenir lors du Congrès international des mathématiciens de 1962 à Stockholm. S'appuyant sur des thèmes proposés par Stone, le Comité d'organisation avait décidé de concentrer les présentations et discussions du séminaire sur l'« enseignement moderne de la géométrie » à l'école secondaire, avec un accent sur les approches rendues possibles par des développements récents, notamment l'algébrisation des mathématiques (*ibid.*, p. ii). Les conférenciers comprenaient plusieurs « grosses pointures », tels Heinrich Behnke (président sortant et vice-président de l'ICMI), Gustave Choquet, Jean Dieudonné ou Hans Freudenthal (président de l'ICMI de 1967 à 1970).

⁵ C'est du rapport Parent qu'est issu entre autres le réseau des *collèges d'enseignement général et professionnel* (cégeps), un ordre d'enseignement postsecondaire spécifique au Québec (à tout le moins dans le contexte canadien) et reconnu pour sa pertinence quant au développement des jeunes, tant au plan personnel qu'intellectuel.

⁶ À noter qu'un nouveau poste similaire a été créé quelque vingt ans plus tard dans mon département, cette fois à l'occasion d'une réforme de la formation des enseignants du secondaire. C'est mon collègue Frédéric Gourdeau qui en est le titulaire.

Une tension claire entre mathématiciens tenants d'une ouverture vers des considérations de nature didactique (même si, à proprement parler, ce terme est alors dans une certaine mesure un anachronisme) et ceux rejetant au contraire une telle possibilité peut être perçue dans la discussion suivant la présentation de Choquet sur le thème « Recherche d'une axiomatique commode pour le premier enseignement de la géométrie élémentaire ». Ainsi, au commentaire de Freudenthal que « There are certain psychological and pedagogical principles which mustn't be violated. », Dieudonné rétorque: « The important thing is to teach the students some good mathematics. The psychological considerations are of secondary importance. (La psychologie, je m'en fiche.) »⁷ (*ibid.*, p. 104) Et après une autre présentation, alors que Freudenthal affirme : « We could teach everything, drive the children in any direction. But there exist other things at school. We must see the whole together. », Dieudonné réplique cette fois : « No. We are here to discuss mathematics and nothing else. » (*ibid.*, p. 127)

Le séminaire d'Aarhus survenait à la suite d'une décennie au cours de laquelle un nouvel acteur était entré sur la scène de l'enseignement des mathématiques, la *Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques* (CIEAEM). Créée au début des années 1950 à l'initiative de Caleb Gattegno, elle comprenait entre autres parmi ses premiers membres — outre Choquet, Dieudonné ou Freudenthal —, Georges Papy, Jean Piaget et André Lichnerowicz (président de l'ICMI de 1963 à 1966, entre Stone et Freudenthal, et sur lequel Michèle Artigue reviendra à la section IV). Un objectif clair de la CIEAEM, comme le souligne (Hodgson et al., 2013, pp. 910-911), était de s'éloigner de la tradition de la première mouture de l'ICMI, depuis sa création en 1908 jusqu'à la seconde guerre mondiale, fortement axée sur des comparaisons curriculaires internationales, et de plutôt mettre l'accent sur l'élève (ou l'étudiant, selon le cas) et sur l'enseignement même. Signe des temps et de l'influence bourbakiste d'alors, la CIEAEM manifestait aussi une propension à l'abstraction et un intérêt marqué pour les structures, aspects au cœur du fameux mouvement des « maths modernes » qui eut une si forte influence sur la pédagogie des années 1960 dans de nombreux pays.

Si j'ai retenu ici deux événements particuliers au plan international — le séminaire ICMI d'Aarhus, en lien avec le congrès ICM de Stockholm, et l'arrivée de la CIEAEM —, c'est comme symptomatiques du bouillonnement qui a accompagné l'émergence et l'éventuelle acceptation de la didactique des mathématiques en tant que discipline scientifique. Il va sans dire que les influences et interrelations qui ont alors vu le jour ont été multiples, et dans des directions diverses. Ainsi la CIEAEM, par son désir clairement exprimé de renouveler les objets de réflexion touchant l'enseignement des mathématiques, a eu une influence marquée sur la détermination du champ de la didactique, et par ricochet sur l'ICMI elle-même. Mais l'ICMI à son tour, comme lieu privilégié de réflexion et d'échange, et notamment grâce à sa position unique par rapport à la communauté des mathématiciens par le truchement de l'organisme dont elle relève, l'Union mathématique internationale (UMI / IMU),⁸ a influencé et stimulé de manière profonde non seulement la genèse et l'évolution de la didactique des mathématiques, mais aussi les liens de cette nouvelle discipline avec les mathématiques.

Un des moments forts où l'on peut voir l'ICMI au cœur de la mouvance des relations entre mathématiques et didactique est lors de la présidence de Hans Freudenthal, de 1967 à 1970. Deux héritages majeurs de cette période au plan de la didactique des mathématiques,

⁷ Cité textuellement (partiellement en français dans le texte original).

⁸ À la suite de la renaissance de l'IMU en 1951, l'ICMI a été reconstituée à titre de commission de l'IMU « charged with the conduct of the activities of IMU bearing on mathematical or scientific education » — tiré du premier article définissant le mandat de l'ICMI — voir *Terms of reference of ICMI* (<https://www.mathunion.org/icmi/terms-reference-icmi>).

essentiellement dus au dynamisme et à la vision de Freudenthal lui-même, sont coup sur coup le lancement de la revue *Educational Studies in Mathematics* en 1968 et la tenue du premier Congrès international sur l'enseignement des mathématiques (ICME-1) à Lyon en 1969. Il est connu que sans que cette création se déroule formellement sous ses auspices, l'ICMI n'en a pas moins favorisé l'arrivée d'*ESM* (Lehto, 1998, p. 259), la revue *L'Enseignement mathématique* — organe officiel de l'ICMI depuis ses origines en 1908 — n'étant pas perçue (entre autres par Freudenthal) comme répondant aux besoins du champ de la didactique alors en émergence. Quant à la mise en place des congrès ICMEs — amorcée, il faut le souligner, à l'insu de l'IMU (*ibid.*) —, elle manifestait l'insatisfaction de Freudenthal quant à la façon dont étaient traitées, lors des congrès des mathématiciens de l'IMU, les questions touchant l'enseignement des mathématiques et son désir de tenir des rencontres entièrement consacrées à ce sujet.

Lors du congrès ICME-1 furent adoptées des résolutions à propos de l'« enseignement mathématique » — en anglais « mathematical education » (EBESM, 1969, pp. 284-285). Dans le préambule de ces résolutions, on lit par exemple l'affirmation de principe suivante, qui illustre combien la question des relations entre mathématiques et didactique des mathématiques, y compris du point de vue des structures universitaires, était alors prégnante :

La pédagogie de la mathématique devient de plus en plus une science autonome avec ses problèmes propres de contenu mathématique et d'expérimentation. Cette science nouvelle doit trouver place dans les Départements de Mathématiques des Universités ou des Instituts de Recherche ; ceux qui se qualifient dans cette discipline doivent pouvoir accéder à tous les grades universitaires. (EBESM, 1969, p. 285)

Outre le fait que ce texte cristallise l'état des lieux à un moment précis quant à la perception d'un domaine en émergence, il est intéressant, côté vocabulaire, de le comparer avec sa version anglaise :

The theory of mathematical education is becoming a science in its own right, with its own problems both of mathematical and pedagogical content. The new science should be given a place in the mathematical departments of Universities or Research Institutes, with appropriate academic qualifications available. (EBESM, 1969, p. 284)

On y voit entre autres que la science qui sera éventuellement dénommée en français *didactique des mathématiques* était alors présentée comme la « pédagogie des mathématiques », alors qu'en anglais on parlait de « theory of mathematical education ». Cette dernière expression, on le sait, est devenue en pratique dans les cercles anglophones le fameux *mathematics education*, avec sans doute quelque ambiguïté quant à sa portée exacte. Je renvoie le lecteur intéressé à (Hodgson, 2015, pp. 44-47) pour des commentaires sur de tels aspects linguistiques, de même que sur les appartenances institutionnelles des acteurs impliqués de nos jours dans le binôme mathématiques / didactique des mathématiques.

2. *Mathématiciens et enseignement : quelques exemples tirés du passé*

Après avoir évoqué certains aspects du thème de cette conférence à trois voix à la lumière de la montée de la didactique des mathématiques, il y a environ un demi-siècle, je voudrais revenir sur le thème de l'enseignement des mathématiques vu selon la perspective d'un mathématicien. Je devrais peut-être ajouter : un mathématicien actif dans son domaine — c'est-à-dire un « working mathematician », pour reprendre le titre d'un livre mémorable de l'époque de mes études (Mac Lane, 1971).

Il pourrait être amusant — à défaut d'être forcément édifiant — de répertorier à cet égard quelques-unes de « perles » que l'on retrouve de la littérature, où des mathématiciens de premier calibre expriment leurs états d'âme à propos de l'enseignement. J'ai à l'esprit ici entre autres le célèbre aphorisme de Godfrey Harold Hardy (1877-1947) : « I hate

‘teaching’ » (Hardy, 1967, p. 149) — quoique les guillemets autour du mot *teaching* suggèrent qu’il faille sans doute le prendre avec un grain de sel, Hardy parlant tout juste à la ligne précédente des « duller routines of universities » et s’exclamant trois lignes plus loin : « I love lecturing » et évoquant des « extremely able classes ».

Dans le même registre, on rappelle volontiers, s’agissant du grand Carl Friedrich Gauss (1777-1855), son affirmation « J’ai vraiment de l’aversion pour l’enseignement »⁹ (traduction tirée de Tazzioli (2008), p. 94), formulée dans une lettre datée du 26 octobre 1802, alors que Gauss n’a que 25 ans — contrairement à Hardy qui a rédigé son essai quelques années avant sa mort. Dunnington s’empresse d’insister sur le fait que « this statement needs some qualification and clarification » (Dunnington, 2004, p. 414), consacrant plus de deux pages à nuancer ces propos, autres lettres de Gauss à l’appui. Le biographe de Gauss présente même un appendice de six pages où sont énumérés les cours donnés par Gauss sur une période de près de cinquante ans. Tazzioli, de son côté, souligne que Gauss, plus tard dans sa carrière, consacrera « beaucoup plus d’énergie et d’attention à l’enseignement » qu’au début (Tazzioli, 2008, p. 94), motivé sans doute par d’excellents élèves qu’il a alors eus, tels Dedekind ou Riemann.

On pourrait aussi évoquer, dans un registre autre, Siméon-Denis Poisson (1781-1840), dont le biographe se plaît à affirmer qu’il avait l’habitude de dire : « La vie n’est bonne qu’à deux choses : à faire des mathématiques et à les professer » (Arago, 1854, p. 662).

Il est difficile, s’agissant de mathématiciens face à l’enseignement, de ne pas penser à Leonhard Euler (1707-1783), ne serait-ce que pour son rôle quelque peu avant-gardiste de tuteur à distance dans ses célèbrissimes *Lettres à une princesse d’Allemagne* (1768). Or c’est davantage en raison de son soin à rédiger des textes mathématiques magnifiquement structurés au plan pédagogique que je retiens ici le mathématicien suisse. On peut mentionner à cet égard son *Vollständige Anleitung zur Algebra* (1770), où on voit par exemple Euler prendre un soin méticuleux à introduire patiemment les notions de *rapport arithmétique* et *rapport géométrique*, puis de *progression (arithmétique ou géométrique)*, dont il fait ensuite la *sommation*, pour enfin en venir à appliquer ces idées par exemple à l’étude des *nombres figurés*. De fort belles pages ! De même pour son *Introductio in analysin infinitorum* (1748), où Euler propose une formulation « moderne » de nombreux concepts de base au cœur de l’enseignement de l’analyse — mais ce, tout en utilisant sans vergogne des quantités infiniment petites et infiniment grandes...

C’est davantage sur l’*Einleitung zur Rechenkunst* (1738) d’Euler — traduite en 1792 sous le titre *L’arithmétique raisonnée et démontrée* — que je souhaite m’arrêter. Dans cet ouvrage de quelque 300 pages, aujourd’hui moins connu que ses traités d’algèbre ou d’analyse, Euler se penche avec beaucoup de minutie sur l’arithmétique des entiers et des fractions, tout en prenant grand soin d’illustrer ses propos de nombreux exemples tirés de divers métiers, les règles arithmétiques élémentaires étant alors mises en action tour à tour dans le domaine de l’orfèvre, de l’apothicaire, du marchand de vin, etc. Dans la préface de cet ouvrage, Euler écrit :

L’apprentissage de l’art du calcul sans quelques principes de base n’est suffisant ni pour résoudre tous les cas pouvant survenir, ni pour aiguïser l’esprit, tel que devrait être particulièrement l’intention. [...] Ainsi, lorsque non seulement on connaît les règles de l’arithmétique de base, mais que de plus on comprend clairement leur raison et leur origine, alors on sera dans une certaine mesure en position d’inventer par soi-même de nouvelles règles, et de les utiliser afin de résoudre de tels problèmes, pour lesquels les règles

⁹ Texte original: « Gegen das Dociren habe ich einmal eine wahre Abneigung. » (Schilling, (1900), p. 105). Le mot « einmal » est ici à prendre dans le sens de l’expression « nun einmal », venant en quelque sorte renforcer l’affirmation.

ordinaires seraient insuffisantes. Il ne faut pas du tout craindre que, ce faisant, l'apprentissage de l'arithmétique devienne plus difficile et requière plus de temps que lorsque les règles de base sont présentées sans explication. Car tout individu connaît et garde beaucoup plus facilement en mémoire, ce dont il comprend clairement la raison et l'origine. (Euler, 1738, pp. 3-4)¹⁰

Dans une large mesure, ces propos d'Euler rejoignent certains des principes sur lesquels s'appuie notre cours d'arithmétique pour les futurs enseignants du primaire dont il sera question plus bas, le souci de 'comprendre la raison et l'origine des règles de l'arithmétique' étant au cœur de la démarche mathématique qui y est proposée.

Henri Lebesgue (1875-1941) représente un autre cas de figure de mathématicien s'exprimant sur « des questions d'enseignement mathématique » (Lebesgue, 1975, p. 1). J'ai été mis en contact avec le texte *Sur la mesure des grandeurs* de Lebesgue par le truchement de l'article d'Anna Sierpinska (2012), écrit en réaction au texte d'André Boileau (2012) portant sur la formation mathématique des futurs enseignants du secondaire. L'auteure y explique comment une allusion de Boileau à l'« approche épistémologique de la construction des nombres réels » proposée par Lebesgue (Boileau, 2012, p. 60) l'a amenée dans une « excursion intellectuelle »¹¹ au cours de laquelle elle a découvert qu'en plus d'« un Lebesgue [...] concepteur de l'intégrale et de [la] mesure qui portent son nom », il y a aussi « un Lebesgue-didacticien » (Sierpinska, 2012, p. 92).

Pour illustrer l'apport de ce dernier — et afin de préparer le terrain en vue de considérations qui viendront plus bas —, on peut s'arrêter au tout début du texte de Lebesgue, où il affirme : « Je considère l'Arithmétique comme une science expérimentale au même titre que les autres » (Lebesgue, 1975, p. 5). C'est l'idée de mesure qui joue pour lui le rôle clef : s'agissant du nombre naturel comme outil afin de mesurer deux collections, Lebesgue fait ressortir le comptage (ou dénombrement) comme une opération primitive permettant d'associer à une collection un « mot » pris dans « la phrase (ou suite) des nombres » (*ibid.*, p. 3). Et il ajoute : « *Ce nombre est considéré comme le résultat de l'opération expérimentale de dénombrement parce qu'il en est le compte-rendu complet* »¹² (*ibid.*). Faisant ainsi fi d'une « mystique » et d'une « métaphysique » qui ont contribué à faire du nombre « un être bien mystérieux » (*ibid.*, p. 4), Lebesgue soutient, à propos de « divers faits que l'on énonce ordinairement comme théorèmes » (par exemple, la commutativité de la multiplication), que « les prétendues démonstrations » qu'on en donne « sont en réalité des vérifications expérimentales » s'appuyant sur une « constatation générale : le nombre attaché à une collection ne dépend pas de l'ordre dans lequel on range, en les comptant, les objets de la collection » (*ibid.*, p. 3).

Lebesgue explique en ces mots comment il a été amené à de telles réflexions :

Depuis 1910, je m'occupe, à l'une ou l'autre des deux Écoles normales supérieures, masculine et féminine, de la préparation des futurs professeurs de l'Enseignement secondaire. (Lebesgue, 1975, p. 1)

Il se permet même une petite boutade lorsque, parlant de ses responsabilités à l'ENS, il écrit : « on ne s'étonnera que l'idée me soit venue d'écrire des articles de nature pédagogique ; si j'ose employer ce qualificatif qui suffit ordinairement pour faire fuir les mathématiciens » (*ibid.*, p. 2). D'entrée de jeu, Lebesgue souligne, à propos de son document,

¹⁰ Traduction personnelle à partir du texte allemand.

¹¹ Il convient de souligner à cet égard le témoignage fort pertinent de Sierpinska dans sa conclusion. Elle y indique que bien qu'ayant connu l'existence du texte de Lebesgue plusieurs années auparavant, elle n'y avait alors pas vraiment prêté attention, faute d'y avoir accès. Mais (Boileau, 2012) fournissait un lien Internet pour téléchargement, ce qui lui a facilement permis de plonger dans le texte même de Lebesgue. Elle en conclut que « l'accessibilité des références sur Internet change la façon dont nous pouvons maintenant lire les articles ; elle élargit grandement leurs horizons de sens et de signification » (Sierpinska, 2012, p. 98).

¹² En italiques dans le texte.

« qu'il y s'agit moins de faits que d'opinions, d'où la nécessité d'éviter des malentendus et d'argumenter en faveur de ces opinions ». Il en résulte, selon ses dires sans doute volontairement moqueurs, une série d'articles qui « sont fort longs pour un mince contenu scientifique » (*ibid.*, p. 1). À cet égard, j'ajouterais pour ma part que le fait d'exprimer des opinions ou des perceptions est souvent présent dans la contribution de mathématiciens autour de l'enseignement des mathématiques, à défaut de situer cette contribution dans le cadre d'une « école de pensée » bien établie. Bien sûr, dans le cas d'un Lebesgue, de telles opinions sont le fruit d'une réflexion profonde et articulée. Il ne faudrait surtout pas les balayer du revers de la main sur la simple base qu'ils ne répondent pas aux normes ou critères actuels de recherche pédagogique ou didactique en bonne et due forme.

Il serait certes possible d'évoquer ici nombre d'autres figures de mathématiciens qui, au-delà d'un intérêt réel pour le volet enseignement de leurs responsabilités professionnelles, se sont profondément investis dans des réflexions substantielles à propos de l'apprentissage et de l'enseignement des mathématiques, de même que de la formation des enseignants. Le cas de Felix Klein (1849-1925) et de ses célèbres leçons de « mathématiques élémentaires d'un point de vue supérieur »¹³ (Klein, 2016) est certes parmi les plus connus. Je ne fais que mentionner au passage ici le premier président de l'ICMI (de 1908 à 1920), renvoyant le lecteur intéressé au livre (Weigand et al., 2019) résultant d'une activité thématique spéciale sur l'héritage de Klein tenue, en 2016, lors du congrès ICME-13 — et notamment à la partie IV du livre, portant précisément sur ces leçons de Klein destinées aux enseignants du secondaire.

Un autre grand président de l'ICMI auquel je tiens à rendre hommage ici est Jean-Pierre Kahane (1926-2017), qui occupa ce poste de 1983 à 1990. J'ai personnellement une dette importante envers Jean-Pierre Kahane : en effet, au milieu des années 1980, lors de mes premiers véritables contacts avec l'ICMI en tant que jeune mathématicien intéressé par les questions d'enseignement (sans que je n'ose parler de « didactique » pour autant), il m'a accueilli avec chaleur, générosité et rigueur. Bref, il a su me faire sentir « chez moi » au sein de l'ICMI. C'est sous sa présidence qu'a notamment été lancée la série des Études, encore à ce jour l'une des activités les plus fructueuses de l'ICMI, portant sur « des questions d'intérêt mondial, sur lesquelles une approche internationale pouvait apporter d'utiles mises au point » (Kahane, 1987, p. 1682). Kahane se plaisait à présenter le programme des Études en ces termes :

Le but, dans chaque cas, n'est pas de fournir des solutions garanties—C.I.E.M. ; c'est de faire l'état de la question, en vue de permettre la poursuite de la réflexion et, lorsque c'est possible, des initiatives au plan régional, national ou institutionnel. (Kahane, 1987, p. 1682)

J'ai quant à moi eu l'immense privilège de participer à trois des cinq premières Études de l'ICMI, toutes réalisées durant la présidence de Kahane (Hodgson, 1991) — de fait aux trois premières bâties sur le modèle de participation via la soumission d'une contribution —, ce qui fut assurément un point tournant dans mon cheminement professionnel.

Mathématicien de tout premier plan, Jean-Pierre Kahane s'est investi à fond dans ses responsabilités de président, et ce à un moment où l'ICMI¹⁴ devait se relever d'une crise de leadership importante provoquée par une présidence précédente un peu chancelante et la quasi-démission du secrétaire général d'alors — voir à ce propos (Hodgson & Niss, 2018, pp. 234-235). Avec l'appui notamment du nouveau secrétaire général Geoffrey Howson et du vice-président Bent Christiansen, Kahane a su revitaliser l'ICMI et la remettre sur rail. Son

¹³ Pour des commentaires à propos de l'emploi du mot « supérieur » plutôt que « avancé », tel qu'utilisé par exemple dans (Klein, 1932) — première traduction anglaise de l'ouvrage de Klein —, voir (Kilpatrick, 2008).

¹⁴ Pour respecter les vues de Jean-Pierre Kahane à propos de l'emploi du français dans les sciences, je devrais sans doute parler ici davantage de la « CIEM » que de l'« ICMI ».

apport personnel, tant par la crédibilité dont il jouissait auprès des mathématiciens (et de l'IMU) que par sa grande capacité à interagir avec les didacticiens — ce qui n'allait pas forcément de soi pour un mathématicien ayant eu relativement peu de contacts avec ce domaine, et en particulier avec l'ICMI (Kahane, 1990, p. 3) —, a directement favorisé le renforcement des liens entre mathématiciens et didacticiens des mathématiques, entre mathématiques et didactique.

J'en retiens comme illustration l'évolution du thème de la toute première Étude de l'ICMI (Churchhouse et al., 1986) : *L'influence des ordinateurs et de l'informatique sur les mathématiques et leur enseignement*. On est loin du tout premier jet concernant cette Étude, alors que le thème était décrit simplement comme suit : « *Mathematics and computation : How should mathematics curricula be reoriented in order to meet the new opportunities presented by calculators and computers?* » (Howson, 1982, p. 7). Nul doute que le chemin parcouru jusqu'au document de discussion qui a servi de support pour appel à des contributions à cette Étude (CIEM, 1984) porte incontestablement la marque de Kahane. Il y est notamment question de trois grands thèmes :

l'influence des ordinateurs et de l'informatique sur les mathématiques en tant que science (leur développement, leurs concepts, leurs valeurs) ; les changements que les ordinateurs et l'informatique peuvent induire dans le contenu des programmes d'enseignement ; l'aide qu'ils peuvent apporter dans l'enseignement lui-même. (Kahane, 1987, p. 1682)

J'ai le souvenir frappant, lors des rencontres des trois Études auxquelles j'ai participé durant la présidence de Jean-Pierre Kahane (*informatique, mathématiques comme discipline de service et vulgarisation des mathématiques*), d'un président de séance très présent et investi dans les discussions, remarquablement à l'aise dans les va-et-vient entre mathématiques et didactique, et fort habile à faire émerger des lignes de convergence. Sans l'ombre d'un doute, un exemple d'exception, il y a maintenant plus de trente ans, dans les relations entre mathématiques et didactique des mathématiques.

Une dernière contribution que je retiens de Jean-Pierre Kahane est l'éloge qu'il a fait du mathématicien George Pólya (1887-1985), lors de la deuxième conférence qu'il a donnée à un congrès ICME, en 1988, à titre de président de l'ICMI. Le congrès ICME-6 se tenant à Budapest, Kahane avait choisi de parler du mathématicien hongrois notamment « parce que Pólya s'est intéressé de près, et profondément, à l'enseignement des mathématiques et que, dans le grand public, il est plus célèbre encore par son œuvre pédagogique que par son œuvre mathématique » (Kahane, 1988, p. 79). Dans son texte, Kahane (*ibid.*, pp. 90-91) présente entre autres l'analyse proposée par Pólya (1958) de la preuve du théorème de Pythagore reposant sur la Figure 1,¹⁵ dans laquelle se retrouvent trois triangles semblables.

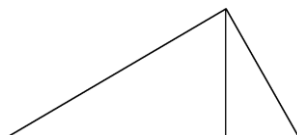


Figure 1 – Le théorème de Pythagore

Au sujet de cette preuve, Pólya écrit d'ailleurs ce qui suit :

L'exemple précédent montre l'usage d'opérations intellectuelles fondamentales telles que la généralisation, la particularisation et la perception des analogies. Il n'existe sans doute pas de découverte, en mathématiques élémentaires ou supérieures, et par suite dans aucun autre domaine, qui puisse être effectuée sans l'aide de ces opérations, en particulier sans l'aide de l'analogie. (Pólya, 1958, pp. 14-15).

¹⁵ Il est intéressant de souligner qu'une preuve du théorème de Pythagore s'appuyant sur la figure 1 se retrouve dans le *De practica geometrie* (1223) de Fibonacci (Hughes, 2008, pp. 68-69), de même qu'au début du 20^e siècle dans une publication d'un enseignant néerlandais (van der Waerden, 1983, pp. 30-31).

Kahane s'intéresse aussi, chez Pólya, à la place de l'heuristique dans l'enseignement, s'arrêtant entre autres à ce qu'il appelle « la préoccupation première de Pólya : aider l'élève, aider l'élève à penser par lui-même » (Kahane, 1988, p. 95). Il fait ressortir combien « les moyens modernes — calculettes et ordinateurs — donnent aux élèves des possibilités d'observation, de vérifications, d'expérimentation qui étaient inaccessibles à leurs aînés » (*ibid.*), renvoyant du coup à la première Étude de la CIEM.

Il aurait pu aussi déterrer certains aphorismes fameux dus à Pólya à propos de l'enseignement, par exemple ses « Règles de l'enseignement » tirées de son *Petit dictionnaire d'heuristique* — l'une des parties de son ouvrage bien connu *Comment poser et résoudre un problème* :

La première de ces règles, c'est bien connaître ce qu'on est censé enseigner ; la seconde, c'est en connaître un peu davantage. (Pólya, 1962, p. 199)

Pólya revient plus en détails sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques dans un chapitre de son livre *La découverte des mathématiques* (Pólya, 1967) intitulé « Apprendre, enseigner et apprendre à enseigner » (pp. 279-330). Il prévient d'entrée de jeu le lecteur qu'il fera « part de quelques-unes de [ses] réflexions sur le processus de l'apprentissage, sur l'art d'enseigner et sur la formation du professeur ». Tout comme Lebesgue, il insiste sur le fait qu'il s'agit là d'« opinions », d'« avis personnels », néanmoins « les fruits d'une longue expérience » (*ibid.*, p. 280). Dans une section portant sur « L'attitude du professeur » (pp. 298-304), il introduit en ces termes ses « Dix commandements » destinés au professeur de l'école secondaire :

Les cours que je faisais aux professeurs étaient, dans une certaine mesure, des cours de pédagogie. Dans ces cours, je m'attachais surtout à donner des conseils d'un intérêt pratique immédiat afin d'aider le professeur dans sa tâche quotidienne. Par conséquent, il me fallait inévitablement répéter sans cesse mes idées sur le travail quotidien du professeur et sur l'attitude mentale qui devait être la sienne. Mes observations finirent par se formaliser, et je fus amené à les rassembler dans les ' Dix commandements du professeur '. (Pólya, 1967, p. 298).

Parmi ces commandements se trouvent : « Soyez intéressé par votre sujet », « Possédez votre sujet », « Suggérez, n'inculquez pas de force », ou encore « Ne leur donnez pas uniquement du savoir, mais du 'savoir-faire', des attitudes intellectuelles, l'habitude d'un travail méthodique » (*ibid.*, p. 299). À propos de ce dernier commandement, Pólya insiste :

En mathématiques, le savoir-faire [...] est beaucoup plus important que la simple possession du savoir. [...] Par là, en mathématiques, la façon dont vous enseignez est plus importante que ce que vous enseignez. (Pólya, 1967, p. 301).

On pourrait même vouloir suivre Pólya dans son analyse de « quelques ficelles du métier de professeur » (*ibid.*, p. 281) lorsque, souhaitant mettre en garde l'enseignant peut-être un peu désabusé d'avoir à enseigner pour la énième fois une démonstration qu'il connaît trop bien, il l'exhorte à faire appel au besoin à des points que l'enseignement a en commun « avec l'art théâtral » (*ibid.*) :

Feignez d'être alléché par cette démonstration au moment où vous l'entamez, faites semblant de découvrir des idées géniales tout en la poursuivant, ayez l'air surpris et transporté de joie lorsque vous l'aurez terminée. Vous devriez un peu jouer la comédie par égard pour vos étudiants ; ils peuvent apprendre plus, à l'occasion, de vos attitudes que de la matière enseignée. (Pólya, 1967, p. 282).

Avant de clore cette partie de ma présentation, je signale que la question de la relation des mathématiciens aux questions d'enseignement, et de leur éventuel engagement, sera reprise par Michèle Artigue à la section IV selon la perspective de la (riche) tradition française.

3. *Mathématiciens et formation des enseignants : l'expérience de l'Université Laval*

Je souhaite, dans cette dernière partie de mon intervention, évoquer certains aspects du cadre de formation des enseignants dans lequel j'évolue, au sein du Département de mathématiques et de statistique de l'Université Laval. Comme je l'indiquais plus haut, je ne veux aucunement suggérer, ce faisant, qu'il y ait quoi que ce soit d'exemplaire dans notre intervention auprès des futurs enseignants. Mais il s'agit bel et bien d'une « histoire vécue », lancée il y a plus de quarante-cinq ans et toujours en évolution, à propos d'un aspect clef de la relation des mathématiciens à l'enseignement : la formation mathématique des futurs enseignants, tant du primaire que du secondaire. J'ai déjà eu l'occasion, dans le cadre de la 11^e Étude de l'ICMI (Hodgson, 2001), de soutenir qu'il s'agit là selon moi d'une composante essentielle des responsabilités du mathématicien universitaire.

Le contexte ne se prête pas ici à une présentation détaillée des cours de mathématiques offerts aux deux programmes de premier cycle pour les futurs enseignants dans lesquels nous intervenons, non plus que des programmes eux-mêmes : le baccalauréat en éducation au préscolaire et en enseignement au primaire (BÉPEP) et le baccalauréat en enseignement secondaire – mathématiques (BES-maths). S'agissant de ce dernier programme — voir (Gourdeau & Proulx, 2012) —, je me bornerai à mentionner que parmi les quinze cours obligatoires de ce programme portant sur les mathématiques (douze cours), la statistique (deux cours) et l'informatique (un cours), six sont spécifiques au BES, dans ce sens que les étudiants dans la classe sont tous inscrits à ce programme. À ce propos, Gourdeau & Proulx écrivent :

La formation mathématique de base est assurée par les premiers cours du cheminement, et les cours spécifiques au BES sont généralement suivis par la suite. Ainsi, les étudiantes et les étudiants ont acquis un meilleur bagage mathématique et une plus grande maturité lorsque les cours spécifiques sont abordés. Cela permet de pousser davantage la réflexion sur les thèmes proches de l'enseignement secondaire dans ces cours, tout en portant une attention accrue à l'adaptation de l'enseignement et à sa dimension culturelle. (Gourdeau & Proulx, 2012, p. 103).

Ces cours spécifiques ne sont pas pour autant de cours de « didactique », mais bien de cours de mathématiques dont les thèmes ont été choisis et sont traités en ayant à l'esprit que l'on s'adresse à de futurs enseignants du secondaire. Ce dispositif nous permet d'offrir des contenus mathématiques et des approches plus ciblés à l'intention d'enseignants.¹⁶ Je mentionne en exemple l'un de ces cours, *Évolution des idées en mathématiques*, suivi au tout dernier trimestre du programme et dont l'objectif est de faire ressortir, trame historique à l'appui, certaines « grandes idées » dans le développement des mathématiques au fil des âges, tout en établissant des liens avec les autres cours de mathématiques du BES et le curriculum du secondaire.

C'est davantage sur les cours de mathématiques que nous offrons au BÉPEP que je souhaite m'arrêter. J'ai déjà mentionné que ces deux cours ont été créés au début des années 1970, tout juste avant mon arrivée au département. Les collègues alors en place ont le mérite d'avoir d'une part accepté l'invitation qui leur était faite de s'investir dans le BÉPEP — ce qui, dans le contexte de l'époque (voire même aujourd'hui), n'allait pas forcément de soi pour des mathématiciens —, et d'autre part d'avoir reconnu qu'il fallait construire un enseignement spécifique afin de répondre aux besoins de ces étudiants. Si un tel commentaire peut sembler une lapalissade, il faut se rappeler qu'il n'est pas du tout usuel (à tout le moins dans le contexte nord-américain) que les futurs enseignants du primaire suivent des cours

¹⁶ Je précise que le programme de BES-maths comprend en outre trois cours de didactique des mathématiques proprement dits, relevant du Département d'études sur l'enseignement et l'apprentissage de la Faculté des sciences de l'éducation. Il en est de même au BÉPEP.

spécifiques offerts par le département de mathématiques : quand il est question de cours de mathématiques, il s'agira alors la plupart du temps de cours généraux de base, et non pas de cours ciblés en vue de l'enseignement primaire.

J'ai déjà eu l'occasion (Hodgson, 2017) de présenter le cadre général de la formation mathématique des enseignants du primaire au Québec, et particulièrement à l'Université Laval, de même que l'esprit et le contenu des deux cours — l'un portant sur l'arithmétique et l'autre sur la géométrie — que nous offrons pour le programme de BÉPEP. Je me bornerai donc ici à rappeler globalement que ces cours visent à fournir l'occasion d'un approfondissement et d'une meilleure compréhension des notions d'arithmétique et de géométrie reliées à l'enseignement primaire, tout en favorisant le développement d'une attitude positive à l'égard des mathématiques. Ainsi,

nous souhaitons lutter contre l'horrible vision réductrice qui ferait des maths un ramassis de règles plus ou moins arbitraires à apprendre par cœur et à appliquer aveuglément. En l'aidant à prendre conscience d'une logique interne et d'une cohérence propres aux mathématiques qu'il aura à travailler avec ses élèves, nous cherchons à ce que l'étudiant-maître se sente en pleine mesure d'amener ses élèves à percevoir eux-mêmes les mathématiques de manière positive. (Hodgson, 2017, p. 8).

C'est donc dans une large mesure un objectif de *démystification* — voire de *démythification* — que nous poursuivons dans ces cours, appelant les étudiants à une reconstruction personnelle de thèmes de l'arithmétique et de la géométrie élémentaires, mais avec un « regard d'adulte », de sorte qu'ils puissent aller bien au-delà de certains automatismes qu'ils auraient pu retenir de leur propre parcours scolaire.

Afin d'illustrer ce propos, j'évoque sommairement la façon dont les fondements de l'arithmétique sont introduits dans l'un de nos cours. J'ai déjà fait une présentation assez détaillée de ce thème dans (Hodgson, 2017). Il en a aussi été question dans (Hodgson & Lajoie, 2015) — avec une composante didactique —, ainsi que dans (Hodgson, 2018), où la question est alors abordée selon la perspective d'artéfacts et de tâches reliés à l'arithmétique élémentaire.

L'objectif poursuivi dans le cours d'arithmétique est (bien sûr) que les « règles » s'appliquant à la structure numérique des nombres naturels deviennent familières, comprises de manière profonde et bien acceptées. Lors de la création du cours, selon l'esprit du temps, les fondements proposés pour l'arithmétique prenaient appui sur la théorie des ensembles. Cette position peut se voir comme reflétant le point de vue soutenu par exemple lors d'un colloque ICMI-UNESCO tenu à Royaumont en 1971, l'influence de la vague de « la mathématique moderne » d'alors s'y faisant clairement sentir.

L'introduction des ensembles dans l'enseignement de la mathématique à l'école élémentaire est sans conteste l'un des traits les plus visibles des changements actuels. [...] Les diagrammes ensemblistes donnent lieu à de nombreux exercices de dessin libre de la part des enfants, et constituent en eux-mêmes une sorte de préparation pré-topologique. L'utilisation des ensembles dans le reste de l'enseignement de la mathématique varie beaucoup d'un pays à un autre. Cependant, la tendance universelle est à l'utilisation des ensembles pour le développement du concept de cardinaux ou ordinaux et des quatre opérations élémentaires sur les naturels. (UNESCO, 1973, p. 6).

À cet égard, un changement majeur de perspective est intervenu dans notre cours au début des années 1980, lorsqu'il a été décidé de voir les nombres naturels comme des « objets primitifs » — tel que vu plus haut, un Lebesgue dirait sans doute des « objets expérimentaux ». La façon retenue dans nos cours pour introduire les nombres naturels dans un tel cadre de dénombrement est à partir de la notion (primitive) de *suites de bâtons*, à

l'image des entailles utilisées de tout temps pour consigner un dénombrement.¹⁷ La Figure 2 montre ce qu'« est », dans un tel cadre, le nombre cinq, et aussi (en introduisant une convention naturelle et commode), le nombre n .

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline n \\ \hline & & \cdots & & \\ \hline \end{array}$$

Figure 2 – Les suites de bâtons : « cinq » et « n »

On convient dans le cours qu'il s'agit là d'une *définition* en bonne et due forme du nombre (naturel). Y ajoutant, tant qu'à faire, la notion de suite « vide » de bâtons (ce qui ne pose pas vraiment problème), on obtient alors un cadre où il est possible de lancer sur des bases solides l'arithmétique élémentaire des nombres naturels — voir à ce propos (Hodgson, 2017, pp. 14-18). Par exemple, après avoir introduit l'égalité de suites de bâtons via la notion de correspondance terme à terme (notion primitive davantage qu'ensembliste, s'il en est), on posera une opération d'addition selon le schéma de juxtaposition des deux suites données, tel qu'illustré à la Figure 3 (l'égalité en cause ici étant une égalité de définition).

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline n+m \\ \hline & & \cdots & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline n \\ \hline & & \cdots & & \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline m \\ \hline & & \cdots & & \\ \hline \end{array}$$

Figure 3 – L'addition de suites de bâtons

La multiplication pourrait de même se définir directement à l'aide d'un arrangement rectangulaire (ou matrice) de bâtons. De là, toutes les propriétés arithmétiques de base (élément neutre, commutativité, etc.) peuvent être pleinement justifiées. Je souligne qu'il s'agit ici de règles véritablement démontrées dans un cadre argumentatif approprié pour des enseignants du primaire — et non pas simplement observées sur des cas concrets, voire carrément imposées. À noter que notre démarche vise les enseignants du primaire eux-mêmes, en leur fournissant une vision « rafraîchie » de faits arithmétiques fondamentaux — et non pas leurs élèves. Je m'arrête ici dans mes propos quant au contenu de notre cours d'arithmétique, et renvoie à (Hodgson, 2017) le lecteur souhaitant en savoir davantage.

Je parle d'autant plus volontiers de ce changement de paradigme à la base de notre cours d'arithmétique que je n'en ai pas été l'instigateur. En effet, au moment où les suites de bâtons ont remplacé les ensembles comme fondements du cours, j'étais alors complètement investi dans un programme de perfectionnement des enseignants du primaire en mathématiques, le PPM-Laval (pour *Programme de perfectionnement des maîtres du primaire*). Si je dis un mot du PPM-Laval, c'est qu'il s'agit à mes yeux d'un exemple particulièrement fructueux de liens « en action » entre mathématiques et didactique. Porté conjointement par deux départements,¹⁸ ce programme a été pendant plus de douze ans l'occasion d'une collaboration active et soutenue entre mathématiciens et didacticiens de mon université, menant à la création de sept cours intégrant des aspects mathématiques et didactiques. Ces cours étaient offerts *in situ* dans les commissions scolaires de la région de la ville de Québec par le truchement de conseillers pédagogiques en mathématiques qui recevaient une formation à l'Université, puis retournaient travailler avec leurs enseignants les documents que nous avions préparés pour eux. Le succès du PPM-Laval repose dans une large mesure sur le rôle qu'y a joué mon collègue didacticien Claude Gaulin, qui en fut l'âme. Cette collaboration a sans

¹⁷ Mainzer parle à ce propos d'une vision du nombre datant du « early stone age » (Mainzer, 1991, p. 9). Voir aussi le chapitre « La pratique de l'entaille, ou la comptabilité des illettrés » dans (Ifrah, 1994, vol. I, pp. 161-168).

¹⁸ Le Département d'études sur l'enseignement et l'apprentissage (à l'époque, Département de didactique) de la Faculté des sciences de l'éducation, et le Département de mathématiques et de statistique de la Faculté des sciences et de génie.

doute aussi contribué à rendre le terrain propice à la tenue du congrès ICME-7 à l'Université Laval en 1992, encore une fois grâce à une action de concert de nos deux départements, et même de nos deux facultés.

Revenant aux dites suites de bâtons, on doit à mon collègue mathématicien William Hatcher (1935-2005) de les avoir introduites dans notre cours d'arithmétique. Impliqué dans ce cours pendant quelques années au début des années 1980, il a rapidement fait ressortir les avantages de changer le paradigme utilisé comme fondement de notre démarche en arithmétique, la construction ensembliste alors en usage s'accompagnant d'une indéniable lourdeur et provoquant une complexité conceptuelle de mauvais aloi. J'ai pour ma part immédiatement adhéré à cette proposition de changement. Le domaine de spécialité de Hatcher étant la logique mathématique, on trouve peut-être là la source de son attrait pour une telle représentation « unaire » des naturels, celle-ci étant parfois utilisée dans une démarche en lien avec les fondements des mathématiques ou encore dans la discussion du concept de calculabilité tel que cristallisé dans une machine de Turing. À noter que la représentation des naturels comme une suite de traits se retrouve aussi dans les recherches didactiques d'Erich Wittmann qui, de son côté, déclare s'être inspiré du « *constructive (or operative) foundation of natural number* » (Wittmann, 1975, p. 60) proposé dans un traité de logique allemand. (Pour des références précises en logique à ce propos, voir (Hodgson, 2018, p. 242).) On peut donc voir dans cette représentation des nombres naturels un autre exemple de relation directe entre mathématiques (en occurrence la logique) et réflexion didactique.

Un mot à propos du phénomène des « mathématiques modernes ». Notons que tous n'y adhéraient pas aveuglément. Ainsi, parlant de Pólya et de ses réflexions sur l'heuristique et l'importance à donner dans l'enseignement à la résolution des problèmes, Kahane souligne qu'« au cours des années 1970, il s'est vivement opposé à la formalisation qu'on a associée aux mathématiques modernes, justement parce qu'elle rendait les problèmes pauvres et secs » (Kahane, 1988, p. 96). Dans le même esprit, un autre exemple de résistance aux maths modernes est celui du mathématicien Alexander Wittenberg (1926-1965), professeur à l'Université Laval de 1956 à 1963. Il a exprimé sa position sur un ton résolument polémique dans l'introduction de (Wittenberg et al., 1963), alors qu'il présente sa vision d'un « enseignement génétique » :

Il est bon de rappeler cela, alors que prolifèrent des entreprises de réforme mues par un si farouche désir d'agir vite et à tout prix — quitte à réfléchir plus tard à ce qu'on a voulu entreprendre, quand on en trouvera le temps — qu'elles semblent parfois s'enfermer dans une surprenante et naïve conviction que c'est assez, dans ce domaine, de méditer la pensée d'un seul homme (multiplement réincarné, il est vrai), et que : *qui a lu Bourbaki, a tout lu*. (Wittenberg et al., 1963, p. 11).

Malgré sa brève existence, Wittenberg peut lui aussi être perçu comme un cas marquant de mathématicien engagé dans une réflexion articulée sur l'enseignement. C'est ce que suggèrent par exemple les pages qui lui sont consacrées dans (Hischer, 2016, p. 20-23), prenant appui sur son livre *Bildung und Mathematik* (Wittenberg, 1963a) et étayant la défense qu'y soutient Wittenberg d'un enseignement des mathématiques favorisant une formation générale. On peut encore penser à (Wittenberg, 1968), livre posthume préfacé par Pólya — que Wittenberg avait connu à l'ETH de Zürich — et rassemblant une série de conférences radiophoniques sur l'éducation prononcées par Wittenberg l'année de son décès, alors qu'il était devenu professeur à l'Université York, à Toronto.

Un commentaire particulièrement éloquent sur Wittenberg a été formulé à l'occasion d'un colloque international organisé par l'ICMI à Utrecht en 1964 sur le thème *Les tendances modernes dans l'enseignement secondaire des mathématiques*. La contribution qu'y a apportée Wittenberg, notamment lors de sa conférence intitulée « Priorités et responsabilités

dans la réforme de l'enseignement des mathématiques », a été saluée en ces termes dans les comptes rendus du colloque :

Le point crucial du colloque était la confrontation des idées provoquée par la conférence et les interventions du Professeur A. Wittenberg, qui a insisté particulièrement sur la nécessité d'une conception pédagogique précise de la réforme et a souligné fortement les dangers liés à la modernisation formelle, ne trouvant pas la base adéquate dans la conscience claire des objectifs et des moyens de l'évolution des résultats et dans la conception claire de l'éducation en général. (UNESCO, 1967, p. 376).

Je retiens enfin un magnifique témoignage personnel de Claude Gaulin qui, lors de ses études de baccalauréat en mathématiques à l'Université Laval, avait suivi plusieurs cours donnés par Wittenberg. Outre les exhortations constantes de ce dernier auprès des étudiants à faire appel à leur intuition, Gaulin avait été tout particulièrement marqué par le cours *Introduction à la philosophie des mathématiques*, présenté par Wittenberg comme un « cours inhabituel pour de futurs enseignants de mathématiques » — voir (Wittenberg, 1963b), où l'auteur soutient qu'il y vise à permettre aux enseignants d'amener leurs élèves vers l'objectif suivant : « to learn mathematics through genuine insight—not through rote learning and mechanical drill » (p. 1091).

Il sera à nouveau question de la réforme des maths modernes à la section IV de ce texte. Ce mouvement, il faut le dire, n'aura pas connu que des détracteurs. Ainsi Roberta Mura, tout en examinant dans une perspective didactique certaines des raisons expliquant son échec au plan pédagogique — notamment l'imposition de définitions et d'axiomes qui occultent le processus de création mathématique (Mura, 2003, p. 200) —, se plaint à souligner la grande satisfaction qu'elle avait éprouvée personnellement, jeune étudiante universitaire, à s'immerger dans un tel univers mathématique. Elle décrit un tel apprentissage comme étant « satisfaisant et apaisant » (*ibid.*, p. 199).

4. Conclusion

J'ai voulu dans cette présentation évoquer certains aspects qui me semblent pertinents en vue d'examiner les relations entre mathématiques et didactique, aspects qui ont indéniablement joué un rôle important dans mon cheminement personnel. Il s'est agi d'une part de moments historiques particuliers dans l'émergence de la didactique des mathématiques comme domaine scientifique, moments parfois accompagnés d'un bouillonnement peut-être lié à la personnalité forte de quelques-uns des protagonistes, mais aussi à l'engouement pour certaines mouvances, telle celle de la réforme des maths modernes. J'ai aussi rappelé les contributions de quelques mathématiciens éminents à la réflexion à propos de l'enseignement des mathématiques. S'il est vrai que certaines de ces réflexions recèlent parfois un côté un peu naïf, il y a quand même là source d'inspiration. En tout cas, ce le fut pour moi, particulièrement au début de ma carrière alors que je cherchais, en tant que mathématicien avec responsabilité en formation des enseignants (du primaire!), à me donner à ce propos ce que j'appellerais des « repères mathématiques à saveur pédagogique », qui m'échappaient grandement. Un Pólya, par exemple, aura alors été pour moi un guide important : je me rappelle avoir été frappé de voir un mathématicien de sa stature se plonger ainsi dans des questionnements à propos de l'enseignement et de la formation à l'enseignement. Dans un autre registre, au moment où j'écris ces lignes, je vois près de moi, dans ma bibliothèque personnelle à l'Université, une douzaine de livres à la couverture orange et noire publiés chez CEDIC vers la fin des années 1970 dans la collection *Formation des maîtres en mathématiques* dirigée par Maurice Glaymann. Là encore de nombreuses et jolies perles, qui ont servi de « points de départ » — pour emprunter le titre si évocateur d'un ces ouvrages de ma « jeunesse » de mathématicien/formateur d'enseignants — à des belles aventures mathématiques au cours desquelles j'ai beaucoup appris! Quant à mon dernier

volet, j'ai cherché à y évoquer quelques particularités de l'engagement des mathématiciens, dans mon université, dans la formation mathématique des enseignants du primaire et du secondaire.

À mes yeux, plusieurs aspects mystérieux et pas du tout banals subsistent cependant. J'en retiens un : comment assurer que les mathématiciens d'aujourd'hui et de demain se sentent vraiment interpellés à intervenir dans les discussions et actions autour de l'enseignement des mathématiques, aussi bien individuellement qu'en tant que communauté? Et comment favoriser un tel engagement, alors que la didactique des mathématiques a su développer un corpus important et impressionnant, sans doute pas si facilement accessible pour un non-initié (comme il va bien sûr de soi)? À en juger par exemple d'après la participation des mathématiciens — et surtout des jeunes mathématiciens — au Groupe canadien d'étude en didactique des mathématiques, comparativement à il y a quarante ans lors de la création du Groupe (je prends ici un cas qui m'est familier), ces questions ne sont pas du tout évidentes. Et elles sont tout aussi pertinentes pour un organisme tel l'ICMI. Il est bien sûr de mise de se montrer vigilant, voire proactif, afin d'encourager les occasions de contact et de collaboration entre mathématiciens et didacticiens des mathématiques. Mais certains obstacles — notamment institutionnels, en lien entre autres avec la progression individuelle du mathématicien en carrière — ne sont pas du tout simples à surmonter. L'expérience de la France, comme le fait ressortir Michèle Artigue à la section IV, renferme peut-être à cet égard des pistes de réflexion intéressantes.

IV. LE POINT DE VUE D'UNE DIDACTICIENNE FRANÇAISE

Michèle Artigue

Mon point de vue, contrairement à celui de mes co-auteurs, est celui d'une mathématicienne depuis longtemps engagée dans la recherche didactique. Comme didacticienne, j'ai déjà eu à aborder ce thème. La première fois (Artigue, 1997), ce fut en 1996 lors de la conférence associée à l'étude ICMI pilotée par Anna Sierpiska et Jeremy Kilpatrick : *What is research in mathematics education and what are its results ?* La seconde (Artigue, 2009), ce fut lors de la conférence de clôture du Symposium organisé à Rome en 2008 à l'occasion du centenaire de l'ICMI. J'avais relu ces textes en préparant cette conférence à trois voix, cherchant à identifier les constantes et les évolutions, et j'y ferai référence dans cette section. Une autre référence importante me semble l'ouvrage issu de l'après-midi thématique consacré aux traditions didactiques continentales au congrès ICME-13 de juillet 2016 (Blum et al., 2019) et, en particulier le chapitre dédié à la tradition didactique française (Artigue et al., 2019).

Bernard Hodgson, dans la section III, a souligné l'engagement historique de mathématiciens, parmi les plus éminents, dans les questions relatives à l'enseignement des mathématiques. Parmi les personnes évoquées figuraient une bonne proportion de mathématiciens français. Il aurait pu en citer bien d'autres, même sans remonter à des figures emblématiques comme celle de Nicolas de Condorcet, qui présida le Comité d'Instruction Publique à l'époque de la Révolution française. Il aurait pu citer par exemple Gaston Darboux, qui présida la Commission de révision des programmes lors de l'importante réforme de 1902, les fameuses conférences au Musée pédagogique de Sèvres, à la même époque d'Henri Poincaré et Émile Borel. Il est intéressant de noter que l'idée de créer dans les lycées des laboratoires de mathématiques à l'instar des laboratoires de sciences, portée à l'époque par Borel, a été reprise par la CREM (Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques) présidée par le mathématicien Jean-Pierre Kahane, au tournant des années

2000 (Kahane, 2001) et semble se concrétiser aujourd'hui, même si c'est sous une forme sensiblement différente, à la suite du rapport Villani-Torossian (2018). Il a brièvement mentionné André Lichnerowicz qui, outre l'ICMI, fut aussi président de la commission ministérielle en charge de la réforme des mathématiques modernes en France, connue d'ailleurs sous son nom, de 1966 à 1973. Chose certainement moins connue, c'est aussi André Lichnerowicz qui proposa à Guy Brousseau, avec qui Lucienne Félix, elle-même élève d'Henri Lebesgue et très impliquée dans le mouvement de rénovation de l'enseignement des mathématiques, l'avait mis en contact, d'étudier les conditions aux limites d'une expérimentation sur l'enseignement des mathématiques. Ce projet, comme Guy Brousseau l'a bien expliqué (Brousseau, Brousseau & Warfield, 2014, p. 173), allait conduire à la théorie des situations didactiques, un des trois piliers de ce que l'on appelle souvent l'école française de didactique.

Cette tradition d'engagement des mathématiciens dans les questions d'enseignement a très certainement influencé les rapports qui se sont établis entre mathématiques et didactique des mathématiques en France, dont j'ai fait personnellement l'expérience. Cependant, quand j'évoque ces figures historiques, j'évoque un temps où la didactique des mathématiques comme champ de recherche autonome, avec les ambitions scientifiques associées, n'avait pas encore émergé, où les mathématiciens n'avaient pas encore fait l'expérience des désillusions engendrées par la réforme des mathématiques modernes. Ces conditions nouvelles allaient profondément affecter les rapports et leur dynamique. Il me semble qu'à ce point de l'histoire, même si les dynamiques en sont interdépendantes, il est utile pour l'analyse de distinguer le développement de la didactique dans ses rapports avec les mathématiques d'un point de vue épistémologique et scientifique, des rapports personnels et institutionnels entre acteurs et communautés. J'aborderai ces deux dimensions successivement, soulignant dans chaque cas quelques points qui me semblent essentiels, et je les recombinaiserai dans la conclusion de cette section.

1. *Mathématiques et didactique des mathématiques : interaction entre champs scientifiques*

Suivant les contextes et les cultures, les rapports entre mathématiques et didactique des mathématiques, voire éducation mathématique comme ce champ est dénommé dans de nombreux pays, ont obéi à des dynamiques différentes. C'est aussi le cas pour les pays d'Europe continentale qui partagent l'utilisation du terme didactique, modulo ses variantes linguistiques, comme le montre bien l'ouvrage (Blum et al., 2019) mentionné plus haut. L'étude comparative qui y est menée montre notamment qu'au sein des traditions didactiques européennes, la tradition didactique française se distingue, entre autres caractéristiques, par une relation particulièrement forte avec les mathématiques et une sensibilité particulière à leur épistémologie. Guy Brousseau avait d'ailleurs envisagé initialement la dénomination d'*épistémologie expérimentale des mathématiques* pour la didactique des mathématiques, avant d'y renoncer, craignant qu'elle ne fût pas suffisamment consensuelle.

De fait, cette relation forte s'exprime clairement, même si c'est sous des formes différentes, dans les trois théories qui sont les piliers de cette tradition didactique et leurs concepts fondamentaux, comme en témoignent les notions de *champ conceptuel* dans la théorie des champs conceptuels, d'*obstacle épistémologique* et de *situation fondamentale* dans la théorie des situations didactiques, de *praxéologie mathématique* et de *modèle épistémologique de référence* dans la théorie anthropologique du didactique. Pour une analyse détaillée, je renvoie le lecteur à la contribution sur ce thème de Jean-Luc Dorier au colloque EMF 2015 (Dorier, 2015). Même si, au fil des décennies, la didactique française a évolué

dans ses problématiques, si ses cadres théoriques se sont diversifiés comme souligné dans (Artigue et al., 2019), si les liens se sont renforcés avec les autres champs des sciences de l'éducation, cet attachement aux mathématiques et à leur épistémologie reste une caractéristique identitaire de la recherche didactique française.

Mais je voudrais insister aussi sur le fait que cette relation entre mathématiques et didactique des mathématiques est une relation vivante dont la dynamique se nourrit de l'évolution des problématiques et travaux de recherche en didactique et de celle des mathématiques elles-mêmes. L'évolution des travaux didactiques nourrit cette dynamique, notamment en accordant de plus en plus de place :

- à des études d'épistémologie « contemporaine » qui permettent un contact avec les sciences mathématiques en train de se faire (voir par exemple l'étude du travail de mathématiciens sur la conjecture d'Erdős-Strauss dans la thèse de Marie-Line Gardes (2013), les entretiens réalisés avec des mathématiciens travaillant à l'interface des mathématiques et de la biologie dans la thèse de Sonia Yvain-Prébiski (2018), ou l'étude de la pensée structuraliste dans l'habilitation de Thomas Hausberger (2016)),
- aux relations entre mathématiques et autres disciplines, du fait de l'importance croissante prise dans les curricula par l'interdisciplinarité et la modélisation, les connections avec le monde extra-scolaire,
- aux processus de diffusion intentionnelle des mathématiques dans une diversité accrue de contextes, formels mais aussi informels (voir par exemple (Pelay & Artigue, 2017) pour une vision synthétique), et de cultures ; la création de l'Espace mathématique francophone, les collaborations que cette création a permis, ne sont pas sans contribuer à cette évolution, depuis plus de deux décennies.

Ces évolutions de la recherche didactique entrent en synergie avec l'évolution des sciences mathématiques, leurs interactions croissantes avec les autres sciences, sciences de la nature mais aussi sciences humaines, et avec la société. Mais, phénomène tout aussi intéressant, elles entrent aussi en synergie avec l'évolution des travaux des historiens et épistémologues des mathématiques et plus largement des sciences. J'ai pu l'apprécier au sein de notre école doctorale à laquelle est rattaché le laboratoire SPHERE¹⁹, un des plus importants laboratoires en France dans ce domaine, avec l'attention qui y est portée au développement des mathématiques dans une diversité de contextes et de cultures, et à la diversité des pratiques mathématiques développées selon les acteurs et les besoins qu'ils rencontrent. Les travaux menés dans ce laboratoire sur l'histoire des tables numériques²⁰ ou dans le cadre du projet SAW²¹ dont le but est « de développer de nouvelles approches théoriques dans le domaine de l'histoire des mathématiques anciennes dans le but de mettre en évidence une variété de pratiques au sein d'ensembles trop souvent perçus aujourd'hui comme des blocs homogènes », en sont de bons exemples.

Certaines caractéristiques du contexte français ont sans aucun doute conduit à ces rapports. J'ai déjà évoqué la tradition d'engagement des mathématiciens dans les questions d'enseignement. À partir de la réforme des mathématiques modernes, la création des IREM a permis aux mathématiciens d'inscrire leur engagement dans une structure institutionnelle nouvelle, et, aujourd'hui encore, la majorité des directeurs d'IREM sont des mathématiciens universitaires dont le terrain de recherche n'est pas la didactique des mathématiques. Cette

¹⁹ <http://www.sphere.univ-paris-diderot.fr> (accès le 20/12/2018).

²⁰ <http://www.sphere.univ-paris-diderot.fr/spip.php?rubrique99> (accès le 20/12/2018).

²¹ <http://www.sphere.univ-paris-diderot.fr/spip.php?rubrique148&lang=fr> (accès le 20/12/2018).

structure a aussi favorisé les contacts entre mathématiques et didactique des mathématiques. C'est, en effet, au sein des IREM qu'a essentiellement émergé la recherche en didactique des mathématiques en France, avec le soutien de mathématiciens comme André Revuz à Paris, Jean Colmez à Bordeaux, Jean Martinet et Georges Glaeser à Strasbourg, Bernard Malgrange à Grenoble. C'est le mode de fonctionnement original de ces institutions, sur la base de groupes de travail mixtes combinant des missions de recherche, formation et production de ressources, qui a maintenu un fort contact entre mathématiques et didactique des mathématiques.

Mais ce contact a aussi été soutenu par les affiliations institutionnelles des didacticiens. La possibilité pour des enseignants-chercheurs en mathématiques d'être rattachés à un IREM et d'y effectuer une partie de leur service, a joué, historiquement, un rôle clef pour l'émergence et les premiers développements de la recherche didactique. Ensuite, le choix fait par de nombreux didacticiens, de se rattacher à la section 26 du Conseil national des universités (Mathématiques appliquées et application des mathématiques) à sa création en 1987 pour leur qualification et promotion, a aussi joué un rôle clef. Avoir fait partie de cette instance pendant une décennie m'a permis d'apprécier le rôle qu'a joué ce rattachement institutionnel dans les relations entre mathématiques et didactique. Je peux témoigner aussi du combat qu'il a fallu mener, et que d'autres après moi ont continué à mener, pour que la didactique y soit reconnue comme une spécialité à part entière, comme c'est le cas aujourd'hui.

Ces conditions ont permis que vive l'attachement revendiqué dès l'origine aux mathématiques et à leur épistémologie ; elles ont aidé la didactique des mathématiques à se forger une identité en se différenciant de la pédagogie ; elles ont façonné une histoire et, sans aucun doute, produit des relations entre didactique et mathématiques partiellement singulières. Comment cette histoire s'inscrit-elle dans un panorama plus global ? C'est cette dimension que je vais aborder dans la partie suivante, en me référant notamment à l'histoire de l'ICMI, continuant ainsi le récit engagé par Bernard Hodgson dans la section précédente. Je le ferai en abordant cette question plus particulièrement sous l'angle des relations entre communautés.

2. *Mathématiques et didactique des mathématiques : relations entre communautés*

Dans les dernières décennies du 20^e siècle, la recherche en éducation mathématique, internationalement, s'est développée et institutionnalisée progressivement, avec des conséquences évidentes sur les rapports entre mathématiques et didactique, mais surtout entre mathématiciens et didacticiens, comme je l'ai expliqué dans (Artigue, 1997). Le champ scientifique qui se développe, malgré ses liens privilégiés avec les mathématiques, ne relève pas des sciences dures dont les mathématiques sont emblématiques ; il se situe à l'interface des sciences humaines et des sciences mathématiques, et est, par ses méthodologies comme par la nature des connaissances qu'il produit, bien plus proche des premières que des secondes. Ce champ se développe en construisant ses propres problématiques, concepts théoriques et outils méthodologiques ; utilisant le vocabulaire de la TAD, je dirais en développant et structurant ses propres praxéologies de recherche. Ce faisant, il crée un *discours technologique* spécifique, avec des termes qui, même lorsqu'ils relèvent de la langue commune, y prennent un sens technique particulier, comme ceux de *milieu*, de *situation*, de *conception*... La communication avec les acteurs de l'enseignement et les mathématiciens ne va plus de soi. Là où les didacticiens voient les éléments nécessaires à la production d'un discours scientifique, les praticiens de l'enseignement que sont les mathématiciens tendent à ne voir que jargon. Les didacticiens, pour leur part, critiquent la naïveté de beaucoup des discours de mathématiciens sur l'enseignement. La priorité que les didacticiens des

mathématiques, ayant tiré les leçons de l'épisode des mathématiques modernes, donnent à l'identification et la compréhension des phénomènes didactiques sur l'action, se révèle également génératrice de distance entre communautés.

On observe alors une tendance à la séparation des habitats, les mathématiciens s'investissant plutôt dans des actions de popularisation des mathématiques qui leur rendent possible une action sous une forme dans laquelle ils se sentent à l'aise, et qui de plus échappe aux contraintes et exigences du système scolaire, tandis que les didacticiens se concentrent sur l'étude des systèmes de diffusion formelle des mathématiques. Dans certains contextes, cette distance croissante alliée à la résistance évidente des problèmes posés par l'enseignement des mathématiques, va engendrer des positions de plus en plus critiques vis-à-vis de la recherche en éducation mathématique, et ce d'autant plus que les réformes et discours curriculaires semblent de plus en plus influencés par cette recherche. L'exemple de la « Math War » aux États-Unis en est sans doute l'exemple le plus frappant.

L'histoire de l'ICMI en témoigne, avec la situation de crise qui a accompagné notre entrée au Comité exécutif de l'ICMI, Bernard Hodgson et moi. Bernard Hodgson a évoqué la figure de Jean-Pierre Kahane et le rôle qu'il avait joué pour relancer l'ICMI au début des années 80, à la demande du président de l'Union mathématique internationale (IMU). Vingt ans après cependant, la situation avait changé. Comme expliqué dans (Artigue, 2009), la méfiance s'était installée entre l'IMU et l'ICMI. Le Comité scientifique du Congrès international des mathématiciens devant se tenir à Berlin en 1998 avait rejeté le programme conçu par l'ICMI pour la section « Teaching and Popularization of Mathematics » et imposé notamment un panel sur les thématiques qui nourrissaient la *Math War*, avec des mathématiciens particulièrement actifs dans cette guerre. Le président de l'IMU par ailleurs s'opposait à ce que son pays, le Brésil, un de ceux où les antagonismes entre mathématiciens et didacticiens étaient les plus virulents, organise le prochain ICME. Des voix de plus en plus nombreuses au sein de l'ICMI s'élevaient pour demander que l'ICMI s'affranchisse de cette institution mère qui ne la respectait pas.

Hyman Bass, mathématicien éminent, qui venait de prendre un poste à l'Université de Michigan où travaillait Deborah Ball pour construire des liens entre mathématiciens et chercheurs en éducation mathématique, avait accepté la présidence de l'ICMI. Il a fallu décider. Pour nous, il était essentiel de maintenir l'ICMI à l'interface des communautés, mais ceci imposait un changement des relations avec l'IMU. Ce fut un travail de longue haleine qui n'aurait pas été possible sans l'engagement sans faille, sans la légitimité scientifique que portait Hyman Bass. Il aboutira, comme l'ont montré Bernard Hodgson et Mogens Niss dans leur conférence conjointe à ICME-13, à des changements décisifs, mon élection à la présidence de l'ICMI en 2006 en témoigne (Hodgson & Niss, 2018). Ces changements ont rendu possibles de réelles collaborations, comme celle qui porte le projet CANP (Capacity & Networking Project)²² dont la première réalisation en 2011 a concerné des pays de l'Afrique francophone subsaharienne.

L'évolution brièvement évoquée ici n'est pas propre à l'ICMI, même si dans certains pays, par exemple d'Amérique latine, les tensions entre communautés sont toujours vives. Et je

²² <https://www.mathunion.org/icmi/activities/developing-countries-support/capacity-networking-project-canp> (accès le 20/12/2018). Le projet CANP vise à développer les compétences mathématiques et didactiques de tous ceux engagés dans la formation des enseignants, de créer des réseaux régionaux et de favoriser leur connexion avec les structures internationales existantes. Il vise en priorité les régions peu touchées par les activités de l'ICMI.

voudrais pour terminer souligner qu'elle est bien visible en France. Elle l'est sous différentes facettes, notamment les suivantes :

- l'évolution de la CFEM²³, sous-commission française de l'ICMI qui rassemble les principales institutions, sociétés, associations concernées par l'enseignement des mathématiques et porte aujourd'hui la voix de la communauté auprès des institutions — la seule discipline à porter une voix unifiée — et est co-organisatrice avec l'ARDM, l'Association pour la recherche en didactique des mathématiques, d'un colloquium annuel sur l'enseignement des mathématiques,
- l'engagement croissant de mathématiciens dans des projets communs et des co-directions de thèse. En témoignent par exemple les thèses portées par l'équipe Math à Modeler à l'Université de Grenoble, mais aussi celle de Zoé Mesnil (2014) sur l'enseignement de la logique à l'Université Paris-Diderot que j'ai co-encadrée avec la didacticienne Cécile Ouvrier-Buffet et le logicien René Cori, et tout récemment la thèse de Marie Lhuissier à l'ENS de Lyon (2018) combinant une recherche mathématique sur le problèmes des trois corps avec la conception et analyse d'activités de popularisation sur cette même thématique, co-encadrée par le mathématicien Étienne Ghys et Christian Mercat. C'est un engagement qui est favorisé par celui croissant des didacticiens dans l'habitat « Popularisation, diffusion » et la recherche associée, dont un exemple pionnier a été la thèse de Nicolas Pelay (2010) à l'origine de la notion de *contrat didactique et ludique*.

Contribue aussi à cette dynamique le développement des recherches didactiques au niveau universitaire, en incluant aussi les formations mathématiques dites de service, dont atteste le rôle joué par les didacticiens français dans le nouveau réseau INDRUM (International Network for Didactic Research in University Mathematics), dont le premier colloque a eu lieu à l'Université de Montpellier en 2016, et le nouveau réseau national DEMIPS (Didactique et Épistémologie des Mathématiques, lien avec l'Informatique et la Physique dans le Supérieur) qui vise à fédérer les recherches en didactique des mathématiques sur l'enseignement supérieur et sur la transition secondaire/supérieur, et à favoriser les collaborations entre didacticiens et mathématiciens²⁴.

Je voudrais enfin souligner le rôle d'interface que jouent également les interactions croissantes avec les chercheurs en d'histoire et épistémologie des mathématiques, et en histoire de l'enseignement. Mes co-encadrements avec le mathématicien et épistémologue Michel Serfati, malheureusement disparu en septembre 2018, des thèses de Caroline Bardini sur le symbolisme algébrique (2003) et de Véronique Battie sur l'enseignement de l'arithmétique en terminale (2003) avaient été pionniers dans cette direction, mais la thèse récente de Charlotte de Varent (2018) co-encadrée par l'historienne spécialiste des mathématiques sumériennes Christine Proust et le didacticien Nicolas Decamps, par la symétrie qui y est à l'œuvre entre les deux champs d'étude, montre bien le chemin parcouru depuis.

3. Conclusion

La vision présentée dans cette section des relations entre mathématiques et didactique des mathématiques est, de manière évidente, marquée par mon expérience personnelle de ces relations, en tant que didacticienne des mathématiques. C'est notamment en tant que didacticienne des mathématiques que j'ai vécu les tensions entre communautés et essayé de

²³ <http://www.cfem.asso.fr> (accès le 20/12/2018).

²⁴ Voir la présentation des deux réseaux au comité scientifique des IREM : http://www.univ-irem.fr/IMG/pdf/ci-irem-demips_indrum-2.pdf (accès le 20/12/2018).

les surmonter, de les réduire, que j'ai perçu et fait sens des évolutions qui se sont indéniablement produites depuis le début de ma carrière, à un moment où la didactique émergeait à peine comme champ scientifique. Avec le recul, il me semble qu'aujourd'hui nous en sommes à un stade où chercheurs en mathématiques et en didactique des mathématiques, tout en reconnaissant les différences importantes existant entre leurs champs de recherche respectifs, sont dans les conditions de penser et organiser les relations essentielles entre mathématiques et didactique des mathématiques de façon plus satisfaisante, plus équilibrée, de s'émanciper des oppositions stériles, et que nous avons substantiellement progressé dans cette voie, même si beaucoup reste à faire.

V. CONCLUSION

Les trois contributions qui constituent ce texte sont, comme le lecteur pouvait s'y attendre, diverses. C'est une diversité qui reflète à la fois la diversité de nos contextes professionnels et aussi celle de nos positions institutionnelles et de nos trajectoires personnelles, la diversité de nos subjectivités. Elles ne s'opposent cependant pas mais plutôt se complètent, faisant ainsi ressortir des relations entre mathématiques et didactique des mathématiques qui ont une longue histoire mais se reconstruisent sans cesse, des relations qui sont vivantes et de plus en plus productives, malgré les tensions qui persistent entre communautés dans de nombreux pays. Ce sont des relations à la qualité desquelles nous devons être attentifs, les uns et les autres, que nous soyons étiquetés mathématiciens ou didacticiens, car cette qualité ne va en rien de soi, et parce que les formes possibles de collaboration bougent sans cesse, comme bougent les champs scientifiques et les communautés, comme bouge le monde dans lequel nous vivons et les défis qu'il rencontre.

REFERENCES

- Abdeljouad, M. (2009). L'introduction de la didactique des mathématiques en Tunisie. *Radisma*.
- Adler, J. (2001). *Teaching mathematics in multilingual classrooms*. Dordrecht : Kluwer Academic Publisher.
- Adler, J. (2005). Holding the past, living the present and creating a future: trends and challenges in research on mathematics teacher education. In R. Vithal, J. Adler & C. Keitel (Éds.), *Researching mathematics education in South Africa: Perspectives, practices and possibilities* (pp. 163-182). Cape Town: HSRC Press.
- Arago, F. (1854). *Œuvres complètes de François Arago : Notices biographiques*, tome 2. J.-A. Barral (Éd.). Paris : Gide et J. Baudry, Éditeurs.
- Artigue, M. (1997). Research in mathematics education through the eyes of mathematicians. In J. Kilpatrick & A. Sierpiska (Éds), *What is research in mathematics education and what are its results ?* (pp. 477-490). Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.
- Artigue, M. (2009). ICMI : A century at the interface between mathematics and mathematics education. In M. Menghini, F. Furinghetti, L. Giacardi, & F. Arzarello (Éd.), *The first century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008). Reflecting and shaping the world of mathematics education*, (pp. 185-198). Rome : Istituto della Enciclopedia Italiana.
- Artigue, M. (Éd.) (2016). *La tradition didactique française. Exemples de collaboration avec l'Afrique, l'Amérique latine et l'Asie*. Paris : CFEM.
<http://www.cfem.asso.fr/cfem/Collaborationsdidactiquesfrancaises.pdf>

- Artigue, M., Bosch, M., Chaachoua, H., Chellougui, F., Chesnais, A., Durand-Guerrier, V., Knipping, C., Maschietto, M., Romo-Vázquez, A., & Trouche, L. (2019). The French Didactic Tradition in Mathematics. In W. Blum, M. Artigue, A. Mariotti, M. van der Heuvel-Panhuizen, & R. Sträßer (Éd.) *European Traditions in Didactics of Mathematics* (pp. 11- 56). New York : Springer.
- Bardini, C. (2003). *Le rapport au symbolisme algébrique : une approche didactique et épistémologique*. Thèse de Doctorat. Université Paris-Diderot. [<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00011697/document>].
- Battie, V. (2003). *Spécificités et potentialités de l'arithmétique élémentaire pour l'apprentissage du raisonnement mathématique*. Thèse de Doctorat. Université Paris-Diderot. [<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00141080/document>]
- Bethell, G. (2016). *Mathematics education in Sub-Saharan Africa : Status, challenges and opportunities*. World Bank Report No: ACS19117.
- Blum, W., Artigue, M., Mariotti, M. A., van der Heuvel-Panhuizen, M., & Sträßer, R. (Éd.) (2019). *European traditions in didactics of mathematics*. New York : Springer.
- Boileau, A. (2012). Point de vue sur la formation mathématique des futurs enseignants de mathématiques au secondaire. In J. Proulx, C. Corriveau et H. Squalli (Éd.), *Formation mathématique pour l'enseignement des mathématiques : Pratiques, orientations et recherches* (pp. 57-80). Québec : Presses de l'Université du Québec.
- Brousseau, G., Brousseau, N., & Warfield, V. (2014). *Teaching fractions through situations: A fundamental experiment*. New York : Springer.
- Bundgaard, S. (1960). *Lectures on modern teaching of geometry and related topics*. (ICMI-Seminar, Elementær Afdeling Nr. 7), Aarhus : Aarhus Universitet.
- Churchhouse, R.F., Cornu, B., Howson, A.G., Kahane, J.-P., van Lint, J.H., Pluvinaige, F., Ralston, A., & Yamaguti, M. (Éd.) (1986). *The influence of computers and informatics on mathematics and its teaching*. Cambridge : Cambridge University Press, 1986.
- CIEM (1984). An introduction to the ICMI Study on the computer and informatics. *L'Enseignement Mathématique* 30, 159-172.
- Djebbar, A. (2015). Les mathématiques arabes des VIII-XV siècles : passerelles entre les cultures. In Theis L. (Éd.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et apprentissage — Actes du Colloque EMF 2015 — Plénières* (pp. 1-16). [<http://emf.unige.ch/files/4314/6400/7246/EMF2015DJEBBAR.pdf>].
- Dorier, J.-L. (2015). La didactique des mathématiques : une épistémologie expérimentale. In L. Theis (Éd.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et apprentissage - Actes du colloque EMF2015* (pp. 108-118). [https://archive-ouverte.unige.ch/documents/advanced_search?field1=journal.marc&value1=Pluralités+culturelles+et+universalité+des+mathématiques+%3A+enjeux+et+perspectives+pour+leur+enseignement+et+leur+apprentissage+--+Actes+du+colloque+EMF2015].
- Dunnington, G.W. (2004). *Carl Friedrich Gauss: Titan of science*. Washington, DC : Mathematical Association of America.
- EBESM / Editorial Board of Educational Studies in Mathematics (1969). *Actes du Premier Congrès International de l'Enseignement Mathématique*. (Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique, CIEM). Dordrecht : D. Reidel. [Aussi dans *Educational Studies in Mathematics* 2 (1969) 135-418.]
- Euler, L. (1738). *Einleitung zur Rechen-Kunst zum Gebrauch des Gymnasii bey der Kayserlichen Academie der Wissenschaften in St. Petersburg*. St. Petersburg: Akademischen Buchdruckerey. Reproduit dans *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, sér. III.

- vol. 2 (pp. 1-303). Leipzig, Germany : B.G. Teubner, 1942. [www.math.uni-bielefeld.de/~sieben/euler/rechenkunst.html].
- Gardes, M.L. (2013). *Étude de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants, engagés dans la recherche d'un problème non résolu en théorie des nombres*. Thèse de Doctorat. Université Claude Bernard - Lyon 1. [<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01145845>].
- Gerdes, P. (1995). *Ethnomathematics and education in Africa*. Stockholm : University of Stockholm, Institute of International Education.
- Gourdeau, F., & Proulx, J. (avec la collaboration de J.-F. Maheux & B.R. Hodgson) (2012). Formation mathématique pour les enseignants de mathématiques du secondaire : croisement des regards du mathématicien et du didacticien. In J. Proulx, C. Corriveau et H. Squalli (Éd.), *Formation mathématique pour l'enseignement des mathématiques : Pratiques, orientations et recherches* (pp. 101-120). Québec : Presses de l'Université du Québec.
- Halai, A., & Tennant, G. (Éd.) (2016). *Mathematics education in East Africa. Towards harmonization and enhancement of education quality*. New York : Springer.
- Hardy, G.H. (1967). *A mathematician's apology*. London : Cambridge University Press.
- Hausberger, T. (2016). *Enseignement et apprentissage de l'algèbre abstraite à l'université et premiers éléments d'une didactique du structuralisme algébrique : études croisées en didactique et épistémologique des mathématiques*. HDR. Université de Montpellier. [<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01408565>].
- Hischer, H. (2016). *Mathematik – Medien – Bildung. Medialitätsbewusstsein als Bildungsziel: Theorie und Beispiele*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Hodgson, B.R. (1991). Regards sur les Études de la CIEM. *L'Enseignement Mathématique* 37, 89-107.
- Hodgson, B.R. (2001). The mathematical education of school teachers: role and responsibilities of university mathematicians. In D. Holton (Éd.), *The teaching and learning of mathematics at university level — An ICMI Study* (pp. 501-518). Dordrecht : Kluwer.
- Hodgson, B.R. (2015). Whither the mathematics/didactics interconnection? Evolution and challenges of a kaleidoscopic relationship as seen from an ICMI perspective. In S.J. Cho (Éd.), *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 41-61). Cham : Springer International.
- Hodgson, B.R. (2017). Apport des mathématiciens à la formation des enseignants du primaire : regards sur le « modèle Laval ». In S. Oesterle, D. Allan, & J. Holm (Éd.) *Actes de la rencontre annuelle 2016 du Groupe canadien d'étude en didactique des mathématiques* (pp. 3-44). CMESG/GCEDM. [<http://www.cmesg.org/actes/>].
- Hodgson, B.R. (2018). Artefacts and tasks in the mathematical preparation of teachers of elementary arithmetic from a mathematician's perspective: a commentary on chapter 9. In M.G. Bartolini Bussi, & X.H. Sun, (Éd.), *Building the foundation: Whole numbers in the primary grades — The 23rd ICMI Study* (pp. 227-250). Cham : Springer International.
- Hodgson, B.R. & Lajoie, C. (2015). The preparation of teachers in arithmetic: A mathematical and didactical approach (pp. 307–314). In X.H. Sun, B. Kaur, & J. Novotná, (Éd.) *Conference proceedings of ICMI Study 23: Primary mathematics study on whole numbers* (pp. 307-314). Macau : University of Macau. [<https://www.um.edu.mo/fed/ICMI23/proceedings.html>].
- Hodgson, B.R., & Niss, M. (2018). ICMI 1966-2016: A double insiders' view of the latest half century of the International Commission on Mathematical Instruction. In G. Kaiser, H. Forgasz, M. Graven, A. Kuzniak, E. Simmt, & B. Xu (Éd.) *Invited lectures from the 13th*

- International Congress on Mathematical Education* (pp. 229-247). Cham : Springer International.
- Hodgson, B.R., Rogers, L.F., Lerman, S., & Lim-Teo, S.K. (2013). International organizations in mathematics education. In M.A. Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. Leung (Éd.), *Third international handbook of mathematics education* (pp. 901-947). (Chapter 28, Springer International Handbooks of Education 27) New York : Springer Science+Business Media.
- Howson, A.G. (1982). Minutes of a meeting held in Paris on 3 December 1982 between J.-P. Kahane, B. Christiansen and A.G. Howson. *IMU Archive, Boîte 14C — International Commission on Mathematical Instruction, 1981-1982*.
- Howson, A.G. (1984). Seventy-five years of the International Commission on Mathematical Instruction. *Educational Studies in Mathematics* 15, 75-93.
- Hughes, B. (Éd.) (2008). *Fibonacci's De practica geometrie*. New York : Springer.
- Ifrah, G. (1994). *Histoire universelle des chiffres* (2 vol.). Paris : Robert Laffont.
- Kahane, J.-P. (1987). Enseignement mathématique, ordinateur et calculettes. In A.M. Gleason (Éd.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 1986* (pp. 1682-1696). Providence, RI : American Mathematical Society.
- Kahane, J.-P. (1988). La grande figure de Georges Pólya. In A. Hirst, & K. Hirst, (Éd.), *Proceedings of the sixth International Congress on Mathematical Education*, (pp. 79-97). Budapest: János Bolyai Mathematical Society.
- Kahane, J.-P. (1990). A farewell message from Jean-Pierre Kahane, the retiring President of ICMI. *ICMI Bulletin* 29, 3-8.
- Kahane, J.-P. (coord.) (2001). *L'enseignement des sciences mathématiques*. Paris : Odile Jacob.
- Kilpatrick, J. (2008). A higher standpoint. In *ICME-11 Proceedings: Regular lectures* (pp. 26-43).
[https://www.mathunion.org/fileadmin/ICMI/files/About_ICMI/Publications_about_ICMI/ICME_11/Kilpatrick.pdf].
- Klein, F. (1932). *Elementary mathematics from an advanced standpoint: Arithmetic, algebra, analysis*. New York : Macmillan.
- Klein, F. (2016). *Elementary mathematics from a higher standpoint*. (3 vols.) Berlin : Springer.
- Lebesgue, H. (1975). *La mesure des grandeurs*. [Titre original : *Sur la mesure des grandeurs*. Publié en six articles dans *L'Enseignement Mathématique*, vol. 31 (1932) à vol. 34 (1935).] Paris : Albert Blanchard.
- Lehto, O. (1998). *Mathematics without borders: A history of the International Mathematical Union*. New York : Springer.
- Lhuissier, M. (2018). *Le problème mathématique des trois corps, abordé simultanément sous l'angle de la recherche théorique et celui de la diffusion auprès de publics variés*. Thèse de Doctorat. ENS de Lyon.
- Mac Lane, S. (1971). *Categories for the working mathematician*. New York, NY : Springer.
- Mainzer, K. (1991). Natural numbers, integers and rational numbers. In H.-D. Ebbinghaus, H. Hermes, F. Hirzebruch, M. Koecher, K. Mainzer, J. Neukirch, A. Prestel, & R. Remmert, (Éd.), *Numbers* (pp. 9-26). New York : Springer.
- Mesnil, Z. (2014). *La logique : d'un outil pour le langage et le raisonnement mathématique vers un objet d'enseignement*. Thèse de Doctorat. Université Paris-Diderot.
[<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01114281>].
- Mura, R. (2003). Lessons from the past, questions for the future: méditation sur un thème imposé. In E. Simmt, & B. Davis (Éd.), *Actes de la rencontre annuelle 2002 du Groupe*

- canadien d'étude en didactique des mathématiques (pp. 197-205). Edmonton : CMESG/GCEDM.
- Pelay, N. (2010). *Jeu et apprentissages mathématiques : élaboration du concept de contrat didactique et ludique en contexte d'animation scientifique*. Thèse de Doctorat. Université Claude Bernard - Lyon 1. [<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00665076>].
- Pelay, N., & Artigue, M. (2017). Vers une approche didactique des activités de diffusion et vulgarisation des mathématiques, et de leurs synergies possibles avec les activités scolaires. In T. Barrier & C. Chambris (Éd.), *Actes du Séminaire national de l'ARDM 2016* (pp. 1-15). http://ardm.eu/files/sem_ARDM_actes_Pelay_Artigue_def.pdf
- Pólya, G. (1958). *Les mathématiques et le raisonnement « plausible »*. Paris : Gauthier-Villars.
- Pólya, G. (1962). *Comment poser et résoudre un problème*. (2^e éd.) Paris : Dunod.
- Pólya, G. (1967). *La découverte des mathématiques*. Paris : Dunod.
- Schilling, C. (1900). *Wilhelm Olbers: Seine Leben und seine Werke. Zweiter Band: Briefwechsel zwischen Olbers und Gauss. Erste Abtheilung*. Berlin : Julius Springer.
- Sierpinska, A. (2012). L'arbre banyan de l'expérience d'un formateur. In J. Proulx, C. Corriveau et H. Squalli (Éd.), *Formation mathématique pour l'enseignement des mathématiques : Pratiques, orientations et recherches* (pp. 91-98). Québec : Presses de l'Université du Québec.
- Tazzioli, R. (2008). *Gauss, prince des mathématiques*. (Les génies de la science, no. 36) *Pour la science*.
- Traoré, K., & Barry, S. (2006). La problématique d'une voie africaine en didactique des mathématiques : vrais et faux enjeux. In N. Bednarz & C. Mary (Éd.), *Actes du Colloque EMF 2006*. [http://emf.unige.ch/files/8014/5389/0085/EMF2006_GT3_Traore_Barry.pdf].
- UNESCO (1967). *Tendances nouvelles de l'enseignement des mathématiques*, vol. I. Paris : UNESCO. [<https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000124826>].
- UNESCO (1973). *Tendances nouvelles de l'enseignement de la mathématique*, vol. III. Paris : UNESCO. [<https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000136587>].
- van der Waerden, B.L. (1983). *Geometry and algebra in ancient civilizations*. Berlin : Springer.
- de Varent, C. (2018). *Pluralité des concepts liés aux unités de mesure. Liens entre histoire des sciences et didactique., le cas de l'aire du carré dans une sélection de textes anciens*. Thèse de Doctorat. Université Paris-Diderot.
- Weigand, H.-G., McCallum, W., Menghini, M., Neubrand, M., & Schubring, G. (2019). *The legacy of Felix Klein*. (ICME-13 Monographs) Cham : Springer Nature.
- Wittenberg, A. (1963a). *Bildung und Mathematik: Mathematik als exemplarisches Gymnasialfach*. Stuttgart : Ernst Klett Verlag.
- Wittenberg, A. (1963b). An unusual course for future teachers of mathematics. *The American Mathematical Monthly* 70, 1091-1097.
- Wittenberg, A. (1968). *The prime imperatives: Priorities in education*. Toronto: Clarke, Irwin & Co.
- Wittenberg, A., Sœur Sainte-Jeanne-de-France, & Lemay, F. (1963). *Redécouvrir les mathématiques : Exemples d'enseignement génétique*. Neuchâtel : Delachaux & Niestlé.
- Wittmann, E. (1975). Natural numbers and groupings. *Educational Studies in Mathematics* 6, 53-75.
- Yvain-Prébiski, S. (2018). *Etude de la transposition à la classe de pratiques de chercheurs en modélisation mathématique dans les sciences du vivant. Analyse des conditions de la dévolution de la mathématisation horizontale aux élèves*. Thèse de doctorat. Université de Montpellier. [<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01956661/document>].