

Actes du colloque EMF 2018

Edités par

Maha Abboud

Laboratoire de Didactique André Revuz

Université de Paris : Editions de l'IREM de Paris
ISBN : 978-2-86612-391-8

IREM PARIS

Mathématiques en scène des ponts entre les disciplines

Actes du colloque EMF 2018

Edités par

Maha Abboud

avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Paris (Gennevilliers) – 22 au 26 octobre 2018

https://emf2018.sciencesconf.org/

Le comité scientifique du colloque EMF 2018

Maha Abboud - Présidente du comité scientifique
Université de Cergy-Pontoise, ESPE de l'académie de Versailles, France

Luis Radford - Représentant de l'ICMI
Université Laurentienne, Canada

Eric Barbazo
Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, France

Stéphanie Bridoux
Université de Mons, Belgique

France Caron
Université de Montréal, Canada

Christine Chambris
Université de Cergy-Pontoise, ESPE de l'académie de Versailles, France

Fidèle Ciake Ciake
Ecole normale supérieure de Yaoundé, Cameroun

Stéphane Clivaz
Haute Ecole Pédagogique de Lausanne, Suisse

Sylvie Coppé
Université de Genève, Suisse

Cécile de Hosson
Université Paris Diderot, France

Ahmed Djebbar
Académie Algérienne des Sciences et des Technologies, Algérie

Abdellah El Idrissi
ENS, Université Cadi Ayyad, Marrakech, Maroc

Fabien Emprin
Université de Reims Champagne Ardenne, ESPE de l'académie de Reims, France

Imène Ghedamsi
Université de Tunis,Tunisie

Patricia Nebout Arkhurst
École Normale Supérieure Cote d'Ivoire, Côte d'ivoire

Nicolas Saby
Université de Montpellier, France

Timbila Sawadogo
Ecole Normale Supérieure/Université de Koudougou, Burkina Faso

Laurent Theis
Université de Sherbrooke, Canada

Fabrice Vandebrouck
Université Paris Diderot, France

Le comité local d'organisation du colloque EMF 2018

Christine Chambris - Co-Présidente du comité d'organisation
Université de Cergy-Pontoise, LDAR, ESPE de l'académie de Versailles

Cécile de Hosson - Co-Présidente du comité d'organisation
Université Paris Diderot, LDAR

Cécile Allard
Université Paris-Est-Créteil, LDAR, ESPE de l'académie de Creteil

Anne-Amandine Decroix
Université d'Artois, LDAR, ESPE de Lille Nord de France

Edwige Godlewski
Sorbonne Université, Présidente de la CFEM

Nadine Grapin
Université Paris-Est-Créteil, LDAR, ESPE de l'académie de Creteil

Thomas Lecorre
Université de Cergy-Pontoise, Laboratoire Bonheurs, ESPE de l'académie de Versailles

Clément Maisch
Université de Cergy-Pontoise, LDAR, ESPE de l'académie de Versailles

Olga Maître
Université de Cergy-Pontoise, LDAR, ESPE de l'académie de Versailles

Gilbert Monna
Trésorier de la CFEM

Edith Petitfour
Université de Rouen, LDAR, ESPE de l'académie de Rouen

Christian Piotrowski
Université de Cergy-Pontoise, ESPE de l'académie de Versailles

Frédérick Tempier
Université de Cergy-Pontoise, LDAR, ESPE de l'académie de Versailles

Fabrice Vandebrouck
Université Paris-Diderot, LDAR

Espace Mathématique Francophone

L'Espace Mathématique Francophone (EMF) s'est constitué pour promouvoir réflexions et échanges au sein de la francophonie sur les questions vives de l'enseignement des mathématiques dans nos sociétés actuelles, aux niveaux primaire, secondaire et supérieur, ainsi que sur les questions touchant aux formations initiale et continue des enseignants. L'EMF contribue au développement d'une communauté francophone riche de ses diversités culturelles, autour de l'enseignement des mathématiques au carrefour des continents, des cultures et des générations. La langue de travail de l'EMF est le français. Les rencontres scientifiques de l'EMF, qui ont lieu tous les trois ans depuis 2000, sont reconnues comme conférences régionales de la Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique (CIEM). Elles s'adressent aux différents intervenants préoccupés par les questions qui touchent à l'enseignement des mathématiques : mathématiciens, didacticiens des mathématiques, chercheurs, formateurs, enseignants de différents niveaux. Les lieux des conférences sont choisis pour respecter un équilibre géographique et favoriser la participation d'une communauté francophone la plus large possible.

Les colloques de l'EMF visent à :

- permettre les échanges d'idées, d'informations, d'expériences, de recherches autour des questions vives en enseignement des mathématiques, en particulier en lien avec le thème retenu pour chacun d'entre eux ;
- renforcer la coopération entre des chercheurs, formateurs, enseignants, vivant dans des contextes sociaux et culturels différents, et ayant des préoccupations communes quant aux questions touchant à l'enseignement des mathématiques ;
- susciter la participation de jeunes enseignants et chercheurs aux débats sur l'enseignement des mathématiques, ainsi que leur contribution à l'élaboration de perspectives d'avenir ;
- favoriser la prise de conscience chez les enseignants, formateurs, chercheurs de leur rôle dans l'élaboration de la culture mathématique de leurs pays respectifs ;
- contribuer au développement, dans la communauté francophone, de la recherche en didactique des mathématiques et de ses retombées, notamment sur les formations initiale et continue des enseignants.

Les précédents colloques ont eu lieu à Grenoble (2000), Tozeur (2003), Sherbrooke (2006), Dakar (2009), Genève (2012) et Alger (2015). Vous pouvez notamment retrouver les actes de ces colloques : http://emf.unige.ch.

Colloque EMF 2018
Mathématiques en scène, des ponts entre les disciplines
Paris - 22 au 26 octobre 2018

Les mathématiques se sont construites et continuent à se construire dans l'interaction avec d'autres disciplines. Les témoignages historiques qui nous sont parvenus montrent que plusieurs notions mathématiques sont nées comme des réponses à des problèmes, des besoins concrets d'individus ou de groupes, et qu'elles ont évolué dans une dynamique de production d'outils ou de concepts et de résultats théoriques. Cette dynamique était tantôt suscitée par la pratique dans d'autres domaines et tantôt en réponse à un besoin de généralisation et de théorisation des mathématiques elles-mêmes.

Tout en restant un moyen d'exprimer des problèmes posés par d'autres disciplines et un ensemble d'outils puissants pour résoudre certains de ces problèmes, les mathématiques peuvent être envisagées comme des outils de compréhension du monde et de son évolution. C'est dans le développement et l'utilisation de modèles pour comprendre ou transformer ce monde que l'activité mathématique tend à s'inscrire aujourd'hui, souvent dans une collaboration entre disciplines scientifiques.

De plus, la présence croissante des outils technologiques dans les contextes social, culturel et scolaire amplifie la complexité des réalités contemporaines. Saisir le rapport de ces outils avec les modèles et les algorithmes qu'ils opérationnalisent, est un défi à relever pour que puissent s'exercer une pensée critique et une véritable participation citoyenne. De façon paradoxale, les mathématiques n'ont jamais été aussi présentes et aussi peu visibles. Il devient indispensable d'appréhender cette complexité du monde dans une approche multidisciplinaire, holistique et systémique. Le système éducatif n'échappe pas à cette approche et donc, penser l'enseignement des mathématiques dans son rapport avec l'enseignement d'autres disciplines dans un monde actuel en mutation est un moyen de penser l'outillage nécessaire aux élèves d'aujourd'hui pour vivre dans le monde de demain.

D'un point de vue institutionnel, la collaboration entre disciplines est de plus en plus promue par les réformes curriculaires dans différents pays, souvent comme solution retenue par l'institution pour aider les élèves à appréhender la complexité. Ainsi, divers dispositifs promeuvent la convocation de plusieurs disciplines : les approches par résolution de problèmes complexes, les démarches d'investigation, la pédagogie du projet, etc. À cela s'ajoutent, dans certains pays, de nouveaux profils/concours de professeurs bivalents en plus de l'installation, dans certains contextes, d'équipes pédagogiques pluridisciplinaires. Mais toutes ces réformes impliquent-elles un réel échange entre disciplines ou plutôt une collaboration a minima qui se limite à la juxtaposition ?

La conception de véritables situations d'apprentissage pluri/interdisciplinaires demande un travail important de recherche pour établir des ponts authentiques entre les disciplines. De plus, la collaboration de spécialistes des différentes disciplines invoquées paraît nécessaire, autant pour assurer la qualité et l'authenticité des situations proposées que pour favoriser une contribution significative au regard des apprentissages et éviter le risque, grand, de trahir l'une ou l'autre des disciplines. Se pose inévitablement la question cruciale de la formation des enseignants de mathématiques. L'enjeu ici serait d'ouvrir les enseignants de mathématiques à d'autres modes de pensée scientifique et notamment à leur caractère transversal, mais aussi de les initier à une réflexion épistémologique sur l'articulation des savoirs relatifs aux différentes disciplines. Ce sont ces enjeux des approches multidisciplinaires et interdisciplinaires dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques qui sont au cœur de la thématique du colloque Espace Mathématique Francophone 2018.

Plusieurs interrogations viennent ainsi alimenter cette thématique :

- À quels problèmes sociétaux, de recherche et d'enseignement, la question de l'interdisciplinarité répond-elle ?
- Comment qualifier la participation des mathématiques aux activités interdisciplinaires par rapport aux autres disciplines du point de vue épistémologique et du point de vue de l'enseignement ?
- Quels défis et opportunités pose l'articulation des concepts issus de différentes disciplines pour l'enseignement ?
- Comment les pratiques enseignantes prennent-elles en compte les injonctions institutionnelles ?
- Quels sont les apports pour les apprentissages des élèves et quelles en sont les difficultés ?

Enfin une question fondamentale est celle des conditions propices à une « véritable » collaboration entre disciplines, qui favorise les éclairages mutuels entre ces disciplines. C'est l'ensemble de ces questions et de ces défis que le colloque Espace Mathématique Francophone 2018 propose de traiter à travers les plénières, les groupes de travail et les projets spéciaux.

Table des matières

Conférences plénières **3**

Voir les autres disciplines dans leurs rapports avec les mathématiques : les avantages de l'histoire, Jean DHOMBRES 3

Mathématiques et didactique des mathématiques : quelles relations, Michèle, ARTIGUE, Nouzha EL YACOUBI, Bernard HODGSON 20

TABLE RONDE : Interdisciplinarité et mathématiques : dispositifs et prescriptions curriculaires 51

Contributions des groupes de travail **79**

Groupe de travail 1 **79**

Bilan du groupe 1 81

Connaissances mobilisées par les professeurs stagiaires pour préparer une séance de classe destinée à une évaluation certificative, ABBY-M'BOUA, P. 88

Regard de l'étudiant et de l'enseignant associé sur un dispositif de formation à l'enseignement des mathématiques, ADIHOU, A. & ARSENAULT, C. 96

Différents leviers pour des formations de professeurs des écoles initiées au sein d'un LEA, BLANCHOUIN, A., MOUNIER, E., GRAPIN, N. & SAYAC, N. 106

L'évaluation en mathématiques des professeurs des écoles débutants : quelles alternatives face aux contraintes de la formation ? CELI, V., MASSELOT, P. & TEMPIER, F. 115

Débuter dans l'enseignement des mathématiques : quel impact de la formation initiale? CHOQUET, C. & ZEBICHE, N. 124

Comment un processus de lesson study conduit-il les enseignants à utiliser et à développer leurs connaissances mathématiques ? CLIVAZ, S. 132

Comparaison des rapports au savoir en mathématiques et en physique de professeurs des écoles, DECROIX, A.-A., CHENEVOTOT, F., GALISSON, M.-P. & BAHEUX, C. 142

La multiplication posée en formation des enseignants, DERUAZ, M., BALEGNO, M. & BATTEAU, V. 151

Quelles pistes pour une évaluation du dispositif de formation PACAL ? GRUGEON-ALLYS, B., CHENEVOTOT-QUENTIN, F., PILET, J. & HOROKS, J. 161

Identification des potentialités d'un jeu de rôles dans le cadre d'une formation de professeurs des écoles, GUILLE-BIEL WINDER, C., MANGIANTE-ORSOLA, C., MASSELOT, P., PETITFOUR, E. & SIMARD, A. 171

De la formation à la pratique : que peut nous apprendre l'analyse de pratiques de stagiaires ? HERSANT, M. 180

La connaissance des futurs enseignants de mathématiques : une étude par l'approche interdisciplinaire. Le cas de la notion d'intégrale, LÊ T.-H.-C. & NGÔ, M.-Đ. . . . 189

Sur la mise en évidence d'effets d'une formation courte sur les pratiques d'enseignants autour de la simulation en probabilités en classe de troisième, MASSELIN, B. & DEROUET, C. 198

Formation initiale des enseignants de mathématiques à l'École Normale Supérieure de Yaoundé 1 : Des pratiques actuelles aux perspectives futures, NSEANPA, C. J. & TCHEUFFA NZIATCHEU, J. 208
L'écart type et son interprétation graphique, VERMETTE, S. 216
Affiches GT1 225
Le thème des grandeurs et mesures dans la formation des enseignants du primaire : une approche interdisciplinaire, MAISCH, C. & ABBOUD, M. 225

Groupe de travail 2 **229**
Bilan du groupe 2 231
Enseignement et apprentissage de l'infini aspects philosophiques, épistémologiques et didactiques, BOULAIS, P., BROUZET, R., DURAND-GUERRIER, V., MAJAJ, M. MARINO D., MONNOYEUR, F. & VERGNAC M. 236
Entre démarches des élèves et connaissances des enseignants : quelle progression de la pensée algébrique entre 10 et 14 ans ? DEMONTY, I. 246
Analyse d'une situation d'enseignement-apprentissage visant à sensibiliser les élèves de première S au concept de limite d'une suite, GIBEL, P. 256
Étude des raisonnements mathématiques d'élèves de première année lors de la réalisation d'une activité nécessitant l'utilisation de matériel de manipulation, JEANNOTTE, D. & CORRIVEAU, C. 266
Une méthodologie d'analyse du curriculum officiel à propos de la pensée algébrique, LARGUIER, M. & BRONNER, A. 275
Pensée intuitive en classe de mathématiques, RIOUX, M. 284
Le potentiel du développement de la pensée fonctionnelle dans les manuels scolaires québécois du 3e cycle du primaire : une analyse praxéologique, ROBERT, V., SQUALLI, H. & BRONNER, A. 294

Groupe de travail 3 **305**
Bilan du groupe 3 307
Justifier une technique opératoire au cycle 3 : le cas de la division par deux, CHORLAY, R. 311
Histoire des mathématiques en classe : une analyse au niveau des conceptions des élèves, DE VITTORI, T. 319
La duplication du carré avec Platon en CM2 et en 6e, GAUTREAU, A. & HEGUIAPHAL, D. 327
Ressources et pratiques d'enseignements de la réforme des mathématiques modernes en Hongrie et en France, GOSZTONYI, K. 334
La détransposition des savoirs de l'analyse mathématique au secondaire, HATEGEKIMANA LUANDA, E. 342
Potentialités de l'histoire des mathématiques dans la formation des enseignants de mathématiques, LEMES, A.-J. 350

Groupe de travail 4 **359**
Bilan du groupe 4 361
Est-il-indispensable d'être un spécialiste en mathématique pour être un enseignant de biologie ? ABOU RAAD, N. 368
Une séance de géométrie élémentaire prenant appui sur une séance d'EPS a-t-elle un potentiel d'apprentissage en géométrie ? Un exemple au cycle 3, ARAB HADJMOUSSA, M. 376
La modélisation algébrique des problèmes : rapport institutionnel à l'entrée de l'enseignement secondaire tunisien, HASSAYOUNE, S. 385

La construction du concept physique de volume en cycle 3 : quelles difficultés ? quelles stratégies didactiques ? JAVOY, S., DECROIX, A.A. & de HOSSON, Cécile . . . 395
Espaces de travail mathématique connectes au lycée : un pont entre les mathématiques et les sciences physiques. Modélisation des câbles d'un pont suspendu par une fonction numérique spécifique, LAGRANGE, J.-B. 405
Un exemple de formation des professeurs de mathématiques à la modélisation, LÉCUREUX-TÊTU, M.-H. 415
Etude d'une approche collaborative entre mathématiques, physique et biologie : cas de l'enseignement de la stroboscopie, MALONGA MOUNGABIO, F. 424
Le cadre théorique de l'ETM étendu : analyse d'une séquence utilisant la relativité restreinte, MOUTET, L. 433
(Re)Modélisation de décors géométriques : l'exemple de la mosaïque antique, PARZYSZ, B. 441
De quelques difficultés de l'interdisciplinarité, ROGALSKI, M. 451
Quelles synergies possibles entre mathématiques et physique dans l'enseignement ? ROLAND, M. 460
La pensée arithmético-algébrique comme transition du primaire au secondaire : des situations d'investigation dans lesquelles modélisation et technologie jouent un rôle central, SABOYA, M. 471
EST... M. Enseignement des sciences et technologies.. et des mathématiques, SOUCHARD, L. 482
La ligne droite, un objet pluridisciplinaire au début de l'enseignement secondaire : une analyse institutionnelle des manuels, TCHONANG YOUKAP, P. 491
Affiches GT4 501
L'analyse de l'activité cérébrale associée à la réalisation de tâches mathématiques, LARA-MELGOZA, R. 501
Conditions institutionnelles dans la formation à l'enseignement de la modélisation : cas français, CABASSUT, R. 503
Échec des élèves des séries C et D au niveau de l'exercice de mécanique en sciences physiques au baccalauréat en Côte d'Ivoire. Le cas des élèves de la région de la Me, N'GBO, Y. 506
Qu'est-ce qu'il se passe quand une figure géométrique rencontre Flatland ? PAVLOPOULOU, K. 509

Groupe de travail 5 **511**
Bilan du groupe 5 513
L'adaptation des signes et techniques dans la transition secondaire/supérieur. La modélisation est-elle une aide ? Analyse des difficultés des étudiants, BLOCH, I. . . . 522
Classe inversée pour introduire les suites numériques : une expérience en première année universitaire, BRIDOUX, S. 531
L'identité professionnelle des enseignants-chercheurs en mathématiques, chimie et physique, BRIDOUX, S., DE VLEESCHOUWER, M., GRENIER-BOLEY, N., KHANFOUR-ARMALÉ, R., LEBRUN, N., MESNIL, Z., & NIHOUL, C. 540
Les cours préparatoires de Calcul à l'université, au Québec : the same, but different ? GONZÁLEZ-MARTÍN, A. S. 548
L'interdisciplinarité mathématiques-philosophie : un levier pour la formation des enseignants, HAUSBERGER, T. & ROY, A. 557
L'outil mathématique à l'université – Qu'en disent des étudiants de première année universitaire ? HOPPENOT. P. 566
Rôle des médiateurs visuels et du vocabulaire utilisé dans l'établissement d'une communication efficace lors de la résolution d'un problème de mathématique appliquée, KHALOUFI-MOUHA, F. 577

Rationalités et infini dans le calcul de grandeurs finies, LECORRE, T. & GHEDAMSI, I. 587
Les équations de droites dans l'espace : une étude des proximités discursives dans les manuels de l'enseignement secondaire belge, NIHOUL, C. 597
À la frontière des institutions : quelles mathématiques par et pour les ingénieurs ? QUÉRÉ, P.-V. 606
Affiches GT5 615
Les difficultés liées à l'apprentissage de l'intégrale définie à l'entrée en classe préparatoire, AKROUTI, I. 615
Le processus de transposition didactique de l'objet développement limité, BELHAJ AMOR, F. 620
Une étude praxéologique montrant les choix de transposition d'un enseignant d'algèbre abstraite, CANDY, J. 624

Groupe de travail 6 **629**
Bilan du groupe 6 631
Conception de ressources didactiques qui articulent des concepts mathématiques et didactiques, ADIHOU A., LEROUX A.-J. & BRISSON O. 638
Courtes vidéos de cours (capsules): une ressource pour la classe inversée, avantages et inconvénients. Points de vue d'enseignant et de didacticiennes, ALLARD C., ASIUS L., HOROKS J. & ROBERT A. 649
Reproduire un cercle: une ressource dont la conception, la diffusion et l'usage sont problématiques, BULF C. & CELI V. 658
Outiller les enseignants pour la sélection de tâches mathématiques dans les manuels, CASTELA, C. 667
Gestes professionnels langagiers didactiques et usages d'une ressource visant à introduire les fractions à l'école, COULANGE L. & TRAIN G. 677
Analyse du milieu via la dialectique medias-milieux : une étude de cas dans le contexte du dénombrement, DE SIMON M., BARQUERO B. & CHAHAACHOUA H. . . . 686
L'évolution d'une ressource, DOUAIRE J. & EMPRIN F. 695
Les médiations documentaires comme cadre pour analyser les systèmes de ressources des enseignants, FOFANA O. & SOKHNA M. 703
Enjeux de diversification et complexification de ressources : un cas de programmation informatique d'un robot dans une école de demain, FREIMAN V. & CHIASSON M. 712
Un dispositif de formation initiale de professeurs stagiaires basé sur un système de ressources primaire, GEORGET J.-P. 721
Influence des ressources sur la conception de l'enseignant du concept "vecteur", HAYFA N. 729
Descripteurs didactiques d'"exercices de mathématiques" : catégorisation ; utilité et utilisabilité d'un modèle, JOLIVET, S. 737
La notion de support au centre d'un modèle des situations d'enseignement/apprentissage, ressource pour comprendre et pour faire, LEROYER L. 746
Analyse de choix de conception d'une ressource portant sur l'enseignement de la géométrie, MANGIANTE-ORSOLA C 754
Analyse des tâches probabilistes proposées dans une collection de manuels scolaires du primaire au Québec, MARTIN V., MALO M. & THIBAULT M. 763
La "fiche d'observation d'un fait didactique", une ressource dans le travail collaboratif professeurs/chercheurs, MERCIER A. & QUILIO S. 771
Analyse de la structure d'un système de ressources, articulation entre aspect dynamique et aspect statique: cas d'une enseignante de mathématiques, SAYAH K. 780
Affiches GT6 788

Ressources produites et diffusées par la COPIRELEM pour la formation des professeurs des écoles, EYSSERIC, P. 788
La ressource comme objets-avec-lesquels-penser: exemple d'un jeu mathématique, HEROUX S. & MAHEUX J.-F 791
Présentation de la base PUBLIMATH, LANGUEREAU H. & GARDES M.-L. 793

Groupe de travail 7 **795**
Bilan du groupe 7 797
Numérique et développement de l'autonomie des élèves en mathématiques : un outil pour l'analyse de ressources, GUEUDET, G. & LEBAUD, M-P. 802
Un cas d'étude avec scratch à l'école primaire : distance et repères, HASPEKIAN, M. 811
Développement des usages du numérique éducatif dans le contexte de l'enseignement des mathématiques au Congo–Brazzaville, MALONGA MOUNGABIO, F., TSIKA KIMBATSA, P., MOUYAMA NGOMA, M. & DENYS B. 820
Enjeux sémiotiques dans la conception d'une aide a la résolution de problème de preuve, VENANT, F., RICHARD, P. R., GAGNON, M. & HENRIQUES, C. 828
Séquence de tâches mathématiques avec la géométrie dynamique, ZHU, F. 836
Affiches GT7 843
Un nouveau modèle d'apprentissage dynamique, application à un concept mathématique, ACHTAICH, N., DIYER, O. & NAJIB, K. 843
Exemples de ressources pour le travail d'élèves en seconde. Une classe virtuelle à l'IREM de Paris, GNANSOUNOU, A., MESQUITA, A. L., BAHEUX, C., CHENEVOTOT-QUENTIN, F., DENYS B. & GALISSON M-P. 847

Groupe de travail 8 **851**
Bilan du groupe 8 853
Approcher la diversité culturelle dans l'enseignement des mathématiques à travers le filtre du langage professionnel des enseignants, ARTIGUE, M. 860
Quelques idées pour traiter les problèmes de la globalisation de l'enseignement des mathématiques, BOERO, P. 869
Quelles pratiques langagières ? quels enjeux ? DOUEK, N. 878
Perception des mathématiques chez les Hmong en France, GRIFFITHS, B. 886
Aspect culturels des mathématiques : Enjeux et perspectives pour un cours classique de mathématiques, KY, A-J. 895
L'ethnomathématique et la mise en question d'une mathématique occidentale universelle, RADFORD, L. 902
La construction discursive de l'activité de l'élève dans le programme cadre et dans une série de manuels scolaires en Ontario : Une analyse de textes sur les fractions, TCHEUFFANZIATCHEU, J. 911
Mathématiques et langage : le cas des classes multilingues, un défi pour l'enseignement Luxembourgeois, VLASSIS, J. 919

Groupe de travail 9 **927**
Bilan du groupe 9 929
L'addition dans les programmes scolaires. Quel continuum pour la construction des savoirs en mathématiques du primaire au collège ? ATTA, K.Y. G. 936
Analyse des pratiques enseignantes en rapport avec les praxéologies de mise en équations à l'entrée au lycée : une étude de cas dans le contexte tunisien, BEN NEJMA, S. 944
Intégrer des évaluations entre pairs dans les séances de mathématiques : un exemple en algèbre au collège, COPPÉ, S. & ROUBIN, S. 953

Diagnostic des difficultés de l'enseignement-apprentissage de l'addition. Exemple : la monnaie « DRM » au premier cycle de l'enseignement fondamental au Mali, COULIBALY, H. . . . 963
Théorie de la double approche et structuration du milieu apports et complémentarités, COUTAT, S. . . . 972
Déterminant de l'anxiété liés aux mathématiques chez des sujets de 10 à 18 ans, DJELLE, O P.-A. & COULIBALY, H. . . . 981
Prise en compte des erreurs par les élèves : le cas des narrations de recherche, FAVIER, S. . . . 990
Rapports aux mathématiques des enseignants du primaire et leur enseignement, GOUDENON, S. . . . 999
Des objets mathématiques pour construire une frise chronologique en classe d'histoire, HONVO, C. . . . 1008
Régulations didactiques et pratiques enseignantes, KIWAN-ZACKRA, M. & RODITI, E. 1015
Quel apport des mathématiques dans l'enseignement-apprentissage de la germination de la graine en CE1 ? KOUADIO K. D. . . . 1024
Effets potentiels d'une évaluation des pratiques enseignantes d'évaluations sur les apprentissages algébriques des élèves au collège, PILET, J. & HOROKS, J. . . . 1030
Facteurs de décisions didactiques dans l'enseignement des mathématiques au secondaire en Andorre, PONS-DURO, R. & CHAACHOUA, H. . . . 1039
De l'analyse d'un dispositif d'enseignement du calcul soustractif en CE2 à l'analyse des connaissances requises en numération, RINALDI, A.-M. & CHAMBRIS, C. . . . 1048
Difficultés d'extraction de la moyenne arithmétique à partir d'un graphique statistique : cas de l'histogramme, ROUAN, O. & EL DRISSI., A. . . . 1056
L'enseignement de langage mathématique abstrait et la réussite scolaire abusive chez les apprenants : cas des élèves de la troisième des collèges de la commune d'Atakpamé, TCHASSAMA, A. M. . . . 1065
Affiches GT9 . . . 1074
Mise en place de travaux collaboratifs selon la démarche du "Jigsaw teaching", HALBERT, R., MANENS, M.-C., BROUTTELANDE, C., FORGEOUX, E., LAGRANGE, J.-B., LE BIHAN, C., LE FEUVRE, B., LEMETAYER, A., MAULAUSSENA, C & MEYRIER, X. . . . 1074

Groupe de travail 10 **1077**
Bilan du groupe 10 . . . 1079
Analyse des effets d'un enseignement fondé sur la recherche de problèmes, ALDON, G., FRONT, M., & GARDES, M.-L. . . . 1085
La démarche d'investigation dans le cadre du Baccalauréat International, LACKOVA, J. & DORIER, J.-L. . . . 1094
DEI et éducation mathématique : nécessité et viabilité dans les pratiques de classe ordinaires, LAI, S. & POLO, M. . . . 1102
Invitation à la pluralité du "faire mathématique", MAHEUX J.-F. . . . 1112
Co-construire des connaissances mathématiques entre l'enseignant et les élèves : comment piloter l'approche par une démarche d'enquête et d'investigation ? MANUEL, D. & SAVARD, A. . . . 1122
Vers une épistémologie commune pour l'étude didactique des démarches d'enquête et d'investigation en mathématiques et en physique ? OUVRIER-BUFFET, C. . . . 1132
Investigation mathématique à travers un enseignement par résolution de problèmes : pistes initiales, PROULX, J. . . . 1141
Proposition d'une grille d'évaluation des pratiques enseignantes lors de séances fondées sur des démarches d'investigation en mathématiques au primaire, TUFFERY-ROCHDI, C. . . . 1151

Groupe de travail 11 **1161**

Bilan du groupe 11 1163

Problèmes de synchronisation dans l'enseignement des mathématiques auprès d'élèves sourds, ASSUDE, T., MILLON-FAURE, K. & TAMBONE, J. 1170

Recherche coopérative sur l'introduction de la géométrie dynamique en Segpa, ATHIAS, F. & LE BORGNE, P. 1179

Recherche autour des gestes professionnels observés en pédagogie de soutien individuel, VULLIEMIN, M. & BELLANGER, P. 1187

Un outil d'analyse de la pratique au service de la démarche problem solving avec des élèves en difficulté, DENERVAUD, S. & DIAS, T. 1195

Jeu de pouvoir dans l'enseignement spécialisé, HOUDEMENT, C. & PETITFOUR, E. 1205

Étude de l'impact des difficultés langagières des élèves allophones sur leur activité mathématique, MILLON-FAURE, K. & MENDONCA-DIAS, C. 1213

Étude d'un dispositif d'aide à l' intention d'élèves en difficulté dans la résolution d'une situation-problème mathématique, MORIN, M.-P., THEIS, L., ASSUDE, T., MILLON-FAURE, K., TAMBONE, J., KOUDOGBO, J., HAMEL, V. & MARCHAND, P. 1221

Analyse didactique de tests visant à évaluer les compétences mathématiques de base dans le cadre scolaire ou de diagnostic de la dyscalculie, PETEERS, F. 1230

Accompagner les enseignants spécialisés dans l'évaluation des compétences mathématiques de leurs élèves, REYDY, C. & URRUTY, P. 1239

Dispositif pour aborder la notion d'angle avec des élèves de 10-12 ans dans une classe d'enseignement spécialisé dans le canton de Vaud (Suisse), SERMENT, J. 1249

Appuis individuels pour le repérage de l'anxiété mathématique chez une élève du gymnase, TWARDOCH, C., DIAS, T. & DERUAZ, M. 1258

Processus de dévolution d'une même série de tâches dans plusieurs contextes, VENDEIRA, C. 1268

Affiches GT11 1277

L'enseignement des mathématiques pour une école inclusive en côte d'Ivoire : Cas des élèves handicapés visuels de l'Institut National pour la promotion des aveugles (INPPA) d'Abidjan, KOUAME, P. 1277

Groupe de travail 12 **1281**

Bilan du groupe 12 1283

Quelle image des mathématiques peut être apportée par les différents acteurs de la vulgarisation des mathématiques? Exemple du projet Maths à modeler, GODOT, K. 1289

Regards sur les ateliers récréatifs, GROUPE AlPaGe 1 1298

Un avenant au contrat didactique : la vulgarisation en classe, GROUPE AlPaGe 2 . . 1310

Esquisse d'un modèle didactique d'analyse pour les actions de diffusion des mathématiques, PELAY, N. 1317

La didactique des mathématiques pour décrire et analyser des activités d'animation scientifique, POISARD, C. 1325

La tour de Hanoï, RITTAUD, B. & GROUPE AlPaGe 1334

Quel rôle peut jouer l'histoire des mathématiques dans une action de vulgarisation des mathématiques ? ROUGETET, L. 1343

La pratique de l'animation scientifique à travers le discours des animateurs, SOUSA DO NASCIMENTO, S. 1351

Contributions projets spéciaux **1363**

Projet Spécial 1 **1363**

Bilan du projet spécial 1 1365

Activité mathématique dans un contexte d'exposition avec manipulations d'objets : utopie ou réalité ? DA RONCH, M. 1368

Une perspective historique favorise-t-elle la réussite de l'enseignement des mathématiques ? Le cas des nombres complexes au Sénégal, DIALLO, M. L. 1377

Changement de variable dans la résolution d'équations trigonométriques en 11eme sciences, DIARRA, A. 1386

Application des rapports trigonométriques à un problème de la vie courante en 10e, DIARRA, S.S. 1395

Difficultés des éleves du secondaire avec la notion d'intégrale : une étude de cas, DUPUIS, A. 1402

Analyse multidimensionnelle de l'enseignement des mesures et des grandeurs à travers les programmes de l'enseignement fondamental, EL ABBADI, S. 1410

Etude des séances de découverte dans les manuels scolaires : le cas de la division au CE2, HAGÈGE, E. 1418

Le passage de la géométrie physique à la géométrie théorique au cycle 3, HAIRON, E. 1426

Dispositif de soutien individualisé en mathématiques, LEROUX, A.J. 1433

Introduction du concept de limite en classe de première scientifique au Cameroun : un exemple d'approche par les compétences, NGOUFO, H. 1439

Les pratiques des enseignants dans la résolution des systèmes d'équations du premier degré à deux inconnues en classe de 3e., OHOUNI AREREY, L. 1449

Intérêt de la statistique dans l'enseignement secondaire en Côte d'Ivoire, TIEKOU, Z. E. 1457

Questionnement enseignant en contexte de résolution de problème, VAN MOORHEM, A. 1464

Projet Spécial 2 **1473**

Bilan du projet spécial 2 1475

Quelle institutionnalisation pour une même situation de géométrie en primaire et au collège ? BLANQUART-HENRY, S. 1481

Enseigner les nombres décimaux et les fractions - transitions (ou ruptures ?) primaire–secondaire, COULANGE, L. & TRAIN, G. 1490

Des outils pour analyser la transition collège-lycée en mathématiques, HOROKS, J. & CHESNAIS, A. 1500

L'enseignement de la géométrie dans la transition college-lycee, MRABET, S. 1507

Facteurs de complexite des mathematiques superieures, NAJAR, R. 1515

Projet Spécial 3 **1525**

Bilan du projet spécial 3 1527

Quelques résultats concernant les compétences en résolution de problèmes d'élèves évalués sur un même problème et à l'aide d'une même grille d'évaluation, CHANUDET, M. 1532

Impact des illustrations accompagnant les problèmes problématiques : focus sur le codage des réponses, FAGNANT, A. & AUQUIERE, A. 1540

Étude des pratiques évaluatives de professeurs des écoles dans le cadre d'un LéA, SAYAC, N., GRAPIN, N., BLANCHOUIN, A. & MOUNIER, E. 1549

Évaluation et inégalités scolaires : étude exploratoire en mathématiques et en sciences, en France et en Suisse, SAYAC, N., PLOYE, A., MARLOT, C., DELARUE-BRETON, C. & DUCREY, M. 1557

Affiches SPE3 1564
Picpvt, une tache d'évaluation de la compréhension de la double représentation des symboles dans les nombres : validation chez des enfants de 1ère année de primaire, OSANA, H. P., LAFAY, A. & BLONDIN, A. 1564

Projet Spécial 4 **1569**
Bilan du projet spécial 4 1571
Analyse de l'activité cérébrale associée à la réalisation des tâches mathématiques : une étude faisant intervenir trois disciplines, LARA-MELGOZA, R., MORALES-MORENO, L. F., ROMO-VÁZQUEZ, A., ROMO-VÁZQUEZ, R. & VÉLEZ-PÉREZ, H. 1578
Étude d'un dispositif de travail collaboratif visant la conception d'une ressource pour l'enseignement de la géométrie, MANGIANTE-ORSOLA C. 1587
Quelle relation entretiennent des professeurs et des chercheurs dans une ingénierie didactique coopérative ? Le rôle du dialogue d'ingénierie dans le travail collaboratif, MORELLATO M. 1597
Recherches collaborative en action : un éclairage sur le critère de double vraisemblance, SABOYA M. & TREMBLAY M. 1606
Collaboration entre enseignants à l'université et émergence d'idées, TRIGUEROS M. & LOZANO M.-D. 1615
Affiches SPE4 1624
J'avais jamais vu ça comme ça avant ! Un projet de recherche-action collaborative pour la formation continue en mathématiques au secondaire, RENE DE COTRET S. & PASSARO V. 1624

Projet Spécial 5 **1629**
Bilan du projet spécial 5 1631
Pensée informatique en enseignement des mathématiques post-secondaires : un cadre conceptuel, BUTEAU C., MULLER E., SACRISTAN A.I. & MGOMBELO J. . . 1640
L'algorithmique et la programmation pour la construction du sens de la division euclidienne, CHAACHOUA H., TCHOUNIKINE P. & CRISCI R. 1649
Recherche binaire et méthode de dichotomie, comparaison et enjeux didactiques à l'interface mathématiques – informatique, MEYER A. & MODESTE S. 1658
Conception de la notion d'algorithme à la transition secondaire-supérieur en France, MODESTE S. & RAFALSKA M. 1668
Entre probabilités et statistiques : un jeu algorithmique pour simuler la fluctuation d'échantillonnage, TRUNKENWALD J. 1677
Affiches SPE5 1681
Analyse des outils de contrôle lors de la résolution algorithmique ou mathématique d'un problème, BEAUVOIR S. 1681

Actions et manifestations **1693**

Conférences plénières

VOIR LES AUTRES DISCIPLINES DANS LEURS RAPPORTS AVEC LES MATHEMATIQUES : LES AVANTAGES DE L'HISTOIRE

DHOMBRES* Jean G.

Résumé – Pour permettre un regard large sur les liens entretenus par les mathématiques avec les autres disciplines, et disposer d'un miroir par ce biais, je me charge de trois « cas » bien différents que je considère au nom d'un même principe : voir des mathématiques ailleurs qu'en mathématiques. Le premier cas, de loin le plus développé, concerne la musique qui fut longtemps enseignée comme une science pratique de type mathématique avec le maniement de certains rapports d'entiers, et qui fut radicalement repensée au XVII^{e} siècle grâce à la notion de fréquence et à la théorie mathématique des cordes vibrantes. Elle est ensuite gérée par une équation aux dérivées partielles inventée par Jean d'Alembert un peu avant 1750, mais véritablement « comprise » par l'intervention de Fourier avec l'équation de la chaleur. Un tel changement de domaine ne manque pas d'étonner. D'autre part, j'envisage l'astrologie, tenaillée entre une description purement géométrique des « influences » et la causalité matérielle de celles-ci ; il suffira de présenter la réfutation par Kepler qui fournit une bonne approche sur ce que la mathématique ne peut pas défendre. Je termine en forme de conclusion par le calcul, une activité qui fait peut-être la spécificité des mathématiques en tant que science, et présente le « calculable » à partir de la machine de Turing, et ce que nous apprend la pratique de l'informatique, une discipline qui n'est pas mathématique.

Mots clefs : Histoire des mathématiques, ondes, fonctions périodiques, cycloïde, didactique, calcul, représentation des calculs.

Abstract – To allow a broad look at the links maintained by mathematics with different disciplines, or even to get a mirror image from other disciplines, I take care of three "cases" that I consider in the name of a single principle: see mathematics outside of mathematics. The first case concerns music, which was long taught as a science of mathematical type with the handling of some ratios of integers only, and which was radically redesigned during the seventeenth century thanks to the notion of frequency and then to the mathematical theory of vibrating strings. It is managed by a partial differential equation invented by Jean d'Alembert shortly before 1750, but truly "understood" by Fourier's intervention with the equation of heat. This change of domain sounds rather astonishing. On the other hand, I consider astrology, which had to work with a geometrical description of influences and material causal explanations ; so I just present the refutation by Kepler, which provides a good precision about what mathematics cannot be used to. The conclusion is about computation that perhaps provides the specific character for mathematics among the various sciences. I present what is « computable » according to the Turing machine, and what teaches the practice of computer science, a domain that does not lie within mathematics.

Key words: History of mathematics, waves, periodic functions, cycloid curve, didactics, computation, representation of computations.

I. INTRODUCTION. LE RAPPORT EVOLUTIF ENTRE LES DISCIPLINES

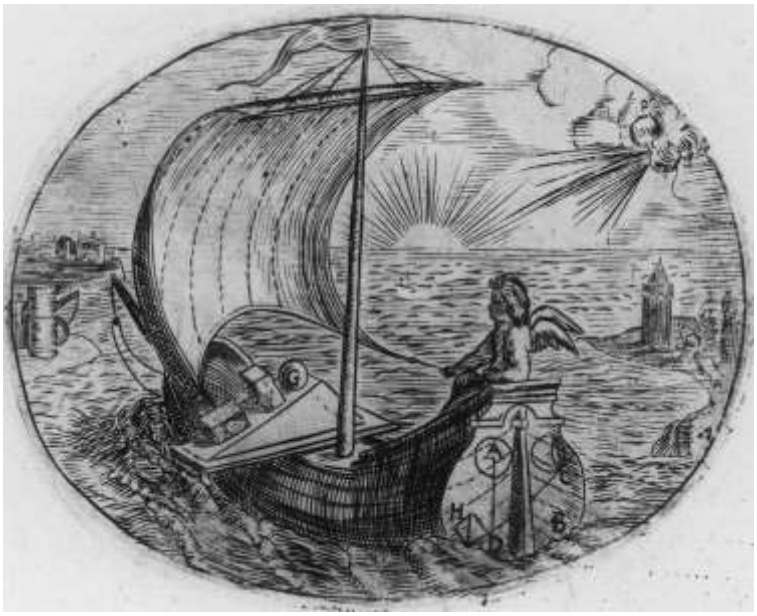
Selon les différentes civilisations qui connaissent des différentiations au sein de ce qui peut être considéré comme un savoir scientifique, et au fil des âges, les mathématiques se présentent autant comme une forteresse autonome que comme une accueillante résidence susceptible de s'agrandir grâce à des questions issues d'autres disciplines. De sorte que les mathématiques suscitent à peu près partout une double réaction selon différentes phases temporelles : une croyance enthousiaste en son pouvoir à tout résoudre pouvant aller jusqu'au refus de problèmes qui ne se couleraient pas dans le moule mathématique, et une indéniable peur que l'on retrouve tant en Orient qu'en Occident et qui ne tient pas qu'au fait religieux, ou seulement à la tentation qu'ont certains d'utiliser les mathématiques comme un déguisement

* Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales – France – jean.dhombres@cnrs.fr

de vérité pour faire passer des conclusions douteuses. On le constate aussi bien en astrologie des directions dans le monde arabe que dans les discours d'aujourd'hui sur les *Big Data* censées tout expliquer et même débarrasser l'esprit de tous les « encombrements théoriques », notamment ceux issus des sciences sociales. Voir des mathématiques ailleurs qu'en mathématiques est donc à la fois facile et déroutant. Facile, mais peu intéressant si on tient le discours du progrès conçu comme une mathématisation inéluctable et au fond sans effort de la pensée. Déroutant si l'on tient le discours contraire de la peur des mathématiques, qu'il ne faut pas réduire à de l'irrationnel. Que faire, si l'on veut au moins comprendre cette situation schizophrénique sur le long terme ?

Pour bien poser le problème, et puisque d'histoire il est question, je veux commencer par une image ancienne pour évoquer le thème difficile, et ambigu au sens que l'on va voir, de ce beau colloque.

Voici un bateau dont la voile est gonflée par de furieux zéphyrs (ill. 1) : sur l'étambot, coupées par le gouvernail, des figures sont dessinées qui n'ont rien d'euclidien au sens de provenant d'une discipline géométrique ; à la place des passagers une expérimentation a lieu. Elle concerne la descente de solides sur un plan incliné selon la loi de Galilée. Vous savez que c'est la formule $(1/2)\ mv^2 = mgh$ qui, au final, fait disparaître la masse, contrairement à toute attente du bon sens. L'image date précisément de 1624. Voilà, par cette loi évoquée, la preuve du rapport efficace et nécessaire qu'entretiendrait avec les mathématiques cette discipline en création qu'était la dynamique.



Ill. 1. Illustration donnée avec le théorème 4 de *Theoremata mathematica de scientiae staticae. De ductu ponderum per planitiem rectà et obliquè Horizontem decussantem.* Il s'agit une thèse soutenue en 1624 chez les jésuites de Louvain, dans laquelle la loi de la chute des corps est discutée, avant même la parution en 1638 du livre de Galilée. Le dessin montre beaucoup plus en fait (Dhombres, Radelet-de Grave, 2008)

Ce qui précède est tout à fait vrai, mais ne dit qu'un des enseignements de l'image, qui n'est évidemment pas de simple illustration dans cette thèse. L'essentiel est dans le mot « relativité » que nous pouvons prononcer ici, ayant lu Einstein au XX^{e} siècle. Je n'exagère pas : la loi de chute des corps, établie au XVII^{e} siècle, est vue indépendante du mouvement (supposé uniforme) du bateau. Est-il besoin que j'énonce en termes d'invariance dans les repères galiléens ? L'image dit que la relativité relève de la physique, mais les mathématiques d'alors, sans utilisation d'un repère analytique, ne pouvaient pas permettre d'énoncer ladite relativité. Vous comprenez maintenant pourquoi j'avais qualifié d'ambiguë la question posée par le présent colloque. L'ambigüité tient à ce que les autres disciplines ne sont pas plus stables que les mathématiques, et le regard peut varier selon que l'on fait l'histoire, ou l'épistémologie, et bien sûr que l'on cherche des conséquences didactiques. L'ambiguïté est

pourtant ce qui contraint à penser et pousse à ne pas se laisser prendre par les préjugés et les idées toutes faites d'une mathématique lorsqu'elle s'isole complètement et ne tient pas compte d'autres sources. Car la mathématique s'incorpore souvent des idées venues d'ailleurs, comme elle modifie aussi bien ces idées dans leur lieu d'origine même.

Tenter de saisir un monde mathématique dans ce qui ne l'est pas mais peut le devenir - dans l'image ci-dessus la discipline appelée dynamique - a le plus souvent été fait sans relation à l'histoire. Au nom d'une épistémologie abstraite, c'est-à-dire au nom d'un ordre intellectuel qui ne peut pas envisager l'abstraction autrement que logiquement première et intellectuellement autonome. L'avantage de l'histoire est de pouvoir constater que la notion de discipline est assez variable dans le temps, et que les disciplines ne se sont pas toujours constituées par scissiparité ; la division quand elle a effectivement lieu, peut modifier aussi bien la science mère que celle nouvellement construite. L'exemple phare est celui de la physique mathématique, une expression mise en place au XVII^{e} siècle sous la plume d'un Marin Mersenne, pour notamment décrire ce qu'avait fait Galilée avec la chute des corps. Les épistémologues décrivent le plus souvent une application des mathématiques, auquel cas nous ne gagnerions rien à chercher des mathématiques qui y seraient particulières. Ici, et par l'image, c'est en fait une physique qui se manifeste, passant par une expérimentation bien particulière ; elle relève en plus de l'expérience de pensée. La mathématique est à advenir, avec la notion de repère, la géométrie analytique, etc.

Subrepticement, j'ai fait intervenir un outil intellectuel qui n'a pas toujours été, et qui n'a pas été fabriqué dans le monde mathématique, mais est remarquablement utile pour étudier le lieu mathématique en dehors de la mathématique elle-même. C'est celle d'expérience de pensée, un concept dû au Polonais Ludwik Fleck dans les années 1930 pour expliquer des travaux de biologie en liaison avec la syphilis, idée reprise avec intérêt par Thomas Kuhn, l'auteur de la *Structure des révolutions scientifiques* en 1962, et elle a joué un rôle sérieux dans les études historiques sur la science. Cette dernière avance en faisant jouer la main, l'appareillage technique, voire la machine à calculer, mais aussi la tête et l'esprit d'un temps, auquel il faudrait bien sûr mettre un pluriel. Les mathématiques, dans l'image qu'elles donnent dans toutes les sciences, s'avèrent un outil assez fiable, et peu coûteux, pour imaginer autre chose. Alors qu'on les réduit trop souvent à leur indéniable rôle de formalisation.



Ill. 2. Illustration venant en frontispice du « Nouvel Almageste » du jésuite Giambattista Riccioli en 1651 : *Almagestum astronomiam veteremque novamque complectens*, Benati, Bologne. L'astronome antique Ptolémée est à terre, avec son système mis tout en bas, mais il sera « érigé à nouveau car corrigé » lui fait proclamer en latin un des phylactères de l'image. Les deux systèmes opposés de Copernic et de Tycho Brahe sont « pesés ». Ils sont mis à égalité si l'on veut bien lire la perspective, ou en situation défavorable à Copernic si par le poids vers le bas on veut le voir ainsi avec une certaine orthodoxie dogmatique. Le jeu de l'ambiguïté est manifeste dans cette image, et les nombreuses allusions mathématiques - le levier, les trajectoires des planètes, la perspective, la sphère armillaire et la personnification de droite - ne permettent pas plus de trancher que les doigts de Dieu ou l'anagramme hébreu en haut de l'image, voire qu'Argus aux cent yeux.

Car cette gravure (ill.1) est un magnifique outil contre ceux qui estiment le mouvement de la Terre impossible : qui, en regardant seulement l'expérience sur le plan incliné, peut savoir que le bateau avance ou qu'il est immobile ? L'analogie avec la Terre comme bateau dans le cosmos est facile. Mais est-ce encore une expérience de pensée, ou déjà une modélisation ?

Le raisonnement par l'absurde qui est ici sous-jacent, paraît avoir été historiquement réservé aux mathématiciens. Remarquons évidemment qu'il n'y a pas ainsi de preuve du mouvement de la Terre, mais juste une destruction de l'évidence de l'immobilité. Copernic n'est pas établi, mais Ptolémée est renversé (Dhombres, 2016). Les jésuites le savent bien qui, se raccrochant à Tycho Brahe, tentent de maintenir un système géocentrique pour la Terre, mais héliocentrique pour d'autres planètes, et donnent donc une image volontairement contradictoire (ill. 2). N'est-ce pas dire, en une sorte d'agnotologie, que la science ne peut pas grand' chose !

Gardons en mémoire qu'il ne suffit donc pas de dire que la pensée logique, à la mode aristotélicienne du bon sens, celui qui fait distinguer le léger du lourd pour la chute, peut contenir l'invention mathématique. N'oublions pas non plus que la pensée seule peut quelquefois « démontrer » du réel, ou plutôt imposer une fiction bientôt assimilée à un réalisme.



Ill. 3. Un dessin de François-Marius Granet du XIX^{e} siècle, au titre variable : *Scène dans une prison*, ou *Galilée dans sa cellule*, Musée des Beaux-Arts de Rennes.

Un tableau de François-Marius Granet est presqu'à lui seul explicatif d'une attitude - la peur des mathématiques - qui dépasse les évènements historiques (ill. 3). La vérité - ou est-ce la mathématique ? - qui apparaît encadrée dans le chambranle de la porte ouverte de la cellule, derrière les gardes, n'est pas ce qui illumine le visage de Galilée, vieillard penché sur ses figures et soutenu par le compas des mathématiques : la lumière du réel l'emplit, qui passe par la lucarne dont contrairement à toute perspective les barreaux ne laissent pas de traces sur le sol. La surprise dans le regard d'un homme armé sur la droite en dit long sur le danger de la preuve géométrique.



Ill. 4. Frontispice d'une thèse soutenue en Belgique au XVII^{e} siècle, et dessinée par Abraham van Diepenbeck.

Ill. 5. Détail pris dans l'image précédente sur la droite, montrant la musique en tant que jeu de rapports d'entiers, avec en arrière-fond sur un panneau d'architecture le dessin de courbes dont une hyperbole tronquée. Il s'agit de la coupe du solide engendré par rotation de cette hyperbole équilatère autour d'une de ses asymptotes. L'intérêt était que Torricelli, le jeune savant italien qui avait réalisé la fameuse expérience conduisant à la mise en évidence de la pression atmosphérique, venait de montrer vers 1644 que le solide infini, limité par une base finie, avait néanmoins un volume fini, alors même que l'aire plane sur la coupe était infinie. Ce sont les premiers résultats de calcul intégral sur les fonctions puissances. L'image de la thèse est donc au dernier cri de la recherche d'alors.

Les effets contradictoires de cette « peur » des mathématiques jouent aujourd'hui encore. Le simple emploi de mots techniques provenant des mathématiques paraît annihiler tout sens de la réflexion chez certains. Je me contente de citer en traduction française une phrase tirée du célèbre canular monté en 1996 par Alan Sokal pour la Revue *Social Text* (Sokal, Bricmont, 1997, p. 220).

> Les équations d'Einstein sont hautement non linéaires, ce qui explique pourquoi les mathématiciens formés de façon traditionnelle ont tant de mal à les résoudre.

Mais cette peur peut aussi servir d'instrument : une représentation de type mathématique parvient à dire une peur plus générale, celle où l'individu n'est plus qu'un élément interchangeable. A ce propos, un détail d'un tableau de Jean Hélion utilise la notion bien mathématique de symétrie ternaire (ill. 6). Des lecteurs de journaux sont représentés, situés en *1*, *j* et j^2 comme disent les mathématiciens, *j* désignant la racine troisième de l'unité à l'inclinaison $2\pi/3$. Un personnage extérieur sur le haut sert de « ravi », les deux bras élevés en l'air en forme d'exclamation ayant au-dessous de lui ce que l'on peut considérer comme une caricature picturale du thème des trois Grâces. La transitivité du groupe à trois éléments des racines troisièmes de l'unité illustre le fait que l'on passe sans distinction aucune d'un personnage à l'autre. Le même geste quotidien est répété du lecteur bourgeois du journal, avec les mêmes nouvelles et ipso facto les mêmes opinions : c'est bien une allégorie journalière, selon le titre de l'œuvre. On remarque pourtant une « erreur » graphique dans l'illustration de la transitivité indifférente : le personnage du bas devrait être de dos pour que la position de ses pieds soit bien dans l'indifférenciation du dessin et corresponde exactement aux trois pivotements d'une même situation. L'illustration montre qu'est aussi empêché tout intermédiaire qui favoriserait une discussion, et peut-être que le « ravi » d'en haut est le magnat de presse qui anime les pantins lecteurs. La richesse d'interprétation d'une telle image ne cache pas le fait que les mathématiques elles-mêmes peuvent illustrer la peur qu'elles engendrent.



Ill. 6. Allégorie journalière, fusain, peinture, technique mixte sur toile (185x257), Musée Zervos, Vézelay et Catalogue de l'exposition Jean Hélion, Centre Georges Pompidou, Paris, 2004.

II. LA VARIATION DES MATHEMATIQUES ET LE RELATIVISME

Revenant sur l'illustration 1, il faut se souvenir qu'en ce début du XVII^{e} siècle les mathématiques ne signifiaient rien d'autre qu'un regroupement de quatre « disciplines » bien distinctes, l'arithmétique, la géométrie, la musique et l'astronomie, deux théoriques et deux insérées dans une profession. Mais cette classification de type aristotélicien était insidieusement remise en question par l'apparition de nouvelles pratiques comme l'algèbre polynomiale, la trigonométrie des tables numériques, les logarithmes ou la dynamique déjà nommée. Cela imposait de nouveaux regroupements, et excluait ainsi la musique et l'astronomie en tant que « disciplines » mathématiques ; étaient intégralement renouvelées ce qu'on appelait les « méchaniques », c'est-à-dire l'étude des machines. Etait aussi bien remise en cause la théorie des proportions, donc ce qui faisait le cœur de la « géométrie » comme on disait (Dhombres, 1995, pp. 7-100).

L'illustration 4, dans son foisonnement baroque d'une page de titre de thèse célébrant le pouvoir politique et la religion, formes conservatrices, n'en montre pas moins les figures fondamentalement nouvelles du calcul intégral à venir sur les grands panneaux de pierre (le détail se lit dans l'ill. 5), et des disciplines anciennes comme l'optique, ou l'application aux armes avec le personnage de droite près des boulets. La personnification du temps avec le sablier dit aussi les variations de la pensée. Bref, l'image ne cache pas une révolution en mathématiques, que nous disons dans le cadre plus général de la révolution scientifique, même si cette image entend en faire un théâtre baroque, que le rideau suggère si bien. Osons-nous aujourd'hui en parler à nos élèves, alors que nous leur serinons la perpétuation de la mathématique « une » ? L'un des avantages des « mathématiques modernes », avant leur fixation en dogme était précisément de dire le changement dans les points de vue. Mais ces mathématiques avaient souvent oublié l'histoire !

Pour exalter la puissance mathématique, il est facile et toujours nécessaire d'évoquer la théorie mathématique de l'arc-en-ciel - c'est un extremum de luminosité directionnelle comme Descartes l'a établi (Dhombres, 2011, et 2013), jouant sur les différentes longueurs d'onde comme Newton l'a démontré, ou la dynamique des populations qui permet quelques résultats spectaculaires de l'épidémiologie, ou encore les *Big Data* comme exemple d'autonomisation d'un pan de savoir qui n'est ni une simple application d'une théorie déjà faite comme la théorie des graphes, ni une invention sans aucun antécédent (Dhombres, 2017). Les « lois des grands nombres » font l'actualité depuis deux siècles, passées sous forme d'une discipline que nous ne nommons plus guère d'un seul nom : on parle en effet de probabilités mais aussi de statistiques. *Cum grano salis*, j'ajoute volontiers ici que la didactique elle-même est l'objet d'un processus historique, et qu'elle pourrait aussi bien modifier des formes de mathématiques si elle en prenait le risque.

L'histoire n'enseigne donc pas que le relativisme : et ainsi pour ce qui concerne les disciplines mathématiques, elle présente une sorte de facteur majeur que je présente comme la « peur des mathématiques », une mauvaise expression mais que l'on a entendu sous tant de formes, et qui n'a pas que des désavantages (ill. 6). « L'horreur économique », selon le titre d'un livre destiné à vilipender l'enseignement universitaire de l'économie au moyen de structures mathématiques car elles cacheraient les présupposés sociaux du libéralisme, ne manque pas de donner à réfléchir. Au contraire la « mathématisation du cosmos » à laquelle on confronta les révolutions galiléenne et képlerienne, ne peut pas justifier le sort fait à Galilée.

J'en viens justement à mon premier « cas » historique. Mersenne, déjà cité, tentait une science qui allait prendre le nom d'acoustique et il inventait la notion de fréquence d'un son, qui faisait disparaître tout la science médiévale de la musique. C'était aussi le début d'une recherche sur l'idée d'onde et de périodicité. Or on a l'impression que ceci a toujours existé.

La première garde un sens essentiellement phénoménal, propagation d'une perturbation, même s'il peut se dire par des mathématiques, et le second a un sens mathématique précis grâce à la notion de fonction qui n'a pas une ancienneté grecque. Bref voici un exemple même ou plusieurs disciplines se sont rencontrées, et où nous ne voyons plus, en général, la diversité des inventions, trop éblouis en un sens par le succès de la mathématisation. Justement tout esprit didactique doit se poser la question de la difficulté d'insertion pendant des décennies, et encore aujourd'hui, de l'enseignement des séries et intégrales de Fourier. Elles disparaissent de temps à autre des cursus de préparation aux écoles d'ingénieurs ! Elles sont pourtant indispensables à la technologie actuelle des images (compression jpeg), ce qui paraît bien loin de l'acoustique !

III. L'INVENTION DE L'ONDE ET DE LA PERIODICITE



157

LIVRE TROISIESME
DV MOVVEMENT, DE LA tenſion, de la force, de la peſanteur, & des autres proprietez des chordes Harmoniques, & des autres corps.

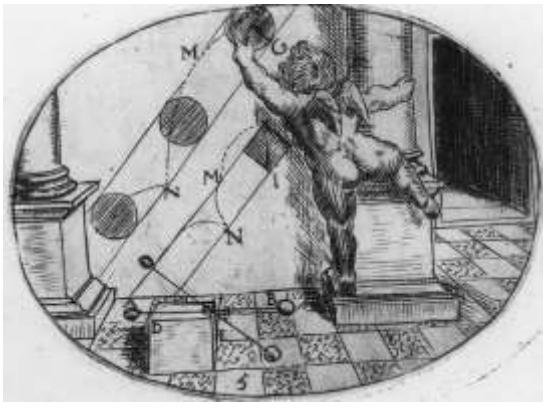
APRES auoir parlé du mouuement des principaux corps de cet Vniuers, particulierement de celuy de la terre, il faut examiner plus particulierement ceux qui appartiennent aux chordes des inſtrumens, & aux autres corps qui font de l'Harmonie: ce que nous ferons dans les Propoſitions de ce liure, où nous traiterons auſſi de la force neceſſaire pour ſouſtenir le poids donné ſur vn plan oblique & inclinè à l'horizon.

PROPOSITION I.

La raiſon du nombre des retours de toutes ſortes de chordes eſt inuerſe de leurs longueurs.

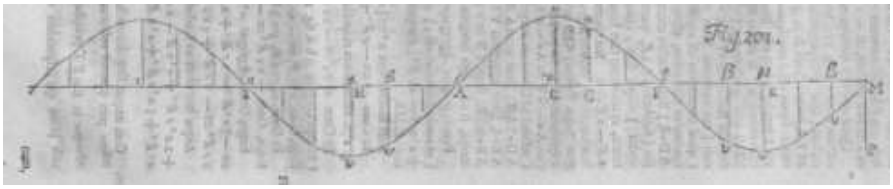
SOIT la chorde precedente A B attachée aux deux cheualets du Monochorde aux deux poincts A & B; & la chorde A F attachée aux points A & F, ie dis que la chorde A B eſtant tirée au point G ne retornera qu'vne fois au point F, pendant que la chorde A F tirée au point I, retornera deux fois au point H, comme monſtre l'experience; de ſorte que A F reuiendra touſiours deux fois pendant que A B ne reuiendra qu'vne fois: par conſequent le nombre des retours d'A F eſt double de ceux d'A B, comme la chorde A B eſt double de la chorde A F: d'où il s'enſuit que le nombre des mouuemens ou des retours d'vne chorde s'augmente en meſme raiſon que ſa longueur ſe diminuë, & conſequemment que la raiſon deſdits retours eſt inuerſe de la raiſon des longueurs de la chorde.

Ill. 7. A gauche, lieu de l'*Harmonie universelle* où est donnée la loi de Mersenne. Aucune précaution n'est prise pour faire figurer un « nombre de retours », qui fait la fréquence et efface la discipline traditionnelle nommée « musique ». On parlait surtout pour l'harmonie de rapports d'entiers, l'octave, la tierce, la quinte. Ce n'est pas pour autant une mathématisation par Mersenne, au sens où les mathématiciens imposeraient un changement : c'est l'idée de son qui change. A droite, un dessin dans la thèse citée en ill. 1, sans doute la première représentation de la cycloïde à partir d'un cercle qui roule.



La notion de fréquence, sous le nom de « nombre de retours », intervient donc brutalement en théorie du son sous la plume de Marin Mersenne en 1637 dans son livre intitulé : *Harmonie universelle*. Il n'y a aucune image de courbe sinusoïdale qui pourrait « illustrer » cette définition : elle porte sur une corde tendue entre deux points fixes selon le vieil exemple pythagoricien, et énonce une loi : la proportionnalité de la fréquence à la longueur de la corde tendue (ill. 7, à gauche). C'est dans ce même livre, mais pas dans le même chapitre, qu'intervient la courbe dite roulette, ou encore cycloïde dont je montre la première représentation (ill. 7 à droite). Je juxtapose les deux documents, car je suis sûr que beaucoup pensent que la courbe représentative des sinus serait aussi ancienne que l'astronomie, offrant un sens mathématique précis à la fréquence, et que la roulette n'a rien à y faire. Or c'est historiquement la cycloïde qui procura la première image d'une fonction sinus (ill. 8) et cette

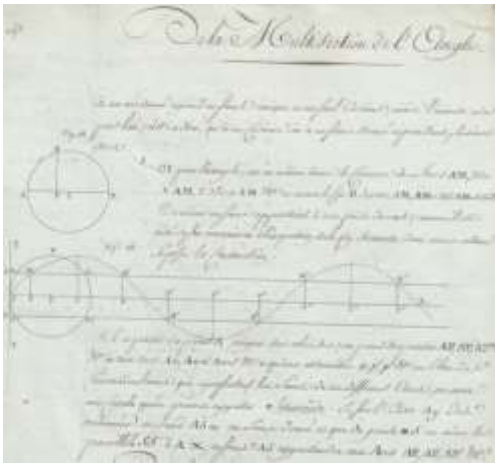
courbe sinusoïdale est même dite « compagne de la cycloïde ». Alors que nous considérons plutôt la cycloïde comme une annexe si l'on veut de la sinusoïde.



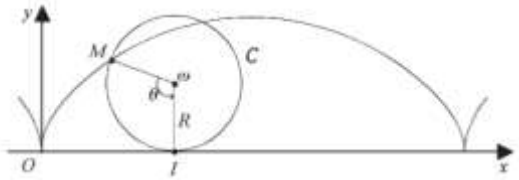
Ill. 8. La première représentation de la fonction sinus en tant que fonction périodique. Elle se trouve chez John Wallis, dans *Tractatus duo. Prior, De Cycloide et corporibus inde genitis. Posterior, epistolaris ; in qua agitur, De Cissoide, et corporibus inde genitis : et De Curvarum tum linearum Εὐθυνσις, tum superficierum Πλατυστομῶ* (Oxford, Leonard Lichfield, 1659, in-4°).

.

A ma connaissance, un tel dessin sinusoïdal ne fut pas repris dans des manuels au siècle des Lumières ; il apparaît dans un cours de Fourier à l'Ecole polytechnique donné en 1796 et pris en note par un élève pour devenir une banalité de l'enseignement (ill. 9).
Expliquer la roulette est un jeu d'enfant, et je prends d'autant plus volontiers une figure du Net, qu'elle est fausse (ill. 10) : la tangente à la courbe en *M* devrait être orthogonale à la droite *IM*. Dès 1638, Descartes l'explique dans une lettre à Mersenne en se servant de l'idée de roulement, et du fait que le point I du roulement sur le cercle a une vitesse nulle, provoquant une rotation instantanée autour de ce point. L'origine de la roulette est effectivement mécanique, et l'image dans les thèses déjà mentionnées de 1624 le donnait à voir (ill. 7).



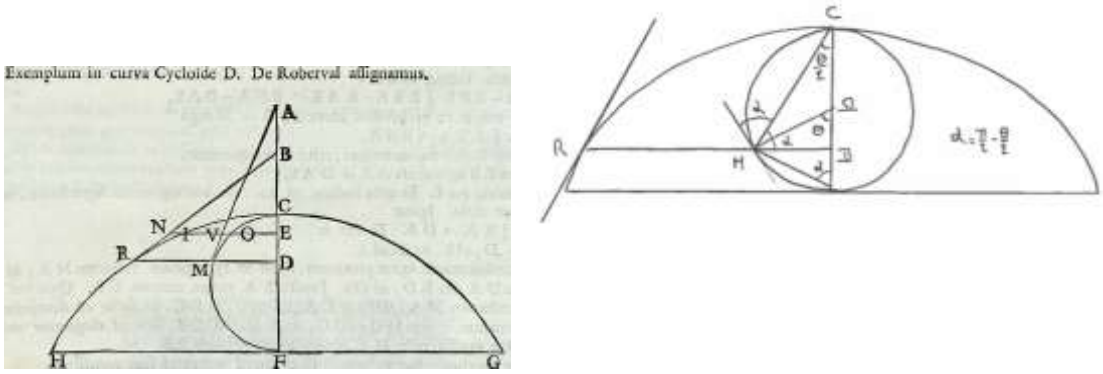
Ill. 9. Une représentation de la fonction sinus telle que dessinée dans un cours de Fourier en 1796, pris en notes par un élève (Arch. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Ms 668, f°50).



Ill. 10. Construction mécanique de la cycloïde par enregistrement

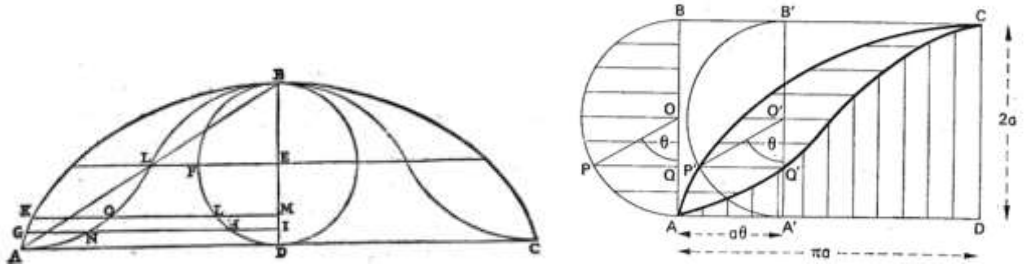
Or ce n'est pas la construction mécanique à la Descartes de la tangente qui allait être utilisée par les mathématiciens : ils éliminent l'origine mécanique de la courbe au profit d'une définition purement géométrique. Symboliquement, et Fermat le premier semble-t-il, ils fixent au centre même de la figure le cercle qui roule, lui procurant un rôle de repère, (ill. 11 ou 12). Le roulement sans glissement en *I* (ill. 9) est du coup transformé en une propriété géométrique de longueurs : on a l'égalité de la longueur de l'arc *CM* et de la longueur *RM* (ill. 11). Si l'on envisage un repère constitué par l'abscisse curviligne du cercle central en place de premier axe et l'horizontale passant par *C* comme second, la cycloïde s'exprime analytiquement

comme « une droite », et même est bissectrice dans ce repère (Dhombres, Régnier-Roux, 2017).



Ill. 11 et 12. La fixation du cercle roulant pour étudier la cycloïde que montre une figure de Fermat, expliquée avec des notations modernes à droite.

Chez des savants qui étudient la cycloïde autour des années 1640, comme Roberval et Torricelli, tous les deux aussi bien physiciens par les expériences sur le vide, c'est une autre représentation que celle donnée par l'ill. 7 qui a cours. Ils construisent une courbe intermédiaire entre le cercle et la cycloïde, comme le montrent les deux illustrations 13 et 14 : cette courbe intermédiaire *ANOILBC* dans le premier cas, et *AQ'C* dans le second, est une sinusoïde. Il est facile de le vérifier en faisant intervenir les équations paramétriques de la cycloïde.



Ill. 13 et 14. Le point *Q'* dans la figure de droite a pour abscisse à partir de l'origine *A* le produit de l'angle par le rayon *a*, et pour ordonnée verticale le produit de ce rayon par la différence à 1 du cosinus de l'angle. Par conséquent la courbe *AQ'C*, ou *ANOILBC* sur le dessin de gauche, dû à Roberval, est ce qu'on appelle un sinus verse, qui est la translatée verticale d'une fonction sinus, et est ainsi dite la « compagne de la cycloïde ».

On devine par symétries plus ou moins apparentes diverses propriétés qui permettent d'évaluer l'aire sous l'arche de la courbe cycloïde comme étant égale à trois fois l'aire du cercle roulant. Dans l'ill. 14, par le principe d'empilement de droites de Cavalieri, l'aire entre la cycloïde *AGKBC* et la courbe *ANQLB* vaut l'aire du cercle. Le reste se calcule aisément. Mais, ce faisant, nous avons perdu ce qui était évident avec la roulette de Mersenne : la périodicité. C'est-à-dire la répétition de l'arche que l'on voit tellement bien sur la première apparition de la courbe (ill. 7). Par conséquent nous ne voyons plus la périodicité de la « compagne », la fonction sinus. Etrange effet de l'abstraction mathématique qui passe par l'analytique. Et jolie réflexion sur ce qui fait le sujet de notre enquête.

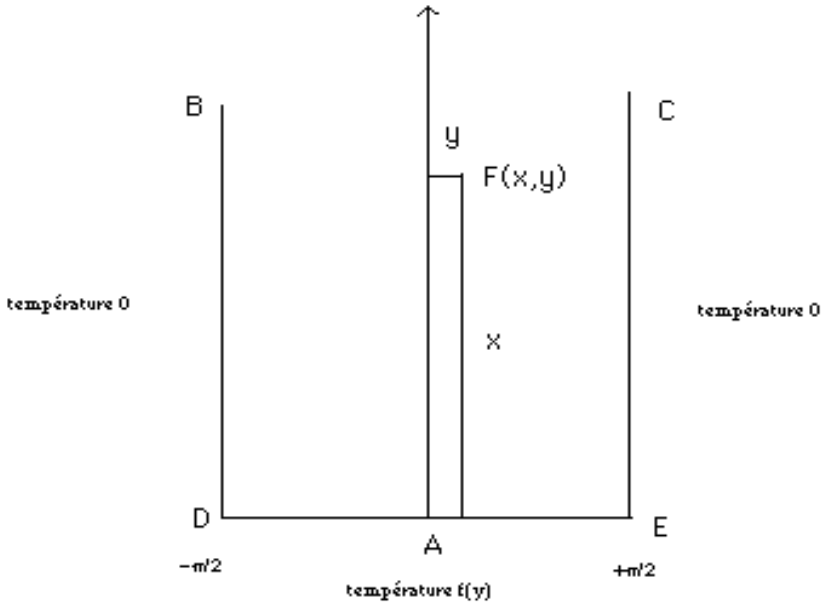
La périodicité restera un problème pour l'étude des cordes vibrantes, même lorsque d'Alembert aura établi avant 1750 l'équation aux dérivées partielles dite des ondes, qui donne pour l'élongation *y(s, t)* d'une corde fixée à deux bouts en fonction du temps *t* et de l'abscisse

s, l'égalité d'une dérivée seconde en une variable *t* à une dérivée seconde en l'autre variable *s* à un coefficient positif près. Il est écrit comme c^2. D'Alembert établit que la solution générale de cette équation est donnée à partir de deux ondes se propageant à la vitesse *c* en deux sens contraires, avec deux fonctions quelconques *F* et *G*.

$$y(s,t) = F(ct + s) + G(ct - s).$$

La chose n'est pas vraiment débrouillée par d'Alembert, car il lance un débat sérieux avec Euler, et Lagrange où justement la périodicité d'une fonction est en jeu. Je vais passer à la façon dont Fourier s'en sort avec une équation aux dérivées partielles bien voisine, qui est celle de la nullité du laplacien. Elle reviendrait à prendre $c = i$, ou $c^2 = -1$: mais la physique d'alors ne pouvait pourtant supporter l'idée de devoir parler des quantités imaginaires des algébristes. Par ailleurs cette autre équation règle un tout autre problème physique, la propagation de la chaleur. C'est pourtant ce problème qui va faire comprendre autrement la périodicité, et donc donner un autre sens aux vibrations des cordes qui remontent jusqu'à l'origine pythagoricienne de la musique. Parce qu'on aura mathématiquement « prouvé » qu'il y a une qualité ondulatoire dans la chaleur : on se trouve dans une situation directement inverse de celle discutée avec la relativité du mouvement de la chute des corps (ill. 1). C'est la mathématique cette fois qui informe la physique.

Une expérience de pensée règle l'affaire chez Fourier, et un dessin le manifeste bien (ill. 15). C'est la traversée d'une lame plane rectangulaire *BDEC* par la chaleur venant par *DE* - le problème est mathématiquement plan, réglé donc par deux variables d'espace, *x* et *y*, et la physique peut imaginer une barre de profondeur suffisamment grande dont les deux côtés latéraux *BD* et *CE* sont maintenus à la température 0°. Celle de la glace fondante n'étant choisie par Fourier que pour faire l'image d'un bloc isolant la lame, l'isolant jusqu'à faire disparaître l'inévitable dilatation que cette lame devrait normalement éprouver. La rigidité de la lame est un incontournable dans ce qui n'est pas une modélisation.



Ill. 15. Exemple de la lame chauffée à la base *DE* selon *f* pour obtenir une répartition de température *F*.

Par contraste avec la coercition latérale, en bas de la lame règne la liberté d'imagination de l'expérimentateur mathématicien. Celle d'imposer une température constante ou encore d'imposer une fonction numérique quelconque, c'est-à-dire une ordonnance de valeurs sur l'intervalle DE, parcouru par la variable y, mais sur cet intervalle seulement : une fonction numérique *f(y)* donc, compte tenu du choix fait de la variable x qui court selon l'arête médiane orientée de la lame et mesure l'éloignement de la source de chaleur. Parce que cela correspond à une étape de l'analyse, le temps n'intervient pas : il est présupposé que le régime est permanent, qu'une stationnarité de la température est établie entre le moufle de glace entourant la lame, et la donne d'une répartition chauffante à sa base fournie par cette fonction numérique f qui est une température. Celle en tout point de la lame est une fonction F des seules variables d'espace, x et y : elle est l'inconnue. On pourrait noter $F_f(x,y)$et constater que la correspondance entre *f* et F_f est linéaire, compte tenu de l'équation aux dérivées partielles de la chaleur. Car la relation entre f et F existe physiquement - un seul régime s'établit en effet et il y a d'ailleurs démonstration physique de cette unicité par Fourier. Mais pour les mathématiques Fourier n'avance pas une preuve d'unicité ; elle serait redondante avec celle de la physique. C'est signaler qu'il ne pense pas en termes de déduction axiomatique.

Je complète à l'intention de ceux qui à juste raison veulent faire les calculs. La fonction F est tout à la fois solution d'une équation aux dérivées partielles du second ordre qui se trouve être la nullité du laplacien, et elle vérifie en plus les trois conditions suivantes, pour tout x>0, et pour y entre -π/2 et π/2. Fourier est sans doute le premier auteur a insister sur le domaine de définition d'une fonction, donc à restreindre le concept même à la donnée d'un domaine. Il est essentiel ici de noter les conditions au limites portant sur x et sur y. L'extension par périodicité est en effet liée à ces conditions.

$$F(x,-\frac{\pi}{2}) = F(x,+\frac{\pi}{2}) = 0$$

,

$F(0, y) = f(y)$,

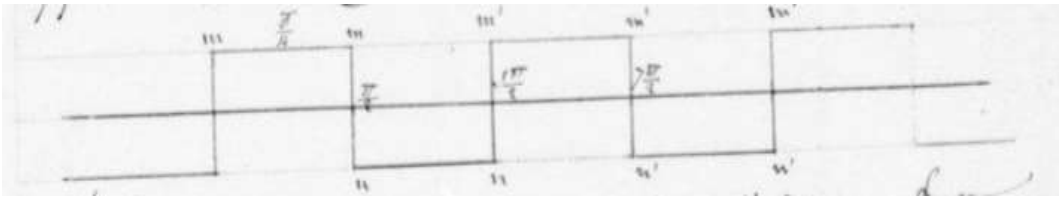
Lim $F(x,y) = 0$ lorsque $Lim\ x = \infty$.

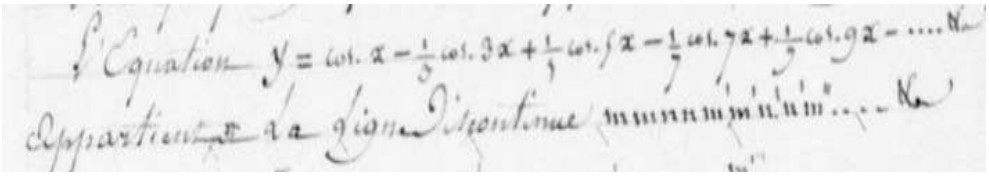
En particulier, si l'on pose cos 11 y pour la fonction f(y), pour y entre -π/2 et π/2, l'expression de $F_f(x,y)$ devient $\lfloor f(y) = \lfloor \cos 11y$, où $\lambda = -e^{-11\pi}$. En termes d'aujourd'hui, une telle fonction est vecteur propre de la correspondance linéaire entre *f* et F_f.

Fourier change brusquement d'approche. Il cherche ce qu'il appelle judicieusement les « modes propres », c'est-à-dire les fonctions numériques f, température mise à la base de la lame, qui redonnent la même fonction, à un facteur multiplicatif près, pour la trace de Ff sur un segment horizontal quelconque. On calcule aisément que les seuls modes propres se trouvent être les fonctions *cos (2n+1)y*, pour tout entier n positif ou nul. Du moins si l'on ajoute (pour simplifier) une condition de symétrie, celle de la parité de la fonction sur la base DE. Et là se découvre une propriété inattendue : tout mode propre est en fait une fonction définie sur tout l'axe réel, périodique et de période 2π, et compte tenu du cosinus, tout mode propre prend des valeurs négatives sur les intervalles de π/2 à π, ou l'intervalle symétrique du côté des négatifs (de -π à -π/2). Ainsi l'impose le problème de la lame rectangulaire, au-delà même de l'étendue physique de cette lame.

Si donc on veut revenir au problème de déterminer F_f pour une *f* donnée (paire) en bas de la lame, donc sur l'intervalle de -π/2 à π/2, et que l'on imagine pouvoir le faire en ne prenant que des combinaisons linéaires des modes propres, il faut absolument prolonger d'abord *f*, le donné, en valeurs négatives et symétriques de π/2 à π et de -π à -π/2, puis étendre la nouvelle fonction par périodicité 2π. Ainsi si l'on veut prendre pour f la fonction 1, valant en outre 0 en -π/2 et π/2, il faut créer la fonction créneau et la prolonger par périodicité. C'est ce que Fourier dessine (ill. 16).

Il reste un peu de travail pour obtenir un résultat stupéfiant : la fonction créneau peut se voir comme somme d'ondes (ill. 17) : elle est une musique si l'on peut le dire ainsi. Et tout cela a été « déduit » de l'équation de la chaleur. Ai-je employé le bon mot de déduction ? Il fait trop mathématique ! Je suis pourtant au cœur de mon sujet : la physique a bien joué son rôle dans cette « déduction ». C'est pour cela qu'il y a eu l'expérience de pensée que représente la lame.





Ill. 16 et 17. Le dessin par Fourier de la fonction périodique créneau, une première en science, et dans la foulée l'expression analytique de cette fonction par des fonctions cosinus, ce qu'on appelle la série de Fourier, devenue d'un usage banal aujourd'hui en théorie du signal.

Je n'ai pas besoin de dire combien les travaux de Fourier sont aujourd'hui liés à notre monde de l'image, mais je tenais à montrer qu'une inspiration, débouchant sur de grandes mathématiques, a bien été liée à la physique. Je vais maintenant prendre une sorte d'exemple contraire, me servant d'une anecdote sur Fourier.

IV. UN ROLE DE L'EXTERIEUR DES MATHEMATIQUES PEUT QUELQUEFOIS ETRE NEFASTE

Alors qu'il avait obtenu de tels résultats à Grenoble vers 1807, Fourier devenu préfet de l'Isère eut une discussion sur la philosophie de Kant : on en a l'écho à partir d'une discussion avec Ampère et un inspecteur d'académie de l'Isère nommé Sébastien du Falquet du Planta. Voilà ce que ce dernier écrit le lendemain du dîner.

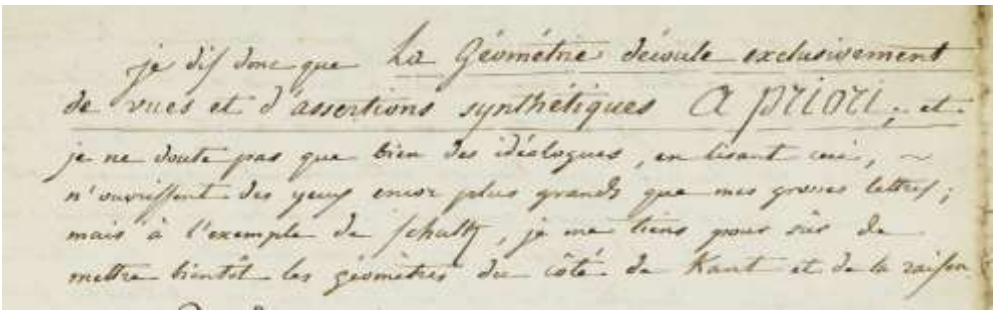
> Grenoble 8 juin 1810
>
> Monsieur l'inspecteur général
>
> Pardonnez la liberté que je prends de vous adresser quelques observations relatives au *criticisme* ; mais pénétré comme je le suis, du désir de voir la *philosophie française* changer de forme, et prendre une tendance morale et religieuse, qu'elle ne saurait acquérir dans la voie de l'empirisme, osons le dire, à la fois grossier et superficiel, où elle marche depuis si longtemps, je ne puis me résoudre au silence vis-à-vis de l'un des hommes les plus dignes, les plus capables d'amener dans les esprits cette heureuse révolution. Vous, Monsieur, et l'excellent M^r^. Fourier, appartenez de droit à la *meilleure* philosophie : elle vous réclame l'un et l'autre : et je me félicite d'être l'organe secret, l'instrument inaperçu mais utile, qu'elle emploie auprès de deux hommes destinés à illustrer son empire, à étendre sa domination (lettre de Planta à Ampère, dossier Ampère, chemise 281, carton 18, Académie des sciences).

Fourier, en maître de maison, a d'emblée rappelé son souvenir de l'Ecole normale, quinze année plus tôt, quand il avait directement interrogé le professeur Monge sur la définition

d'une droite et que celui-ci s'était énervé en refusant les finasseries « métaphysiques ». Planta, mis au courant, revient sur le sujet :

> Quand j'eus l'honneur de vous rappeler hier, Monsieur, combien les définitions qu'Euclide donne du point, de la ligne, etc., étaient *antilogiques* (passez-moi ce terme), vous me dites que l'on n'employait plus celles-là. Oserais-je vous demander lesquelles on emploie ? Quelles qu'elles puissent être, je réponds d'avance que ce ne seront pas des définitions dans le sens vraiment philosophique de ce mot ; et l'on peut défier tous les géomètres présents et futurs d'éviter l'écueil où se sont brisés Archimède et Euclide ; car il est dans la nature de l'esprit humain de voir, mais non pas de concevoir les objets primitifs de la géométrie.

Et Planta est d'autant plus affirmatif qu'il est comme un croisé en faveur de Kant.



Ill. 18. Extrait de la lettre de Planta à Ampère du 8 juin 1810.

Kant, dans l'ouvrage de 1783 (ill.19), affirmait qu'il ne peut y avoir de science de la nature qu'en autant qu'il est procédé à la manière des mathématiques, par axiomes donc. Ce qui entraîne la restriction de ne pas pouvoir atteindre « la » vérité, ou la nature des choses. Or l'établissement totalement inattendu de modes propres contredit cette idée d'une préalable *Anschauung*, d'une *visio* comme on le traduit en latin, pour qu'il y ait découverte. Fourier donnait un nouveau sens de la périodicité avec la description des fréquences, et le faisait par un jeu de calculs sur une expérience de pensée (ill. 15), à partir d'une analyse non axiomatique de la diffusion de la chaleur. On peut dire, en revenant à l'origine de ce cas ici étudié, que Fourier faisait de l'harmonie avec la chaleur. Cela l'opposait systématiquement à Kant.

Fourier, lors de ce repas, répétait ce qu'il avançait en 1795 à l'Ecole normale de l'an III et qui avait déclenché un débat foisonnant entre les élèves, en présence de Monge le 30 janvier 1795 (11 pluviôse an III) : il s'agissait de situer le rôle de l'axiomatique en mathématiques, qui ne peut pas être seulement celui d'une convention, puisqu'il faut qu'il y ait au moins la possibilité d'existence.

> Je crois, cependant, qu'il est important de rechercher s'il est possible de définir bien exactement la ligne droite. On ne connaît guère de définition de la ligne droite que celle d'Archimède, qui a paru insignifiante à plus d'un géomètre, soit que le texte fût mal compris, soit qu'aux anciennes définitions d'Archimède on ait substitué une définition qui n'est pas à abri de tourte attaque (p. 318-319 de l'édition des cours de mathématiques de l'Ecole normale).

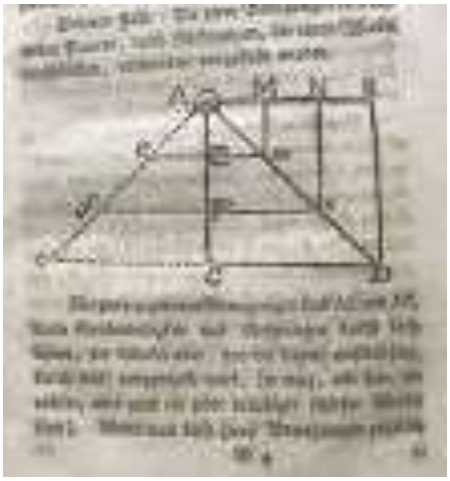
Trois points distincts dans l'espace permettent alors de définir une ligne droite comme « série de points dont chacun est à égale distance des trois points donnés ». On est loin de la définition adoptée par Euclide que l'on peut lire comme : « une ligne droite est celle qui est placée de manière égale par rapport aux points qui sont sur elles ». En 1823, lors de la 11e

édition de ses *Elémens de géométrie*, Legendre adoptera la définition d'Archimède, ce que Fourier souhaitait dès 1795 : « la ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre ». Planta répond en quelque sorte le lendemain dans sa lettre à Ampère, et n'en démord pas.

> Je ne m'arrêterai pas à montrer que votre définition (empruntée de l'axe d'un corps mû circulairement autour de ses points, et dont Monge a parlé aux école normales n'est pas une simple notion, une pure conception de l'esprit et oblige autant qu'aucune autre à recourir à l'intuition dans l'espace : je discuterai encore moins celle proposée jadis par M. Fourier, qui bien qu'extrêmement ingénieuse, est encore moins une pure conception, demandant au contraire un jeu considérable d'intuitions, et suppose en outre la notion de distance, laquelle n'est à son tour qu'une abstraction formée d'après la vision intuitive de la ligne droite en tant que susceptible d'accroissement ou de diminution.

Kant pas plus ne pouvait concevoir la composition des vitesses selon la loi du parallélogramme autrement que par une intuition a priori (ill. 20) : alors que tout l'allant de la mécanique, une fois établie l'importance de la composition, fut de lui donner une valeur d'automatisme, bref de la rendre intuitive. Pour cela il fallut inventer les vecteurs et l'algèbre linéaire. Suivre le kantisme aurait été un handicap pour le développement.





Ill. 19 et 20. Page de titre de l'ouvrage « sur « sur les fondements métaphysiques de la science de la Nature » de Kant, et page de cet ouvrage dans laquelle Kant tente de faire comprendre la composition des mouvements comme « une intuition synthétique a priori ».

V. CONTRAINDRE L'ASTROLOGIE A NE PAS SE DRAPER INDUMENT DE LA RIGUEUR MATHEMATIQUE

En tant qu'astrologues voulant maintenir l'astrologie judiciaire, un professeur royal comme Jean-Baptiste Morin et aussi bien le « mage » Robert Fludd, avaient grande raison de refuser les nouveautés astronomiques du début du XVII^{e} siècle. Car au nom d'une différence fondamentale entre la mathématique conçue comme une construction abstraite et la physique envisagée comme une réalité de corps matériels, une profonde condamnation de l'astrologie des horoscopes par influences planétaires était venue de Kepler. Elle fut formulée en 1622, dans son « Apologie des Harmonies du monde ». Kepler répondait directement à Fludd qui, au nom du maintien *ne varietur* de la tradition astrologique, avait été le premier à s'opposer au système des trois lois. L'astronome génial expliquait que le système de repérage astrologique servant à établir un horoscope était basé sur une pure géométrie céleste de situations angulaires simples, sans une quelconque idée de force ou de vitesse ou d'une

quelconque autre grandeur faisant quantité, et en raison de cette absence ces situations ne pouvaient se transmettre matériellement. Kepler ne remettait pas en cause la possibilité d'une « influence », mais il refusait d'admettre que celle-ci pût s'exercer par des directions selon les rayons célestes la déversant « dans les entrailles de la Terre ».

> Quant à moi, je ne vois pas comment cela s'en déduit, même si je pouvais concéder que c'est vrai ? Certes l'air reçoit, c'est-à-dire admet les rayons de lumière et rien ne les arrête, pas même l'opacité de la Terre ; la force invisible du rayon est bien sûr plus pénétrante que la lumière visible, comme par exemple la vertu magnétique qui s'infiltre dans la lumière dorée. Mais ce n'est pas ainsi que l'air reçoit les radiations en distinguant ces dernières par leurs seules formes géométriques, En effet, l'air est une matière ; c'est un corps. La beauté géométrique de l'angle qui détermine la forme est une entité rationnelle ; afin que les radiations soient reçues de cette matière, il faut qui'l y ait une âme ou une faculté semblable participant d'une certaine manière de la raison. Tu m'ouvres la porte pour faire entrer une question Ces angles sont-ils physiques ou mathématiques ? […] Les lignes des rayons ne sont pas vraiment purement mathématiques. Elles sont vraiment faites de lumière, et la lumière est une chose physique (Kepler, 1622).

Kepler concluait qu'une chose purement intellectuelle, comme la proportion géométrique, ne pouvait pas être imprimée dans un corps. Outre la contribution à la disparition de l'astrologie comme science, c'est une magnifique explication sur le fait que l'on ne peut pas mélanger les disciplines sans un minimum de précaution. Et en particulier que tout n'est pas « calculable ». C'est une conclusion bien différente de celle de Kant qui assurait que n'est connaissable que ce qui au fond est calculable. Mais si l'on ne définit pas le calculable, la pertinence du système philosophie s'évanouit.

VI. UN TROISIEME CAS SUR L'INFORMATIQUE EN CONCLUSION

Avancer que les mathématiques sont la science des quantités, comme cela a été tenté au XVII^{e} siècle, c'est éviter de se poser la question du calculable. Puisque la quantité est ainsi pensée, sans plus d'analyse, comme ce qui est effectivement calculable. Il faut attendre Alan Turing, et un article de 1936, pour que le calculable soit parfaitement défini. Grâce à l'invention d'une machine de pensée, capable de faire des calculs « comme un esprit humain les fait », c'est-à-dire par algorithmes. Je ne peux pas en quelques minutes décrire cette machine théorique, à l'origine du fonctionnement de nos ordinateurs. Je veux seulement exploiter un fait : les nombres réels « calculables » au sens de Turing ne forment qu'un sous ensemble strict des nombres réels : il existe donc des nombres incalculables. Et par conséquent il existe des problèmes incalculables. Objectivement c'est le développement de la logique qui a permis cette découverte, et la logique traditionnelle a été modifiée, devenant une logique mathématique, dans laquelle philosophes et mathématiciens peuvent désormais travailler. Je disais d'entrée de jeu qu'il fallait tenir compte de la versatilité des disciplines.



Ill. 21. La représentation colorée, mais jouant aussi de certaines lignes droites, des communautés dans un graphe de relations téléphoniques (Blondel & al. 2008).

Mais on est très loin de la pensée limitative de Kant sur l'impossibilité d'approcher les noumènes : car on peut quand même approcher ces problèmes dits incalculables. De la même façon qu'on a défini des nombres irrationnels dans la Grève antique, donc des nombres défiant la raison selon l'étymologie ironique et un jeu de mots sur rapport et raison. Car on a pu envisager des façons de les calculer par approximations bien réglées, ces approximations reflétant même les propriétés en soi des quantités en jeu.

Le calcul apparaît ainsi comme une sorte de constante dans le monde mathématique. Et c'est lui sans doute qui donne une place singulière aux mathématiques dans les autres sciences. On a ainsi vu le passage des rapports d'entiers en harmonie à la fréquence considéré comme nombre réel, et à la suite de fréquences devenant une caractéristique d'une fonction périodique. De la même façon on est passé des calculs approchés sur les irrationnels au calculable de la machine de Turing. Et l'on donne aujourd'hui des caractéristiques aux algorithmes selon la complexité qu'ils mettent en place.

Par analogie avec justement le calcul développé par les mathématiciens sur les irrationnels, je termine en citant un problème de recherche de communautés dans un graphe de relations, téléphoniques par exemple. L'idée sur des grands nombres de telles liaisons est d'établir comment déterminer, et éventuellement représenter, des petits groupes dont les communications sont largement internes, avec bien peu de liens avec les autres. Le dessin de l'ill. 21 permet aisément avec les petits tracés rectilignes de saisir les différentes situations, indiquées aussi par les couleurs différentes. Etablir de tels groupements lorsque des millions de données sont en cause, et les représenter de façon convaincante peut paraître un problème incalculable. Serait sans doute incalculable de devoir trouver la meilleure façon de procéder. Mais, dans le cas présent, des algorithmes donnent une bonne image en peu d'heures de calcul (Campigotto et *al*.). En plus, et c'est encore un cas d'hybridation entre disciplines, il faut un sens de l'art pour pouvoir imaginer la réalisation de l'illustration 21. Cette fois l'intervention de l'art paraît bien éloignée de ce qui pouvait constituer la peur des mathématiques.

Si j'ai insisté sur le regard interdisciplinaire, ses avantages mais ses dangers aussi bien, ce n'est pas pour le seul plaisir de réfléchir ou de faire de l'histoire, mais pour comprendre l'invention, les formes d'un enseignement, et la lenteur quelquefois aussi de la compréhension.

REFERENCES

Belleguic T. & Vasak, A. (2013) La mathématisation des météores aqueux d'après le dispositif cartésien de l'arc-en-ciel. In *Ordre et désordre du monde. Enquête sur les météores de la Renaissance à l'âge moderne* (pp. 177-226). Paris : Hermann.

Blondel V.D., Guillaume J.-L., Lambiotte R. & Lefebvre E. (2008) Fast unfolding of communities in large networks. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment, (10).*

Campigotto R., Conde Céspedes P. & Guillaume J.-L. (2014) *La méthode de Louvain générique : un algorithme adaptatif pour la détection de communautés sur de très grands graphes.* https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00946481

Chamoux J.P. (dir.) (2017), *L'ère du numérique 1. Enjeux des données massives*, Iste Editions.

Dhombres J. (2016) Vérités et mensonges dans l'affaire Galilée. In M. Wieviorka, *Entretiens d'Auxerre* (pp. 87-104). Paris : Editions Sciences humaines.

Dhombres J. (2016) De l'écriture mathématique comme technique de l'intellect, *Hommage en l'honneur de Jack Goody* (pp. 160-200). Lyon : ENSSIB.

Dhombres J. (2011) Le jet d'eau et l'arc-en-ciel à l'âge baroque : réalisation des mathématiques, mathématisation de la philosophie naturelle et représentation des phénomènes. In F. Cousinié, C. Nau (dir.), *L'artiste et le philosophe*. *L'histoire de l'art à l'épreuve de la philosophie au XVIIe siècle* (pp.151-196). Rennes : PUR.

Fleck L. *Genesis and Development of a Scientific Fact*, trad. anglaise, 1979, Chicago University Press ; traduction française aux Belles Lettres par Nathalie Jasen 2005.

Hommage à Patricia Radelet-de Grave (2016) *Sciences et Techniques en Perspective*, IIe série, vol. 18, fasc.2, 51-102.

Kepler J., *Pro suo opere Harmonices mundi apologia : Adversus demonstrationem analyticam CL. V. D. Roberti de Fluctibus Medici Oxoniensis. In qua ille se dicit respondere ad appendicem dicti operis*, Francfort, Tampach, 1622 (trad. J. Dhombres).

Lévy-Leblond J.-M. (2016) *Lettres à Alan Turing*, réunies par Jean-Marc Lévy-Leblond (pp.75-89). Paris : Editions Thierry Marchaise.

Marin Mersenne, *Harmonie Universelle, contenant la théorie et la pratique de la musique*..., Paris, Chez Sébastien Cramoisy, rue Saint-Jacques, aux Cigognes, 1636, in-fol. ; *Seconde partie de l'Harmonie Universelle : contenant la pratique des Consonances, et des Dissonances dans le Contrepoint figuré*..., Paris, Par Pierre Ballard, 1637, in-fol.

Radelet-de Grave P. & Dhombres J. (2008) *Une mécanique donnée à voir. Les thèses illustrées défendues à Louvain en juillet 1624 par Grégoire de Saint-Vincent S.J.*, Brepols, Turnhout.

Régnier-Roux D. & Dhombres J. (2017) La bibliothèque mathématique au XVII^{e} siècle, *Sciences et Techniques en Perspective*, Diffusion Librairie Blanchard, vol. 19, fasc. 1 et 2.

Sokal A. & Bricmont J. (1997) *Impostures intellectuelles*, Paris, Editions Odile Jacob.

MATHÉMATIQUES ET DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES : QUELLES RELATIONS ?

ARTIGUE[*] Michèle – EL YACOUBI[**] Nouzha – HODGSON[***] Bernard

Résumé – La didactique des mathématiques a émergé comme champ scientifique dans la deuxième moitié du 20e siècle, en revendiquant l'importance épistémologique de ses liens avec les mathématiques, mais en affirmant aussi la nécessité de s'émanciper des discours existant sur l'enseignement des mathématiques, pour comprendre les processus d'enseignement et apprentissage de cette discipline et fonder l'action didactique. Au fil de son développement, la question des rapports entre mathématiques et didactique des mathématiques et, avec elle, celle des rapports entre communautés didactique et mathématique s'est régulièrement reposée, donnant lieu à des débats souvent vifs. Que retenir de cette histoire et où en sommes-nous aujourd'hui ? Dans ce texte, nous essayons de répondre à ces questions en croisant nos expériences et visions respectives.

Mots-clefs : mathématiques, didactique des mathématiques, épistémologie, histoire de l'enseignement, interactions maths-didactique

Abstract – The didactics of mathematics emerged as a scientific field in the second half of the 20th century, claiming the epistemological importance of its links with mathematics, but also affirming the need to emancipate from existing discourses on mathematics teaching, in order to understand the teaching and learning processes of this discipline and to base didactic action. Along its development, the question of the relationship between mathematics and the didactics of mathematics, and that of the relationship between the didactic and mathematical communities, has been regularly raised, leading to often heated debates. What can we learn from this story and where are we today? In this text, we address these questions by combining our respective experiences and visions.

Keywords: Mathematics, didactics of mathematics, epistemology, history of mathematics education, math-didactic interaction

I. INTRODUCTION

La didactique des mathématiques a émergé comme champ scientifique dans la deuxième moitié du 20e siècle, en revendiquant l'importance épistémologique de ses liens avec les mathématiques. Mais, elle a aussi d'emblée affirmé la nécessité de questionner les discours existant sur l'enseignement des mathématiques, dont ceux des mathématiciens, pour arriver à comprendre les processus d'enseignement et apprentissage de cette discipline et fonder l'action didactique, et elle s'est développée comme un champ scientifique à l'interface des sciences humaines et des sciences mathématiques. Au fil de ce développement, la question des rapports entre mathématiques et didactique des mathématiques et, avec elle, celle des rapports entre communautés didactique et mathématique, s'est donc régulièrement posée, donnant lieu à des débats souvent vifs. Que retenir de cette histoire et où en sommes-nous aujourd'hui ? C'est à ces questions que nous essayons de répondre dans ce texte, en croisant nos expériences et visions respectives, comme nous avons essayé de le faire dans notre conférence à trois voix, au colloque EMF 2018 centré sur la nécessaire collaboration entre disciplines et communautés.

Nos expériences sont en effet bien différentes. Nous venons de trois des continents que rassemble l'Espace mathématique francophone : Afrique, Amérique et Europe. Nous avons eu des parcours professionnels différents qui impactent la façon dont nous avons perçu et vécu les relations entre mathématiques et didactique des mathématiques. Nouzha el Yacoubi — qui a été amenée à remplacer le professeur Saliou Touré, président de l'Université de Grand-

[*] Université Paris Diderot – Paris 7 – France – michele.artigue@univ-paris-diderot.fr
[**] Faculté des Sciences de Rabat – Maroc – n.elyacoubi@yahoo.fr
[***] Université Laval, Québec – Canada – Bernard.Hodgson@mat.ulaval.ca

Bassam à Abidjan en Côte d'Ivoire, initialement invité pour cette conférence à trois voix — est, comme lui, mathématicienne, plus particulièrement spécialiste d'analyse fonctionnelle. D'abord professeur de lycée puis professeur à l'École normale supérieure de Rabat chargée de la formation des enseignants du secondaire, elle a ensuite intégré la Faculté des sciences, et elle a toujours eu un contact étroit avec l'enseignement et la formation des enseignants. Bernard Hodgson est aussi un mathématicien, logicien plus précisément, mais le fait qu'il ait été recruté à l'Université Laval à Québec en 1975 sur une chaire dédiée à la formation mathématique des enseignants du primaire et ait assuré cette mission jusqu'à aujourd'hui, y englobant aussi progressivement la formation des enseignants du secondaire, lui a permis un contact avec l'enseignement et la didactique bien plus étroit que celui de la plupart des mathématiciens universitaires. Quant à Michèle Artigue, si elle a débuté sa carrière comme logicienne, tout comme Bernard Hodgson, ayant été attirée à l'IREM Paris 7 (Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques) par son premier directeur André Revuz qui avait été son professeur à l'ENS de Sèvres, elle a assez vite réorienté son activité de recherche vers la didactique des mathématiques.

Nous sommes donc différents, nous vivons dans des contextes différents, mais nous partageons cependant une vision des mathématiques comme science ouverte sur le monde et essentielle pour répondre, en collaboration avec d'autres, aux défis qu'affronte l'humanité. Nous partageons aussi la conviction de l'importance des liens entre mathématiques, enseignement des mathématiques et didactique de cette discipline, et le souci de contribuer sans cesse à les faire vivre et les renforcer. Une autre dimension aussi nous rapproche. Nous avons eu tous les trois des responsabilités internationales qui nous ont amenés à nous décentrer, vis-à-vis de ces questions, de perspectives locales, de les appréhender à une échelle beaucoup plus large. Nouzha el Yacoubi a été impliquée depuis 1991 dans les activités et la gouvernance de l'Union mathématique africaine (UMA), qu'elle préside depuis 2017. Bernard Hodgson et Michèle Artigue ont été simultanément membres du Comité exécutif de l'ICMI, la Commission internationale de l'enseignement mathématique (CIEM), de 1999 à 2009, le premier comme secrétaire général, la seconde comme vice-présidente puis présidente.

Ce sont ces expériences locales, régionales, nationales et internationales qui ont tissé les visions des relations entre mathématiques et didactique des mathématiques que nous présentons dans ce texte, combinant un regard sur l'histoire de ces relations et sur la situation actuelle. Le texte est constitué de trois sections, respectivement écrites par chacun de nous, et se termine par une conclusion élaborée en commun, comme l'a été cette introduction.

II. DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES ET MATHÉMATIQUES EN AFRIQUE : ÉMERGENCE, RELATIONS ET PERSPECTIVES

Nouzha el Yacoubi

1. Introduction

Il n'est plus à démontrer que tout développement économique est forcément dépendant d'une éducation de qualité et que ceci suppose une didactique adéquate basée sur les spécificités culturelles, épistémologiques, historiques, mais aussi ouverte sur les tendances universelles et tenant compte de l'évolution, au fil des ans, des exigences et des ressources, d'où la nécessité d'une recherche permanente en didactique. Le monde est, en effet, en perpétuel changement et il connaît actuellement une transformation historique majeure de nature multidimensionnelle : scientifique, technologique, économique, sociale, culturelle,

politique et géopolitique. Des innovations et de nouvelles recherches sont nécessaires pour faire face à de tels changements et répondre aux nombreuses exigences de ce nouveau millénaire.

Le continent africain, notamment, s'efforce de réaliser la croissance socio-économique dont il a tant besoin grâce aux innovations scientifiques et technologiques. Les innovations et les avancées mondiales dans les sciences, la technologie, l'ingénierie et les mathématiques (STEM) ont une pertinence forte et un impact potentiel sur la réalisation du développement durable et l'éradication de la pauvreté (qui touche 50 % de la population en Afrique subsaharienne). Ainsi, l'enseignement des STEM devrait-il être au cœur des stratégies des développements nationaux. En particulier, les faibles performances en mathématiques au niveau de l'école sont perçues comme un obstacle important pour atteindre les objectifs d'un développement économique et social, tant au plan individuel que national.

Il faut reconnaître qu'à cet égard, pour des raisons historiques, l'Afrique est partie de loin. Des progrès certains ont été enregistrés, mais beaucoup reste à faire afin qu'une grande majorité des pays du continent, plus particulièrement de l'Afrique subsaharienne, réussisse à combler l'écart avec les pays concurrents potentiels. Cela est en partie dû, comme l'a rapporté la Banque Mondiale, à « la faible qualité de l'éducation de base en sciences et en mathématiques au sein de l'Afrique subsaharienne ; (et) un système d'enseignement supérieur orienté vers des disciplines autres que les STEM telles que les sciences humaines et sociales » (Bethell, 2016, p. 34, traduction personnelle). Ainsi, la didactique des mathématiques a-t-elle de plus en plus un rôle important à jouer en Afrique.

2. La didactique des mathématiques en Afrique : émergence et relations avec les mathématiques

Les mathématiques ont une très longue histoire en Afrique. L'Égypte est généralement considérée avec la Mésopotamie comme le berceau des mathématiques. Alexandrie a servi, pendant l'Antiquité, de foyer mathématique et des mathématiciens comme Euclide, Ptolémée, Héron et Diophante y ont travaillé et enseigné. De nombreuses études ont montré la contribution, ensuite, des mathématiciens du Maghreb et plus généralement de l'Afrique au développement des mathématiques et à leur circulation internationale (Djebbar, 2015 ; Traoré & Barry, 2006). Ces mathématiciens qui ont contribué de façon remarquable au développement des mathématiques, durant des siècles, ont-ils été juste des mathématiciens, ou bien étaient-ils aussi didacticiens des mathématiques par la force des choses, avant même que ne naisse la didactique des mathématiques ?

La didactique des mathématiques comme champ de recherche n'a émergé en effet que dans la seconde moitié du 20^{e} siècle, d'abord dans les pays développés, et, même là, sa reconnaissance institutionnelle n'a été que très progressive. En Afrique, ce développement est plus récent. Souvent, il s'est effectué en lien avec celui de l'ethnomathématique (Gerdes, 1995), avec comme préoccupation majeure le rapprochement des mathématiques enseignées à l'école du vécu quotidien et de la culture des apprenants, ou alors en se centrant sur des questions particulièrement importantes pour ces pays comme le multilinguisme (Adler, 2001). Pour des raisons historiques de plus, l'émergence de la didactique s'est opérée différemment en Afrique anglophone et francophone, et la coupure linguistique n'a pas favorisé les interactions.

Dès les années 1970, par exemple, la France et le Québec se sont intéressés à l'Afrique francophone et y ont initié une recherche en didactique des mathématiques fortement influencée par leurs cultures didactiques propres. La coopération franco-africaine

(respectivement québéco-africaine) a consisté aussi à accueillir en France et au Québec des licenciés africains de mathématiques pour préparer des thèses en didactique[1], à organiser des échanges avec les IREM pour la France et des laboratoires universitaires, en France et au Québec, et à inciter à la création de centres semblables en Afrique, tels l'IREMPT créé à Dakar dès 1975. Cela a permis de former des didacticiens africains en mathématiques dont certains font actuellement partie de la diaspora africaine, tandis que beaucoup d'autres ont regagné leur pays d'origine. Les uns et les autres ont contribué au développement de la didactique des mathématiques à l'échelle internationale et aussi à la formation de didacticiens africains. Ces interactions et collaborations n'ont pas manqué de porter leurs fruits et de favoriser l'émergence, en Afrique francophone, d'une didactique des mathématiques qui est progressivement devenue plus autonome et a enrichi la recherche de ses propres problématiques. En témoignent les programmes de master et de doctorat qui existent maintenant dans plusieurs de ces pays, comme le montrent les quatre études de cas concernant le Bénin, le Mali, le Sénégal et la Tunisie présentées dans (Artigue, 2016) et l'analyse détaillée concernant la Tunisie proposée dans (Abdeljaouad, 2009).

Au plan international, l'ICMI, constatant la faible participation du continent africain à ses activités, s'est aussi impliquée dans ce développement, à partir des années 2000 notamment. Elle l'a fait d'abord en voyant dans la création de l'Espace mathématique francophone (EMF), à l'initiative de sa sous-commission française, la CFEM, un moyen de favoriser l'intégration internationale de l'Afrique francophone, et en donnant aux conférences EMF le statut de conférences régionales ICMI. À ce jour, trois conférences EMF ont effectivement été organisées en Afrique, à Tozeur (Tunisie) en 2003, à Dakar (Sénégal) en 2009 et à Alger (Algérie) en 2015, et la prochaine est prévue au Bénin en 2021. Ensuite, en 2005, ont été initiées les conférences AFRICME (Africa Regional Congress of ICMI on Mathematical Education), qui visent plus particulièrement l'Afrique anglophone. Cinq ont eu lieu à ce jour, en Afrique du Sud (2005), au Kenya (2007), au Botswana (2010), au Lesotho (2013) et en Tanzanie (2018). En revanche, en dépit des efforts déployés, les interactions entre communautés anglophones et francophones restent limitées du fait de la coupure linguistique, malgré les problèmes communs à affronter. Plus récemment, le programme CANP (Capacity and Networking Project) de l'ICMI a complété ce dispositif avec le soutien de l'UNESCO et de l'Union mathématique internationale, en visant plus précisément la formation de formateurs et les synergies entre les différents acteurs de la formation, notamment mathématiciens universitaires et didacticiens, ainsi que la constitution ou le renforcement de réseaux régionaux. La première édition, EDiMath, a eu lieu au Mali en 2011 et la quatrième en Tanzanie en 2014, et elles ont conduit à des rapports détaillés réalisés collectivement sur la formation initiale et continue des enseignants dans les pays participants (voir par exemple (Halai & Tennant, 2016) pour CANP4)[2].

À cela s'ajoutent les différents rapports publiés sur l'enseignement des mathématiques en Afrique dans des actes de congrès, colloques ou ateliers spécialisés organisés en Afrique ou en dehors de l'Afrique.

Dans ce panorama, force est de constater que la Commission de l'Union mathématique africaine (UMA) sur l'enseignement des mathématiques en Afrique (AMU-CMEA), qui se devait d'être concernée au premier chef par cette problématique, a été très peu active, si l'on excepte le fait qu'elle s'est inspirée de la structure EMF pour créer l'Espace Mathématique

[1] Le recensement effectué pour le congrès ICME-13 des thèses en didactique d'étudiants africains dirigées ou co-dirigées par un chercheur français mentionne 17 thèses soutenues avant 1990 et 39 entre 1990 et 2015, 12 pays africains étant concernés.

[2] https://www.mathunion.org/icmi/activities/developing-countries-support/capacity-networking-project-canp

Pan Africain (EMPA), ce qui fut une excellente initiative. Deux conférences lui ont été associées en Tunisie, en 2006 et 2008, mais malheureusement aucune autre activité n'a été enregistrée depuis. Le nouveau Comité exécutif de l'UMA élu en juillet 2017, conscient de l'importance de cette commission, a renouvelé ses membres suivant des critères précis, et demandé à la commission un agenda d'activités. C'est ainsi que le 3e EMPA est prévu du 26 au 30 août 2019 en Angola, sur le thème : « Professional development of mathematics teachers », et le 4e EMPA du 24 au 26 juin 2020 au Rwanda, sur le thème « International Conference on innovation in teaching and learning of mathematics and sciences for sustainable development goals ».

Par ailleurs, en 2009 lors du Congrès Pan Africain des Mathématiciens à Yamoussoukro, la création d'un Réseau Africain de Didactique des Mathématiques (RADMA) avait été décidée. Cette initiative louable n'a malheureusement pas réussi à déboucher sur une structure opérationnelle. En revanche, la création récente de l'Association des Didacticiens des Mathématiques Africains (ADiMA), lors d'un colloque tenu à Yaoundé en août 2016 sur le thème « La didactique des mathématiques : entre spécificité et ouverture vers d'autres sciences — enjeux et perspectives », permet d'espérer la constitution d'une structure propre soutenant le développement de la didactique des mathématiques en Afrique, une didactique prenant en compte les spécificités des contextes socio-culturels africains tout en étant ouverte sur l'universel. Le choix du thème du second colloque d'ADiMA tenu en août 2018 au Bénin, « Place de la didactique des mathématiques dans la formation des enseignants en Afrique : états des lieux, enjeux et perspectives », fut réellement pertinent. Je regrette sincèrement que l'UMA n'y ait pas été associée, et je formule le souhait que l'UMA soit partenaire de l'organisation du 3e colloque d'ADiMA.

En ce qui concerne l'Afrique anglophone, il existe d'autres structures telles que la Southern African Association for Research in Mathematics, Science and Technology Education (SAARMSTE), qui organisera en 2020 son 28e colloque annuel ; l'Association pour le Développement de l'Éducation en Afrique (ADEA) créée en 1988, qui a lancé en 2004, en partenariat avec l'Agence japonaise de coopération internationale (JICA) et le Ministère de l'Éducation, de la Science et de la Technologie du Kenya, un groupe de travail sur l'enseignement des mathématiques et les sciences : « Working Group on Mathematics and Science Education » (WGMSE), pour intervenir de manière ciblée dans le but de relever les défis de l'enseignement des mathématiques et des sciences en Afrique. Un Centre pour l'enseignement des mathématiques, de la science et la technologie en Afrique (CEMASTEA) a ainsi été créé à Nairobi pour abriter les travaux du groupe WGMSE. Ce groupe a fonctionné en collaboration avec le Réseau pour le renforcement de l'enseignement des mathématiques et des sciences en Afrique (SMASE–Africa), qui regroupe 35 pays africains. SMASE–Africa constitue une plate-forme où les membres peuvent échanger et dialoguer sur les programmes, les politiques et les pratiques en matière d'enseignement des sciences et des mathématiques. Dix ans plus tard, lors de la 40e réunion du comité directeur de l'ADEA, tenue à Tunis en mai 2014, le groupe WGMSE a été transformé en ICQN-MSE (Inter-Country Quality Node on Mathematics and Sciences Education)[3].

À l'instar de l'ISEFC (Institut Supérieur de l'Éducation et de la Formation Continue) de Tunisie et de l'IMSP (Institut pour les Mathématiques et Sciences Physiques) du Bénin, qui abritent un programme de formation et de recherche en didactique des mathématiques de haut niveau, un centre d'excellence a été aussi créé à l'Université du Rwanda: « African Centre of Excellence for Innovative Teaching and Learning Mathematics and Science (ACEITLMS) »[4].

[3] http://www.adeanet.org/en/working-groups/mathematics-and-science-education
[4] https://ce.ur.ac.rw/?q=node/249

Les principales activités du centre consistent à apporter qualité et innovation dans les domaines de l'enseignement et de l'apprentissage, de la recherche et de la formation. En décembre 2017, le centre a inscrit la première cohorte formée d'une quinzaine d'étudiants du Rwanda et de la sous-région (neuf hommes et six femmes) au doctorat en didactique des mathématiques et des sciences.

Comme on le voit à cette description succincte, la didactique des mathématiques en Afrique est aujourd'hui en plein développement. Même si beaucoup reste à faire pour renforcer les interactions entre mathématiciens et didacticiens des mathématiques et nourrir des collaborations fructueuses, les relations entre communautés ne sont pas conflictuelles, et certaines évolutions semblent prometteuses. Ceci me conduit à la troisième partie de cette contribution, dédiée aux perspectives.

3. Perspectives

Je voudrais commencer par citer Jill Adler, sud-africaine et actuelle présidente de l'ICMI, à propos des spécificités de la didactique des mathématiques : « Tenir notre passé, vivre notre présent, imaginer et créer un avenir meilleur, sont au cœur de ce que j'appellerais l'*ethos*, la philosophie, d'une grande partie du travail de recherche et développement dans l'éducation sud-africaine, et donc aussi dans la formation des enseignants » (Adler, 2005, p. 164, traduction personnelle). En tant que mathématicienne marocaine, soucieuse et engagée dans les questions d'éducation et ayant aujourd'hui la responsabilité d'être présidente de l'UMA, j'adhère fortement à cette vision et je considère important et indispensable que les didacticiens, africains ou autres, s'intéressant à l'Afrique prennent en compte les contraintes et paramètres actuels de ce continent dans leurs recherches, et aident à rendre possible un futur meilleur.

L'Union mathématique africaine, quant à elle, en tant qu'union mathématique continentale, plus de quarante ans après sa création, a jugé pertinent de réfléchir sur ses objectifs, d'essayer de les adapter aux exigences de ce nouveau millénaire et de définir une nouvelle vision de sa mission. C'est ainsi que l'UMA s'engage dès ce nouveau mandat à œuvrer pour le développement de mathématiques qui, d'une part pourraient avoir un impact sur certains secteurs critiques, tels l'agriculture, l'énergie, l'environnement, la santé, l'exploitation minière, la sécurité et l'eau, et d'autre part viseraient une employabilité de plus en plus importante dans le monde de l'industrie et de l'entreprise. Un accompagnement judicieux des didacticiens des mathématiques, africains comme non africains, ayant contribué à l'émergence de la didactique des mathématiques en Afrique serait vraiment précieux.

4. Conclusion

Les didacticiens, les enseignants et chercheurs en mathématiques sont fortement interpelés pour travailler ensemble pour faire des mathématiques un atout en vue de relever les défis de la science, technologie et innovation en Afrique. Il est de notre devoir à tous de repenser les programmes d'enseignement des mathématiques en usage actuellement en Afrique, d'en élaborer de mieux adaptés, répondant aux exigences de ce nouveau millénaire dominé par l'expansion rapide, voire vertigineuse, des nouvelles technologies. Notre souci doit être qu'un apprenant est appelé à s'approprier la logique mathématique, à comprendre le raisonnement mathématique, à formuler, utiliser et interpréter les mathématiques dans diverses circonstances, à utiliser les outils mathématiques pour décrire, expliquer et prévoir des phénomènes.

À cette fin, une collaboration plus étroite entre mathématiciens et didacticiens des mathématiques est à encourager et à soutenir. Personnellement, j'y adhère totalement. Déjà, en tant que présidente du Comité local d'organisation du Congrès Pan Africain des Mathématiciens (COPAM 2017) tenu à Rabat en juillet 2017, j'ai tenu à inviter parmi les conférenciers pléniers deux didacticiens des mathématiques : Jill Adler, déjà mentionnée, et Hee-Chan Lew de Corée du Sud, didacticien des mathématiques et actuel président de la KNUE (Korean National University of Education, South Korea). Pour la première fois également, *Afrika Matematika* (le journal officiel de l'UMA) publiera des articles de didactique des mathématiques dans son numéro spécial réservé aux Actes du COPAM 2017. En ma capacité de présidente de l'UMA, dans les années qui viennent, je ferai tout pour initier et développer une coopération fructueuse entre l'UMA et toute instance africaine ou internationale œuvrant pour le développement d'une relation collégiale entre mathématiciens et didacticiens des mathématiques, en soutenant notamment les efforts importants déjà investis pour le développement de la didactique des mathématiques en Afrique. Personnellement, comme la plupart des mathématiciens africains, malgré mon intérêt pour l'enseignement des mathématiques, je n'avais qu'une vision très limitée de la recherche didactique menée en Afrique quand j'ai accepté de remplacer le professeur Saliou Touré pour cette conférence à trois voix, quelques jours avant le début du colloque EMF 2018. C'est en fait grâce aux échanges que j'ai eus lors du colloque avec les participants africains et ensuite avec mes co-auteurs, et notamment avec Michèle Artigue, lors de l'élaboration de ce texte pour les Actes du colloque, que j'ai réellement pu apprécier le dynamisme de cette recherche. Ces échanges ont renforcé ma volonté de contribuer à développer et renforcer les collaborations entre mathématiciens et didacticiens des mathématiques.

III. MATHÉMATIQUES ET DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES : QUELLES RELATIONS ? ÉPISODES TIRÉS DE LA VIE DE LA CIEM / ICMI ET D'AILLEURS

Bernard R. Hodgson

Tel que mentionné dans l'introduction de ce texte, j'aborde ici le thème des relations entre mathématiques et didactique des mathématiques — et entre les communautés de mathématiciens et de didacticiens des mathématiques — selon la double perspective d'un mathématicien impliqué depuis plus de quatre décennies, au sein d'un département de mathématiques, dans la formation des enseignants des ordres primaire et secondaire, et aussi de secrétaire général de la CIEM / ICMI pendant onze ans, avec un intérêt personnel pour son histoire. Je souhaite offrir un survol de quelques aspects choisis de ces relations, principalement en m'inspirant de contributions de mathématiciens. Certains des épisodes que je vais évoquer sont en lien direct avec les activités de l'ICMI. Mais je compte aussi m'inspirer de mes expériences personnelles à l'Université Laval, non pas que celles-ci revêtent un caractère exemplaire, mais simplement en tant que cas d'« histoires vécues ». On trouvera dans (Hodgson, 2015) des commentaires additionnels sur l'interconnexion entre mathématiques et didactique, mais selon une perspective davantage ancrée dans l'évolution de l'ICMI au fil des ans.

Il peut être opportun de souligner d'entrée de jeu que le poste que j'occupe à l'Université Laval a un caractère plutôt inusité — à tout le moins dans le cadre québécois ou canadien. Il résulte d'un alignement des astres au Québec, au tournant des années 1970, alors que mon département (j'insiste : de mathématiques) avait été invité par la direction de l'Université à offrir aux futurs enseignants du primaire deux cours de mathématiques. La toile de fond derrière cette singulière invitation est le célèbre rapport de la « Commission Parent » qui, au milieu des années 1960, proposait une réforme globale du système d'éducation québécois, du

primaire à l'université.[5] L'une des recommandations fortes du rapport Parent visait l'enrichissement de la qualification des enseignants du primaire et du secondaire, par le truchement de l'abolition du réseau alors en place d'écoles normales et le transfert à l'université de la formation des enseignants. D'où l'invitation faite à mon département et la création du poste — que j'occupe depuis 1975 — de mathématicien œuvrant en formation mathématique des enseignants du primaire.[6] Le lecteur désireux d'en savoir davantage sur certains aspects du rapport Parent pourra consulter (Hodgson, 2017).

Une conséquence du contexte dans lequel je me suis retrouvé dès le début de ma carrière de professeur d'université fut une nécessaire collaboration avec mes collègues lavallois didacticiens des mathématiques œuvrant au sein de la Faculté des sciences de l'éducation, principalement en lien avec la formation initiale des enseignants du primaire et du secondaire, mais aussi à propos de perfectionnement des enseignants — j'en dirai quelques mots plus bas. Cette collaboration a bien sûr pu varier au fil des ans, mais elle a toujours été (de mon point de vue à tout le moins) pertinente et productive. Une cristallisation récente en est la possibilité maintenant offerte aux étudiants inscrits à une maîtrise en mathématiques à l'Université Laval d'y inclure une concentration en enseignement des mathématiques — principalement aux ordres postsecondaires (cégep, université) mais aussi possiblement au secondaire. Des collègues didacticiens participent à certaines des activités offertes dans le cadre de cette maîtrise.

1. Premiers aspects de la relation mathématiques / didactique : à l'aube de la didactique des mathématiques

En vue d'évoquer quelques aspects du spectre des relations possibles entre mathématiques et didactique des mathématiques, il est utile de distinguer deux trames, si je puis dire, où on voit d'une part des mathématiciens s'intéresser sincèrement (et avec parfois plus ou moins de naïveté) à certains aspects de l'enseignement des mathématiques — j'y reviens plus bas —, et d'autre part des mathématiciens évoluant dans un cadre où la didactique des mathématiques est devenue un domaine du savoir en bonne et due forme. Cette émergence, au cours des années 1960 et 1970, de la didactique des mathématiques comme une discipline à part entière, il est sans doute bon de le rappeler, ne s'est toutefois pas toujours réalisée sans heurts.

J'en prends pour preuve les comptes rendus d'un séminaire organisé à Aarhus en 1960 par l'ICMI, à l'instigation de son président Marshall Stone — voir (Bundgaard, 1960). L'objectif de cette rencontre était de préparer le terrain pour une activité en lien avec l'enseignement devant se tenir lors du Congrès international des mathématiciens de 1962 à Stockholm. S'appuyant sur des thèmes proposés par Stone, le Comité d'organisation avait décidé de concentrer les présentations et discussions du séminaire sur l'« enseignement moderne de la géométrie » à l'école secondaire, avec un accent sur les approches rendues possibles par des développements récents, notamment l'algébrisation des mathématiques (*ibid.*, p. ii). Les conférenciers comprenaient plusieurs « grosses pointures », tels Heinrich Behnke (président sortant et vice-président de l'ICMI), Gustave Choquet, Jean Dieudonné ou Hans Freudenthal (président de l'ICMI de 1967 à 1970).

[5] C'est du rapport Parent qu'est issu entre autres le réseau des *collèges d'enseignement général et professionnel* (cégeps), un ordre d'enseignement postsecondaire spécifique au Québec (à tout le moins dans le contexte canadien) et reconnu pour sa pertinence quant au développement des jeunes, tant au plan personnel qu'intellectuel.

[6] À noter qu'un nouveau poste similaire a été créé quelque vingt ans plus tard dans mon département, cette fois à l'occasion d'une réforme de la formation des enseignants du secondaire. C'est mon collègue Frédéric Gourdeau qui en est le titulaire.

Une tension claire entre mathématiciens tenants d'une ouverture vers des considérations de nature didactique (même si, à proprement parler, ce terme est alors dans une certaine mesure un anachronisme) et ceux rejetant au contraire une telle possibilité peut être perçue dans la discussion suivant la présentation de Choquet sur le thème « Recherche d'une axiomatique commode pour le premier enseignement de la géométrie élémentaire ». Ainsi, au commentaire de Freudenthal que « There are certain psychological and pedagogical principles which mustn't be violated. », Dieudonné rétorque: « The important thing is to teach the students some good mathematics. The psychological considerations are of secondary importance. (La psychologie, je m'en fiche.) »[7] (*ibid.*, p. 104) Et après une autre présentation, alors que Freudenthal affirme : « We could teach everything, drive the children in any direction. But there exist other things at school. We must see the whole together. », Dieudonné réplique cette fois : « No. We are here to discuss mathematics and nothing else. » (*ibid.*, p. 127)

Le séminaire d'Aarhus survenait à la suite d'une décennie au cours de laquelle un nouvel acteur était entré sur la scène de l'enseignement des mathématiques, la *Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques* (CIEAEM). Créée au début des années 1950 à l'initiative de Caleb Gattegno, elle comprenait entres autres parmi ses premiers membres — outre Choquet, Dieudonné ou Freudenthal —, Georges Papy, Jean Piaget et André Lichnerowicz (président de l'ICMI de 1963 à 1966, entre Stone et Freudenthal, et sur lequel Michèle Artigue reviendra à la section IV). Un objectif clair de la CIEAEM, comme le souligne (Hodgson et al., 2013, pp. 910-911), était de s'éloigner de la tradition de la première mouture de l'ICMI, depuis sa création en 1908 jusqu'à la seconde guerre mondiale, fortement axée sur des comparaisons curriculaires internationales, et de plutôt mettre l'accent sur l'élève (ou l'étudiant, selon le cas) et sur l'enseignement même. Signe des temps et de l'influence bourbakiste d'alors, la CIEAEM manifestait aussi une propension à l'abstraction et un intérêt marqué pour les structures, aspects au cœur du fameux mouvement des « maths modernes » qui eut une si forte influence sur la pédagogie des années 1960 dans de nombreux pays.

Si j'ai retenu ici deux événements particuliers au plan international — le séminaire ICMI d'Aarhus, en lien avec le congrès ICM de Stockholm, et l'arrivée de la CIEAEM —, c'est comme symptomatiques du bouillonnement qui a accompagné l'émergence et l'éventuelle acceptation de la didactique des mathématiques en tant que discipline scientifique. Il va sans dire que les influences et interrelations qui ont alors vu le jour ont été multiples, et dans des directions diverses. Ainsi la CIEAEM, par son désir clairement exprimé de renouveler les objets de réflexion touchant l'enseignement des mathématiques, a eu une influence marquée sur la détermination du champ de la didactique, et par ricochet sur l'ICMI elle-même. Mais l'ICMI à son tour, comme lieu privilégié de réflexion et d'échange, et notamment grâce à sa position unique par rapport à la communauté des mathématiciens par le truchement de l'organisme dont elle relève, l'Union mathématique internationale (UMI / IMU),[8] a influencé et stimulé de manière profonde non seulement la genèse et l'évolution de la didactique des mathématiques, mais aussi les liens de cette nouvelle discipline avec les mathématiques.

Un des moments forts où l'on peut voir l'ICMI au cœur de la mouvance des relations entre mathématiques et didactique est lors de la présidence de Hans Freudenthal, de 1967 à 1970. Deux héritages majeurs de cette période au plan de la didactique des mathématiques,

[7] Cité textuellement (partiellement en français dans le texte original).

[8] À la suite de la renaissance de l'IMU en 1951, l'ICMI a été reconstituée à titre de commission de l'IMU « charged with the conduct of the activities of IMU bearing on mathematical or scientific education » — tiré du premier article définissant le mandat de l'ICMI — voir *Terms of reference of ICMI* (https://www.mathunion.org/icmi/terms-reference-icmi).

essentiellement dus au dynamisme et à la vision de Freudenthal lui-même, sont coup sur coup le lancement de la revue *Educational Studies in Mathematics* en 1968 et la tenue du premier Congrès international sur l'enseignement des mathématiques (ICME-1) à Lyon en 1969. Il est connu que sans que cette création se déroule formellement sous ses auspices, l'ICMI n'en a pas moins favorisé l'arrivée d'*ESM* (Lehto, 1998, p. 259), la revue *L'Enseignement mathématique* — organe officiel de l'ICMI depuis ses origines en 1908 — n'étant pas perçue (entre autres par Freudenthal) comme répondant aux besoins du champ de la didactique alors en émergence. Quant à la mise en place des congrès ICMEs — amorcée, il faut le souligner, à l'insu de l'IMU (*ibid.*) —, elle manifestait l'insatisfaction de Freudenthal quant à la façon dont étaient traitées, lors des congrès des mathématiciens de l'IMU, les questions touchant l'enseignement des mathématiques et son désir de tenir des rencontres entièrement consacrées à ce sujet.

Lors du congrès ICME-1 furent adoptées des résolutions à propos de l'« enseignement mathématique » — en anglais « mathematical education » (EBESM, 1969, pp. 284-285). Dans le préambule de ces résolutions, on lit par exemple l'affirmation de principe suivante, qui illustre combien la question des relations entre mathématiques et didactique des mathématiques, y compris du point de vue des structures universitaires, était alors prégnante :

> La pédagogie de la mathématique devient de plus en plus une science autonome avec ses problèmes propres de contenu mathématique et d'expérimentation. Cette science nouvelle doit trouver place dans les Départements de Mathématiques des Universités ou des Instituts de Recherche ; ceux qui se qualifient dans cette discipline doivent pouvoir accéder à tous les grades universitaires. (EBESM, 1969, p. 285)

Outre le fait que ce texte cristallise l'état des lieux à un moment précis quant à la perception d'un domaine en émergence, il est intéressant, côté vocabulaire, de le comparer avec sa version anglaise :

> The theory of mathematical education is becoming a science in its own right, with its own problems both of mathematical and pedagogical content. The new science should be given a place in the mathematical departments of Universities or Research Institutes, with appropriate academic qualifications available. (EBESM, 1969, p. 284)

On y voit entre autres que la science qui sera éventuellement dénommée en français *didactique des mathématiques* était alors présentée comme la « pédagogie des mathématiques », alors qu'en anglais on parlait de « theory of mathematical education ». Cette dernière expression, on le sait, est devenue en pratique dans les cercles anglophones le fameux *mathematics education*, avec sans doute quelque ambiguïté quant à sa portée exacte. Je renvoie le lecteur intéressé à (Hodgson, 2015, pp. 44-47) pour des commentaires sur de tels aspects linguistiques, de même que sur les appartenances institutionnelles des acteurs impliqués de nos jours dans le binôme mathématiques / didactique des mathématiques.

2. Mathématiciens et enseignement : quelques exemples tirés du passé

Après avoir évoqué certains aspects du thème de cette conférence à trois voix à la lumière de la montée de la didactique des mathématiques, il y a environ un demi-siècle, je voudrais revenir sur le thème de l'enseignement des mathématiques vu selon la perspective d'un mathématicien. Je devrais peut-être ajouter : un mathématicien actif dans son domaine — c'est-à-dire un « working mathematician », pour reprendre le titre d'un livre mémorable de l'époque de mes études (Mac Lane, 1971).

Il pourrait être amusant — à défaut d'être forcément édifiant — de répertorier à cet égard quelques-unes de « perles » que l'on retrouve de la littérature, où des mathématiciens de premier calibre expriment leurs états d'âme à propos de l'enseignement. J'ai à l'esprit ici entre autres le célèbre aphorisme de Godfrey Harold Hardy (1877-1947) : « I hate

'teaching' » (Hardy, 1967, p. 149) — quoique les guillemets autour du mot *teaching* suggèrent qu'il faille sans doute le prendre avec un grain de sel, Hardy parlant tout juste à la ligne précédente des « duller routines of universities » et s'exclamant trois lignes plus loin : « I love lecturing » et évoquant des « extremely able classes ».

Dans le même registre, on rappelle volontiers, s'agissant du grand Carl Friedrich Gauss (1777-1855), son affirmation « J'ai vraiment de l'aversion pour l'enseignement »[9] (traduction tirée de Tazzioli (2008), p. 94), formulée dans une lettre datée du 26 octobre 1802, alors que Gauss n'a que 25 ans — contrairement à Hardy qui a rédigé son essai quelques années avant sa mort. Dunnington s'empresse d'insister sur le fait que « this statement needs some qualification and clarification » (Dunnington, 2004, p. 414), consacrant plus de deux pages à nuancer ces propos, autres lettres de Gauss à l'appui. Le biographe de Gauss présente même un appendice de six pages où sont énumérés les cours donnés par Gauss sur une période de près de cinquante ans. Tazzioli, de son côté, souligne que Gauss, plus tard dans sa carrière, consacrera « beaucoup plus d'énergie et d'attention à l'enseignement » qu'au début (Tazzioli, 2008, p. 94), motivé sans doute par d'excellents élèves qu'il a alors eus, tels Dedekind ou Riemann.

On pourrait aussi évoquer, dans un registre autre, Siméon-Denis Poisson (1781-1840), dont le biographe se plait à affirmer qu'il avait l'habitude de dire : « La vie n'est bonne qu'à deux choses : à faire des mathématiques et à les professer » (Arago, 1854, p. 662).

Il est difficile, s'agissant de mathématiciens face à l'enseignement, de ne pas penser à Leonhard Euler (1707-1783), ne serait-ce que pour son rôle quelque peu avant-gardiste de tuteur à distance dans ses célébrissimes *Lettres à une princesse d'Allemagne* (1768). Or c'est davantage en raison de son soin à rédiger des textes mathématiques magnifiquement structurés au plan pédagogique que je retiens ici le mathématicien suisse. On peut mentionner à cet égard son *Vollständige Anleitung zur Algebra* (1770), où on voit par exemple Euler prendre un soin méticuleux à introduire patiemment les notions de *rapport arithmétique* et *rapport géométrique*, puis de *progression* (*arithmétique* ou *géométrique*), dont il fait ensuite la *sommation*, pour enfin en venir à appliquer ces idées par exemple à l'étude des *nombres figurés*. De fort belles pages! De même pour son *Introductio in analysin infinitorum* (1748), où Euler propose une formulation « moderne » de nombreux concepts de base au cœur de l'enseignement de l'analyse — mais ce, tout en utilisant sans vergogne des quantités infiniment petites et infiniment grandes…

C'est davantage sur l'*Einleitung zur Rechenkunst* (1738) d'Euler — traduite en 1792 sous le titre *L'arithmétique raisonnée et démontrée* — que je souhaite m'arrêter. Dans cet ouvrage de quelque 300 pages, aujourd'hui moins connu que ses traités d'algèbre ou d'analyse, Euler se penche avec beaucoup de minutie sur l'arithmétique des entiers et des fractions, tout en prenant grand soin d'illustrer ses propos de nombreux exemples tirés de divers métiers, les règles arithmétiques élémentaires étant alors mises en action tour à tour dans le domaine de l'orfèvre, de l'apothicaire, du marchand de vin, etc. Dans la préface de cet ouvrage, Euler écrit :

> L'apprentissage de l'art du calcul sans quelques principes de base n'est suffisant ni pour résoudre tous les cas pouvant survenir, ni pour aiguiser l'esprit, tel que devrait être particulièrement l'intention. […] Ainsi, lorsque non seulement on connaît les règles de l'arithmétique de base, mais que de plus on comprend clairement leur raison et leur origine, alors on sera dans une certaine mesure en position d'inventer par soi-même de nouvelles règles, et de les utiliser afin de résoudre de tels problèmes, pour lesquels les règles

[9] Texte original: « Gegen das Dociren habe ich einmal eine wahre Abneigung. » (Schilling, (1900), p. 105). Le mot « einmal » est ici à prendre dans le sens de l'expression « nun einmal », venant en quelque sorte renforcer l'affirmation.

> ordinaires seraient insuffisantes. Il ne faut pas du tout craindre que, ce faisant, l'apprentissage de l'arithmétique devienne plus difficile et requière plus de temps que lorsque les règles de base sont présentées sans explication. Car tout individu connaît et garde beaucoup plus facilement en mémoire, ce dont il comprend clairement la raison et l'origine. (Euler, 1738, pp. 3-4)[10]

Dans une large mesure, ces propos d'Euler rejoignent certains des principes sur lesquels s'appuie notre cours d'arithmétique pour les futurs enseignants du primaire dont il sera question plus bas, le souci de 'comprendre la raison et l'origine des règles de l'arithmétique' étant au cœur de la démarche mathématique qui y est proposée.

Henri Lebesgue (1875-1941) représente un autre cas de figure de mathématicien s'exprimant sur « des questions d'enseignement mathématique » (Lebesgue, 1975, p. 1). J'ai été mis en contact avec le texte *Sur la mesure des grandeurs* de Lebesgue par le truchement de l'article d'Anna Sierpinska (2012), écrit en réaction au texte d'André Boileau (2012) portant sur la formation mathématique des futurs enseignants du secondaire. L'auteure y explique comment une allusion de Boileau à l'« approche épistémologique de la construction des nombres réels » proposée par Lebesgue (Boileau, 2012, p. 60) l'a amenée dans une « excursion intellectuelle »[11] au cours de laquelle elle a découvert qu'en plus d'« un Lebesgue […] concepteur de l'intégrale et de [la] mesure qui portent son nom », il y a aussi « un Lebesgue-didacticien » (Sierpinska, 2012, p. 92).

Pour illustrer l'apport de ce dernier — et afin de préparer le terrain en vue de considérations qui viendront plus bas —, on peut s'arrêter au tout début du texte de Lebesgue, où il affirme : « Je considère l'Arithmétique comme une science expérimentale au même titre que les autres » (Lebesgue, 1975, p. 5). C'est l'idée de mesure qui joue pour lui le rôle clef : s'agissant du nombre naturel comme outil afin de mesurer deux collections, Lebesgue fait ressortir le comptage (ou dénombrement) comme une opération primitive permettant d'associer à une collection un « mot » pris dans « la phrase (ou suite) des nombres » (*ibid*., p. 3). Et il ajoute : « *Ce nombre est considéré comme le résultat de l'opération expérimentale de dénombrement parce qu'il en est le compte-rendu complet* »[12] (*ibid*.). Faisant ainsi fi d'une « mystique » et d'une « métaphysique » qui ont contribué à faire du nombre « un être bien mystérieux » (*ibid*., p. 4), Lebesgue soutient, à propos de « divers faits que l'on énonce ordinairement comme théorèmes » (par exemple, la commutativité de la multiplication), que « les prétendues démonstrations » qu'on en donne « sont en réalité des vérifications expérimentales » s'appuyant sur une « constatation générale : le nombre attaché à une collection ne dépend pas de l'ordre dans lequel on range, en les comptant, les objets de la collection » (*ibid*., p. 3).

Lebesgue explique en ces mots comment il a été amené à de telles réflexions :

> Depuis 1910, je m'occupe, à l'une ou l'autre des deux Écoles normales supérieures, masculine et féminine, de la préparation des futurs professeurs de l'Enseignement secondaire. (Lebesgue, 1975, p. 1)

Il se permet même une petite boutade lorsque, parlant de ses responsabilités à l'ENS, il écrit : « on ne s'étonnera que l'idée me soit venue d'écrire des articles de nature pédagogique ; si j'ose employer ce qualificatif qui suffit ordinairement pour faire fuir les mathématiciens » (*ibid*., p. 2). D'entrée de jeu, Lebesgue souligne, à propos de son document,

[10] Traduction personnelle à partir du texte allemand.

[11] Il convient de souligner à cet égard le témoignage fort pertinent de Sierpinska dans sa conclusion. Elle y indique que bien qu'ayant connu l'existence du texte de Lebesgue plusieurs années auparavant, elle n'y avait alors pas vraiment prêté attention, faute d'y avoir accès. Mais (Boileau, 2012) fournissait un lien Internet pour téléchargement, ce qui lui a facilement permis de plonger dans le texte même de Lebesgue. Elle en conclut que « l'accessibilité des références sur Internet change la façon dont nous pouvons maintenant lire les articles ; elle élargit grandement leurs horizons de sens et de signification » (Sierpinska, 2012, p. 98).

[12] En italiques dans le texte.

« qu'il y s'agit moins de faits que d'opinions, d'où la nécessité d'éviter des malentendus et d'argumenter en faveur de ces opinions ». Il en résulte, selon ses dires sans doute volontairement moqueurs, une série d'articles qui « sont fort longs pour un mince contenu scientifique » (*ibid.*, p. 1). À cet égard, j'ajouterais pour ma part que le fait d'exprimer des opinions ou des perceptions est souvent présent dans la contribution de mathématiciens autour de l'enseignement des mathématiques, à défaut de situer cette contribution dans le cadre d'une « école de pensée » bien établie. Bien sûr, dans le cas d'un Lebesgue, de telles opinions sont le fruit d'une réflexion profonde et articulée. Il ne faudrait surtout pas les balayer du revers de la main sur la simple base qu'ils ne répondent pas aux normes ou critères actuels de recherche pédagogique ou didactique en bonne et due forme.

Il serait certes possible d'évoquer ici nombre d'autres figures de mathématiciens qui, au-delà d'un intérêt réel pour le volet enseignement de leurs responsabilités professionnelles, se sont profondément investis dans des réflexions substantielles à propos de l'apprentissage et de l'enseignement des mathématiques, de même que de la formation des enseignants. Le cas de Felix Klein (1849-1925) et de ses célèbres leçons de « mathématiques élémentaires d'un point de vue supérieur »[13] (Klein, 2016) est certes parmi les plus connus. Je ne fais que mentionner au passage ici le premier président de l'ICMI (de 1908 à 1920), renvoyant le lecteur intéressé au livre (Weigand et al., 2019) résultant d'une activité thématique spéciale sur l'héritage de Klein tenue, en 2016, lors du congrès ICME-13 — et notamment à la partie IV du livre, portant précisément sur ces leçons de Klein destinées aux enseignants du secondaire.

Un autre grand président de l'ICMI auquel je tiens à rendre hommage ici est Jean-Pierre Kahane (1926-2017), qui occupa ce poste de 1983 à 1990. J'ai personnellement une dette importante envers Jean-Pierre Kahane : en effet, au milieu des années 1980, lors de mes premiers véritables contacts avec l'ICMI en tant que jeune mathématicien intéressé par les questions d'enseignement (sans que je n'ose parler de « didactique » pour autant), il m'a accueilli avec chaleur, générosité et rigueur. Bref, il a su me faire sentir « chez moi » au sein de l'ICMI. C'est sous sa présidence qu'a notamment été lancée la série des Études, encore à ce jour l'une des activités les plus fructueuses de l'ICMI, portant sur « des questions d'intérêt mondial, sur lesquelles une approche internationale pouvait apporter d'utiles mises au point » (Kahane, 1987, p. 1682). Kahane se plaisait à présenter le programme des Études en ces termes :

> Le but, dans chaque cas, n'est pas de fournir des solutions garanties–C.I.E.M. ; c'est de faire l'état de la question, en vue de permettre la poursuite de la réflexion et, lorsque c'est possible, des initiatives au plan régional, national ou institutionnel. (Kahane, 1987, p. 1682)

J'ai quant à moi eu l'immense privilège de participer à trois des cinq premières Études de l'ICMI, toutes réalisées durant la présidence de Kahane (Hodgson, 1991) — de fait aux trois premières bâties sur le modèle de participation via la soumission d'une contribution —, ce qui fut assurément un point tournant dans mon cheminement professionnel.

Mathématicien de tout premier plan, Jean-Pierre Kahane s'est investi à fond dans ses responsabilités de président, et ce à un moment où l'ICMI[14] devait se relever d'une crise de leadership importante provoquée par une présidence précédente un peu chancelante et la quasi-démission du secrétaire général d'alors — voir à ce propos (Hodgson & Niss, 2018, pp. 234-235). Avec l'appui notamment du nouveau secrétaire général Geoffrey Howson et du vice-président Bent Christiansen, Kahane a su revitaliser l'ICMI et la remettre sur rail. Son

[13] Pour des commentaires à propos de l'emploi du mot « supérieur » plutôt que « avancé », tel qu'utilisé par exemple dans (Klein, 1932) — première traduction anglaise de l'ouvrage de Klein —, voir (Kilpatrick, 2008).

[14] Pour respecter les vues de Jean-Pierre Kahane à propos de l'emploi du français dans les sciences, je devrais sans doute parler ici davantage de la « CIEM » que de l'« ICMI ».

apport personnel, tant par la crédibilité dont il jouissait auprès des mathématiciens (et de l'IMU) que par sa grande capacité à interagir avec les didacticiens — ce qui n'allait pas forcément de soi pour un mathématicien ayant eu relativement peu de contacts avec ce domaine, et en particulier avec l'ICMI (Kahane, 1990, p. 3) —, a directement favorisé le renforcement des liens entre mathématiciens et didacticiens des mathématiques, entre mathématiques et didactique.

J'en retiens comme illustration l'évolution du thème de la toute première Étude de l'ICMI (Churchhouse et al., 1986) : *L'influence des ordinateurs et de l'informatique sur les mathématiques et leur enseignement*. On est loin du tout premier jet concernant cette Étude, alors que le thème était décrit simplement comme suit : « *Mathematics and computation* : How should mathematics curricula be reoriented in order to meet the new opportunities presented by calculators and computers? » (Howson, 1982, p. 7). Nul doute que le chemin parcouru jusqu'au document de discussion qui a servi de support pour appel à des contributions à cette Étude (CIEM, 1984) porte incontestablement la marque de Kahane. Il y est notamment question de trois grands thèmes :

> l'influence des ordinateurs et de l'informatique sur les mathématiques en tant que science (leur développement, leurs concepts, leurs valeurs) ; les changements que les ordinateurs et l'informatique peuvent induire dans le contenu des programmes d'enseignement ; l'aide qu'ils peuvent apporter dans l'enseignement lui-même. (Kahane, 1987, p. 1682)

J'ai le souvenir frappant, lors des rencontres des trois Études auxquelles j'ai participé durant la présidence de Jean-Pierre Kahane (*informatique, mathématiques comme discipline de service* et *vulgarisation des mathématiques*), d'un président de séance très présent et investi dans les discussions, remarquablement à l'aise dans les va-et-vient entre mathématiques et didactique, et fort habile à faire émerger des lignes de convergence. Sans l'ombre d'un doute, un exemple d'exception, il y a maintenant plus de trente ans, dans les relations entre mathématiques et didactique des mathématiques.

Une dernière contribution que je retiens de Jean-Pierre Kahane est l'éloge qu'il a fait du mathématicien George Pólya (1887-1985), lors de la deuxième conférence qu'il a donnée à un congrès ICME, en 1988, à titre de président de l'ICMI. Le congrès ICME-6 se tenant à Budapest, Kahane avait choisi de parler du mathématicien hongrois notamment « parce que Pólya s'est intéressé de près, et profondément, à l'enseignement des mathématiques et que, dans le grand public, il est plus célèbre encore par son œuvre pédagogique que par son œuvre mathématique » (Kahane, 1988, p. 79). Dans son texte, Kahane (*ibid.*, pp. 90-91) présente entre autres l'analyse proposée par Pólya (1958) de la preuve du théorème de Pythagore reposant sur la Figure 1,[15] dans laquelle se retrouvent trois triangles semblables.

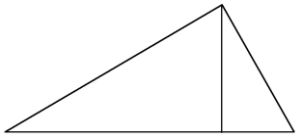


Figure 1 *– Le théorème de Pythagore*

Au sujet de cette preuve, Pólya écrit d'ailleurs ce qui suit :

> L'exemple précédent montre l'usage d'opérations intellectuelles fondamentales telles que la généralisation, la particularisation et la perception des analogies. Il n'existe sans doute pas de découverte, en mathématiques élémentaires ou supérieures, et par suite dans aucun autre domaine, qui puisse être effectuée sans l'aide de ces opérations, en particulier sans l'aide de l'analogie. (Pólya, 1958, pp. 14-15).

[15] Il est intéressant de souligner qu'une preuve du théorème de Pythagore s'appuyant sur la figure 1 se retrouve dans le *De practica geometrie* (1223) de Fibonacci (Hughes, 2008, pp. 68-69), de même qu'au début du 20e siècle dans une publication d'un enseignant néerlandais (van der Waerden, 1983, pp. 30-31).

Kahane s'intéresse aussi, chez Pólya, à la place de l'heuristique dans l'enseignement, s'arrêtant entre autres à ce qu'il appelle « la préoccupation première de Pólya : aider l'élève, aider l'élève à penser par lui-même » (Kahane, 1988, p. 95). Il fait ressortir combien « les moyens modernes — calculettes et ordinateurs — donnent aux élèves des possibilités d'observation, de vérifications, d'expérimentation qui étaient inaccessibles à leurs aînés » (*ibid.*), renvoyant du coup à la première Étude de la CIEM.

Il aurait pu aussi déterrer certains aphorismes fameux dus à Pólya à propos de l'enseignement, par exemple ses « Règles de l'enseignement » tirées de son *Petit dictionnaire d'heuristique* — l'une des parties de son ouvrage bien connu *Comment poser et résoudre un problème* :

> La première de ces règles, c'est bien connaître ce qu'on est censé enseigner ; la seconde, c'est en connaître un peu davantage. (Pólya, 1962, p. 199)

Pólya revient plus en détails sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques dans un chapitre de son livre *La découverte des mathématiques* (Pólya, 1967) intitulé « Apprendre, enseigner et apprendre à enseigner » (pp. 279-330). Il prévient d'entrée de jeu le lecteur qu'il fera « part de quelques-unes de [ses] réflexions sur le processus de l'apprentissage, sur l'art d'enseigner et sur la formation du professeur ». Tout comme Lebesgue, il insiste sur le fait qu'il s'agit là d'« opinions », d'« avis personnels », néanmoins « les fruits d'une longue expérience » (*ibid.*, p. 280). Dans une section portant sur « L'attitude du professeur » (pp. 298-304), il introduit en ces termes ses « Dix commandements » destinés au professeur de l'école secondaire :

> Les cours que je faisais aux professeurs étaient, dans une certaine mesure, des cours de pédagogie. Dans ces cours, je m'attachais surtout à donner des conseils d'un intérêt pratique immédiat afin d'aider le professeur dans sa tâche quotidienne. Par conséquent, il me fallait inévitablement répéter sans cesse mes idées sur le travail quotidien du professeur et sur l'attitude mentale qui devait être la sienne. Mes observations finirent par se formaliser, et je fus amené à les rassembler dans les ' Dix commandements du professeur '. (Pólya, 1967, p. 298).

Parmi ces commandements se trouvent : « Soyez intéressé par votre sujet », « Possédez votre sujet », « Suggérez, n'inculquez pas de force », ou encore « Ne leur donnez pas uniquement du savoir, mais du 'savoir-faire', des attitudes intellectuelles, l'habitude d'un travail méthodique » (*ibid.*, p. 299). À propos de ce dernier commandement, Pólya insiste :

> En mathématiques, le savoir-faire […] est beaucoup plus important que la simple possession du savoir. […] Par là, en mathématiques, la façon dont vous enseignez est plus importante que ce que vous enseignez. (Pólya, 1967, p. 301).

On pourrait même vouloir suivre Pólya dans son analyse de « quelques ficelles du métier de professeur » (*ibid.*, p. 281) lorsque, souhaitant mettre en garde l'enseignant peut-être un peu désabusé d'avoir à enseigner pour la énième fois une démonstration qu'il connaît trop bien, il l'exhorte à faire appel au besoin à des points que l'enseignement a en commun « avec l'art théâtral » (*ibid.*) :

> Feignez d'être alléché par cette démonstration au moment où vous l'entamez, faites semblant de découvrir des idées géniales tout en la poursuivant, ayez l'air surpris et transporté de joie lorsque vous l'aurez terminée. Vous devriez un peu jouer la comédie par égard pour vos étudiants ; ils peuvent apprendre plus, à l'occasion, de vos attitudes que de la matière enseignée. (Pólya, 1967, p. 282).

Avant de clore cette partie de ma présentation, je signale que la question de la relation des mathématiciens aux questions d'enseignement, et de leur éventuel engagement, sera reprise par Michèle Artigue à la section IV selon la perspective de la (riche) tradition française.

3. Mathématiciens et formation des enseignants : l'expérience de l'Université Laval

Je souhaite, dans cette dernière partie de mon intervention, évoquer certains aspects du cadre de formation des enseignants dans lequel j'évolue, au sein du Département de mathématiques et de statistique de l'Université Laval. Comme je l'indiquais plus haut, je ne veux aucunement suggérer, ce faisant, qu'il y ait quoi que ce soit d'exemplaire dans notre intervention auprès des futurs enseignants. Mais il s'agit bel et bien d'une « histoire vécue », lancée il y a plus de quarante-cinq ans et toujours en évolution, à propos d'un aspect clef de la relation des mathématiciens à l'enseignement : la formation mathématique des futurs enseignants, tant du primaire que du secondaire. J'ai déjà eu l'occasion, dans le cadre de la 11e Étude de l'ICMI (Hodgson, 2001), de soutenir qu'il s'agit là selon moi d'une composante essentielle des responsabilités du mathématicien universitaire.

Le contexte ne se prête pas ici à une présentation détaillée des cours de mathématiques offerts aux deux programmes de premier cycle pour les futurs enseignants dans lesquels nous intervenons, non plus que des programmes eux-mêmes : le baccalauréat en éducation au préscolaire et en enseignement au primaire (BÉPEP) et le baccalauréat en enseignement secondaire – mathématiques (BES-maths). S'agissant de ce dernier programme — voir (Gourdeau & Proulx, 2012) —, je me bornerai à mentionner que parmi les quinze cours obligatoires de ce programme portant sur les mathématiques (douze cours), la statistique (deux cours) et l'informatique (un cours), six sont spécifiques au BES, dans ce sens que les étudiants dans la classe sont tous inscrits à ce programme. À ce propos, Gourdeau & Proulx écrivent :

> La formation mathématique de base est assurée par les premiers cours du cheminement, et les cours spécifiques au BES sont généralement suivis par la suite. Ainsi, les étudiantes et les étudiants ont acquis un meilleur bagage mathématique et une plus grande maturité lorsque les cours spécifiques sont abordés. Cela permet de pousser davantage la réflexion sur les thèmes proches de l'enseignement secondaire dans ces cours, tout en portant une attention accrue à l'adaptation de l'enseignement et à sa dimension culturelle. (Gourdeau & Proulx, 2012, p. 103).

Ces cours spécifiques ne sont pas pour autant de cours de « didactique », mais bien de cours de mathématiques dont les thèmes ont été choisis et sont traités en ayant à l'esprit que l'on s'adresse à de futurs enseignants du secondaire. Ce dispositif nous permet d'offrir des contenus mathématiques et des approches plus ciblés à l'intention d'enseignants.[16] Je mentionne en exemple l'un de ces cours, *Évolution des idées en mathématiques*, suivi au tout dernier trimestre du programme et dont l'objectif est de faire ressortir, trame historique à l'appui, certaines « grandes idées » dans le développement des mathématiques au fil des âges, tout en établissant des liens avec les autres cours de mathématiques du BES et le curriculum du secondaire.

C'est davantage sur les cours de mathématiques que nous offrons au BÉPEP que je souhaite m'arrêter. J'ai déjà mentionné que ces deux cours ont été créés au début des années 1970, tout juste avant mon arrivée au département. Les collègues alors en place ont le mérite d'avoir d'une part accepté l'invitation qui leur était faite de s'investir dans le BÉPEP — ce qui, dans le contexte de l'époque (voire même aujourd'hui), n'allait pas forcément de soi pour des mathématiciens —, et d'autre part d'avoir reconnu qu'il fallait construire un enseignement spécifique afin de répondre aux besoins de ces étudiants. Si un tel commentaire peut sembler une lapalissade, il faut se rappeler qu'il n'est pas du tout usuel (à tout le moins dans le contexte nord-américain) que les futurs enseignants du primaire suivent des cours

[16] Je précise que le programme de BES-maths comprend en outre trois cours de didactique des mathématiques proprement dits, relevant du Département d'études sur l'enseignement et l'apprentissage de la Faculté des sciences de l'éducation. Il en est de même au BÉPEP.

spécifiques offerts par le département de mathématiques : quand il est question de cours de mathématiques, il s'agira alors la plupart du temps de cours généraux de base, et non pas de cours ciblés en vue de l'enseignement primaire.

J'ai déjà eu l'occasion (Hodgson, 2017) de présenter le cadre général de la formation mathématique des enseignants du primaire au Québec, et particulièrement à l'Université Laval, de même que l'esprit et le contenu des deux cours — l'un portant sur l'arithmétique et l'autre sur la géométrie — que nous offrons pour le programme de BÉPEP. Je me bornerai donc ici à rappeler globalement que ces cours visent à fournir l'occasion d'un approfondissement et d'une meilleure compréhension des notions d'arithmétique et de géométrie reliées à l'enseignement primaire, tout en favorisant le développement d'une attitude positive à l'égard des mathématiques. Ainsi,

> nous souhaitons lutter contre l'horrible vision réductrice qui ferait des maths un ramassis de règles plus ou moins arbitraires à apprendre par cœur et à appliquer aveuglément. En l'aidant à prendre conscience d'une logique interne et d'une cohérence propres aux mathématiques qu'il aura à travailler avec ses élèves, nous cherchons à ce que l'étudiant-maître se sente en pleine mesure d'amener ses élèves à percevoir eux-mêmes les mathématiques de manière positive. (Hodgson, 2017, p. 8).

C'est donc dans une large mesure un objectif de *démystification* — voire de *démythification* — que nous poursuivons dans ces cours, appelant les étudiants à une reconstruction personnelle de thèmes de l'arithmétique et de la géométrie élémentaires, mais avec un « regard d'adulte », de sorte qu'ils puissent aller bien au-delà de certains automatismes qu'ils auraient pu retenir de leur propre parcours scolaire.

Afin d'illustrer ce propos, j'évoque sommairement la façon dont les fondements de l'arithmétique sont introduits dans l'un de nos cours. J'ai déjà fait une présentation assez détaillée de ce thème dans (Hodgson, 2017). Il en a aussi été question dans (Hodgson & Lajoie, 2015) — avec une composante didactique —, ainsi que dans (Hodgson, 2018), où la question est alors abordée selon la perspective d'artéfacts et de tâches reliés à l'arithmétique élémentaire.

L'objectif poursuivi dans le cours d'arithmétique est (bien sûr) que les « règles » s'appliquant à la structure numérique des nombres naturels deviennent familières, comprises de manière profonde et bien acceptées. Lors de la création du cours, selon l'esprit du temps, les fondements proposés pour l'arithmétique prenaient appui sur la théorie des ensembles. Cette position peut se voir comme reflétant le point de vue soutenu par exemple lors d'un colloque ICMI-UNESCO tenu à Royaumont en 1971, l'influence de la vague de « la mathématique moderne » d'alors s'y faisant clairement sentir.

> L'introduction des ensembles dans l'enseignement de la mathématique à l'école élémentaire est sans conteste l'un des traits les plus visibles des changements actuels. […] Les diagrammes ensemblistes donnent lieu à de nombreux exercices de dessin libre de la part des enfants, et constituent en eux-mêmes une sorte de préparation pré-topologique. L'utilisation des ensembles dans le reste de l'enseignement de la mathématique varie beaucoup d'un pays à un autre. Cependant, la tendance universelle est à l'utilisation des ensembles pour le développement du concept de cardinaux ou ordinaux et des quatre opérations élémentaires sur les naturels. (UNESCO, 1973, p. 6).

À cet égard, un changement majeur de perspective est intervenu dans notre cours au début des années 1980, lorsqu'il a été décidé de voir les nombres naturels comme des « objets primitifs » — tel que vu plus haut, un Lebesgue dirait sans doute des « objets expérimentaux ». La façon retenue dans nos cours pour introduire les nombres naturels dans un tel cadre de dénombrement est à partir de la notion (primitive) de *suites de bâtons*, à

l'image des entailles utilisées de tout temps pour consigner un dénombrement.[17] La Figure 2 montre ce qu'« est », dans un tel cadre, le nombre cinq, et aussi (en introduisant une convention naturelle et commode), le nombre *n*.



Figure 2 *– Les suites de bâtons : « cinq » et « n »*

On convient dans le cours qu'il s'agit là d'une *définition* en bonne et due forme du nombre (naturel). Y ajoutant, tant qu'à faire, la notion de suite « vide » de bâtons (ce qui ne pose pas vraiment problème), on obtient alors un cadre où il est possible de lancer sur des bases solides l'arithmétique élémentaire des nombres naturels — voir à ce propos (Hodgson, 2017, pp. 14-18). Par exemple, après avoir introduit l'égalité de suites de bâtons via la notion de correspondance terme à terme (notion primitive davantage qu'ensembliste, s'il en est), on posera une opération d'addition selon le schéma de juxtaposition des deux suites données, tel qu'illustré à la Figure 3 (l'égalité en cause ici étant une égalité de définition).

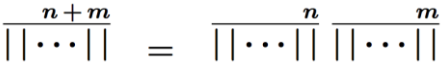


Figure 3 *– L'addition de suites de bâtons*

La multiplication pourrait de même se définir directement à l'aide d'un arrangement rectangulaire (ou matrice) de bâtons. De là, toutes les propriétés arithmétiques de base (élément neutre, commutativité, etc.) peuvent être pleinement justifiées. Je souligne qu'il s'agit ici de règles véritablement démontrées dans un cadre argumentatif approprié pour des enseignants du primaire — et non pas simplement observées sur des cas concrets, voire carrément imposées. À noter que notre démarche vise les enseignants du primaire eux-mêmes, en leur fournissant une vision « rafraîchie » de faits arithmétiques fondamentaux — et non pas leurs élèves. Je m'arrête ici dans mes propos quant au contenu de notre cours d'arithmétique, et renvoie à (Hodgson, 2017) le lecteur souhaitant en savoir davantage.

Je parle d'autant plus volontiers de ce changement de paradigme à la base de notre cours d'arithmétique que je n'en ai pas été l'instigateur. En effet, au moment où les suites de bâtons ont remplacé les ensembles comme fondements du cours, j'étais alors complètement investi dans un programme de perfectionnement des enseignants du primaire en mathématiques, le PPMM-Laval (pour *Programme de perfectionnement des maîtres du primaire*). Si je dis un mot du PPMM-Laval, c'est qu'il s'agit à mes yeux d'un exemple particulièrement fructueux de liens « en action » entre mathématiques et didactique. Porté conjointement par deux départements,[18] ce programme a été pendant plus de douze ans l'occasion d'une collaboration active et soutenue entre mathématiciens et didacticiens de mon université, menant à la création de sept cours intégrant des aspects mathématiques et didactiques. Ces cours étaient offerts *in situ* dans les commissions scolaires de la région de la ville de Québec par le truchement de conseillers pédagogiques en mathématiques qui recevaient une formation à l'Université, puis retournaient travailler avec leurs enseignants les documents que nous avions préparés pour eux. Le succès du PPMM-Laval repose dans une large mesure sur le rôle qu'y a joué mon collègue didacticien Claude Gaulin, qui en fut l'âme. Cette collaboration a sans

[17] Mainzer parle à ce propos d'une vision du nombre datant du « early stone age » (Mainzer, 1991, p. 9). Voir aussi le chapitre « La pratique de l'entaille, ou la comptabilité des illettrés » dans (Ifrah, 1994, vol. I, pp. 161-168).

[18] Le Département d'études sur l'enseignement et l'apprentissage (à l'époque, Département de didactique) de la Faculté des sciences de l'éducation, et le Département de mathématiques et de statistique de la Faculté des sciences et de génie.

doute aussi contribué à rendre le terrain propice à la tenue du congrès ICME-7 à l'Université Laval en 1992, encore une fois grâce à une action de concert de nos deux départements, et même de nos deux facultés.

Revenant aux dites suites de bâtons, on doit à mon collègue mathématicien William Hatcher (1935-2005) de les avoir introduites dans notre cours d'arithmétique. Impliqué dans ce cours pendant quelques années au début des années 1980, il a rapidement fait ressortir les avantages de changer le paradigme utilisé comme fondement de notre démarche en arithmétique, la construction ensembliste alors en usage s'accompagnant d'une indéniable lourdeur et provoquant une complexité conceptuelle de mauvais aloi. J'ai pour ma part immédiatement adhéré à cette proposition de changement. Le domaine de spécialité de Hatcher étant la logique mathématique, on trouve peut-être là la source de son attrait pour une telle représentation « unaire » des naturels, celle-ci étant parfois utilisée dans une démarche en lien avec les fondements des mathématiques ou encore dans la discussion du concept de calculabilité tel que cristallisé dans une machine de Turing. À noter que la représentation des naturels comme une suite de traits se retrouve aussi dans les recherches didactiques d'Erich Wittmann qui, de son côté, déclare s'être inspiré du « *constructive* (or operative) *foundation* of natural number » (Wittmann, 1975, p. 60) proposé dans un traité de logique allemand. (Pour des références précises en logique à ce propos, voir (Hodgson, 2018, p. 242).) On peut donc voir dans cette représentation des nombres naturels un autre exemple de relation directe entre mathématiques (en occurrence la logique) et réflexion didactique.

Un mot à propos du phénomène des « mathématiques modernes ». Notons que tous n'y adhéraient pas aveuglément. Ainsi, parlant de Pólya et de ses réflexions sur l'heuristique et l'importance à donner dans l'enseignement à la résolution des problèmes, Kahane souligne qu'« au cours des années 1970, il s'est vivement opposé à la formalisation qu'on a associée aux mathématiques modernes, justement parce qu'elle rendait les problèmes pauvres et secs » (Kahane, 1988, p. 96). Dans le même esprit, un autre exemple de résistance aux maths modernes est celui du mathématicien Alexander Wittenberg (1926-1965), professeur à l'Université Laval de 1956 à 1963. Il a exprimé sa position sur un ton résolument polémique dans l'introduction de (Wittenberg et al., 1963), alors qu'il présente sa vision d'un « enseignement génétique » :

> Il est bon de rappeler cela, alors que prolifèrent des entreprises de réforme mues par un si farouche désir d'agir vite et à tout prix — quitte à réfléchir plus tard à ce qu'on a voulu entreprendre, quand on en trouvera le temps — qu'elles semblent parfois s'enfermer dans une surprenante et naïve conviction que c'est assez, dans ce domaine, de méditer la pensée d'un seul homme (multiplement réincarné, il est vrai), et que : *qui a lu Bourbaki, a tout lu*. (Wittenberg et al., 1963, p. 11).

Malgré sa brève existence, Wittenberg peut lui aussi être perçu comme un cas marquant de mathématicien engagé dans une réflexion articulée sur l'enseignement. C'est ce que suggèrent par exemple les pages qui lui sont consacrées dans (Hischer, 2016, p. 20-23), prenant appui sur son livre *Bildung und Mathematik* (Wittenberg, 1963a) et étayant la défense qu'y soutient Wittenberg d'un enseignement des mathématiques favorisant une formation générale. On peut encore penser à (Wittenberg, 1968), livre posthume préfacé par Pólya — que Wittenberg avait connu à l'ETH de Zürich — et rassemblant une série de conférences radiophoniques sur l'éducation prononcées par Wittenberg l'année de son décès, alors qu'il était devenu professeur à l'Université York, à Toronto.

Un commentaire particulièrement éloquent sur Wittenberg a été formulé à l'occasion d'un colloque international organisé par l'ICMI à Utrecht en 1964 sur le thème *Les tendances modernes dans l'enseignement secondaire des mathématiques*. La contribution qu'y a apportée Wittenberg, notamment lors de sa conférence intitulée « Priorités et responsabilités

dans la réforme de l'enseignement des mathématiques », a été saluée en ces termes dans les comptes rendus du colloque :

> Le point crucial du colloque était la confrontation des idées provoquée par la conférence et les interventions du Professeur A. Wittenberg, qui a insisté particulièrement sur la nécessité d'une conception pédagogique précise de la réforme et a souligné fortement les dangers liés à la modernisation formelle, ne trouvant pas la base adéquate dans la conscience claire des objectifs et des moyens de l'évolution des résultats et dans la conception claire de l'éducation en général. (UNESCO, 1967, p. 376).

Je retiens enfin un magnifique témoignage personnel de Claude Gaulin qui, lors de ses études de baccalauréat en mathématiques à l'Université Laval, avait suivi plusieurs cours donnés par Wittenberg. Outre les exhortations constantes de ce dernier auprès des étudiants à faire appel à leur intuition, Gaulin avait été tout particulièrement marqué par le cours *Introduction à la philosophie des mathématiques*, présenté par Wittenberg comme un « cours inhabituel pour de futurs enseignants de mathématiques » — voir (Wittenberg, 1963b), où l'auteur soutient qu'il y vise à permettre aux enseignants d'amener leurs élèves vers l'objectif suivant : « to learn mathematics through genuine insight—not through rote learning and mechanical drill » (p. 1091).

Il sera à nouveau question de la réforme des maths modernes à la section IV de ce texte. Ce mouvement, il faut le dire, n'aura pas connu que des détracteurs. Ainsi Roberta Mura, tout en examinant dans une perspective didactique certaines des raisons expliquant son échec au plan pédagogique — notamment l'imposition de définitions et d'axiomes qui occultent le processus de création mathématique (Mura, 2003, p. 200) —, se plait à souligner la grande satisfaction qu'elle avait éprouvée personnellement, jeune étudiante universitaire, à s'immerger dans un tel univers mathématique. Elle décrit un tel apprentissage comme étant « satisfaisant et apaisant » (*ibid.*, p. 199).

4. Conclusion

J'ai voulu dans cette présentation évoquer certains aspects qui me semblent pertinents en vue d'examiner les relations entre mathématiques et didactique, aspects qui ont indéniablement joué un rôle important dans mon cheminement personnel. Il s'est agi d'une part de moments historiques particuliers dans l'émergence de la didactique des mathématiques comme domaine scientifique, moments parfois accompagnés d'un bouillonnement peut-être lié à la personnalité forte de quelques-uns des protagonistes, mais aussi à l'engouement pour certaines mouvances, telle celle de la réforme des maths modernes. J'ai aussi rappelé les contributions de quelques mathématiciens éminents à la réflexion à propos de l'enseignement des mathématiques. S'il est vrai que certaines de ces réflexions recèlent parfois un côté un peu naïf, il y a quand même là source d'inspiration. En tout cas, ce le fut pour moi, particulièrement au début de ma carrière alors que je cherchais, en tant que mathématicien avec responsabilité en formation des enseignants (du primaire!), à me donner à ce propos ce que j'appellerais des « repères mathématiques à saveur pédagogique », qui m'échappaient grandement. Un Pólya, par exemple, aura alors été pour moi un guide important : je me rappelle avoir été frappé de voir un mathématicien de sa stature se plonger ainsi dans des questionnements à propos de l'enseignement et de la formation à l'enseignement. Dans un autre registre, au moment où j'écris ces lignes, je vois près de moi, dans ma bibliothèque personnelle à l'Université, une douzaine de livres à la couverture orange et noire publiés chez CEDIC vers la fin des années 1970 dans la collection *Formation des maîtres en mathématiques* dirigée par Maurice Glaymann. Là encore de nombreuses et jolies perles, qui ont servi de « points de départ » — pour emprunter le titre si évocateur d'un ces ouvrages de ma « jeunesse » de mathématicien/formateur d'enseignants — à des belles aventures mathématiques au cours desquelles j'ai beaucoup appris! Quant à mon dernier

volet, j'ai cherché à y évoquer quelques particularités de l'engagement des mathématiciens, dans mon université, dans la formation mathématique des enseignants du primaire et du secondaire.

À mes yeux, plusieurs aspects mystérieux et pas du tout banals subsistent cependant. J'en retiens un : comment assurer que les mathématiciens d'aujourd'hui et de demain se sentent vraiment interpelés à intervenir dans les discussions et actions autour de l'enseignement des mathématiques, aussi bien individuellement qu'en tant que communauté? Et comment favoriser un tel engagement, alors que la didactique des mathématiques a su développer un corpus important et impressionnant, sans doute pas si facilement accessible pour un non-initié (comme il va bien sûr de soi)? À en juger par exemple d'après la participation des mathématiciens — et surtout des jeunes mathématiciens — au Groupe canadien d'étude en didactique des mathématiques, comparativement à il y a quarante ans lors de la création du Groupe (je prends ici un cas qui m'est familier), ces questions ne sont pas du tout évidentes. Et elles sont tout aussi pertinentes pour un organisme tel l'ICMI. Il est bien sûr de mise de se montrer vigilant, voire proactif, afin d'encourager les occasions de contact et de collaboration entre mathématiciens et didacticiens des mathématiques. Mais certains obstacles — notamment institutionnels, en lien entre autres avec la progression individuelle du mathématicien en carrière — ne sont pas du tout simples à surmonter. L'expérience de la France, comme le fait ressortir Michèle Artigue à la section IV, renferme peut-être à cet égard des pistes de réflexion intéressantes.

IV. LE POINT DE VUE D'UNE DIDACTICIENNE FRANÇAISE

Michèle Artigue

Mon point de vue, contrairement à celui de mes co-auteurs, est celui d'une mathématicienne depuis longtemps engagée dans la recherche didactique. Comme didacticienne, j'ai déjà eu à aborder ce thème. La première fois (Artigue, 1997), ce fut en 1996 lors de la conférence associée à l'étude ICMI pilotée par Anna Sierpinska et Jeremy Kilpatrick : *What is research in mathematics education and what are its results ?* La seconde (Artigue, 2009), ce fut lors de la conférence de clôture du Symposium organisé à Rome en 2008 à l'occasion du centenaire de l'ICMI. J'avais relu ces textes en préparant cette conférence à trois voix, cherchant à identifier les constantes et les évolutions, et j'y ferai référence dans cette section. Une autre référence importante me semble l'ouvrage issu de l'après-midi thématique consacré aux traditions didactiques continentales au congrès ICME-13 de juillet 2016 (Blum et al., 2019) et, en particulier le chapitre dédié à la tradition didactique française (Artigue et al., 2019).

Bernard Hodgson, dans la section III, a souligné l'engagement historique de mathématiciens, parmi les plus éminents, dans les questions relatives à l'enseignement des mathématiques. Parmi les personnes évoquées figuraient une bonne proportion de mathématiciens français. Il aurait pu en citer bien d'autres, même sans remonter à des figures emblématiques comme celle de Nicolas de Condorcet, qui présida le Comité d'Instruction Publique à l'époque de la Révolution française. Il aurait pu citer par exemple Gaston Darboux, qui présida la Commission de révision des programmes lors de l'importante réforme de 1902, les fameuses conférences au Musée pédagogique de Sèvres, à la même époque d'Henri Poincaré et Émile Borel. Il est intéressant de noter que l'idée de créer dans les lycées des laboratoires de mathématiques à l'instar des laboratoires de sciences, portée à l'époque par Borel, a été reprise par la CREM (Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques) présidée par le mathématicien Jean-Pierre Kahane, au tournant des années

2000 (Kahane, 2001) et semble se concrétiser aujourd'hui, même si c'est sous une forme sensiblement différente, à la suite du rapport Villani-Torossian (2018). Il a brièvement mentionné André Lichnerowicz qui, outre l'ICMI, fut aussi président de la commission ministérielle en charge de la réforme des mathématiques modernes en France, connue d'ailleurs sous son nom, de 1966 à 1973. Chose certainement moins connue, c'est aussi André Lichnerowicz qui proposa à Guy Brousseau, avec qui Lucienne Félix, elle-même élève d'Henri Lebesgue et très impliquée dans le mouvement de rénovation de l'enseignement des mathématiques, l'avait mis en contact, d'étudier les conditions aux limites d'une expérimentation sur l'enseignement des mathématiques. Ce projet, comme Guy Brousseau l'a bien expliqué (Brousseau, Brousseau & Warfield, 2014, p. 173), allait conduire à la théorie des situations didactiques, un des trois piliers de ce que l'on appelle souvent l'école française de didactique.

Cette tradition d'engagement des mathématiciens dans les questions d'enseignement a très certainement influencé les rapports qui se sont établis entre mathématiques et didactique des mathématiques en France, dont j'ai fait personnellement l'expérience. Cependant, quand j'évoque ces figures historiques, j'évoque un temps où la didactique des mathématiques comme champ de recherche autonome, avec les ambitions scientifiques associées, n'avait pas encore émergé, où les mathématiciens n'avaient pas encore fait l'expérience des désillusions engendrées par la réforme des mathématiques modernes. Ces conditions nouvelles allaient profondément affecter les rapports et leur dynamique. Il me semble qu'à ce point de l'histoire, même si les dynamiques en sont interdépendantes, il est utile pour l'analyse de distinguer le développement de la didactique dans ses rapports avec les mathématiques d'un point de vue épistémologique et scientifique, des rapports personnels et institutionnels entre acteurs et communautés. J'aborderai ces deux dimensions successivement, soulignant dans chaque cas quelques points qui me semblent essentiels, et je les recombinerai dans la conclusion de cette section.

1. Mathématiques et didactique des mathématiques : interaction entre champs scientifiques

Suivant les contextes et les cultures, les rapports entre mathématiques et didactique des mathématiques, voire éducation mathématique comme ce champ est dénommé dans de nombreux pays, ont obéi à des dynamiques différentes. C'est aussi le cas pour les pays d'Europe continentale qui partagent l'utilisation du terme didactique, modulo ses variantes linguistiques, comme le montre bien l'ouvrage (Blum et al., 2019) mentionné plus haut. L'étude comparative qui y est menée montre notamment qu'au sein des traditions didactiques européennes, la tradition didactique française se distingue, entre autres caractéristiques, par une relation particulièrement forte avec les mathématiques et une sensibilité particulière à leur épistémologie. Guy Brousseau avait d'ailleurs envisagé initialement la dénomination d'*épistémologie expérimentale des mathématiques* pour la didactique des mathématiques, avant d'y renoncer, craignant qu'elle ne fût pas suffisamment consensuelle.

De fait, cette relation forte s'exprime clairement, même si c'est sous des formes différentes, dans les trois théories qui sont les piliers de cette tradition didactique et leurs concepts fondamentaux, comme en témoignent les notions de *champ conceptuel* dans la théorie des champs conceptuels, d'*obstacle épistémologique* et de *situation fondamentale* dans la théorie des situations didactiques, de *praxéologie mathématique* et de *modèle épistémologique de référence* dans la théorie anthropologique du didactique. Pour une analyse détaillée, je renvoie le lecteur à la contribution sur ce thème de Jean-Luc Dorier au colloque EMF 2015 (Dorier, 2015). Même si, au fil des décennies, la didactique française a évolué

dans ses problématiques, si ses cadres théoriques se sont diversifiés comme souligné dans (Artigue et al., 2019), si les liens se sont renforcés avec les autres champs des sciences de l'éducation, cet attachement aux mathématiques et à leur épistémologie reste une caractéristique identitaire de la recherche didactique française.

Mais je voudrais insister aussi sur le fait que cette relation entre mathématiques et didactique des mathématiques est une relation vivante dont la dynamique se nourrit de l'évolution des problématiques et travaux de recherche en didactique et de celle des mathématiques elles-mêmes. L'évolution des travaux didactiques nourrit cette dynamique, notamment en accordant de plus en plus de place :

- à des études d'épistémologie « contemporaine » qui permettent un contact avec les sciences mathématiques en train de se faire (voir par exemple l'étude du travail de mathématiciens sur la conjecture d'Erdös-Strauss dans la thèse de Marie-Line Gardes (2013), les entretiens réalisés avec des mathématiciens travaillant à l'interface des mathématiques et de la biologie dans la thèse de Sonia Yvain-Prébiski (2018), ou l'étude de la pensée structuraliste dans l'habilitation de Thomas Hausberger (2016)),
- aux relations entre mathématiques et autres disciplines, du fait de l'importance croissante prise dans les curricula par l'interdisciplinarité et la modélisation, les connections avec le monde extra-scolaire,
- aux processus de diffusion intentionnelle des mathématiques dans une diversité accrue de contextes, formels mais aussi informels (voir par exemple (Pelay & Artigue, 2017) pour une vision synthétique), et de cultures ; la création de l'Espace mathématique francophone, les collaborations que cette création a permis, ne sont pas sans contribuer à cette évolution, depuis plus de deux décennies.

Ces évolutions de la recherche didactique entrent en synergie avec l'évolution des sciences mathématiques, leurs interactions croissantes avec les autres sciences, sciences de la nature mais aussi sciences humaines, et avec la société. Mais, phénomène tout aussi intéressant, elles entrent aussi en synergie avec l'évolution des travaux des historiens et épistémologues des mathématiques et plus largement des sciences. J'ai pu l'apprécier au sein de notre école doctorale à laquelle est rattaché le laboratoire SPHERE[19], un des plus importants laboratoires en France dans ce domaine, avec l'attention qui y est portée au développement des mathématiques dans une diversité de contextes et de cultures, et à la diversité des pratiques mathématiques développées selon les acteurs et les besoins qu'ils rencontrent. Les travaux menés dans ce laboratoire sur l'histoire des tables numériques[20] ou dans le cadre du projet SAW[21] dont le but est « de développer de nouvelles approches théoriques dans le domaine de l'histoire des mathématiques anciennes dans le but de mettre en évidence une variété de pratiques au sein d'ensembles trop souvent perçus aujourd'hui comme des blocs homogènes », en sont de bons exemples.

Certaines caractéristiques du contexte français ont sans aucun doute conduit à ces rapports. J'ai déjà évoqué la tradition d'engagement des mathématiciens dans les questions d'enseignement. À partir de la réforme des mathématiques modernes, la création des IREM a permis aux mathématiciens d'inscrire leur engagement dans une structure institutionnelle nouvelle, et, aujourd'hui encore, la majorité des directeurs d'IREM sont des mathématiciens universitaires dont le terrain de recherche n'est pas la didactique des mathématiques. Cette

[19] http://www.sphere.univ-paris-diderot.fr (accès le 20/12/2018).
[20] http://www.sphere.univ-paris-diderot.fr/spip.php?rubrique99 (accès le 20/12/2018).
[21] http://www.sphere.univ-paris-diderot.fr/spip.php?rubrique148&lang=fr (accès le 20/12/2018).

structure a aussi favorisé les contacts entre mathématiques et didactique des mathématiques. C'est, en effet, au sein des IREM qu'a essentiellement émergé la recherche en didactique des mathématiques en France, avec le soutien de mathématiciens comme André Revuz à Paris, Jean Colmez à Bordeaux, Jean Martinet et Georges Glaeser à Strasbourg, Bernard Malgrange à Grenoble. C'est le mode de fonctionnement original de ces institutions, sur la base de groupes de travail mixtes combinant des missions de recherche, formation et production de ressources, qui a maintenu un fort contact entre mathématiques et didactique des mathématiques.

Mais ce contact a aussi été soutenu par les affiliations institutionnelles des didacticiens. La possibilité pour des enseignants-chercheurs en mathématiques d'être rattachés à un IREM et d'y effectuer une partie de leur service, a joué, historiquement, un rôle clef pour l'émergence et les premiers développements de la recherche didactique. Ensuite, le choix fait par de nombreux didacticiens, de se rattacher à la section 26 du Conseil national des universités (Mathématiques appliquées et application des mathématiques) à sa création en 1987 pour leur qualification et promotion, a aussi joué un rôle clef. Avoir fait partie de cette instance pendant une décennie m'a permis d'apprécier le rôle qu'a joué ce rattachement institutionnel dans les relations entre mathématiques et didactique. Je peux témoigner aussi du combat qu'il a fallu mener, et que d'autres après moi ont continué à mener, pour que la didactique y soit reconnue comme une spécialité à part entière, comme c'est le cas aujourd'hui.

Ces conditions ont permis que vive l'attachement revendiqué dès l'origine aux mathématiques et à leur épistémologie ; elles ont aidé la didactique des mathématiques à se forger une identité en se différenciant de la pédagogie ; elles ont façonné une histoire et, sans aucun doute, produit des relations entre didactique et mathématiques partiellement singulières. Comment cette histoire s'inscrit-elle dans un panorama plus global ? C'est cette dimension que je vais aborder dans la partie suivante, en me référant notamment à l'histoire de l'ICMI, continuant ainsi le récit engagé par Bernard Hodgson dans la section précédente. Je le ferai en abordant cette question plus particulièrement sous l'angle des relations entre communautés.

2. Mathématiques et didactique des mathématiques : relations entre communautés

Dans les dernières décennies du 20^{e} siècle, la recherche en éducation mathématique, internationalement, s'est développée et institutionnalisée progressivement, avec des conséquences évidentes sur les rapports entre mathématiques et didactique, mais surtout entre mathématiciens et didacticiens, comme je l'ai expliqué dans (Artigue, 1997). Le champ scientifique qui se développe, malgré ses liens privilégiés avec les mathématiques, ne relève pas des sciences dures dont les mathématiques sont emblématiques ; il se situe à l'interface des sciences humaines et des sciences mathématiques, et est, par ses méthodologies comme par la nature des connaissances qu'il produit, bien plus proche des premières que des secondes. Ce champ se développe en construisant ses propres problématiques, concepts théoriques et outils méthodologiques ; utilisant le vocabulaire de la TAD, je dirais en développant et structurant ses propres praxéologies de recherche. Ce faisant, il crée un *discours technologique* spécifique, avec des termes qui, même lorsqu'ils relèvent de la langue commune, y prennent un sens technique particulier, comme ceux de *milieu*, de *situation*, de *conception*… La communication avec les acteurs de l'enseignement et les mathématiciens ne va plus de soi. Là où les didacticiens voient les éléments nécessaires à la production d'un discours scientifique, les praticiens de l'enseignement que sont les mathématiciens tendent à ne voir que jargon. Les didacticiens, pour leur part, critiquent la naïveté de beaucoup des discours de mathématiciens sur l'enseignement. La priorité que les didacticiens des

mathématiques, ayant tiré les leçons de l'épisode des mathématiques modernes, donnent à l'identification et la compréhension des phénomènes didactiques sur l'action, se révèle également génératrice de distance entre communautés.

On observe alors une tendance à la séparation des habitats, les mathématiciens s'investissant plutôt dans des actions de popularisation des mathématiques qui leur rendent possible une action sous une forme dans laquelle ils se sentent à l'aise, et qui de plus échappe aux contraintes et exigences du système scolaire, tandis que les didacticiens se concentrent sur l'étude des systèmes de diffusion formelle des mathématiques. Dans certains contextes, cette distance croissante alliée à la résistance évidente des problèmes posés par l'enseignement des mathématiques, va engendrer des positions de plus en plus critiques vis-à-vis de la recherche en éducation mathématique, et ce d'autant plus que les réformes et discours curriculaires semblent de plus en plus influencés par cette recherche. L'exemple de la « Math War » aux États-Unis en est sans doute l'exemple le plus frappant.

L'histoire de l'ICMI en témoigne, avec la situation de crise qui a accompagné notre entrée au Comité exécutif de l'ICMI, Bernard Hodgson et moi. Bernard Hodgson a évoqué la figure de Jean-Pierre Kahane et le rôle qu'il avait joué pour relancer l'ICMI au début des années 80, à la demande du président de l'Union mathématique internationale (IMU). Vingt ans après cependant, la situation avait changé. Comme expliqué dans (Artigue, 2009), la méfiance s'était installée entre l'IMU et l'ICMI. Le Comité scientifique du Congrès international des mathématiciens devant se tenir à Berlin en 1998 avait rejeté le programme conçu par l'ICMI pour la section « Teaching and Popularization of Mathematics » et imposé notamment un panel sur les thématiques qui nourrissaient la Math War, avec des mathématiciens particulièrement actifs dans cette guerre. Le président de l'IMU par ailleurs s'opposait à ce que son pays, le Brésil, un de ceux où les antagonismes entre mathématiciens et didacticiens étaient les plus virulents, organise le prochain ICME. Des voix de plus en plus nombreuses au sein de l'ICMI s'élevaient pour demander que l'ICMI s'affranchisse de cette institution mère qui ne la respectait pas.

Hyman Bass, mathématicien éminent, qui venait de prendre un poste à l'Université de Michigan où travaillait Deborah Ball pour construire des liens entre mathématiciens et chercheurs en éducation mathématique, avait accepté la présidence de l'ICMI. Il a fallu décider. Pour nous, il était essentiel de maintenir l'ICMI à l'interface des communautés, mais ceci imposait un changement des relations avec l'IMU. Ce fut un travail de longue haleine qui n'aurait pas été possible sans l'engagement sans faille, sans la légitimité scientifique que portait Hyman Bass. Il aboutira, comme l'ont montré Bernard Hodgson et Mogens Niss dans leur conférence conjointe à ICME-13, à des changements décisifs, mon élection à la présidence de l'ICMI en 2006 en témoigne (Hodgson & Niss, 2018). Ces changements ont rendu possibles de réelles collaborations, comme celle qui porte le projet CANP (Capacity & Networking Project)[22] dont la première réalisation en 2011 a concerné des pays de l'Afrique francophone subsaharienne.

L'évolution brièvement évoquée ici n'est pas propre à l'ICMI, même si dans certains pays, par exemple d'Amérique latine, les tensions entre communautés sont toujours vives. Et je

[22] https://www.mathunion.org/icmi/activities/developing-countries-support/capacity-networking-project-canp (accès le 20/12/2018). Le projet CANP vise à développer les compétences mathématiques et didactiques de tous ceux engagés dans la formation des enseignants, de créer des réseaux régionaux et de favoriser leur connexion avec les structures internationales existantes. Il vise en priorité les régions peu touchées par les activités de l'ICMI.

voudrais pour terminer souligner qu'elle est bien visible en France. Elle l'est sous différentes facettes, notamment les suivantes :

- l'évolution de la CFEM[23], sous-commission française de l'ICMI qui rassemble les principales institutions, sociétés, associations concernées par l'enseignement des mathématiques et porte aujourd'hui la voix de la communauté auprès des institutions — la seule discipline à porter une voix unifiée — et est co-organisatrice avec l'ARDM, l'Association pour la recherche en didactique des mathématiques, d'un colloquium annuel sur l'enseignement des mathématiques,
- l'engagement croissant de mathématiciens dans des projets communs et des co-directions de thèse. En témoignent par exemple les thèses portées par l'équipe Math à Modeler à l'Université de Grenoble, mais aussi celle de Zoé Mesnil (2014) sur l'enseignement de la logique à l'Université Paris-Diderot que j'ai co-encadrée avec la didacticienne Cécile Ouvrier-Buffet et le logicien René Cori, et tout récemment la thèse de Marie Lhuissier à l'ENS de Lyon (2018) combinant une recherche mathématique sur le problèmes des trois corps avec la conception et analyse d'activités de popularisation sur cette même thématique, co-encadrée par le mathématicien Étienne Ghys et Christian Mercat. C'est un engagement qui est favorisé par celui croissant des didacticiens dans l'habitat « Popularisation, diffusion » et la recherche associée, dont un exemple pionnier a été la thèse de Nicolas Pelay (2010) à l'origine de la notion de *contrat didactique et ludique*.

Contribue aussi à cette dynamique le développement des recherches didactiques au niveau universitaire, en incluant aussi les formations mathématiques dites de service, dont atteste le rôle joué par les didacticiens français dans le nouveau réseau INDRUM (International Network for Didactic Research in University Mathematics), dont le premier colloque a eu lieu à l'Université de Montpellier en 2016, et le nouveau réseau national DEMIPS (Didactique et Épistémologie des Mathématiques, lien avec l'Informatique et la Physique dans le Supérieur) qui vise à fédérer les recherches en didactique des mathématiques sur l'enseignement supérieur et sur la transition secondaire/supérieur, et à favoriser les collaborations entre didacticiens et mathématiciens[24].

Je voudrais enfin souligner le rôle d'interface que jouent également les interactions croissantes avec les chercheurs en d'histoire et épistémologie des mathématiques, et en histoire de l'enseignement. Mes co-encadrements avec le mathématicien et épistémologue Michel Serfati, malheureusement disparu en septembre 2018, des thèses de Caroline Bardini sur le symbolisme algébrique (2003) et de Véronique Battie sur l'enseignement de l'arithmétique en terminale (2003) avaient été pionniers dans cette direction, mais la thèse récente de Charlotte de Varent (2018) co-encadrée par l'historienne spécialiste des mathématiques sumériennes Christine Proust et le didacticien Nicolas Decamps, par la symétrie qui y est à l'œuvre entre les deux champs d'étude, montre bien le chemin parcouru depuis.

3. Conclusion

La vision présentée dans cette section des relations entre mathématiques et didactique des mathématiques est, de manière évidente, marquée par mon expérience personnelle de ces relations, en tant que didacticienne des mathématiques. C'est notamment en tant que didacticienne des mathématiques que j'ai vécu les tensions entre communautés et essayé de

[23] http://www.cfem.asso.fr (accès le 20/12/2018).
[24] Voir la présentation des deux réseaux au comité scientifique des IREM : http://www.univ-irem.fr/IMG/pdf/ci-irem-demips_indrum-2.pdf (accès le 20/12/2018).

les surmonter, de les réduire, que j'ai perçu et fait sens des évolutions qui se sont indéniablement produites depuis le début de ma carrière, à un moment où la didactique émergeait à peine comme champ scientifique. Avec le recul, il me semble qu'aujourd'hui nous en sommes à un stade où chercheurs en mathématiques et en didactique des mathématiques, tout en reconnaissant les différences importantes existant entre leurs champs de recherche respectifs, sont dans les conditions de penser et organiser les relations essentielles entre mathématiques et didactique des mathématiques de façon plus satisfaisante, plus équilibrée, de s'émanciper des oppositions stériles, et que nous avons substantiellement progressé dans cette voie, même si beaucoup reste à faire.

V. CONCLUSION

Les trois contributions qui constituent ce texte sont, comme le lecteur pouvait s'y attendre, diverses. C'est une diversité qui reflète à la fois la diversité de nos contextes professionnels et aussi celle de nos positions institutionnelles et de nos trajectoires personnelles, la diversité de nos subjectivités. Elles ne s'opposent cependant pas mais plutôt se complètent, faisant ainsi ressortir des relations entre mathématiques et didactique des mathématiques qui ont une longue histoire mais se reconstruisent sans cesse, des relations qui sont vivantes et de plus en plus productives, malgré les tensions qui persistent entre communautés dans de nombreux pays. Ce sont des relations à la qualité desquelles nous devons être attentifs, les uns et les autres, que nous soyons étiquetés mathématiciens ou didacticiens, car cette qualité ne va en rien de soi, et parce que les formes possibles de collaboration bougent sans cesse, comme bougent les champs scientifiques et les communautés, comme bouge le monde dans lequel nous vivons et les défis qu'il rencontre.

REFERENCES

Abdeljouad, M. (2009). L'introduction de la didactique des mathématiques en Tunisie. *Radisma.*

Adler, J. (2001). *Teaching mathematics in multilingual classrooms*. Dordrecht : Kluwer Academic Publisher.

Adler, J. (2005). Holding the past, living the present and creating a future: trends and challenges in research on mathematics teacher education. In R. Vithal, J. Adler & C. Keitel (Éds.), *Researching mathematics education in South Africa: Perspectives, practices and possibilities* (pp. 163-182). Cape Town: HSRC Press.

Arago, F. (1854). *Œuvres complètes de François Arago : Notices biographiques*, tome 2. J.-A. Barral (Éd.). Paris : Gide et J. Baudry, Éditeurs.

Artigue, M. (1997). Research in mathematics education through the eyes of mathematicians. In J. Kilpatrick & A. Sierpinska (Éds), *What is research in mathematics education and what are its results ?* (pp. 477-490). Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Artigue, M. (2009). ICMI : A century at the interface between mathematics and mathematics education. In M. Menghini, F. Furinghetti, L. Giacardi, & F. Arzarello (Éd.), *The first century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008). Reflecting and shaping the world of mathematics education*, (pp. 185-198). Rome : Istittuto della Enciclopedia Italiana.

Artigue, M. (Éd.) (2016). *La tradition didactique française. Exemples de collaboration avec l'Afrique, l'Amérique latine et l'Asie*. Paris : CFEM. http://www.cfem.asso.fr/cfem/Collaborationsdidactiquesfrancaises.pdf

Artigue, M., Bosch, M., Chaachoua, H., Chellougui, F., Chesnais, A., Durand-Guerrier, V., Knipping, C., Maschietto, M., Romo-Vázquez, A., & Trouche, L. (2019). The French Didactic Tradition in Mathematics. In W. Blum, M. Artigue, A. Mariotti, M. van der Heuvel-Panhuizen, & R. Sträβer (Éd.) *European Traditions in Didactics of Mathematics* (pp. 11- 56). New York : Springer.

Bardini, C. (2003). *Le rapport au symbolisme algébrique : une approche didactique et épistémologique*. Thèse de Doctorat. Université Paris-Diderot. [https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00011697/document].

Battie, V. (2003). *Spécificités et potentialités de l'arithmétique élémentaire pour l'apprentissage du raisonnement mathématique.* Thèse de Doctorat. Université Paris-Diderot. [https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00141080/document]

Bethell, G. (2016). *Mathematics education in Sub-Saharan Africa : Status, challenges and opportunities*. World Bank Report No: ACS19117.

Blum, W., Artigue, M., Mariotti, M. A., van der Heuvel-Panhuizen, M., & Sträβer, R. (Éd.) (2019). *European traditions in didactics of mathematics*. New York : Springer.

Boileau, A. (2012). Point de vue sur la formation mathématique des futurs enseignants de mathématiques au secondaire. In J. Proulx, C. Corriveau et H. Squalli (Éd.), *Formation mathématique pour l'enseignement des mathématiques : Pratiques, orientations et recherches* (pp. 57-80). Québec : Presses de l'Université du Québec.

Brousseau, G., Brousseau, N., & Warfield, V. (2014). *Teaching fractions through situations: A fundamental experiment.* New York : Springer.

Bundgaard, S. (1960). *Lectures on modern teaching of geometry and related topics*. (ICMI-Seminar, Elementær Afdeling Nr. 7), Aarhus : Aarhus Universitet.

Churchhouse, R.F., Cornu, B., Howson, A.G., Kahane, J.-P., van Lint, J.H., Pluvinage, F., Ralston, A., & Yamaguti, M. (Éd.) (1986). *The influence of computers and informatics on mathematics and its teaching.* Cambridge : Cambridge University Press, 1986.

CIEM (1984). An introduction to the ICMI Study on the computer and informatics. *L'Enseignement Mathématique* 30, 159-172.

Djebbar, A. (2015). Les mathématiques arabes des VIII-XV siècles : passerelles entre les cultures. In Theis L. (Éd.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et apprentissage — Actes du Colloque EMF 2015 — Plénières* (pp. 1-16). [http://emf.unige.ch/files/4314/6400/7246/EMF2015DJEBBAR.pdf].

Dorier, J.-L. (2015). La didactique des mathématiques : une épistémologie expérimentale. In L. Theis (Éd.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et apprentissage - Actes du colloque EMF2015* (pp. 108-118). [https://archive-ouverte.unige.ch/documents/advanced_search?field1=journal.marc&value1=Pluralités+culturelles+et+universalité+des+mathématiques+%3A+enjeux+et+perspectives+pour+leur+enseignement+et+leur+apprentissage+–+Actes+du+colloque+EMF2015].

Dunnington. G.W. (2004). *Carl Friedrich Gauss: Titan of science.* Washington, DC : Mathematical Association of America.

EBESM / Editorial Board of Educational Studies in Mathematics (1969). *Actes du Premier Congrès International de l'Enseignement Mathématique.* (Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique, CIEM). Dordrecht : D. Reidel. [Aussi dans *Educational Studies in Mathematics 2* (1969) 135-418.]

Euler, L. (1738). *Einleitung zur Rechen-Kunst zum Gebrauch des Gymnasii bey der Kayserlichen Academie der Wissenschafften in St. Petersburg.* St. Petersburg: Academischen Buchdruckerey. Reproduit dans *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, sér. III.

vol. 2 (pp. 1-303). Leipzig, Germany : B.G. Teubner, 1942. [www.math.uni-bielefeld.de/~sieben/euler/rechenkunst.html].

Gardes, M.L. (2013). *Étude de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants, engagés dans la recherche d'un problème non résolu en théorie des nombres*. Thèse de Doctorat. Université Claude Bernard - Lyon 1. [https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01145845].

Gerdes, P. (1995). *Ethnomathematics and education in Africa*. Stockholm : University of Stockholm, Institute of International Education.

Gourdeau, F., & Proulx, J. (avec la collaboration de J.-F. Maheux & B.R. Hodgson) (2012). Formation mathématique pour les enseignants de mathématiques du secondaire : croisement des regards du mathématicien et du didacticien. In J. Proulx, C. Corriveau et H. Squalli (Éd.), *Formation mathématique pour l'enseignement des mathématiques : Pratiques, orientations et recherches* (pp. 101-120). Québec : Presses de l'Université du Québec.

Halai, A., & Tennant, G. (Éd.) (2016). *Mathematics education in East Africa. Towards harmonization and enhancement of education quality*. New York : Springer.

Hardy, G.H. (1967). *A mathematician's apology*. London : Cambridge University Press.

Hausberger, T. (2016). *Enseignement et apprentissage de l'algèbre abstraite à l'université et premiers éléments d'une didactique du structuralisme algébrique : études croisées en didactique et épistémologique des mathématiques*. HDR. Université de Montpellier. [https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01408565].

Hischer, H. (2016). *Mathematik – Medien – Bildung. Medialitätsbewusstsein als Bildungsziel: Theorie und Beispiele.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Hodgson, B.R. (1991). Regards sur les Études de la CIEM. *L'Enseignement Mathématique* 37, 89-107.

Hodgson, B.R. (2001). The mathematical education of school teachers: role and responsibilities of university mathematicians. In D. Holton (Éd.), *The teaching and learning of mathematics at university level — An ICMI Study* (pp. 501-518). Dordrecht : Kluwer.

Hodgson, B.R. (2015). Whither the mathematics/didactics interconnection? Evolution and challenges of a kaleidoscopic relationship as seen from an ICMI perspective. In S.J. Cho (Éd.), *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 41-61). Cham : Springer International.

Hodgson, B.R. (2017). Apport des mathématiciens à la formation des enseignants du primaire : regards sur le « modèle Laval ». In S. Oesterle, D. Allan, & J. Holm (Éd.) *Actes de la rencontre annuelle 2016 du Groupe canadien d'étude en didactique des mathématiques* (pp. 3-44). CMESG/GCEDM. [http://www.cmesg.org/actes/].

Hodgson, B.R. (2018). Artefacts and tasks in the mathematical preparation of teachers of elementary arithmetic from a mathematician's perspective: a commentary on chapter 9. In M.G. Bartolini Bussi, & X.H. Sun, (Éd.), *Building the foundation: Whole numbers in the primary grades — The 23rd ICMI Study* (pp. 227-250). Cham : Springer International.

Hodgson, B.R. & Lajoie, C. (2015). The preparation of teachers in arithmetic: A mathematical and didactical approach (pp. 307–314). In X.H. Sun, B. Kaur, & J. Novotná, (Éd.) *Conference proceedings of ICMI Study 23: Primary mathematics study on whole numbers* (pp. 307-314). Macau : University of Macau. [https://www.um.edu.mo/fed/ICMI23/ proceedings.html].

Hodgson, B.R., & Niss, M. (2018). ICMI 1966-2016: A double insiders' view of the latest half century of the International Commission on Mathematical Instruction. In G. Kaiser, H. Forgasz, M. Graven, A. Kuzniak, E. Simmt, & B. Xu (Éd.) *Invited lectures from the 13th*

International Congress on Mathematical Education (pp. 229-247). Cham : Springer International.

Hodgson, B.R., Rogers, L.F., Lerman, S., & Lim-Teo, S.K. (2013). International organizations in mathematics education. In M.A. Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. Leung (Éd.), *Third international handbook of mathematics education* (pp. 901-947). (Chapter 28, Springer International Handbooks of Education 27) New York : Springer Science+Business Media.

Howson, A.G. (1982). Minutes of a meeting held in Paris on 3 December 1982 between J.-P. Kahane, B. Christiansen and A.G. Howson. *IMU Archive, Boîte 14C — International Commission on Mathematical Instruction, 1981-1982*.

Howson, A.G. (1984). Seventy-five years of the International Commission on Mathematical Instruction. *Educational Studies in Mathematics* 15, 75-93.

Hughes, B. (Éd.) (2008). *Fibonacci's* De practica geometrie. New York : Springer.

Ifrah, G. (1994). *Histoire universelle des chiffres* (2 vol.). Paris : Robert Laffont.

Kahane, J.-P. (1987). Enseignement mathématique, ordinateur et calculettes. In A.M. Gleason (Éd.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 1986* (pp. 1682-1696). Providence, RI : American Mathematical Society.

Kahane, J.-P. (1988). La grande figure de Georges Pólya. In A. Hirst, & K. Hirst, (Éd.), *Proceedings of the sixth International Congress on Mathematical Education*, (pp. 79-97). Budapest: János Bolyai Mathematical Society.

Kahane, J.-P. (1990). A farewell message from Jean-Pierre Kahane, the retiring President of ICMI. *ICMI Bulletin* 29, 3-8.

Kahane, J.-P. (coord.) (2001). *L'enseignement des sciences mathématiques*. Paris : Odile Jacob.

Kilpatrick, J. (2008). A higher standpoint. In *ICME-11 Proceedings: Regular lectures* (pp. 26–43). [https://www.mathunion.org/fileadmin/ICMI/files/About_ICMI/Publications_about_ICMI/ICME_11/Kilpatrick.pdf].

Klein, F. (1932). *Elementary mathematics from an advanced standpoint: Arithmetic, algebra, analysis*. New York : Macmillan.

Klein, F. (2016). *Elementary mathematics from a higher standpoint*. (3 vols.) Berlin : Springer.

Lebesgue, H. (1975). *La mesure des grandeurs*. [Titre original : *Sur la mesure des grandeurs*. Publié en six articles dans *L'Enseignement Mathématique*, vol. 31 (1932) à vol. 34 (1935).] Paris : Albert Blanchard.

Lehto, O. (1998). *Mathematics without borders: A history of the International Mathematical Union.* New York : Springer.

Lhuissier, M. (2018). *Le problème mathématique des trois corps, abordé simultanément sous l'angle de la recherche théorique et celui de la diffusion auprès de publics variés*. Thèse de Doctorat. ENS de Lyon.

Mac Lane, S. (1971). *Categories for the working mathematician*. New York, NY : Springer.

Mainzer, K. (1991). Natural numbers, integers and rational numbers. In H.-D. Ebbinghaus, H. Hermes, F. Hirzebruch, M. Koecher, K. Mainzer, J. Neukirch, A. Prestel, & R. Remmert, (Éd.), *Numbers* (pp. 9-26). New York : Springer.

Mesnil, Z. (2014). *La logique : d'un outil pour le langage et le raisonnement mathématique vers un objet d'enseignement*. Thèse de Doctorat. Université Paris-Diderot. [https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01114281].

Mura, R. (2003). Lessons from the past, questions for the future: méditation sur un thème imposé. In E. Simmt, & B. Davis (Éd.), *Actes de la rencontre annuelle 2002 du Groupe*

canadien d'étude en didactique des mathématiques (pp. 197-205). Edmonton : CMESG/GCEDM.

Pelay, N. (2010). *Jeu et apprentissages mathématiques : élaboration du concept de contrat didactique et ludique en contexte d'animation scientifique*. Thèse de Doctorat. Université Claude Bernard - Lyon 1. [https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00665076].

Pelay, N., & Artigue, M. (2017). Vers une approche didactique des activités de diffusion et vulgarisation des mathématiques, et de leurs synergies possibles avec les activités scolaires. In T. Barrier & C. Chambris (Éd.), *Actes du Séminaire national de l'ARDM* 2016 (pp. 1-15). http://ardm.eu/files/sem_ARDM_actes_Pelay_Artigue_def.pdf

Pólya, G. (1958). *Les mathématiques et le raisonnement « plausible »*. Paris : Gauthier-Villars.

Pólya, G. (1962). *Comment poser et résoudre un problème*. (2e éd.) Paris : Dunod.

Pólya, G. (1967). *La découverte des mathématiques*. Paris : Dunod.

Schilling, C. (1900). *Wilhelm Olbers: Seine Leben und seine Werke. Zweiter Band: Briefwechsel zwischen Olbers und Gauss. Erste Abtheilung*. Berlin : Julius Springer.

Sierpinska, A. (2012). L'arbre banyan de l'expérience d'un formateur. In J. Proulx, C. Corriveau et H. Squalli (Éd.), *Formation mathématique pour l'enseignement des mathématiques : Pratiques, orientations et recherches* (pp. 91-98). Québec : Presses de l'Université du Québec.

Tazzioli, R. (2008). *Gauss, prince des mathématiques*. (Les génies de la science, no. 36) *Pour la science.*

Traoré, K., & Barry, S. (2006). La problématique d'une voie africaine en didactique des mathématiques : vrais et faux enjeux. In N. Bednarz & C. Mary (Éd.), *Actes du Colloque EMF 2006*. [http://emf.unige.ch/files/8014/5389/0085/EMF2006_GT3_Traore_Barry.pdf].

UNESCO (1967). *Tendances nouvelles de l'enseignement des mathématiques*, vol. I. Paris : UNESCO. [https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000124826].

UNESCO (1973). *Tendances nouvelles de l'enseignement de la mathématique*, vol. III. Paris : UNESCO. [https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000136587].

van der Waerden, B.L. (1983). *Geometry and algebra in ancient civilizations*. Berlin : Springer.

de Varent, C. (2018). *Pluralité des concepts liés aux unités de mesure. Liens entre histoire des sciences et didactique., le cas de l'aire du carré dans une sélection de textes anciens*. Thèse de Doctorat. Université Paris-Diderot.

Weigand, H.-G., McCallum, W., Menghini, M., Neubrand. M., & Schubring, G. (2019). *The legacy of Felix Klein*. (ICME-13 Monographs) Cham : Springer Nature.

Wittenberg, A. (1963a). *Bildung und Mathematik: Mathematik als exemplarisches Gymnasialfach.* Stuttgart : Ernst Klett Verlag.

Wittenberg, A. (1963b). An unusual course for future teachers of mathematics. *The American Mathematical Monthly* 70, 1091-1097.

Wittenberg, A. (1968). *The prime imperatives: Priorities in education.* Toronto: Clarke, Irwin & Co.

Wittenberg, A., Sœur Sainte-Jeanne-de-France, & Lemay, F. (1963). *Redécouvrir les mathématiques : Exemples d'enseignement génétique*. Neuchâtel : Delachaux & Niestlé.

Wittmann, E. (1975). Natural numbers and groupings. *Educational Studies in Mathematics* 6, 53-75.

Yvain-Prébiski, S. (2018). *Etude de la transposition à la classe de pratiques de chercheurs en modélisation mathématique dans les sciences du vivant. Analyse des conditions de la dévolution de la mathématisation horizontale aux élèves*. Thèse de doctorat. Université de Montpellier. [https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01956661/document].

INTERDISCIPLINARITE ET MATHEMATIQUES : DISPOSITIFS ET PRESCRIPTIONS CURRICULAIRES

CHELLOUGUI[*] Faïza – KA[**] Mangary – NJOMGANG NGANSOP[***] Judith – SCHNEIDER[****] Maggy – SEMRI[*****] Ahmed – SQUALLI[******] Hassane

Résumé – Les injonctions visant à intégrer une dimension interdisciplinaire sont de plus en plus présentes dans les programmes scolaires. Il semble que celles-ci ne sont pas accueillies ni traduites de la même manière d'un pays à l'autre. Dans cette table ronde, six intervenants s'expriment tour à tour pour apporter un éclairage sur la thématique de l'interdisciplinarité, tant au niveau des fondements épistémologiques, des politiques éducatives, que de la pratique effective.

Mots-clefs : interdisciplinarité, prescriptions curriculaires, épistémologie, pratiques enseignantes, activités des élèves

Abstract – Recommendations about interdisciplinary dimension are increasingly present in scholar curricula. However, it seems they are not treated in the same way from country to country. The six speakers of this round-table discussion give different perspectives about interdisciplinarity concerning epistemological issues, educational policies and implementation.

Keywords: interdisciplinarity, curricular recommendations, epistemology, teachers practices, students activities

I. INTRODUCTION

On rencontre de plus en plus dans les programmes scolaires la présence d'injonctions et de recommandations pour intégrer une « dimension interdisciplinaire » dans l'enseignement des mathématiques. Il semble même que ces recommandations se sont accentuées sous l'impulsion de l'approche par compétences prônant un enseignement de mathématiques situées, utiles et fonctionnelles. Il semble également que ces injonctions ne sont pas accueillies ni traduites de la même manière chez les différents partenaires, d'un pays à l'autre, voire d'un cycle à l'autre dans un même pays. Dans cette table ronde, nous souhaitons apporter quelques éclairages sur cette problématique, autant au niveau des fondements épistémologiques, des politiques éducatives, que de la pratique effective. Dans cette perspective, les questions suivantes ont été préparées :

1. Quels sont les dispositifs et les prescriptions curriculaires ? Quels principes épistémologiques les sous-tendent?
2. Comment cette interdisciplinarité est-elle ancrée dans l'évaluation par compétences ?
3. Interdisciplinarité versus pluridisciplinarité ?

[*] Université de Carthage – Tunisie – chellouguifaiza@yahoo.fr
[**] Université Cheikh Anta Diop (UCAD/Dakar) – Sénégal – mangaryka54@yahoo.fr
[***] Université de Yaoundé 1 – Cameroun – judithnjomg@yahoo.fr
[****] Université de Liège – Belgique – mschneider@uliege.be
[*****] Université d'Alger – Algérie – ahmedsemri@yahoo.fr
[******] Université de Sherbrooke – Québec, Canada – Hassane.Squalli@USherbrooke.ca

4. Comment les recommandations sont-elles traduites au niveau de la pratique enseignante, des manuels scolaires et des activités des élèves ?
5. Dans quelle mesure cela prend-t-il appui sur de la recherche ou des résultats de recherches ?
6. Existe-t-il des expériences pouvant servir de modèles transférables entre différents systèmes scolaires ?
7. Y a-t-il des évaluations fiables qui attestent, sans équivoque, de l'atteinte des objectifs escomptés ?

Six intervenants s'expriment tour à tour et abordent l'une ou l'autre des questions, en référence à la situation dans leur pays : Faïza Chellougui (Tunisie), Judith Sadja Njomgang (Cameroun), Mangary Ka (Sénégal), Maggy Schneider (Belgique), Ahmed Semri (Algérie) et Hassane Squalli (Canada). Nous avons regroupé leurs interventions selon six parties pour redonner une certaine dynamique de la table ronde, sans pour autant hacher leurs propos, ce qui explique que certaines questions seront parfois évoquées dans les parties où elles ne devraient pas nécessairement être adressées. La première partie se veut assez générale, sur les dispositifs et les prescriptions curriculaires dans chacun des six pays, avec dans la mesure du possible les principes épistémologiques qui sous-tendent ces dispositifs. Les six panelistes y interviennent. La seconde partie est un focus sur l'ancrage de l'interdisciplinarité dans l'approche par compétences, avec les contributions de Faiza Chellougui, de Judith Sadja Njomgang et de Ahmed Semri. La troisième partie porte sur l'écart entre pluri et inter-disciplinarité, avec la contribution de Maggy Schneider. La quatrième partie porte sur les pratiques des enseignants, les manuels et les activités effectives dans les classes, avec des contributions de Mangary Ka, de Ahmed Semri et de Hassane Squalli. La cinquième partie porte sur l'articulation avec la recherche, avec les contributions de Faiza Chellougui et de Maggy Schneider. Enfin, nous bordons la formation des enseignants avec Judith Sadja Njomgang et Mangary Ka.

II. DISPOSITIFS ET PRESCRIPTIONS CURRICULAIRES – PRINCIPES EPISTEMOLOGIQUES QUI LES SOUS-TENDENT

1. Faïza Chellougui

En Tunisie, l'enseignement scolaire est constitué de deux cycles : l'enseignement de base et l'enseignement secondaire.

L'enseignement de base constitue un cycle complet d'une durée de neuf ans ; il accueille les enfants âgés de 6 ans. Cet enseignement comporte deux cycles complémentaires : le premier cycle dispensé dans les écoles primaires et d'une durée de six ans, subdivisés en trois degrés de deux ans chacun, et le second cycle dispensé dans les collèges et d'une durée de trois ans. L'examen de fin d'études de l'enseignement de base est optionnel, il est organisé au terme de la neuvième année. À partir de 2007-08 des écoles préparatoires techniques ont été créées pour les élèves qui ont terminé la septième année de l'enseignement de base et qui ont des aptitudes scientifiques et des habiletés techniques. La durée des études est de deux ans conduisant à l'obtention du diplôme de fin d'études de l'enseignement professionnel.

L'enseignement secondaire d'une durée de quatre ans dispensé dans les lycées, est ouvert à tous les élèves de la neuvième année de l'enseignement de base qui, au vu de leurs résultats au contrôle continu, remplissent les conditions d'accès requises, ainsi qu'aux élèves titulaires du diplôme de fin de l'enseignement de base. Il vise à doter l'élève, en plus d'une culture générale solide, d'une formation approfondie dans l'un des champs du savoir ou bien d'une formation spécialisée dans un domaine spécifique qui lui donne la possibilité soit de

poursuivre ses études dans le cycle universitaire, soit d'intégrer la formation professionnelle, soit de s'insérer dans la vie active (Loi d'orientation, 2002). L'enseignement secondaire comporte trois degrés. Le premier degré d'un an qui est commun à tous les élèves, conduit, après orientation, à l'une des filières du second degré. Celui-ci d'une durée d'un an se subdivise en cinq filières : lettres, sciences, technologie de l'informatique, économie et gestion et sport. Au terme de cette année, l'élève sera capable de choisir la section du troisième degré qui lui convient. Le troisième degré d'une durée de deux ans comporte sept sections : lettres, mathématiques, sciences expérimentales, sciences techniques, sciences de l'informatique, économie et gestion et sport. Après l'obtention du baccalauréat, chacune des sections du troisième degré offre, au niveau de l'enseignement supérieur et de la formation professionnelle, un bouquet de filières et de spécialités.

L'expérimentation de l'approche par les compétences (APC) a débuté en 1995 et s'est faite avec les curricula en vigueur. Elle s'est déroulée sans obstacles et difficultés majeurs. Un comité de pilotage appuyé par des classes expérimentales des experts internationaux a supervisé cette expérimentation et a encadré de près les enseignants. Les dispositifs de formation déployés dans la phase expérimentale sont apparus opportuns et cohérents. Toutefois, la présence de formateurs reliés à différents courants de l'APC, principalement les courants belge et canadien, a parfois entraîné des divergences d'interprétation et conséquemment de compréhension de concepts, jusqu'à ce que la Tunisie définisse son propre modèle. Ce modèle résulte d'une fusion de l'approche dite *l'intégration des acquis* et de l'approche *interdisciplinaire*. De la première approche, la Tunisie a conservé le concept d'intégration, qui recouvre en partie le concept d'interdisciplinarité de la seconde approche, et de l'approche *interdisciplinarité*, elle a conservé le concept de compétence transversale.

L'article 2 de la loi de juillet 2002 postule ensuite que "*l'élève est au centre de l'action éducative*". Cette définition sans équivoque de la place de l'apprenant au sein du système d'enseignement/apprentissage constitue aussi une première dans la législation éducative tunisienne. C'est la réforme de 2002 qui a mis en place le projet de l'APC qui sous-tend le projet *École de Demain*. Cette approche a été appelée *pédagogie de la réussite* car il s'agit effectivement d'une démarche qui vise à l'acquisition de compétences solides et durables d'une part, et tient compte des différences de rythme d'apprentissage entre les élèves et s'attache, par des procédures appropriées d'évaluation, de diagnostic et de remédiation, à garantir à tous des chances égales de réussite, d'autre part.

Par ailleurs, le projet de l'APC fait de l'interdisciplinarité une de ses orientations prioritaire et incontournable. Ceci soulève plusieurs questions, parmi lesquelles :

- Quel projet de formation d'enseignants peut-on mettre en œuvre pour faire réussir ce projet ?

- Comment peut-on faire vivre une collaboration entre les enseignants de mathématiques et ceux des autres disciplines pour faire réussir ce projet ?

- Est-ce que les programmes, les manuels scolaires et les enseignants prennent en considération cette interdisciplinarité afin d'assurer l'apprentissage des méthodes, des techniques et des compétences en lien entre les concepts mathématiques et les concepts d'autres disciplines ?

2. Mangary Ka

Depuis son accession à l'indépendance en 1960, le Sénégal à l'instar de la plupart des pays africains n'a de cesse de modifier ses programmes, dans le cadre d'organisations

interafricaines (IPAM, Conseil des Ministres de l'éducation d'Afrique et de Madagascar, Conférence des ministres de l'éducation des états africains et malgaches d'expression française, etc.) ou de prendre des initiatives en votant des lois visant à *répondre à la demande sociale* qui réclame avec insistance une *école comme outil de résolution des problèmes de développement* social économique et culturel.

Entre autres lois nous pouvons citer la loi d'orientation 71-36 du 3 juin 1971 et la loi d'orientation 91-22 du 16 février 1991. Toutes ces initiatives participent de la quête de l'efficacité et de l'efficience du système d'éducation et de formation. Or nul n'ignore l'importance de la démarche interdisciplinaire dans la facilitation des acquisitions qu'elle rend plus significatives et durables.

Faisant face vers les années 2000, à un déficit criard d'enseignants et de moyens financiers, le Sénégal a procédé à un recrutement en masse d'enseignants appelés « professeurs contractuels », affectés sans formation initiale dans les lycées et collèges. Il en est de même pour l'école élémentaire avec le recrutement de 2000 volontaires par années pendant 4 ans, ensuite de maîtres contractuels. Ces corps émergeants ont fini par représenter plus de 66% des effectifs des enseignants du moyen et secondaire. Cette situation ne rime pas avec une éducation de qualité. Ainsi, dans le but d'améliorer la qualité des apprentissages, le Sénégal a opté pour donner une formation initiale de base à ces corps émergeants, de leur présenter un programme facilement exploitable. C'est pourquoi l'accompagnant scientifique aux rédacteurs du curriculum de l'éducation de base avait coutume de dire « mon baromètre c'est les maîtres contractuels » pour dire que plus c'est simple, mieux c'est.

Dès lors il est légitime de nous demander si les curricula et les dispositifs de formations accordent à l'interdisciplinarité la place qui lui revient. Nous limitons notre propos aux mathématiques dont l'importance dans l'éducation des citoyens des pays en voie de développement n'est plus à démontrer. Mais malgré tout, son enseignement-apprentissage pose d'énormes problèmes tels que l'élévation des taux de redoublements et d'échecs aux examens, la faiblesse des effectifs dans les filières scientifiques, etc.

Les rédacteurs de ce nouveau programme présenté selon l'approche par compétences ont opté pour l'élaboration de compétences par sous-disciplines en mathématiques, c'est-à-dire des compétences en activités numériques, des compétences en activités géométriques et des compétences en activités de mesure. Nous estimons que le souci majeur du législateur est de coller davantage à la discipline et de donner aux enseignants suffisamment de temps à lui consacrer. Qu'en est-il alors de l'interdisciplinarité en mathématiques qui invite à un regard qui transcende le cloisonnement disciplinaire ?

Cette notion est beaucoup utilisée, mais les gens ne lui donnent pas souvent la même acception. Pour certains il s'agit d'emprunter des notions à une autre discipline, pour d'autres c'est utiliser une notion commune à des disciplines distinctes ou même parfois c'est une notion qui transcende les disciplines.

Selon Maingain et al. (2002), l'interdisciplinarité consiste à élaborer une représentation originale d'une notion, d'une situation, d'une problématique par la mise en relation d'au moins deux disciplines. C'est aussi, selon Clary et Giolitto (1994), étudier des problèmes dans une approche intégrée par l'utilisation, l'association et la coordination des disciplines appropriées.

C'est dire que l'interdisciplinarité peut porter sur les méthodes, les techniques et les contenus et vise aussi bien l'intégration des processus d'apprentissage que l'intégration des savoirs qui en résultent en vue de favoriser la mobilisation de ceux-ci pour la résolution de situations-problèmes de vie courante. Dans le cadre de ce travail nous empruntons la

définition de Lenoir et Sauvé (1998) qui la définissent comme étant « *la mise en relation de deux ou plusieurs disciplines scolaires […] qui conduit à l'établissement de liens de complémentarité ou de coopération, d'interprétation ou d'actions réciproques entre elles sous divers aspects (finalités, objets d'étude, concepts et notions, démarches d'apprentissage et habiletés techniques, etc.) en vue de favoriser l'intégration des processus d'apprentissage et des savoirs chez les élèves* » (Lenoir et Sauvé, 1998, p. 12).

Cette définition englobe tous les aspects de l'interdisciplinarité à savoir, non seulement l'acquisition de connaissances mais aussi l'acquisition des méthodes et démarches propres à chaque discipline à mobiliser pour favoriser une meilleure construction des notions et concepts et pour faciliter leur réinvestissement dans une situation significative de vie.

Cette conception de l'interdisciplinarité convient mieux dans un contexte d'apprentissage en langue étrangère, car la pluralité des dimensions présentées permet à l'apprenant de mieux saisir la quintessence des concepts mathématiques qui sans cela ne seront que « devinés ».

L'interdisciplinarité intervient au niveau de l'enseignement-apprentissage après un travail didactique et curriculaire, mais aussi au niveau de la formation des enseignants. Nous distinguerons deux types d'interdisciplinarité : l'interdisciplinarité dite scolaire et l'interdisciplinarité dite fonctionnelle.

Compte tenu de l'importance de l'interdisciplinarité, nous sommes en droit de nous demander si le législateur sénégalais est conscient de l'impact de l'interdisciplinarité sur la qualité des apprentissages au point de la négliger au niveau de la formation initiale de base et même de la sacrifier à l'autel de la simplification ? Il est aussi intéressant de savoir comment les enseignants craie en main perçoivent l'interdisciplinarité.

3. Judith Sadja Njomgang

Les programmes scolaires préconisent de plus en plus l'intégration d'une dimension interdisciplinaire dans l'enseignement des mathématiques. Au Cameroun, cette recommandation fait suite au changement du modèle pédagogique avec l'introduction de l'Approche par les Compétences (APC) qui est en vigueur depuis 2014 dans les établissements d'enseignement primaire et secondaire. La mise sur pied de nouveaux programmes dans le premier cycle de l'enseignement général ($6^{ème}$, $5^{ème}$, $4^{ème}$ et $3^{ème}$) a suivi ce changement de paradigme.

Dans les recommandations relatives à l'implémentation de l'APC, on parle généralement d'approche par les compétences avec entrée par une situation de vie. Ainsi, il serait légitime de penser que la pratique de l'interdisciplinarité est effective du fait que les situations de vie ne concernent en général ni seulement un concept, encore moins une seule discipline.

L'inspection générale des enseignements (enseignement de base et enseignements secondaires) dans son texte de cadrage des programmes d'enseignement, ne parle pas de façon explicite de la pratique de l'interdisciplinarité dans la classe. Dans le guide pédagogique relatif à l'enseignement des mathématiques, le mot *interdisciplinarité* apparait dans la rubrique « Relations des mathématiques avec des domaines d'apprentissage ». D'après les auteurs de ce guide, l'APC milite fortement pour un décloisonnement des disciplines. La satisfaction de très nombreuses préoccupations quotidiennes entraine la mobilisation des acquis de plusieurs disciplines. Les auteurs proposent en exemple que, pour proposer un régime alimentaire équilibré à ses parents, l'élève de $4^{ème}$ utilisera ses connaissances sur les nombres (mathématiques) et ses connaissances sur l'alimentation équilibrée (Sciences de la Vie et de la Terre).

Le tableau qui suit, issu du guide pédagogique, donne un exemple de situations de vie à incidence mathématique :

Domaine d'apprentissage	**Exemples de situations de vie à incidence mathématiques**
Sciences humaines	Lecture des cartes, calculs d'échelles, lignes de niveau, climatologie (température, pluviosité, …), décalage horaire, archéologie, …..
Langues et littérature	Grammaire : (écriture de nombres en lettres, accords, …)
Développement personnel	Détermination des performances de : lancer de poids, saut en hauteur, classement d'athlètes, … Aménagement ou réalisation des terrains de sport…
Art et culture	La réalisation des motifs de décoration, la reproduction des formes usuelles, l'aménagement des espaces, ….
Techniques industrielles et commerciales	Détermination des volumes, réalisation d'objets à partir de schémas, facturation, gestion de compte bancaire ….

Tableau 1 : Tableau issu du guide pédagogique

On est donc amené à se poser la question de savoir quelles sont les modalités d'implémentation de l'interdisciplinarité. Selon les prescriptions, elle doit apparaitre dans les pratiques de classe : les situations d'approche pour une séquence d'enseignement, les activités d'intégration à la fin d'un cours.

Il existe plusieurs stratégies de mise en œuvre de l'interdisciplinarité :

- Solliciter d'autres disciplines quand le sujet le demande d'après Bailly et Schils (1998) ;

- Composer un groupe pluridisciplinaire pour travailler sur un même thème, chacun traitant un aspect particulier d'après les mêmes auteurs ci-dessus ;

- Approcher globalement un problème puis faire appel aux différentes méthodologies disciplinaires pour analyser la situation et la découper en problèmes et trouver des solutions alternatives d'après Giordan et Souchon (1992).

L'interdisciplinarité pose la question cruciale du travail collaboratif entre collègues de disciplines différentes, ce qui dans nos établissements d'enseignement secondaire est problématique : d'après les enseignants que nous avons approchés, les quotas horaires élevés ne permettent pas ce type de collaboration. Par ailleurs, ils ne savent pas comment organiser et gérer une activité interdisciplinaire du fait qu'ils n'y ont été initiés ni en formation initiale, ni en formation continue.

4. Maggy Schneider

Nous tenons à préciser, d'entrée de jeu, que notre propos ne prétend pas à l'exhaustivité, se basant sur une enquête modeste ainsi que des observations de terrain faites dans des écoles secondaires.

En Fédération Wallonie Bruxelles, les dispositifs qui se réclament d'une manière ou d'une autre de l'interdisciplinarité sont encouragés tout particulièrement depuis le décret

« Missions »[1]. Dans une perspective globale de « chances égales d'émancipation sociale », ce décret a engagé une réécriture des programmes à partir de référentiels de compétences. Dès lors, il a inscrit ces démarches dites interdisciplinaires dans le paradigme des compétences et ses idéaux que traduisent des slogans tels que : « apprendre à apprendre », « devenir citoyen responsable », … En son article 7, le même décret prévoit la possibilité d'un espace-temps pour de telles démarches mais délègue aux écoles le choix et la responsabilité de leur organisation.

Faisons un saut du décret « Missions » aux travaux (encore en cours) relatifs au « Pacte pour un Enseignement d'Excellence », projet dans lequel on vise un Tronc Commun pour tous les élèves jusqu'à 14 ans dont le caractère polytechnique et interdisciplinaire serait prononcé. On y trouve l'initiative 3 qui fait un (petit) pas de plus pour encourager ce type de démarche : *« Encourager, au moment du parcours scolaire où sa mise en œuvre semble pertinente, la multidisciplinarité, voire l'interdisciplinarité […] Pour ce faire, intégrer dans la charge de chaque enseignant, des concertations au sein des établissements. Des mesures incitatives pourraient introduire des heures de concertation pour les établissements qui proposeraient de telles mesures. »*.

Le groupe chargé d'examiner le cas des mathématiques, dans le cadre du Pacte, note l'intérêt de cet aspect du projet qui *« devrait permettre d'amarrer les apprentissages mathématiques à des contextes plus authentiques, en sciences et en sciences humaines, que ceux observés dans les pratiques actuelles. »*. Ce groupe souligne cependant la nécessité d'un nombre non négligeable d'heures allouées spécifiquement aux mathématiques, en raison *« de leur spécificité épistémologique, en termes de langage symbolique qui rassemble et structure des contextes diversifiés aussi bien intra qu'extra-mathématiques. »*.

Le thème le plus récurrent invoqué dans les prescrits est celui de l'Éducation à la citoyenneté et au développement durable. Ce thème prévaut bien évidemment dans un décret de 2007 relatif au « renforcement de l'éducation à la citoyenneté responsable et active » au sein des établissements, qui invite aux démarches transversales et aux regroupements d'élèves et de cours. Par ailleurs, des recommandations relatives à l'éducation au respect de l'environnement et au développement durable, émanant du Service de l'Inspection interréseaux, ont mis l'accent sur la pensée systémique et l'approche interdisciplinaire : « *A l'école, dans les classes, l'éducation au respect de l'environnement crée les conditions favorables à une éducation participative, à la mise en place d'activités en interdisciplinarité, à l'organisation de projets… Elle décloisonne les disciplines et développe la pensée systémique* ».

Les programmes scolaires, quant à eux, prennent le relais à la mesure du caractère intrinsèquement pluridisciplinaire de la discipline concernée comme peut l'être la géographie par exemple. Cependant nous nous sommes ici plus particulièrement penchés sur les actuels programmes de mathématiques. Outre leur attachement au courant des compétences aujourd'hui traduites en temps d'Unités d'Acquis d'Apprentissage, le thème de l'interdisciplinarité n'en est pas absent bien qu'essentiellement limité aux applications de tel ou tel contenu. Le thème de la vie citoyenne ou celui du développement durable s'y retrouvent également d'un programme à l'autre. On peut lire, par exemple[2] : « [Ces programmes] *invitent les enseignants, chaque fois que c'est possible, à mettre l'accent sur*

[1] Décret du 24 juillet 1997 définissant les missions prioritaires de l'enseignement fondamental et de l'enseignement secondaire et organisant les structures propres à les atteindre.

[2] http://enseignement.catholique.be

l'intégration dans les apprentissages du développement durable, du numérique et de la dimension citoyenne. ».

La formation initiale des enseignants comporte souvent un volet interdisciplinaire sous forme d'un séminaire où des groupes d'étudiants de différentes disciplines sont invités à concevoir un canevas de projet interdisciplinaire (De Keysel, 2016 ; Fagnant et al., 2012 ; Jadin, 2018). Celui-ci doit être programmé comme dispositif potentiel qui mettrait les élèves au travail sur un sujet interdisciplinaire sans toutefois, la plupart du temps, faire l'objet d'une expérimentation dans les classes.

Dans la présentation de ces séminaires, on trouve des références au thème de l'Éducation à la citoyenneté et au développement durable, assorti d'une référence à la complexité du monde, comme un *enchevêtrement de systèmes* au sens de Morin et associé à d'autres thèmes :

- Celui du développement de compétences professionnelles les outillant pour des pratiques futures.

- Celui de la découverte des disciplines autres que celle qu'ils auront à enseigner.

- Celui d'une sensibilisation des formés eux-mêmes à des problématiques actuelles.

5. Ahmed Semri

Au début des années 90 et dans un contexte de transformation rapide, au niveau politique économique et social, le système éducatif dans son ensemble était appelé à s'adapter. Contenus et méthodes inadaptés, faible taux de réussite au baccalauréat, taux élevé de déperdition scolaire, pression de la demande au niveau de l'enseignement supérieur, chômage croissant de la population active jeune étaient autant de symptômes qui nécessitaient une réforme globale du système éducatif. Cette réforme n'a malheureusement pu être concrétisée qu'en 2003 en raison de la période tragique de l'histoire de l'Algérie qu'a été la décennie noire. Elle fut menée sur 3 ans, a touché tous les niveaux et a été pilotée par le projet PARE de l'UNESCO.

La mission essentielle de l'école algérienne devenait alors l'instruction, la socialisation, la qualification, la préparation à l'exercice de la citoyenneté et l'ouverture sur le monde. La réforme s'articulait autour de trois axes principaux : la planification, la formation et les contenus et méthodes. Concernant la planification, cela consistait en une réorganisation de l'enseignement en termes de filières, de durée de chaque cycle et la mise en place d'une année d'accueil préscolaire. Pour ce qui est de la formation, l'objectif est l'élévation des compétences des inspecteurs et des enseignants, la coordination des actions de formation et leur évaluation ainsi que l'introduction des nouvelles technologies de l'information et de la communication (TIC) au sein des établissements scolaires. Pour ce qui est du troisième axe relatif aux contenus et méthodes, l'objectif était :

- La mise en œuvre de nouveaux curricula pour les différents niveaux d'enseignement ;

- L'élaboration des supports pédagogiques et leur évaluation ;

- La prise en compte de nouvelles approches pédagogiques pour les curricula, les manuels et les évaluations avec notamment l'introduction de « l'approche par compétences » (APC).

Cette nouvelle approche a amené à un changement de paradigme au niveau de la pédagogie résumé dans le tableau ci-dessous:

DE	VERS
Enseignement axé sur l'action de l'enseignant	L'apprentissage centré sur l'apprenant
La transmission des savoirs	La construction des connaissances
La mémorisation	L'analyse, la synthèse et l'application
L'action sur les connaissances	Le développement des compétences
L'évaluation formative	L'évaluation sommative
Contenus disciplinaires catégorisés	Contenus intégrés et domaines de savoir

Tableau 2 : Changement de paradigme au niveau de la pédagogie

Les réformes curriculaires ont ainsi permis la mise en place d'une collaboration entre les différentes disciplines à tous les niveaux (Primaire, Moyen, Secondaire) mais qui ne se faisait pas de la même manière avec des degrés variables selon le niveau. À titre d'exemple, au niveau de la première année primaire, on est allé jusqu'à concevoir un manuel unique pour l'ensemble des matières mais en fait, l'objectif était beaucoup plus d'ordre matériel qui portait sur l'allègement du cartable de l'élève que d'ordre pédagogique. Cependant, des échanges et collaborations entre enseignants de mathématiques et ceux des autres matières (physique, géographie, sciences de la nature, dessin…) ont vu le jour à la faveur des nouveaux programmes.

À la lecture des nouveaux programmes, les dispositifs qui, dans le discours, promeuvent la convocation de plusieurs disciplines sont:

- Les approches par résolution de problèmes complexes (situations d'intégration, cible) ;

- La mise en relation de matières scolaires.

Il est à noter que durant la même période de la réforme du système éducatif, l'enseignement supérieur faisait lui aussi sa mue avec la mise en place du système LMD avec tout ce que cela implique en terme d'objectifs, d'organisation et d'offre de formation.

6. *Hassane Squalli*

Au Québec, la question du décloisonnement disciplinaire (interdisciplinarité au sens large) n'est pas nouvelle. Déjà le Rapport de la Commission royale d'enquête sur l'enseignement dans la province de Québec, tout en encourageant un engagement « à fond » dans la spécialisation du personnel enseignant au secondaire, faisait ressortir que « l'intelligence aux multiples aspects qui correspond à l'humanisme de notre époque ne peut se développer dans un système scolaire cloisonné et compartimenté qui isole les disciplines les unes des autres » (Gouvernement du Québec 1964, p. 79).

Le débat sur la question a connu une recrudescence au cours des années 1980. Dans son rapport de 1982, le conseil supérieur de l'éducation justifie le recourt à l'interdisciplinarité ainsi : «si les éducateurs multipliaient les actions interdisciplinaires, ce serait non seulement chaque champ du savoir qui pourrait y gagner, mais avant tout chaque élève qui arriverait à mieux comprendre les liens qui existent entre tous les apprentissages qu'il réalise» (CSE, 1982) Il recommande alors «que l'interdisciplinarité, ou l'intégration des matières, devienne

un axe du développement pédagogique des prochaines années, tant pour le ministère de l'Éducation que pour les commissions scolaires» (CSE, 1982)

Le programme actuel, mis en œuvre au début des années 2000, fait de l'interdisciplinarité une de ses orientations principales. Les liens entre les mathématiques (M) et les sciences et la technologie (ST) y sont fortement encouragés. Ces deux champs de disciplines ont même été regroupés dans un même domaine d'apprentissage : le Domaine de la mathématique, de la science et de la technologie. Selon les concepteurs de ce programme :

« Le regroupement des disciplines par domaines représente un pas vers le décloisonnement des matières scolaires, en ce sens qu'il permet de les situer par rapport à des domaines de référence et incite l'enseignant à concevoir sa discipline comme une partie intégrante d'une dimension importante de la formation de l'élève » (Gouvernement du Québec, 2004, p. 15).

Dans le texte présentant le programme de mathématiques au premier cycle du secondaire, on peut lire :

« *Les deux disciplines, chacune à leur façon, permettent (…) d'appréhender, d'apprécier, de décrire, de conjecturer, d'investiguer, de raisonner, d'expliquer, de résoudre, de concevoir, de transformer et d'anticiper. Elles ont des préoccupations communes, par exemple :*

- adopter un point de vue mathématique, scientifique ou technologique au regard de différentes situations ou de différents phénomènes;

- enrichir sa culture mathématique, scientifique et technologique;

- saisir les répercussions de ce domaine sur l'individu, la société et l'environnement » (Gouvernement du Québec, 2004, p. 227).

En somme, le recours à des approches interdisciplinaires dans l'enseignement entre M et ST est une injonction institutionnelle forte au Québec.

L'opérationnalisation de cette injonction pose des défis aux enseignants ainsi qu'aux concepteurs de manuels scolaires.

III. ANCRAGE DE L'INTERDISCIPLINARITE DANS L'APPROCHE PAR COMPETENCES

1. Faïza Chellougui

La conception des programmes selon l'APC est un vaste projet de recherche, de formation et d'expérimentation qui vise par des moyens pédagogiques appropriés, à améliorer la qualité de l'enseignement et le rendement interne du système éducatif et son efficience, ainsi que l'équité dans les institutions d'enseignement en vue d'éliminer les disparités dégagées par l'évaluation et par suite les taux de réussite. Mais c'est surtout au niveau des pratiques pédagogiques que ces programmes tentent d'agir, et ce en :

- diminuant les échecs abusifs dus à une évaluation mal conçue ;

- consacrant plus de temps aux apprentissages fondamentaux, c.-à-d. l'acquisition des compétences de base grâce auxquelles les élèves peuvent poursuivre normalement leurs études dans les niveaux ou cycles suivants ;

- procédant régulièrement à des opérations de diagnostic et remédiation qui visent à agir à temps sur les difficultés liées aux apprentissages de base ;

- insérant régulièrement dans l'apprentissage des activités d'intégration.

Depuis 1999, l'APC implique la réorganisation du premier cycle de l'enseignement de base en trois degrés de deux ans, constituant chacun une unité finalisée qui présente un itinéraire cohérent favorisant l'acquisition par les élèves d'un ensemble intégré de compétences concourant, en fin de parcours, à la réalisation de l'objectif terminal d'intégration du degré (MEF, 2008). Ce mode d'organisation permet aux élèves de parcourir chaque degré sans rupture et à des vitesses différentes. Il présente le grand avantage de faire du temps un allié dans le processus d'acquisition en adaptant les contraintes des apprentissages aux rythmes de travail différents d'un apprenant à l'autre.

Si on prend le point de vue des enseignants sur l'APC, leurs rares appréciations positives portent seulement sur la conception générale de l'APC. Ils éprouvent une fascination pour le modèle d'enseignement-apprentissage que représente cette approche. Ils apprécient en outre un aspect relevant de la vie scolaire, qui est un élément important de modernisation de l'école : il s'agit de l'organisation, de la collaboration que permet le travail en équipe qui s'est développé grâce à cette réforme. Ce qui est déploré par contre, ce sont les difficultés d'application de la réforme, la charge de travail trop importante et les exigences trop grandes de l'évaluation formative et de la remédiation, en termes d'efforts et de recherche de supports d'activités permettant d'analyser les erreurs et d'y remédier. Ils questionnent la formation qui est censée avoir installé les compétences nécessaires pour assumer pleinement l'application de l'approche et la charge de travail trop grande.

L'APC s'est avant tout construite sur le rejet de la pédagogie par objectifs (PPO) et autour de l'objectif de résolution du problème cuisant de l'échec scolaire. Elle s'affiche dans les textes officiels comme une méthode articulant le processus d'enseignement-apprentissage autour d'un noyau de compétences relatives à des domaines généraux de formation. Le pilotage institutionnel et technique a été plus ou moins structuré et a pâti, dans certains cas, des problèmes de légitimité des institutions responsabilisées. D'autant plus que la différence entre l'APC et la PPO n'est pas clairement établie lors des formations, ce qui provoque de grandes confusions.

Les innovations pédagogiques qui constituent le cœur de ce nouveau modèle d'enseignement-apprentissage sont liées à la notion d'intégration, autour de la compétence, de la mobilisation des savoirs et des savoir-faire pour résoudre des situations d'intégration significatives. Là est l'apport nouveau et essentiel de l'APC. Mais celle-ci fait aussi appel à d'autres pratiques qui sont plus ou moins installées : l'évaluation formative, l'analyse et la remédiation des erreurs ainsi que la pédagogie différenciée. En Tunisie, ces innovations ont été introduites par des réformes antérieures à l'APC. On trouve ainsi des traces de ces pratiques dans des programmes antérieurs à l'APC, mais qui sont restés inachevés dans leur généralisation. Leur réintroduction à la faveur de l'implantation de l'APC fait qu'elles paraissent inhérentes à ce type de curriculum.

Pour atteindre ces objectifs bien identifiés à la lumière d'une approche prospective qui n'ignore ni les expériences, ni les acquis du passé, la Tunisie doit entreprendre la rénovation de l'enseignement et du système éducatif dans son intégralité, du préscolaire à l'amphithéâtre universitaire, en passant par les instituts de recherche, les laboratoires et les technopoles. Il faut accorder également un très grand intérêt à la formation professionnelle, dont la valorisation s'impose comme l'une des clés de la réussite tant pour l'économie que pour la promotion sociale.

2. Judith Sadja Njomgang

L'évaluation par compétences porte très souvent sur des problèmes centrés sur les objets d'enseignement en mathématiques; il s'agit pour l'élève de modéliser une situation de vie et faire des applications (au sens de Bloom) des connaissances acquises en cours ; c'est ce qui est généralement appelé *situation d'intégration*.

Le processus de modélisation passe par un traitement préalable de l'énoncé du problème et représente une difficulté majeure chez les apprenants. Dans la plupart des situations auxquelles ils sont soumis en mathématiques, les élèves doivent résoudre des problèmes de mathématiques sans avoir besoin de convoquer des connaissances dans d'autres disciplines.

En ce qui concerne l'utilisation des mathématiques dans d'autres disciplines, on trouve des mathématiques pour les problèmes de physique dans les cours donnés dans l'enseignement supérieur mais ce n'est pas présent explicitement au secondaire ; on trouve aussi des mathématiques en biologie et en géographie mais là encore l'aspect mathématique dans les activités n'est pas mis en évidence;

Toutefois, certains problèmes de mathématiques sont « habillés » en des problèmes dans d'autres disciplines, ce qui pourrait donner l'impression de travailler dans plusieurs disciplines à la fois.

Cet état des lieux montre bien que les enseignants n'ont pas été préparés à affronter cette nouvelle pratique.

3. Ahmed Semri

On peut décrire en trois catégories les éléments constitutifs des nouveaux programmes :

- Les outils proposés aux enseignants : le référentiel, le programme et les manuels.

- Les concepts qui président à la réforme des programmes : la compétence transversale, la compétence terminale, la situation d'intégration, la situation d'apprentissage, la compétence disciplinaire.

- La structure commune aux programmes des différentes disciplines.

En juillet 2004 a eu lieu à Alger une rencontre régionale intitulée « *Approche par Compétences et Développement des Curricula : Méthodologie comparée au niveau du Maghreb* ». Lors de cette rencontre qui rentrait dans le cadre du projet PARE, un constat a été établi sur une prise en compte insuffisante des nécessités liées à l'évaluation des acquis :

« *Certes, des propositions intéressantes en matière de situations d'apprentissage sont présentes dans les programmes, mais peu de réflexion est consacrée à la finalité poursuivie par les apprentissages, en lien avec un profil explicite à atteindre chez l'élève* » (Roegiers, 2006).

Il est relevé le manque de précision du profil attendu par les élèves et par là même le manque d'activités appropriées visant à mettre en place ce profil et à vérifier s'il est installé. Dans les disciplines scientifiques, il y a peu de place pour la question « qu'est-ce que l'élève va faire de tout ce qu'il acquiert ? », et l'intégration des acquis arrive tard dans le processus.

Cette difficulté trouve également son origine dans la manière dont sont rédigés et formulés les objectifs et les compétences : pour parler de ce que doit faire l'élève, les programmes mentionnent des aspects à la fois généraux et macro (compétences transversales), et des aspects opérationnels et micro (compétences disciplinaires, compétences de base), mais pas

des choses à la fois macro et opérationnelles. Il y a peu de place réservée à la question suivante : « qu'est-ce qui est significatif pour l'élève ? ».

Ainsi, on est souvent dans une démarche académique et scolaire. Alors que le discours préconise une centration sur l'apprenant, la porte d'entrée principale reste, néanmoins, celle des contenus ; les savoirs apparaissent souvent comme une fin en soi, et non comme des ressources pour agir ; les contenus déterminent encore souvent les compétences : connaître, classer, expliquer pourquoi…; de même, la préoccupation liée à la quantité des acquis reste encore présente, malgré une préoccupation affichée de qualité au niveau de ces acquis.

On peut dire que, dans les intentions, figure, certes, une volonté de mobiliser des savoirs dans des situations complexes, en particulier dans celles de la vie quotidienne, mais ces déclarations se limitent souvent à leur simple expression au niveau du discours.

Des propositions d'amélioration issues de l'analyse des programmes ont été formulées préconisant de :

- Préciser les profils de sortie ;

- Harmoniser les concepts utilisés ;

- Mieux articuler les apprentissages et l'évaluation.

L'Algérie s'apprête à intégrer le système d'évaluation PISA, la nouvelle politique du Ministère de l'éducation nationale ayant pour objectif de promouvoir une éducation mathématique (*ie* : capacité à mettre en œuvre les notions utilisées en mathématiques pour la modélisation et résolution de problèmes complexes de la vie).

IV. PLURIDISCIPLINARITE VERSUS INTERDISCIPLINARITE

1. Maggy Schneider

Dans cette section, il s'agit de revenir sur les distinctions entre diverses modalités de mise en réseau de plusieurs disciplines. Il semble en effet qu'une propreté conceptuelle est de mise dès lors qu'il s'agit d'évaluer la mise en œuvre de telles modalités. Elle permet en tout cas de montrer que le discours qui encourage les pratiques enseignantes labellisées « interdisciplinarité » semble réduit à sa dimension idéologique, incontournable et souhaitable en soi, et que, de ce fait, il recouvre en réalité une grande variabilité de pratiques et entretient, en même temps, un certain nombre d'illusions.

Une référence qui demeure importante en Belgique est l'ouvrage de Maingain et Dufour (2002). La première intention des auteurs est de définir proprement les diverses formes de mise en réseau de plusieurs disciplines, ce qui n'est pas fait dans les textes officiels. Nous reprennons ici leur structuration qui est éclairante. Ils regroupent la multidisciplinarité et la pluridisciplinarité qui partagent un trait commun, à savoir la simple *juxtaposition* d'apports de diverses disciplines, l'une après avoir préalablement précisé des objectifs communs et l'autre non. La transdisciplinarité, elle, concerne des transferts de compétences ou de concepts (nomades) d'une discipline à l'autre.

Pour ces auteurs, l'interdisciplinarité au sens strict constitue une « pratique intégratrice » d'apports de diverses disciplines en vue de traiter certains problèmes dans leur particularité. Il s'agit donc d'une approche systémique, « un des paradigmes cognitifs dominants dans certains secteurs de la recherche et dans certains lieux de décision » soulignent les auteurs, pour pallier les limites du compartimentage disciplinaire des savoirs. Dans cette acception, l'interdisciplinarité suppose une problématique telle que la solarisation

d'un village africain ou encore le rapport animalité/humanité ainsi qu'une méthodologie, inspirée, quant à elle, de grilles de lecture sociologiques et qui consiste à :

- Problématiser la démarche en posant la question " De quoi s'agit-il ? " et préciser le projet : contextes, finalités, destinataires, produit.

- Faire émerger le cliché : ce dont on tient compte spontanément.

- Etablir le panorama : ce dont on pourrait tenir compte : acteurs, contraintes, enjeux, tensions et controverses, scénarios envisageables.

- Clôturer la démarche : sélectionner les aspects dont on tiendra compte, les boîtes noires à ouvrir (ou à laisser fermées), hiérarchiser les données.

Cette méthodologie vise une représentation adéquate pour l'action, un modèle théorique, ce qui fait que, selon les auteurs, l'interdisciplinarité ne relève pas de la pédagogie du projet centrée, elle, sur une action à accomplir, un projet pratique.

Cette vision de l'interdisciplinarité est cependant assez unilatérale en ce sens qu'elle néglige l'intérêt qu'il y aurait à rapprocher des problèmes interdisciplinaires parents comme ceux liés aux biens de consommation ou les problèmes de santé afin de dégager des invariants et des spécificités dans leur traitement. Une telle approche a conduit d'ailleurs à la constitution de nouvelles disciplines comme la biochimie et la bioinformatique.

Dans le cadre d'un forum coanimé avec Yves Matheron[3] sur le thème de l'interdisciplinarité lors d'une Ecole d'Eté de didactique, cet ouvrage a fait l'objet d'un examen approfondi. Il en est ressorti qu'il y manquait l'absence de questions susceptibles d'être problématisées par les élèves eux-mêmes et dont la problématisation suppose une réelle co-disciplinarité. En l'absence d'un véritable cadrage de type didactique, on peut craindre que les travaux d'interdisciplinarité inspirés de cet ouvrage se traduisent par du " recopiage culturel " comme dirait Chevallard tant de la part des élèves que, plus partiellement, du côté des enseignants qui préfèrent souvent laisser aux collègues le soin " d'ouvrir " la boîte noire disciplinaire qui ne les concerne pas.

Les travaux proposés aux futurs enseignants n'échappent pas à ces travers même s'ils ne manquent pas d'intérêt en raison d'échanges permettant aux étudiants de mieux comprendre leurs univers disciplinaires respectifs ainsi que les didactiques associées. Mais, loin d'une démarche d'interdisciplinarité, ces travaux correspondent à une juxtaposition de discours « autour » du thème retenu. On est plutôt dans une pédagogie du projet qui est moins le projet d'interdisciplinarité lui-même que le projet d'un dispositif d'enseignement. Ces travaux sont en effet organisés autour d'un projet d'enseignement potentiel mais les précisions sur cet enseignement concernent tout au plus la programmation dans le temps, au mieux une « analyse-matière », mais rien n'y concerne la topogenèse ou la mésogenèse, à savoir qui fait quoi et comment créer le milieu permettant la dévolution de la question aux élèves ?

Ces éléments me poussent à penser que des discours et les dispositifs sur l'interdisciplinarité relèvent surtout de « l'idéologie » en Belgique francophone : on rêve davantage l'interdisciplinarité de manière idéalisée qu'on ne la pratique vraiment. Du moins pour les dispositifs qui impliquent les mathématiques d'une manière ou d'une autre. On manque en tout cas d'un cadrage plus pointu. Je dois cependant conclure cela avec prudence car je n'ai pas forcément connaissance de tout ce qui se pratique de ce point de vue. En ce qui concerne l'interdisciplinarité dans les établissements scolaires, je manque d'informations

[3] Matheron Yves et Schneider Maggy (2005). L'interdisciplinarité à l'étude. *Actes de la XIIème « Ecole d'été de didactique des mathématiques* ». Corps, Août 2003.

récentes malgré une petite enquête qui a récolté peu d'échos … ce qui est déjà significatif en soi. Cependant, je reviens, dans la section VI, sur deux modalités « d'interdisciplinarité » que j'ai pu observer par ailleurs.

V. PRATIQUES DES ENSEIGNANTS, MANUELS ET ACTIVITES EFFECTIVES DES ELEVES

1. Mangary Ka

Nous revenons tout d'abord sur les programmes. Nous avons procédé à une analyse documentaire des programmes prescrits et des manuels en usage dans les classes. Nous avons scruté aussi les programmes implantés et la formation des enseignants grâce à un questionnaire distribué à des professeurs, des inspecteurs de spécialités et des formateurs de la FASTEF tous membres de la commission nationale d'élaboration des programmes de mathématiques du moyen et secondaire général.

Au niveau de l'enseignement moyen et secondaire général, nous avons étudié les programmes de 1972, les programmes de 1998 repris en 2000 puis en 2006. Mais nous ne notons aucune prise en compte de l'interdisciplinarité, ni dans les instructions officielles, ni dans les recommandations et encore moins dans les contenus de matières présentées. Dans tous ces programmes, on note une absence d'indications aux niveaux des instructions officielles portant sur l'interdisciplinarité, sauf au niveau du programme de 2000 qui comporte une brève recommandation dans ce sens, dans sa préface et tout s'arrête là.

À l'école élémentaire (primaire) les programmes connus sont les programmes de 1972 présentés selon l'approche par contenus, les programmes dits « pilotes » de 1987, présentés par objectifs, qui insistent sur la nécessité de donner du sens aux apprentissages à travers des activités productives et enfin les programmes de 1996 repris en 2003. L'objectif majeur visé dans l'élaboration de ces deux derniers programmes, présentés selon l'approche par compétences, est de faire en sorte que l'apprenant soit en mesure de mobiliser plusieurs ressources dans des contextes significatifs afin de résoudre des situations-problèmes complexes. Ces programmes prônent le décloisonnement des savoirs au profit du développement de compétences, mais en définitive les disciplines subsistent et la mathématique est même compartimentée en activités numériques, activités géométriques, activités de mesure et activités de résolution de problèmes, dans le souci de faciliter leur appropriation par les corps émergeants, majoritaires dans le système. Je suis bien placé pour le dire car étant membre du comité de rédaction de tous les programmes depuis 1996.

Aucune prise en compte de l'interdisciplinarité n'est donc notée, aussi bien dans la présentation des contenus, des objectifs et des compétences, encore moins au niveau des commentaires (recommandations). Nous n'avons pas non plus pris connaissance d'un dispositif ou d'une structure mis en place pour travailler sur l'interdisciplinarité en mathématiques.

Ce triste sort réservé à l'interdisciplinarité est-il dû à l'ignorance des conditions de leur prise en compte, de leurs modalités de mise en œuvre ou à une mauvaise perception de l'interdisciplinarité ? Ceci mérite réflexion.

Dans les manuels, l'autre discipline n'est convoquée que dans les exercices, dans le but de présenter à l'apprenant un contexte qui a du sens. A part le contexte pris comme *habitacle*, tout le travail didactique demeure et reste dans le domaine mathématique. L'étude précise des deux manuels en usage dans les classes donne une quasi absence de traces d'interdisciplinarité. Au niveau du livre « Collection interafricaine de mathématiques

(CIAM), sur 250 leçons, 7 seulement sont introduites à partir d'une autre discipline. Pour ce qui concerne la collection « Excellence » actuellement en vigueur, il s'agit de 2 leçons sur les 360 qu'elle comporte. Au niveau du primaire dont les programmes sont rédigés selon l'approche par compétences, on ne note donc aucune trace d'interdisciplinarité.

Au niveau des enseignants, 75% de ceux interrogés disent ne pas appliquer l'interdisciplinarité en classe et 74% pensent que l'interdisciplinarité n'est pas prise en compte dans les programmes sénégalais. Une enquête auprès des enseignants membres de la commission nationale, des professeurs des lycées d'application montre aussi leur ignorance de la notion d'interdisciplinarité. La conception dominante chez les enseignants recoupe celle identifiée dans les manuels : l'interdisciplinarité en mathématique sert à donner du sens aux concepts et non à une construction solide de ceux-ci. Ils ignorent aussi l'importance de l'interdisciplinarité dans la construction d'une démarche dans l'étude d'un problème (pluralité des points de vue, etc…).

2. Ahmed Semri

À l'issue de la réforme du système éducatif, il a été constaté que les pratiques des enseignants ont connu peu pour ne pas dire aucune évolution. Ceci est dû principalement à deux facteurs :

- Une formation insuffisante et/ou inadaptée ;

- Le programme à terminer comme principal objectif.

« Une contrainte majeure réside dans la pérennisation des pratiques et des procédés qui ont prévalu jusqu'ici. Ce constat interpelle les décideurs et les encadreurs pédagogiques et invite à plus de vigilance pour éviter que, dans le champ de la pratique, l'approche par les compétences ne soit un habillage de l'approche par les contenus disciplinaires » (Brahim Abbassi, 2006).

Pour ce qui est des manuels, on remarque une nette évolution dans la présence de situations d'apprentissage et d'outils de mathématiques dans plusieurs disciplines (physique, sciences naturelles, géographie, dessin…). Par contre, le contenu de ces manuels pêche par la quasi absence de problèmes complexes (situations d'intégration).

« Les séances d'intégration instituées dans le nouveau dispositif d'évaluation des apprentissages pour entraîner les élèves à mobiliser et à intégrer les ressources précédemment acquises dans des situations-problèmes complexes sont souvent remplacées par des cours, des séances de remédiation ou de résolution d'exercices d'application. Cette difficile transition d'une logique des contenus à une logique des situations trouve certainement son explication dans le rapport de l'enseignant à l'évaluation » (Brahim Abbassi, 2006).

Il est important de signaler un phénomène social majeur qui s'est installé dans les pratiques du système éducatif en Algérie qui est celui des cours particuliers. Malgré quelques tentatives entreprises par la tutelle pour son éradication, qui sont restées vaines, ce phénomène a pris une telle ampleur que les classes d'examen du Baccalauréat sont désertées tout au long de l'année scolaire.

« Les enseignants du secondaire n'ont aucune information sur le système LMD mis en place à l'Université. De plus, leur préoccupation majeure réside en la préparation de leurs élèves non pas aux études supérieures mais à l'épreuve du baccalauréat » (Ahmed Semri, 2009).

Nous terminons par noter que dans le cas de l'enseignement supérieur et aussi paradoxal que cela puisse paraître, car sans injonction aucune, l'université se trouve être le lieu où peut être la collaboration entre les mathématiques et les autres disciplines en science et technologie est la plus présente. Ceci est dû essentiellement à la faveur des nouvelles offres de formation initiées par des équipes pédagogiques multidisciplinaires.

3. Hassane Squalli

Nous présentons ici brièvement quelques résultats d'une analyse du potentiel interdisciplinaire de situations d'apprentissage proposées dans trois manuels scolaires québécois de mathématiques du premier cycle du secondaire (7^e et 8^e années) (Squalli et Falappa, 2011) ainsi qu'une analyse des pratiques déclarées.

Les manuels concernés sont approuvés par le ministère d'éducation et sont *Perspective* (Guay et al., 2005), *Panoramath* (Cadieux et al., 2005) et *À vos maths !* (Coupal, 2005). L'analyse a porté sur le discours sur l'interdisciplinarité entre M et ST dans les guides pédagogiques de ces manuels ainsi que sur les propositions *explicites* d'interdisciplinarité entre M et ST dans les manuels et guides pédagogiques.

Il ressort de la première analyse que l'interdisciplinarité entre M et ST n'est pas présentée de manière explicite, mais implicitement avec l'idée générale d'intégration des mathématiques avec les autres disciplines. Les justifications données sont d'ordre général et concernent uniquement l'interdisciplinarité entre les mathématiques et les autres disciplines. On note une absence de justification de l'interdisciplinarité entre M et ST.

Les trois manuels consacrent une rubrique annonçant les propositions interdisciplinaires. Le nombre de propositions de pistes interdisciplinaires entre M et ST est relativement faible par rapport à celles entre M et les autres disciplines. Le manuel À vos Maths! propose 35 suggestions, 34% (12) d'entre elles concernent des liens avec les ST. Pour les manuels *Perspectives* et *Panoramath* ces pourcentages sont de 13 % (8 sur 60) et 24% (33 sur 136) respectivement.

Pour qualifier le caractère interdisciplinaire des propositions interdisciplinaires entre M et ST, nous avons analysé les tâches demandées aux élèves pour dégager le niveau d'imbrication des connaissances en M et en ST pour la résolution de la tâche. Nous avons retenu les trois niveaux suivants :

1) Essentielle, quand la résolution de la tâche nécessite une imbrication de connaissances en M et en ST. Exemples: démarche expérimentale, modélisation ;

2) Pertinent non essentiel, le contexte de ST soutient le raisonnement, sans une imbrication de connaissances de M et de ST. Exemple.: le contexte de ST sert à générer des données et à donner une signification aux questions ;

3) Non pertinent, le contexte de ST n'a aucune influence sur le raisonnement pour résoudre la tâche ou que la tâche est purement en ST. Exemple : recueillir des informations scientifiques ou technologiques à partir d'Internet.

Le tableau suivant présente les résultats de cette analyse.

	Essentiel	**Pertinent non essentiel**	**Non pertinent**	**Total**
Perspectives	3 (37.5%)	5 (62.5%)	0	8 (100%)

À vos Maths !	6 (50 %)	6 (50 %)	0	12 (100%)
Panoramath	5 (15%)	16 (49%)	12 (36%)	33 (100%)

Tableau 3 : niveaux d'imbrication des connaissances en M et ST des propositions interdisciplinaires entre M et ST des trois manuels

Nous concluons que ces trois manuels réalisent une faible opérationnalisation de l'orientation du recours à des approches interdisciplinaires entre M et ST. Les propositions interdisciplinaires en M et ST sont souvent sous forme de pistes pour les enseignants. Elles contiennent peu ou pas d'informations pour les enseignants sur les phénomènes scientifiques en jeu dans les situations. Il semble que les concepteurs des manuels de M et ceux de ST ont travaillé de manière indépendante les uns des autres.

Au niveau des pratiques déclarées par les enseignants, nous présentons quelques résultats d'une enquête réalisée en 2008 par questionnaires auprès d'enseignants de ST et de M au secondaire. Le rapport détaillé de cette enquête est présenté dans Hasni, A.; Lenoir, Y, Larose, F. et Squalli, H. (2010). 245 enseignants ont participé à cette enquête.

Les enseignants interrogés sont dans leur majorité en faveur des liens disciplinaires (interdisciplinarité au sens large) : 90,1 % sont d'accord à dire que le recours à des liens interdisciplinaires à l'école est « assez important » ou « très important ». Ce pourcentage passe à 94,7% en ce qui concerne les liens interdisciplinaires entre M et ST. Il est de 69,6% en ce qui concerne les liens interdisciplinaires entre M et des disciplines scolaires autres que les ST. Ces résultats sont en cohérence avec les orientations institutionnelles. Le tableau suivant présente les principales justifications que donnent les enseignants à l'importance du recours à des liens interdisciplinaires.

Catégories	**N et %**
Ancrer les apprentissages dans la vie (dans le concret) et leur donner du sens	54 (25,7 %)
Favoriser l'application des savoirs dans la vie ou dans d'autres contextes ou disciplines (le transfert, l'utilité, etc.)	52 (24,8 %)
Permettre aux élèves de faire ou de constater les liens entre les disciplines	36 (17,1 %)
Favoriser la motivation et augmenter l'intérêt des élèves	26 (12,4 %)
Mieux gérer la dimension organisationnelle du curriculum - Éviter le chevauchement et le dédoublement - Gagner du temps	 25 (11,9 %) 9 (4,3 %)
Favoriser une meilleure compréhension des contenus (concepts, notions, etc.)	22 (10,5 %)
Favoriser la collaboration et le travail d'équipe	16 (7,6 %)
Réduire le cloisonnement (décloisonnement, décompartimentation, continuité, etc.)	15 (7,1 %)
Mieux connaître les élèves et s'informer de leur progression (meilleur encadrement	10 (4,8 %)
Développer (ou évaluer) des compétences transversales (et disciplinaires)	9 (4,3 %)

Tableau 4 : principales justifications à l'interdisciplinarité déclarées par les enseignants

Cependant, plus de la moitié (55,5%) de ces enseignants estiment faible à très faible leur degré de compétence à mettre en œuvre l'interdisciplinarité dans leur enseignement d'une

part, et d'autre part, 71,6% d'entre eux s'accorde à dire que leur recours à des liens interdisciplinaires dans l'enseignement en général est faible à très faible.

Il ressort de ces résultats que le recours à des approches interdisciplinaires dans l'enseignement des mathématiques au secondaire semble être une injonction institutionnelle forte tant pour les concepteurs des manuels scolaires que pour les enseignants. Les enseignants ne se sentent pas bien préparés pour mettre en œuvre dans leur pratique un enseignement interdisciplinaire. Ce besoin a provoqué au Québec l'émergence de plusieurs initiatives locales de collaboration de formation continue des enseignants, pilotées par des conseillers pédagogiques et des didacticiens des mathématiques. Ne pouvant en faire un inventaire exhaustif, citons deux exemples de telles initiatives.

La première est celle de l'accompagnement de groupes d'enseignants offerts par le centre de recherche sur l'enseignement et l'apprentissage des sciences et technologies (CREAS, https://www.usherbrooke.ca/creas/) en collaboration avec des conseillers pédagogiques de plusieurs commissions scolaires. Ce modèle d'accompagnement est basé sur l'analyse des pratiques d'enseignement enregistrées en classe. Un groupe de didacticiens de M et de ST ainsi que des chercheurs en sciences et en génie accompagnent les enseignants dans la conception, la planification et l'analyse des expérimentations en classe de situations d'apprentissages interdisciplinaires entre M et ST. Ce projet est décrit dans (Hasni et Squalli, 2011).

Le second exemple est celui du partenariat établi depuis 2008 entre trois commissions scolaires de la région de Montréal, l'École de technologie supérieure (ÉTS) et quelques cégeps des environs. Ce partenariat a donné lieu à un programme de recherche-développement collaboratif, regroupant des didacticiens des mathématiques, des enseignants et conseillers pédagogiques au secondaire et maîtres d'enseignement à l'ÉTS, et visant à intégrer la modélisation mathématique et les applications des contenus enseignés au secondaire. Des équipes multidisciplinaires et multi-niveaux (enseignants au secondaire, au collégial et à l'université), conçoivent et expérimentes des situations d'apprentissages amenant les élèves à vivre une approche appliquée des mathématiques. Une fois validées, ces situations sont déposées sur un site pour leur diffusion auprès des enseignants (http://projetsmathematiquests.com/). Une description plus détaillée de ce projet peut être trouvée dans (Caron et Savard, 2012).

VI. APPUI SUR LA RECHERCHE, EVOLUTION DES PRATIQUES

1. Faïza Chellougui

En accord avec Abdeljaouad (2003), il ne suffit pas de connaître les mathématiques pour pouvoir les enseigner; il faut nécessairement prévoir une formation complémentaire permettant d'exposer le futur enseignant de nouvelles connaissances, des manières autres de réfléchir et d'analyser, des observations et des questionnements, tout cela menant à une meilleure compréhension des processus complexes d'enseignement des mathématiques.

L'hypothèse dominante dans les universités considère que la meilleure formation du professeur du secondaire est celle centrée sur l'acquisition de connaissances en mathématiques pures : l'étudiant, devenu professeur, pouvant aisément effectuer la synthèse de ses connaissances mathématiques pour les utiliser dans ses enseignements en classe.

Les professeurs de mathématiques des collèges et des lycées sont formés dans les facultés des sciences et reçoivent une formation académique de très haut niveau les habilitant à poursuivre une carrière à l'Université ou dans la recherche scientifique. Elle ne prend pas en

compte le fait qu'un certain nombre, sinon la plupart, des diplômés des facultés des sciences deviendront des professeurs de mathématiques et que pour cela ils ont besoin d'un apprentissage particulier.

La plupart des contenus disciplinaires figurant dans les programmes de mathématiques des collèges et lycées (arithmétique ; géométrie plane, géométrie des transformations, géométrie de l'espace, géométrie des coniques ; probabilité finies, statistiques finies) sont, en général, absents des cursus universitaires. La faculté des sciences de Bizerte, qui a gardé certaines traditions curriculaires de l'Ecole Normale Supérieure de Bizerte[4], continue exceptionnellement à offrir en 4ème année un cours de synthèse dont la vocation est d'évoquer les contenus disciplinaires enseignés dans le secondaire jusqu'à 2008 installation de la nouvelle réforme LMD. A noter aussi, que récemment, un module optionnel de géométrie a été mis en place à la faculté des sciences de Bizerte pour les étudiants de licence fondamentale des mathématiques. L'Institut Supérieur de l'Education et de la Formation Continue est la seule institution universitaire tunisienne offrant aux futurs titulaires de la maîtrise de mathématiques un cursus intégrant à la fois des contenus disciplinaires spécialisés et des contenus spécifiques à l'enseignement des mathématiques dans les lycées et collèges.

En 2012, le ministère de l'éducation nationale a mis les premières bases d'une nouvelle réforme du système éducatif qui présente une composante importante du nouveau projet social et qui touche plusieurs aspects : les manuels scolaires, la révision des approches pédagogiques ainsi que l'évaluation des compétences (Bouhouch & Akrout, 2016). Le ministère s'est également attelé à plusieurs aspects importants de la vie scolaire ; à savoir la protection des établissements, la recherche dans les sciences de l'éducation et l'enseignement des valeurs de la citoyenneté, des droits de l'homme, du travail ainsi que la tolérance. Ces impératifs mettent le système éducatif dans l'obligation de procéder à la mise à niveau de toutes ses composantes : institutionnelles, pédagogiques, humaines et matérielles.

En outre, il est très important que la méthode d'enseignement change par la mise en œuvre d'une approche méthodologique, didactique et pédagogique qui favorise le développement des capacités intellectuelles des élèves et leur autonomie, parallèlement à l'acquisition de compétences pertinentes, solides et durables. Cela implique l'abandon définitif de méthodes et de pratiques, encore en usage dans nos institutions éducatives, qui poussent à l'accumulation des connaissances, lesquelles sont rapidement oubliées parce qu'elles sont peu susceptibles d'être exploitées à bon escient, au moment opportun, dans des situations authentiques de communication ou de résolution de problèmes.

En 2017 et en collaboration avec le ministère de l'éducation nationale, le ministère de l'enseignement supérieur a mis en place un projet d'un master professionnel pour le métier de l'enseignement et de l'éducation. Ce master s'insère dans une perspective de consolider une formation continue et initiale des futurs enseignants. Le parcours de ce master propose d'approfondir et d'actualiser des connaissances mathématiques et didactiques et de permettre de constituer un milieu favorable pour développer des connaissances disciplinaires indispensables à tout futur d'enseignant, compte tenu du fait qu'il n'existe pas de formation diplômante permettant de former à cette profession. Ainsi, ce master a pour objectif d'introduire les étudiants aux cadres théoriques qui structurent la didactique des mathématiques, aux principaux résultats obtenus dans ce domaine, et de mettre en place des outils d'analyse des phénomènes d'enseignement, d'apprentissage et de formation, permettant d'identifier régularités et variabilités et d'orienter l'action didactique. Il s'agit aussi d'initier

[4] L'Ecole Normale Supérieure de Bizerte s'est transformée en Faculté des Sciences de Bizerte en 1990.

les étudiants aux méthodologies propres à la recherche dans ce domaine. Jusqu'à nos jours, le texte de loi relatif à l'étude des travaux de ce projet n'est pas encore mis en place.

2. Maggy Schneider

De nos observations de terrain et de mon enquête, nous relevons deux types assez contrastés de mise en réseau d'enseignants de diverses disciplines : d'abord, l'organisation, par la direction d'une école, d'une « semaine » dite d'interdisciplinarité où tous les enseignants font travailler les élèves sur des sujets proches de ceux imaginés dans les séminaires d'interdisciplinarité des formations initiales d'enseignants. Nos observations sont que les mathématiques y sont « instrumentalisées » d'une manière assez peu fonctionnelle, parfois réduites à des descriptions statistiques sélectionnées sans esprit critique car elles vont dans le sens de la thèse défendue. En outre, l'existence de cette semaine de travail commun n'a souvent aucune incidence sur les cours de mathématiques eux-mêmes. Au contraire, elle peut même donner un « alibi » à des enseignants de mathématiques peu soucieux de revoir leur cours par ailleurs.

Le deuxième type de collaboration relève de l'initiative personnelle d'enseignants (rarement plus de deux) qui font travailler de mêmes objets à leurs élèves communs. Les cas peuvent être variés : par exemple, un texte historique en physique ou en mathématiques que le professeur d'histoire situera dans son contexte historique. Ou encore, l'intérêt porté par certains (rares ?) professeurs de mathématiques des filières qualifiantes aux ateliers et aux futurs métiers de leurs élèves et qui traitent avec eux des thèmes tels que : l'application de la dérivée à la résistance des matériaux, le transfert de chaleur à travers une paroi, le choix d'un emplacement pour installer un salon de coiffure.

Cette dernière forme de solidarité interdisciplinaire peut exister entre deux disciplines « parentes » mais suppose, dans tous les cas une connivence entre deux personnes et des conditions qui la favorisent. L'exemple suivant est, à cet égard, très parlant. Il concerne une collaboration entre deux enseignants du niveau Lycée, l'un en physique et l'autre en mathématiques[5]. Le point de départ de leur collaboration a été leur engagement conjoint comme formateurs en interdisciplinarité dans le cadre d'un centre de formation continuée pour enseignants de sciences et de mathématiques. Cette expérience les a poussés à croiser leurs regards sur un même objet comme les fonctions trigonométriques et les mouvements harmoniques. Etant enseignants dans le même établissement et faisant classe dans les mêmes options, ils ont pu alors étendre leur collaboration de formateurs dans leurs classes communes, ce qui a abouti à un cours à deux voix ainsi qu'à une journée autour de la fonction exponentielle organisée à l'Université pour leurs élèves (accès à un laboratoire, exposé philosophique, …), avec l'accord « réservé » du Directeur de l'école.

Ce cas de figure est rare tant il suppose de circonstances favorables alors que sont mobilisées deux disciplines seulement et proches qui plus est. Mais il suggère la piste d'une forme de « solidarité interdisciplinaire » qui est avant tout un état d'esprit alimenté par une sensibilité épistémologique. Cette solidarité peut se traduire par des gestes assez « modestes » en apparence. Par exemple :

- Se poser des questions telles que « Comment utilise-t-on la fonction logarithmique dans le secteur de la construction et peut-on l'importer, sans plus, du cours de math ? » (De Witte, Moniteur pédagogique, Uliège).

[5] Respectivement Laurent Zanotto et Annick Looze, à l'époque tous deux enseignants au Collège St Louis de Namur.

- Remobiliser des connaissances de base comme les équations du premier degré, dans une école de commerce, « non par de simples rappels mais en [poussant les étudiants à] créer, manipuler et réfléchir sur les mathématiques à travers les lentilles de l'économie, remodelant la signification même de certains concepts mathématiques […]» (comme résumé par Job et Gantois, 2018).

On touche là bien sûr à une autre forme de co-disciplinarité que constituent des cours inspirés des « mathématiques mixtes » ainsi appelées depuis la classification faite par Bossut en 1784 des grands domaines des mathématiques partagés en mathématiques pures ou mixtes comme l'acoustique. Il existe aujourd'hui pas mal de recherches en didactique exploitant et/ou analysant la transposition de mathématiques mixtes tels que ceux menés par Artaud ou Bosch ou encore ceux d'Artigue sur la modélisation. Mes collaborateurs et moi-même avons développé des ingénieries longues faisant la part belle à la cinématique pour construire le calcul infinitésimal. Par exemple, nous avons montré en quoi des considérations physiques aident à comprendre que, par exemple, le choix du radian permet de rendre le modèle sinusoïdal adaptable à tout mouvement harmonique non amorti. Mais nous avons aussi montré la nécessité de ménager ce que nous avons défini comme des organisations mathématiques de type « modélisation » (Schneider, 2008) supposant, la plupart du temps, de penser tout autrement la structuration du discours mathématique.

Au-delà de leurs différences, ces exemples illustrent une grande variabilité non seulement dans la gestion du temps, l'organisation des cours, le partage des responsabilités mais aussi en lien avec la teneur et la structuration des enseignements de mathématiques.

VII. FORMATION DES ENSEIGNANTS

1. Judith Sadja Njomgang

Les enseignants du primaire et du secondaire sont formés respectivement dans les écoles normales d'instituteurs de l'enseignement général et les écoles normales supérieures.

La formation initiale dans ces établissements, qui met l'accent sur les matières (Unités d'Enseignement à l'École Normale Supérieure) professionnelles (pédagogie, évaluation, les psy…) ne prend pas en compte l'interdisciplinarité. Par ailleurs, elle est très spécialisée, c'est-à-dire que l'étudiant en mathématiques ne fait que des mathématiques.

En formation continue, *dans la région de l'Adamaoua***,** les séminaires régionaux ont une session en plénière avec des enseignants de plusieurs disciplines suivie de sessions en ateliers, où quelques problèmes sont traités dans une perspective interdisciplinaire. Dans les autres régions, l'interdisciplinarité est pratiquement inexistante[6].

Une aide à l'implémentation de l'interdisciplinarité pourrait être le manuel scolaire dans ce sens qu'il contiendrait des activités dont le traitement permettrait de croiser plusieurs disciplines. Malheureusement, le cloisonnement des disciplines demeure.

Il est à noter que plusieurs manuels scolaires proposent encore une approche par les objectifs.

Ainsi, au Cameroun, l'interdisciplinarité rencontre beaucoup de problèmes dans sa mise en œuvre :

[6] Sources : inspecteurs pédagogiques et enseignants.

- Le cloisonnement des enseignements : on reste encore dans la pédagogie des disciplines. Un passage à la pédagogie des programmes pourrait casser les barrières entre les disciplines et entrainer cette fusion entre elles ;

- Une identité professionnelle construite sur la discipline : « je suis professeur de maths, je suis professeur de français… » ; il y a un refus implicite de penser à enseigner autrement que de rester dans « son domaine de compétence » ;

- L'individualisme régnant au sein de bon nombre de collèges et lycées ;

- Le coût cognitif et temporel de la mise sur pied d'activités interdisciplinaires ;

- La formation des élèves-professeurs qui reste centrée sur la discipline qu'ils vont enseigner. Cela cristallise cette idée de cloisonnement des disciplines;

- La formation à la gestion des activités interdisciplinaires dans la classe ou en para scolaire, qui ne s'improvise pas.

Nous présentons maintenant une expérience de lecture d'énoncés en mathématiques. L'objectif de cette expérience est d'apprendre aux élèves du secondaire à s'engager dans le traitement des problèmes en mathématiques. Les acteurs sont des enseignants de mathématiques et de français. Au niveau du contenu, il s'agit de travailler de façon croisée :

- Les synonymes, les contraires, l'identification des consignes, la reformulation des consignes, l'identification des éléments pertinents d'une consigne…

- La compréhension des théorèmes, de propriétés, savoir à quoi ils servent et à quel moment les utiliser ;

- La recherche des outils cognitifs mathématiques (définition, propriétés, théorèmes) pour le traitement d'une consigne ;

- Le traitement des consignes en mobilisant de façon efficace les outils, en les transformant si nécessaire ;

- La vérification des procédures et contrôle des résultats.

Nous travaillons dans une équipe composée de mathématiciens (didacticiens) et d'enseignants de français.

2. Mangary Ka

Le Sénégal regorge de structures de formation initiale et continue des enseignants du primaire et du moyen et secondaire général qui dépendent soit du ministère de l'éducation, soit des universités (FASTEF, Ex ENS). Il y a aussi les projets qui s'occupent de la formation spécifique des enseignants dans leurs domaines d'activité.

Actuellement, toutes les structures de formation du ministère sont regroupées dans un même site au niveau régional : les Centres Régionaux de Formation du Personnel de l'Education (CRFPE) sous le contrôle de la Direction de la Formation Continue (DFC).

L'Institut de Recherche pour l'Enseignement de la Mathématique, de la physique et de la technologie (IREMPT) dispose de trois équipes disciplinaires qui effectuent des recherches portant sur l'enseignement-apprentissage de ces disciplines. Il sert de tampon entre l'enseignement supérieur et les enseignants de l'élémentaire, du moyen et secondaire. L'IREMPT a entre autres missions, la production des ressources et la formation continue des enseignants.

La FASTEF a aussi pour missions : la recherche, la formation des professeurs des lycées et collèges, la formation des membres du corps de contrôle et de l'administration scolaire (inspecteurs de l'enseignement élémentaire et de spécialité), professeurs de lycées, professeurs de collèges bivalents : Maths-Sciences physiques ; Maths-SVT. L'université de Saint-Louis quant à elle, possède une UFR qui s'occupe des Sciences de l'Education de la formation et du sport.

Dans toutes ces structures, les conditions sont réunies pour la mise en œuvre de l'interdisciplinarité, mais malheureusement tel n'est pas le cas. Il en est de même pour les projets qui travaillent au renforcement de capacités des enseignants.

Or c'est au niveau de l'interdisciplinarité que la méthode devient plus intéressante et fonctionnelle.

En effet, on part d'une discipline considérée, on se demande ou on cherche à voir ce que les disciplines connexes apportent de plus en termes de connaissances, de manière d'appréhender les choses. Il en résulte un croisement fertile à la fois des démarches abordées et des résultats observés en vue de l'enrichissement des informations collectées et par conséquent, une compréhension plus complète, voire systémique, de l'objet étudié.

L'interdisciplinarité croise les démarches scientifiques de chaque discipline en vue d'étudier le même objet, mais dans une perspective plus globale. Certes, le chercheur demeure centré sur un objet d'étude en particulier en partant d'une discipline bien précise, mais sa distance critique sera plus pertinente, lorsqu'il aura intégré initialement les problématiques des autres disciplines mises à contribution.

Au terme de ce tour d'horizon, il s'avère que l'interdisciplinarité tarde à voir le jour au Sénégal. Cela peut s'expliquer par le fait que des études ont montré que le temps de la pédagogie (et de la didactique) est différent de celui des politiques. En effet, les politiques, sous la pression populaire, sont obligés de procéder à un changement des curricula et pour ce faire, ne donnent pas aux experts le temps nécessaire pour étudier les voies et moyens de penser des programmes et des démarches aptes à solutionner définitivement les problèmes évoqués. Ils se contentent de réformer les contenus sans toucher la structure profonde du système (Gilmer, 1971). Comme preuve de ce point de vue, au niveau du primaire, il était question de définir des compétences transversales, mais cela attend toujours, alors que le programme est généralisé depuis plus de 7 ans.

REFERENCES

Abassi B. (2006) Réforme de l'éducation et innovation pédagogique en Algérie, Le nouveau dispositif d'évaluation pédagogique : des fondements conceptuels aux implications dans les pratiques évaluatives. *ONPS-UNESCO*, 51-85.

Abdeljaouad M. (2003) *La formation des enseignants de mathématiques en Tunisie*, Miftah al-Hissab n°101, ATSM.

Bailly J.-M & Schils J. (1988) *Trois niveaux d'interdisciplinarité dans l'enseignement secondaire*, FNEC, Journée pédagogique, Bruxelles, cité par Valérie Camel et Agnès Fargue-Lelièvre (2009), «Analyse de pratiques interdisciplinaires dans l'enseignement supérieur», Revue internationale de pédagogie de l'enseignement supérieur [En ligne], 25-2, p.2, URL : http://ripes.revues.org/188

Bouhouch H. & Akrout M. (2016) *Livre Blanc : projet de réforme du système éducatif*, Mai 2016.

Cadieux R., Gendron I. & Ledoux, A. (2005a*). Panoramath. Guide en un coup d'œil. A, volume 2*. Anjou : Éditions CEC.

Cadieux R., Gendron I. & Ledoux A. (2005b). *Panoramath. Manuel, A, volume 2*. Anjou : Éditions CEC.

Caron F. & Savarad G. (2012). Une expérience avec l'exponentielle. *Bulletin AMQ*, Vol. LII, no 3, pp. 24-41.

Centre international d'études pédagogiques (CIEP) et al. (2009) *Etude sur les réformes curriculaires par l'approche par compétences en Afrique. Résumés exécutifs des études-pays. (L'étude-pays Tunisie a été réalisée par L.Lafontaine et M.Ben Fatma)* Sèvres, France, juin 2009.

Clary M. & Giolitto P. (1994) *Profession enseignant - Éduquer à l'environnement*, Paris Hachette.

Coupal, M. (2005). *À vos maths ! Manuel de l'élève C*. Montréal : Graficor, Chenelière éducation.

Conseil supérieur de l'éducation (1982). *Le sort des matières dites "secondaires" au primaire (Avis au ministre de l'Éducation)*. Québec: Conseil supérieur de l'éducation.

Coupal, M. , Gascon, B. , Lepage, J. & Rouleau, É. ; (2005). *À vos maths ! Guide d'accompagnement pédagogique*. Montréal : Graficor, Chenelière éducation.

Décret n°93/70. (1993). Relatif aux programmes de l'enseignement de base et de l'enseignement secondaire.

De Keysel M. (2016). *Former les futurs enseignants à l'interdisciplinarité*. In M. De Keysel, J.L. Dufays, J. Plumat & M.E. Ricker (Éds.), Vers l'interdisciplinarité. Croiser les regards et collaborer dans l'enseignement secondaire. Louvain-la-Neuve : Cripédis.

Données Mondiales de l'Education, 6ème Edition, 2006-2007,

Loi n° 91-65 du 29 juillet 1991. (1991). Relative au système éducatif.

Loi n° 2002-80 du 23 juillet 2002. (2002). Relative à l'orientation de l'éducation et de l'enseignement scolaire.

Fagnant, A., Jacmin, C. & Sente, I. (2012). Les séminaires d'approche interdisciplinaire. Pourquoi s'intéresser à l'interdisciplinarité dans l'enseignement et dans la formation des enseignants ? *Puzzle, Bulletin n°31*. Liège : CIFEN, 40-48.

Fourez G. (Dir.), Maingain A. & Dufour B. (2002) Approches didactiques de l'interdisciplinarité. Bruxelles : De Boeck.

Gilmer M. (1971) L'évolution de l'enseignement primaire en Afrique Noire Francophone : une approche qualitative, *Cahiers de l'IIPE*, n°21.

Gouvernement du Québec (2004). *Programme de formation de l'école québécoise. Enseignement secondaire, 1er cycle*. Québec : Ministères de l'éducation.

Gouvernement du Québec (1964). *Rapport de la Commission royale d'enquête sur l'enseignement dans la province de Québec (Rapport Parent). Tome 2 : la structure pédagogique du système scolaire*. Québec : Commission royale d'enquête sur l'enseignement dans la province de Québec.

Guay S. Hamel J.-C. & Lemay S. (2005). *Perspective mathématique. Manuel de l'élève, A, volume1*. Laval : Éditions Grand Duc HRW.

Guay S. Hamel, J.-C. & Lemay S. (2005). *Perspective mathématique. Manuel de l'enseignant et de l'enseignante. A, volume 1*. Laval : Éditions Grand Duc HRW.

Hasni A. & Squalli H. (2011). La formation à l'enseignement interdisciplinaire en mathématiques, sciences et technologies : quelles modalités et quels apports ? *Vie pédagogique*, n° 58, p. 33-36.

Hasni A., Lenoir Y. Larose F. & Squalli H. (2010). *Interdisciplinarité et enseignement des sciences, technologies et mathématiques au premier cycle du secondaire : place; modalités de mise en œuvre; contraintes disciplinaires et institutionnelles. Rapport de recherche. Partie 1. Les résultats de l'enquête par questionnaire*. CREAS, Université de Sherbrooke.

Jadin, B. (2018). *"Pratiquer des mathématiques citoyennnes", Projet de partenariat régendats math/sciences humaine.* Helmo-Liège.

Job P. & Gantois J.-Y. (2018). Investigating economy as a mean to rejuvenate fossilized mathematical knowledge. *The Eurasia Proceedings of Educational & Social Sciences* (EPESS), Volume 10, 248-253.

Lenoir Y. (1991). *Relations entre interdisciplinarité et intégration des apprentissages dans l'enseignement des programmes d'études du primaire au Québec*, Thèse de doctorat (nouveau régime) en sociologie, Université de Paris 7, Paris.

Lenoir Y. & Sauvé L. (1998) Interdisciplinarité et formation à l'enseignement primaire et secondaire. *Revue des sciences de l'éducation*, XXIV, n° 1.

Mc Andrew M. (2001). Immigration et diversité à l'école. Le débat québécois dans une perspective comparative. Montréal: Presses de l'Université de Montréal.

ME Ministère de l'Education (2002). La nouvelle réforme du système éducatif tunisien. Programme pour la mise en œuvre du projet « Ecole de demain » (2002-2007). Tunis, octobre, 2002.

MEF Ministère de l'éducation et de la formation (2008), Le développement de l'éducation Rapport national 2004-2008 présenté à la 48e session de la Conférence Internationale de l'Education, Genève 2008.

Roegiers X. (2006) Réforme de l'éducation et innovation pédagogique en Algérie, l'APC dans le système éducatif algérien. *ONPS-UNESCO*, 51-85.

Schneider M. (2008) Traité de Didactique des Mathématiques. Liège : Presses Universitaires de Liège.

Semri A. (2009) Réforme du système éducatif algérien : À propos de l'articulation entre l'enseignement secondaire et le système LMD de l'enseignement supérieur en mathématiques, Actes du colloque espace mathématique francophone, EMF'09, 06-10 avril 2009, Dakar, Sénégal, Revue Internationale Francophone, Numéro Spécial 2010, ISSN0850 – 4806, pp1062 - 1076.

Squalli H., Theis L., Hasni A. & Benoit D., *L'interdisciplinarité entre mathématiques et sciences à l'école secondaire. Une étude de cas.* Centre de recherche sur l'enseignement et l'apprentissage des sciences, mathématiques et technologie (CREAS). Université de Sherbrooke, Québec, Canada EMF2009.

https://www.erudit.org/fr/revues/rse/2003-v29-n1-rse826/009499ar/

file:///Users/macbookpro/Desktop/ressource_interdisciplinarite/Maths%20et%20français%C2%A0-%C2%A0Mathématiques%C2%A0-%C2%A0Éduscol.html

Contributions des groupes de travail

Groupe de travail 1 (GT1)
Formation des enseignants

BILAN DU GROUPE DE TRAVAIL N° 1

FORMATION DES ENSEIGNANTS

Responsables

DERUAZ[*] Michel – LÊ [**] Thi-Hoài-Châu – GUILLE-BIEL WINDER[***] Claire

Correspondant CS

CLIVAZ[****] Stéphane

Ce groupe de travail avait comme ambition de poursuivre des réflexions initiées dès les premières éditions des colloques EMF dans différents groupes. Nous pouvons notamment relever les GT2 des EMF de Genève en 2012 (Lajoie, Masselot & Weiss, 2012) et d'Alger en 2015 (Winder, Abdelli, Bacon & Lajoie, 2015) qui se sont penchés sur l'analyse de dispositifs et de stratégies de formation initiale et continue des enseignants ainsi que le GT1 de Genève en 2012 (Clivaz, Proulx, Sangaré & Kuzniak, 2012) qui a travaillé sur les articulations des connaissances mathématiques et didactiques pour l'enseignement.

Lors de l'appel à contribution, cinq axes thématiques ont été proposés aux participants :

- Interrogation des pratiques d'enseignement en vue de la formation
- Liens entre recherche et formation
- Analyse de dispositifs et de stratégies de formation - Évaluation de ces dispositifs
- Particularités des formations initiales et particularités des formations continues
- Formation aux approches interdisciplinaires

La première séance de travail a permis aux participants de faire connaissance et de préparer les trois séances suivantes dédiées à la présentation des communications. Au vu du nombre important de communications proposées, le choix a été fait de scinder le groupe de travail en deux sous-groupes lors de ces plages. Enfin l'ensemble des participants a été réuni au moment de la dernière plage pour une discussion générale et un bilan des travaux du groupes.

I. QUELQUES MOTS SUR LES DISCUSSIONS DU GROUPE

Nous avons reçu 17 contributions provenant du Cameroun, du Canada, de Côte d'Ivoire, de France, de République Démocratique du Congo, de Suisse et du Viêt-Nam. D'autres pays comme l'Algérie, la Belgique, Madagascar et le Maroc, étaient aussi représentés par des participants. Cette diversité nous a notamment permis de relever l'importance du contexte local et institutionnel dans la formation des enseignants.

Chacune des thématiques de l'appel à contribution a été abordée par plusieurs textes et

[*] HEP Vaud, Lausanne – Suisse – michel.deruaz@hepl.ch
[**] Université pédagogique de Hochiminh ville – Viêt-Nam – chaulth@hcmup.edu.vn
[***] COPIRELEM, LDAR, ADEF, ESPE –Aix-Marseille Université – France – claire.winder@univ-amu.fr
[****] HEP Vaud, Lausanne – Suisse – stephane.clivaz@hepl.ch

chaque texte relevait de plusieurs thématiques. Nous pouvons toutefois relever que toutes les contributions ont analysé ou décrit un dispositif de formation. Ces dispositifs étaient bien répartis entre la formation initiale (11) et continue (9). Par ailleurs, plusieurs d'entre eux pouvaient être utilisés tant en formation continue qu'en formation initiale. Nous pouvons aussi noter que les différents degrés scolaires étaient représentés : certains dispositifs étaient destinés aux enseignants du premier degré (10), d'autres aux enseignants du second degré (8) ; une contribution proposait même une étude portant à la fois sur les enseignants débutants du premier et du second degré.

1. Interrogation des pratiques d'enseignement en vue de la formation

Les liens entre les pratiques d'enseignement et la formation ont été abordés dans plusieurs contributions. Certains travaux se sont intéressé aux pratiques des enseignants en formation initiale et aux enjeux de formation en lien avec ces pratiques (par exemple Hersant ou Adihou & Arsenault ou Choquet & Zebichen), alors que d'autres regardaient les effets de formations continues sur les pratiques des enseignant qui les ont suivies (par exemple Clivaz ou Masselin & Derouet), voire sur les pratiques des collègues de ces enseignants (par exemple Grugeon-Allys, Chenevotot-Quentin, Pilet & Horoks).

Les enjeux liés à l'évaluation ont aussi été étudiés dans plusieurs contributions : évaluation des étudiants en formation initiale (Abby-M'Boua ou Celi, Masselot & Tempier), pratiques d'évaluation en classe (Blanchouin, Mounier, Grapin & Sayac). Il apparaît que dans les deux cas l'évaluation peut servir de levier ou de point d'entrée pour développer les connaissances et les pratiques des enseignants, que cela soit en formation initiale ou en formation continue (Grugeon-Allys & al.).

L'étude des ressources à dispositions des enseignants ainsi que les formations en liens avec une ressource (Blanchouin & al.) sont apparues comme un autre levier permettant de développer les connaissances et les pratiques des enseignants.

2. Liens entre recherche et formation

Si tous les travaux présentés dans le cadre de ce groupe de travail s'appuyaient sur les résultats de la recherche, on peut toutefois noter que ces résultats ne provenaient pas tous du champ de la didactique des mathématiques mais aussi plus largement des sciences de l'éducation, tant pour concevoir des formations que pour les donner ou les analyser. Plusieurs dispositifs décris dans les contributions ont d'ailleurs été développés dans le cadre de projet de recherche (par exemple Guille-Biel Winder, Mangiante-Orsola, Masselot, Petitfour et Simard) dont les objectifs pourraient dépasser le cadre de la formation des enseignants. La formation, notamment continue, a aussi été utilisée pour avoir accès aux enseignants et à leurs pratiques dans les classes ou lors des moments de préparation de leur enseignement (par exemple Masselin & Derouet). Les présentations de développements de la recherche autour de dispositifs collaboratifs de formation comme les lesson study, labo-math, LEA (par exemple Blanchouin & al. ou Clivaz), ont mis en évidence une ouverture vers les didactiques des autres disciplines ainsi que vers les sciences de l'éducation.

On peut également noter que plusieurs communications portaient sur les connaissances disciplinaires des enseignants du premier degré (par exemple Deruaz, Balegno & Batteau ou Decroix, Chenevotot, Galisson & Baheux) ou du second degré (par exemple Vermette).

3. Analyse de dispositifs et de stratégies de formation - Évaluation de ces dispositifs

Même si la thématique de l'évaluation des dispositifs de formation n'était pas nécessairement abordée dans toutes les contributions, elle a fait l'objet de nombreuses questions et discussions à l'issue des présentations. Il est ressorti de ces discussions que

plusieurs dispositifs présentés dépendaient plus de contingences institutionnelles spécifiques à une région (Abby-M'Boua ou Nseanpa & Tcheuffa Nziatcheu) ou d'une nouvelle organisation de la formation (Hersant) que de résultats de la recherche en didactique ou en sciences de l'éducation. De ce point de vue diversité de la temporalité et des espaces de formation qui dépend le plus souvent de contingences institutionnelles semble jouer un rôle important dans les choix des dispositifs de formation présentés.

Par ailleurs, la difficulté de la mesure de l'influence d'un dispositif de formation des enseignants sur les apprentissages des élèves en classe a plusieurs fois été relevée. D'autre part, a été soulignée la difficulté d'évaluer les effets d'une formation dans le temps et auprès des collègues des enseignants qui l'ont suivie même lorsque le dispositif prévoyait une telle étape (par exemple Grugeon-Allys & al.).

4. Particularités des formations initiales et particularités des formations continues

Comme nous l'avons déjà mentionné plus haut, huit contributions incluaient la description d'un dispositif de formation initiale, six celle d'un dispositif de formation continue. Seules trois présentations concernaient un dispositif appliqué tant en formation initiale que continue. Toutefois il est apparu lors de discussions que la plupart des dispositifs, éventuellement après de légères adaptations, pouvaient être mis en œuvre tant en formation initiale que continue. Les enjeux de spécificité entre ces deux types de formation se situent plus en termes d'objectifs prioritaires de formation et dépendent fortement des spécificités institutionnelles locales comme le temps dévolu à la formation initiale, la répartition entre formation disciplinaire, formation didactique, formation transversale et stage. D'autres éléments comme la distance au lieu de formation ou les contingences matérielles comme la possibilité pour les enseignants ou les formateurs de se déplacer prennent aussi énormément d'importance, notamment en Afrique ou en Asie.

5. Formation aux approches interdisciplinaires

La thématique de la formation aux approches interdisciplinaires, en lien avec la thématique générale du colloque, a été abordée dans plusieurs contributions, essentiellement pour des approches interdisciplinaires entre mathématiques et physique. Plusieurs points de vue ont été présentés comme l'utilisation des mathématiques en physique en formation initiale des enseignants du second degré (Lê & Ngô), la formation initiale des enseignant du premier degré sur un sujet à l'intersection des deux disciplines (Maisch & Abboud) ou encore la comparaison des rapports au savoir en mathématiques et en physique des enseignants du premier degré (Decroix & al.).

II. PERSPECTIVES ET CONCLUSION

L'organisation de notre groupe en deux sous-groupes pour une partie de nos travaux a permis à chaque texte d'être présenté et discuté en proposant notamment des retours constructifs à leurs auteurs. Par contre ce mode travail c'est fait au détriment d'une vision globale des travaux du groupe sur l'ensemble des thématiques proposées dans lors de l'appel à contribution. Lors de la dernière séance de travail à laquelle l'ensemble des participants étaient présents, plusieurs thématiques pour poursuivre les travaux de notre groupe lors du prochain colloque EMF sont apparues. Nous pouvons en particulier relever les axes suivants.

1. Place et rôle du formateur/chercheur dans les dispositifs de formation

Comme nous l'avons vu plus haut, des dispositifs présentés lors de nos travaux étaient intégrés dans un projet de recherche. L'articulation entre la recherche et la formation peut prendre diverses formes. Dans certains cas, les résultats de la recherche sont repris dans les contenus de la formation alors que dans d'autres cas c'est le dispositif de formation qui

s'appuie sur des résultats de la recherche, dans de telles situations, la recherche est en amont de la formation et les formateurs n'ont pas nécessairement été impliqués dans la recherche à laquelle ils se réfèrent. Par contre, dans d'autres cas, lorsque c'est le dispositif de formation qui est l'objet d'une recherche en cours ou lorsque le dispositif de formation est utilisé pour observer des pratiques, les chercheurs font souvent partie de l'équipe de formateurs et jouent ainsi simultanément plusieurs rôles. La place et le rôle du formateur/chercheur dans les dispositifs de formations nous semble être une thématique intéressante à approfondir lors d'un prochain colloque EMF.

2. Dialectique/dynamique entre pratiques et formations

Plusieurs textes sur lesquels nous avons travaillés se situaient à l'articulation entre les pratiques enseignantes et la formation tant en formation initiale que continue. Il ressort de nos discussions qu'il est difficile d'évaluer les effets des formations sur les pratiques des enseignants dans un temps long et que les formations qui s'appuient directement sur les pratiques des enseignants qui participent à cette formation sont de plus en plus souvent proposées voir encouragées par nos institutions. Un approfondissement de cette thématique lors des prochains colloques EMF nous apparaît donc souhaitable.

3. Formation à distance

Comme nous l'avons mis en évidence dans notre introduction, notre groupe a réuni des participants de plus de dix pays et de quatre continents. Plusieurs intervenants ont mis en évidence les difficultés matérielles (distance, coûts des déplacements, état des voies de communication) sur lesquelles tant les formateurs que les enseignants achoppent lorsqu'ils doivent se rencontrer sur un même lieu pour une formation. L'organisation de formation partiellement ou totalement à distance permettrait aussi de mieux les intégrer dans le temps scolaire, en particulier pour certains dispositifs qui nécessitent des rencontres régulières mais pas nécessairement très longues pour lesquelles les déplacements des formateurs ou des enseignants peuvent devenir rédhibitoire. Pour toutes ces raisons, nous pensons que la thématique des formations à distance et des enjeux institutionnels qui lui sont liés devrait être approfondie lors d'un prochain colloque EMF.

4. Formation des formateurs

Les travaux de notre groupe nous ont montré que les dispositifs utilisés dans la formation des enseignants sont en constante évolution. Même si ces évolutions sont régulièrement mises en évidence par des publications ou des contributions dans des colloques, un travail de transposition est souvent encore nécessaire pour que les formateurs puissent se familiariser avec ces nouvelles pratiques. Si certaines équipes de formateurs ont la possibilité de s'organiser pour faire ce travail de formation continue dans le cadre de leur institution, il apparaît que ce n'est pas toujours possible. Des collectifs comme la CORFEM ou la COPIRELEM dont plusieurs travaux ont été présentés dans notre groupe de travail s'occupent déjà de cette thématique mais celle-ci pourrait aussi être travaillée dans le contexte plus large d'un prochain colloque EMF. Les possibilités de formation à distance pourraient en particulier être étudiées dans le contexte de la formation des formateurs.

En conclusion, nous proposons que la thématique générale de la formation des enseignants fasse à nouveau l'objet d'un groupe de travail dans les prochaines éditions d'EMF mais que les thématiques sur lesquelles se groupe travaillera soient bien définies, par exemple en reprenant les quatre propositions qui suivent :

- Place et rôle du formateur/chercheur dans les dispositifs de formation

- Dialectique/dynamique entre pratiques et formations
- Formation à distance
- Formation des formateurs

REFERENCES

Clivaz S., Proulx J., Sangaré M.-S. & Kuzniak A. (2012). Articulation des connaissances mathématiques et didactiques pour l'enseignement : pratiques et formation. In J.-L. Dorier (Éd.), Actes du colloque Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle (pp. 155-159). Genève: Université de Genève.

Lajoie C., Masselot P., & Weiss L. (2012). Analyse de dispositifs et de stratégies de fromation initiale et continue des enseignants. In J.-L. Dorier (Éd.), Actes du colloque Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle (pp. 251-259). Genève: Université de Genève.

Winder C., Abdelli M., Bacon L. & Lajoie C. (2015) Analyse de dispositifs et de stratégies de formation initiale et continue des enseignants. In L. Theis (Éd.), *Actes du colloque Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* (pp. 139-143). Alger : Université d'Alger.

ANNEXE

LISTE DES TEXTES DU GT1 PAR ORDRE ALPHABETIQUE DU PREMIER AUTEUR

ABBY-M'BOUA, P.

Connaissances mobilisées par les professeurs stagiaires pour préparer une séance de classe destinée à son évaluation certificative

ADIHOU, A. & ARSENAULT, C.

Regard de l'étudiant et de l'enseignant associé sur un dispositif de formation à l'enseignement des mathématiques

BLANCHOUIN, A., MOUNIER, E., GRAPIN N,. & SAYAC, N.

Différents leviers pour des formations de professeurs des écoles initiées au sein d'un LEA

CELI, V., MASSELOT, P. & TEMPIER, F.

L'évaluation en mathématiques des professeurs des écoles débutants : quelles alternatives face aux contraintes de la formation ?

CHOQUET, C. & ZEBICHE, N.

Débuter dans l'enseignement des mathématiques : quel impact de la formation initiale ?

CLIVAZ, S.

Comment un processus de lesson study conduit-il les enseignants à utiliser et à développer leurs connaissances mathématiques ?

DECROIX, A.-A., CHENEVOTOT, F., GALISSON, M.-P. & BAHEUX, C.

Comparaison des rapports au savoir en mathématiques et en physique de professeurs des écoles

DERUAZ, M., BALEGNO, M. & BATTEAU, V.

La multiplication posée en formation des enseignants

GRUGEON-ALLYS, B., CHENEVOTOT-QUENTIN, F., PILE,T J. & HOROKS, J.

Quelles pistes pour une évaluation du dispositif de formation PACAL ?

GUILLE-BIEL WINDER , C., MANGIANTE-ORSOLA, C., MASSELOT, P., PETITFOUR, E. & SIMARD, A.

Identification des potentialités d'un jeu de rôles dans le cadre d'une formation de professeurs des écoles

HERSANT, M.

De la formation à la pratique : que peut nous apprendre l'analyse de pratiques de stagiaires ?

LÊ , T.-H.-C. & NGÔ, M.-Đ.

La connaissance des futurs enseignants de mathématiques : une étude par l'approche interdisciplinaire. Le cas de la notion d'intégrale

MASSELIN, B. & DEROUET, C.

Sur la mise en évidence d'effets d'une formation courte sur les pratiques d'enseignants autour de la simulation en probabilités en classe de troisième

NSEANPA, C. J. & TCHEUFFA NZIATCHEU, J.

Formation initiale des enseignants de mathématiques à l'École Normale Supérieure de Yaoundé 1 : Des pratiques actuelles aux perspectives futures

VERMETTE, S.

L'écart type et son interprétation graphique

AFFICHES

MAISCH, C. & ABBOUD, M.

Le thème des grandeurs et mesures dans la formation des enseignants du primaire : une approche interdisciplinaire

CONNAISSANCES MOBILISEES PAR LES PROFESSEURS STAGIAIRES POUR PREPARER UNE SEANCE DE CLASSE DESTINEE A SON EVALUATION CERTIFICATIVE

ABBY-M'BOUA [*] Parfait

Résumé – Ce travail porte sur les connaissances mobilisées par les professeurs stagiaires lors de leur activité de préparation d'une séance de classe destinée à leur évaluation certificative en lien avec les ressources externes disponibles. Les résultats obtenus à partir d'entretiens d'explicitation auprès de cinq professeurs stagiaires montrent que même si ces derniers font appel à des connaissances et à des ressources externes différentes, ils mobilisent tous des connaissances en lien avec des textes institutionnels.

Mots-clés : connaissances, ressources externes, séance de classe, professeur stagiaire, évaluation certificative.

Abstract – This work focuses on the knowledge mobilized by trainee teachers during their activity of preparing a class session for their certification evaluation in relation to external resources available. The results obtained from explanatory interviews with five trainee teachers show that even if they use different external knowledge and resources, they all mobilize knowledge related to institutional texts.

Keywords: knowledge, external resources, class session, trainee teacher, certification evaluation.

I. INTRODUCTION

Parmi les tâches dévolues au métier d'enseignant, la préparation quotidienne de son activité destinée pour la classe occupe une place prépondérante. Dans tous les systèmes éducatifs, cette activité de préparation est institutionnellement reconnue comme faisant partie du métier et définie de façon relativement précise. Elle doit contribuer à amener l'enseignant à prendre conscience en décrivant ce sur quoi doit porter ce qu'il va proposer à ses élèves. Nous savons aujourd'hui que d'une part, cette activité de préparation, dépend des conceptions de l'enseignant sur l'apprentissage, sur la discipline enseignée, sur les pratiques expérimentales (Orlandi, 1991 ; Coquidé, 1998 ; Koliopoulos et Ravanis, 1998) et d'autre part que lors de cette activité de préparation, les professeurs mettent en jeu différentes connaissances et les articulent pour choisir des activités, des exercices, fractionner la séance, choisir une forme de travail en classe, anticiper le temps, les réactions et les difficultés des élèves, gérer les traces écrites des élèves (Bécu-Robinault ; 2007). De même, les recherches sur les connaissances professionnelles des enseignants ont montré qu'elles sont liées, d'une part, à la discipline et, d'autre part, à la compréhension des difficultés d'apprentissage des élèves (Charlier et Charlier, 1998).

Généralement, les différents travaux qui ont contribué à l'identification des connaissances professionnelles lors de la préparation d'une séance de classe impliquent des enseignants novices ou expérimentés, dans une situation de classe ordinaire. Or la problématique de la formation initiale des enseignants occupe depuis de plusieurs années de nombreux chercheurs en didactique des mathématiques de tous horizons, que ce soit en sciences de l'éducation ou en didactique des mathématiques. Mais les connaissances professionnelles des professeurs stagiaires en situation d'évaluation certificative[1] y sont rarement abordées. Nous nous sommes alors posé deux questions :

[*] Ecole Normale Supérieure d'Abidjan – Laboratoire de Recherche en Didactique – Côte d'Ivoire – abby_mboua@yahoo.fr

[1]Pour Nebout-Arkhurst (2017), l'évaluation certificative permet de s'assurer que les apprenants ont le niveau requis pour obtenir un diplôme en fin d'étude.

– Retrouve-t-on, chez les professeurs stagiaires, les mêmes connaissances qui ont été observées chez des professeurs expérimentés ?

– En est-il de même lorsque la préparation de la séance est spécifiquement destinée à une évaluation certificative?

L'objectif de cet article est de mettre en évidence la typologie des connaissances élaborées par les professeurs stagiaires lors de leur évaluation certificative.

II. METHODOLOGIE DE LA RECHERCHE

1. Le choix d'une technique d'entretien d'explicitation

Parmi les méthodes et outils utilisés pour décrire la préparation d'une séance de classe, la méthode de l'entretien d'explicitation (Vermersch, 1994) occupe une place de choix, c'est pourquoi, nous l'avons utilisée pour cette recherche. Elle permet le récit des actions des enseignants à un moment donné, repéré dans le temps et dans l'espace en référence à une situation particulière de construction d'une séance de classe et non aux situations génériques de construction de séquences d'enseignement.

Il s'agit de réduire au maximum les interprétations du sujet sur son action et donc de le placer en situation d'évocation de son activité. Celui-ci doit pouvoir raconter précisément ce qui s'est passé, en évitant toute considération qui ne serait pas de l'ordre de l'action, mais de celui des opinions, des jugements ou des généralités. Il doit également raconter comment il a fait pour préparer cette séance précise. Le terme « séance » est pris dans un sens large (une ou plusieurs séquences) sans être explicité à l'enseignant, pour ne pas l'influencer dans sa manière de parler de son activité. Lors de l'entretien, le professeur stagiaire vient avec l'ensemble de sa préparation et surtout avec tous les documents dont il s'est servi pour son élaboration.

La première partie de l'entretien a consisté à retrouver le moment où l'action (dans notre cas, la préparation de la séance) a été conduite. Les questions doivent favoriser la narration de l'action et non l'interprétation de celle-ci, même s'il est difficile d'éviter, lors de son évocation *a posteriori*, les recherches implicites de rationalité. Lorsque le professeur stagiaire s'interrompait dans l'évocation de l'action, ce qui provoquait une interruption du discours, nous n'avons pas laissé son récit s'arrêter et nous avons relancé à partir d'une question reprenant les interventions précédentes.

2. Choix des professeurs stagiaires

Ne voulant pas travailler avec les professeurs stagiaires que nous avons-nous même encadrés, il nous a été très difficile de trouver des professeurs stagiaires volontaires pour réaliser des entretiens concernant leur activité de préparation d'une séance de classe destinée à leur évaluation certificative. Sur un effectif de vingt-sept professeurs stagiaires que nous avons contactés et qui avaient auparavant accepté, seulement cinq sont venus aux entretiens que nous avons organisés individuellement dans notre bureau. De manière identique, ceux qui n'ont pas pu venir ont donné le prétexte qu'ils n'avaient pas de quoi payer leur transport. Nous avons donc enregistré (enregistrement audio uniquement) des entretiens avec ces cinq professeurs stagiaires différents. Selon la catégorisation d'Huberman (1989), ces professeurs stagiaires, que Masselot (2004) considèrent comme de « vrais » débutants[2], seraient à un

[2] Ils n'ont aucune expérience professionnelle en dehors de la période de stage.

stade de leur carrière caractérisé par des aspects de survie (être à la hauteur) et de découverte du métier, des élèves et de l'enseignement. Tous les entretiens ont été réalisés début juin, avant que leur évaluation certificative ait effectivement lieu. Les entretiens ont eu une durée approximative de trois quarts d'heure et ont été intégralement transcrits. Pour conserver leur identité et les distinguer, nous les avons désignés lors de l'anonymisation par « stagiaire » avec un numéro qui n'est indiciel d'aucune caractéristique particulière.

3. Grille d'analyse des entretiens

Afin d'étudier les différentes connaissances mises en œuvre par les professeurs stagiaires lors de la préparation de leur séance de classe, destinée à leur évaluation certificative, nous avons utilisé la catégorisation des connaissances élaborées par Shulman (1987, 1989). En ce qui concerne l'origine de leurs connaissances, nous les avons classées selon les trois grandes catégories de Bécu-Robinault (2007).

Les catégories utilisées pour l'analyse des entretiens des professeurs stagiaires sont synthétisées dans le tableau 1. Les catégories de ressources internes, ou de connaissances, sont à mettre en relation avec l'origine explicitée (interne ou externe) et les ressources externes mobilisées.

Catégories de connaissances	**Origine des connaissances**	**Ressources externes**
Connaissances sur la discipline Connaissances pédagogiques liées au contenu disciplinaire PCK – apprentissage PCK – enseignement Connaissances sur les programmes Connaissances pédagogiques Pédagogique – organisation Pédagogique – temps Pédagogique – activités Connaissances sur les élèves Élève – général Élève – apprentissage Connaissances sur le contexte Connaissances sur le but	Texte institutionnel Échange sur les pratiques Expérience acquise	Matériel Livres Manuels Internet Programmes éducatifs Professeur conseiller Professeur encadreur Collègues Notes de formation Anciens cours et cahiers de textes

Tableau 1 - *Grille d'analyse des entretiens*

Certaines catégories de connaissances peuvent être *a priori* associées à des origines ou ressources externes, comme la connaissance sur les programmes, originaire de textes du savoir institutionnel (le savoir à enseigner) et associée à la ressource externe composée des textes du programme officiel (dans ce cas précis, l'origine et la ressource peuvent être confondues : dans les entretiens, nous l'avons codée comme ressource externe uniquement lorsque l'enseignant fait explicitement référence à ce qu'il a lu) ; la connaissance sur les élèves peut être soit issue de l'expérience acquise, soit des textes institutionnels qui leur permettent de faire des hypothèses sur les prérequis, en lien avec la ressource externe « programme ».

Les transcriptions des entretiens ont été analysées sur la base des catégories de connaissances, des origines et des ressources externes (tableau 1) en indiquant les lieux dans lesquels elles sont utilisées. Concrètement, nous relevons dans les entretiens les interventions (phrases ou groupes de phrases) relevant explicitement d'une des catégories de connaissances,

nous indiquons lorsque cela est explicité son origine, les ressources externes utilisées et les lieux. Nous avons codé les reformulations uniquement lorsqu'elles étaient séparées par d'autres ressources externes ou d'autres connaissances. Nous avons ensuite comptabilisé les différentes catégories pour chaque enseignant, sans donner à ces données chiffrées de valeur statistique.

III. RESULTATS

En remarque préliminaire, pour certains professeurs stagiaires, le mot « séance » a été compris comme la seule séance de l'évaluation certificative, intégrée à un chapitre, alors que pour d'autres, il s'agissait d'une séquence complète, correspondant à plusieurs séances à préparer. Les cinq professeurs stagiaires ont choisi de centrer l'entretien sur la préparation de la séance de leur évaluation certificative, même s'ils avaient amené une séquence comportant plusieurs leçons. Ce choix ne nous semble pas anodin et révèle l'intention de nous montrer le caractère particulièrement contraignant de l'évaluation certificative. Il est également révélateur de l'investissement important de chacun des professeurs stagiaires pour cette séance particulière.

Si l'entretien était centré sur la préparation d'une séance destinée à leur évaluation certificative, les professeurs stagiaires ont systématiquement souhaité mettre en relation cette préparation avec certaines anciennes séances qu'ils ont préparées et ce pour justifier soit leurs choix pédagogiques, soit les connaissances qu'ils pensaient être mobilisables par leurs élèves.

1. Organisation générale et traces de la planification

Certains aspects de la préparation de la séance de classe sont communs aux cinq professeurs stagiaires. Ces résultats confirment des résultats déjà obtenus, comme ceux de Richoux et Beaufils (2003). En effet, les professeurs stagiaires déclarent unanimement prendre en compte les impératifs liés au programme officiel en vigueur, comme les compétences de base, les contenus et les habiletés exigibles, le temps à consacrer aux différentes notions traitées. L'importance accordée à ces impératifs ainsi que le respect de ces contraintes sont variables d'un professeur stagiaire à l'autre comme nous le montrerons par la suite. Par ailleurs, dans leur préparation respective, les professeurs stagiaires avancent que la maîtrise des contraintes temporelles liées à leur examen pédagogique en classe est primordiale. Avant d'aborder une activité destinée à leur évaluation certificative, ils doivent d'abord s'assurer qu'ils auront le temps nécessaire pour son exécution pendant l'évaluation certificative et que cette activité pourra être exécutée au temps opportun. Enfin, ils intègrent ce que les élèves ont fait lors des cours précédents et la compréhension qu'ils peuvent avoir des notions utilisées dans le cours.

Les professeurs stagiaires insistent sur d'autres aspects de la préparation : exposer un plan[3] détaillé de la séquence complète, formuler des questions précises à adresser aux élèves pour les guider lors des activités de recherche, prévoir si possible quelques réponses des élèves, anticiper le fonctionnement de la classe et, enfin, aspect revêtant pour ces professeurs une importance primordiale, planifier la durée précise (à la minute) des différentes parties traitées pendant la séance.

Nous avons demandé aux enseignants interviewés de venir avec tous les documents utilisés ou élaborés pour faire leur fiche de préparation de la séance. Les traces écrites fournies par les cinq professeurs stagiaires sont différentes tant du point de vue de la quantité que du contenu.

[3] C'est un plan qui est fourni par le guide des programmes.

Les traces de planification de certains sont très détaillées[4], alors que celles d'autres sont très succinctes.

2. Les lieux et les différentes ressources externes

Chaque entretien avec un professeur stagiaire a débuté avec une question de la forme : « Je vous ai demandé de venir aujourd'hui avec la préparation d'une séance de classe que vous vous allez faire lors de votre inspection pédagogique. L'aviez-vous à votre disposition ? Où exactement étiez-vous quand vous avez préparé cette séance ? Avec qui l'avez-vous préparée ? Comment cela s'est-il passé ? ».

Deux professeurs stagiaires ont tous deux déclaré avoir respectivement commencé la préparation avec leurs formateurs terrain, l'un au domicile de son professeur conseiller et l'autre au bureau de son professeur encadreur. Par contre l'un a débuté la préparation au lycée alors qu'un autre l'a abordée à son domicile. Enfin, le dernier s'est montré un peu réticent à répondre à cette question, déclarant « alors, c'est très compliqué parce que j'ai commencé un peu tôt à la préparer, cette séance, il y a plusieurs mois, quand, nous étions en début d'année. J'avais imaginé déjà, là, où, nous serons à pour l'inspection ». Le tableau 2 récapitule les ressources explicitement citées par les enseignants.

Ressources externes	**Stagiaire 1**	**Stagiaire 2**	**Stagiaire 3**	**Stagiaire 4**	**Stagiaire 5**
Manuels	08	05	02	13	11
Programmes éducatifs	11	09	12	08	10
Collègue stagiaire	02	05	07	04	02
Professeur conseiller	04	05	08	03	03
Professeur encadreur	00	03	02	02	05
Autre enseignant	00	04	03	03	03
Notes de formation	02	02	06	02	01
Anciens cours et cahiers de texte	01	05	07	00	04
Internet	04	02	00	00	01
Total	**32**	**41**	**45**	**35**	**40**

Tableau 2 *- Nombre des ressources externes citées en fonction de leur type et des enseignants*

Les professeurs stagiaires préparent leur séance destinée à leur évaluation certificative sur quatre lieux distincts : leur domicile, le domicile de leur professeur conseiller, le bureau de

[4] Les préparations comportent chronologiquement non seulement les réponses que les élèves devront noter dans le cahier de recherches sous forme de phrases, mais également les questions qu'ils vont adresser à leurs élèves, écrites telles qu'ils pensent pouvoir les poser oralement. EIles indiquent précisément le temps à passer sur chacune des notions du cours et le moment de distribuer les différents types d'activités.

leur professeur encadreur et leur établissement d'accueil. Une étude parallèle faite en France avec des enseignants de mathématiques, indique qu'à la fin de leur première année de formation, leur lieu exclusif de préparation est leur domicile (Coppé, 2006). Cette différence s'explique, au moins partiellement, par la nécessité du professeur stagiaire d'avoir recours aux différents conseils de ses formateurs. Le lieu de préparation de la séance de classe devient rapidement implicite dans l'entretien. Toutefois, tous les professeurs stagiaires utilisent les manuels scolaires officiels de leur établissement d'accueil, mis à leur disposition. La préparation de la séance de classe est toujours débutée au domicile (consultation des programmes officiels et préparation d'une trame) et elle est poursuivie alternativement dans l'établissement d'accueil (concertation avec les autres enseignants) et au domicile (conception de la trame, rédaction du plan et des activités).

Le tableau 2 indique que les professeurs stagiaires 2, 3 et 5 citent à plusieurs reprises les anciens cahiers de textes et les anciens cours comme une ressource pédagogique utilisée. Or, cette ressource est citée une seule fois par le stagiaire 1 et n'est pas utilisée par le stagiaire 4.

> Stagiaire 3 : Je vais à la salle des professeurs à plusieurs reprises pour consulter les anciens cahiers de texte, pour voir les types d'activités que les anciens stagiaires ont donnés à leur classe. Je peux m'en inspirer pour élaborer les miennes.
>
> Stagiaire 1 : J'ai regardé un ancien cahier de texte pour voir le cours qui a été fait sur ce que je vais faire pendant mon inspection pédagogique.

Une autre ressource apparaît comme essentielle pour les cinq professeurs stagiaires interviewés : les collègues de l'établissement et les différents formateurs. Pour autant, ces collègues n'ont pas la même fonction pour chacun d'entre eux. Pour le stagiaire 1, il s'agit avant tout de pouvoir comparer sa pratique de classe avec celle d'enseignants plus expérimentés.

> Stagiaire 1 : Je souhaite seulement qu'ils me permettent de tester ma préparation dans une de leurs classes et qu'ils me donnent des conseils, pour que je puisse m'améliorer. J'ai d'autres collègues qui m'ont dit de travailler comme ça

Comme nous l'avions postulé, le stagiaire 4 indique ne pas avoir pu beaucoup travailler avec ses professeurs conseillers, qui étaient toujours absents de son établissement. C'est ce qui le différencie des deux autres professeurs stagiaires qui s'appuient sur leurs professeurs conseillers et les professeurs encadreurs, essentiellement à des fins d'organisation, de minimisation du temps de préparation des situations d'apprentissage et d'exercices de fixation.

Les professeurs stagiaires consultent également d'autres types de collègues, spécifiques à leur statut de professeur stagiaire en situation : professeur conseiller, professeur encadreur, collègue professeur stagiaire et autres professeurs de l'établissement d'accueil. Ces rencontres leur permettent d'échanger des informations sur la réalisation d'expériences en particulier ou des retours sur la conduite et l'interprétation des expériences par les élèves.

Concernant les ressources utilisées au domicile, nous trouvons les manuels scolaires officiels, les guides des programmes, mais aussi, des notes de formation relevées pendant le déroulement du pré-stage ou bien des rencontres avec les conseillers pédagogiques.

Parmi les ressources sur lesquelles se fondent les professeurs stagiaires, des documents extraits sur Internet sont également utilisés. La recherche sur Internet se retrouve chez trois professeurs stagiaires (stagiaires 1, 2 et 5). Ils les sélectionnent et trient des extraits en fonction de leurs besoins précis (changements de programmes, expérience qui donne de bons résultats, démonstrations des propriétés…) et ce, afin d'éviter d'être submergé par la masse d'informations disponibles.

Les références très fréquentes au manuel scolaire par le stagiaire 3 peuvent être expliquées du fait que son professeur conseiller ait participé à l'élaboration d'un manuel officiel. Il peut donc s'appuyer sur cette ressource externe que son professeur conseiller connaît et dont il a fait sien le contenu.

> Stagiaire 3 : Mon professeur conseiller m'a dit qu'il a participé à la réalisation du cahier d'activités. Ce cahier propose de très bonnes situations d'apprentissage pour introduire une nouvelle leçon.

3. Catégories des connaissances mobilisées par chacun des professeurs stagiaires

Les connaissances explicitées dans les entretiens sont présentées dans le tableau ci-dessous (tableau 3). De manière générale, les connaissances explicitement convoquées par chacun des professeurs stagiaires interviewés sont différentes. Toutefois, tous mobilisent des connaissances pédagogiques, disciplinaires et sur les programmes. Ce sont les connaissances sur les programmes qui sont très dominantes dans les discours des professeurs stagiaires. Ceci peut être expliqué du fait que les programmes, élaborés par la Direction de la Pédagogie, sont nationaux et constituent le seul guide sur lequel tous les enseignants peuvent s'appuyer comme ressource externe.

Catégories de connaissances	**Stagiaire 1**	**Stagiaire 2**	**Stagiaire 3**	**Stagiaire 4**	**Stagiaire 5**
Connaissances pédagogiques liées au contenu disciplinaire	13	15	18	21	19
PCK – apprentissage	03	05	06	08	17
PCK – apprentissage	06	11	07	15	09
Connaissances sur les programmes	19	22	17	14	11
Connaissances pédagogiques sur l'organisation	07	09	13	17	20
Connaissances pédagogiques sur le temps	17	09	13	12	18
Connaissances pédagogiques	17	12	16	21	15
Connaissances sur les élèves en général	02	02	01	00	04
Connaissances sur les apprentissages des élèves	02	01	03	00	04
Total	**87**	**86**	**94**	**102**	**127**

Tableau 3 *- Nombre d'items par professeur stagiaire relevant de chaque catégorie de connaissances*

Par contre, les connaissances sur les élèves sont négligeables dans le patrimoine des connaissances des professeurs stagiaires. Elles sont absentes de l'entretien réalisé avec le stagiaire 4. Cette absence peut s'expliquer par le cet enseignant fait tout seul à son domicile ses préparations, du fait de l'absence de son professeur conseiller. Il se donne toutes les libertés pour organiser sa préparation comme il l'entend.

IV. CONCLUSION

Nous avons fait le choix d'étudier les connaissances mobilisées pour la préparation d'un cours destiné à une évaluation certificative du professeur stagiaire, à partir d'une catégorisation de Shulman (1986 ; 1987). Pour mieux comprendre l'origine de ces connaissances et comment elles sont mobilisées, nous nous sommes basé sur le travail de Bécu-Robinault (2007). La grille d'analyse que cet auteur a construite s'est avérée pertinente pour étudier l'activité habituellement peu accessible de préparation d'une séance de classe. Elle nous a permis de repérer les connaissances mobilisées, l'origine de certaines de ces connaissances et comment les professeurs stagiaires s'approprient les ressources externes pour en faire des ressources internes, lors de leur évaluation certificative.

Notre étude indique que les cinq professeurs stagiaires ont eu recours pour préparer une de leur séance de classe destinée à leur évaluation certificative à des connaissances sur la discipline, sur les programmes, sur les PCK et sur la pédagogie. Leurs connaissances sont plus orientées vers les textes officiels, malgré le fait qu'ils ont des ressources externes différentes.

REFERENCES

Bécu-Robinault K. (2007). Connaissances mobilisées pour préparer un cours de sciences physiques. *Aster* 45, 165-188.

Charlier E., Charlier B. (1998). *La formation au cœur de la pratique, analyse d'une formation continuée d'enseignants*. Bruxelles : De Boeck.

Coppé S. (2006). Les connaissances antérieures des professeurs de mathématiques à travers la préparation de séances de classe. Cas de stagiaires en fin de formation initiale. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*. 139-168.

Durand M. (1996). *L'enseignement en milieu scolaire*. Paris : PUF.

Huberman M. (1989). Les phases de la carrière enseignante : un essai de description et de prévision. *Revue française de pédagogie* 86, 5-16.

Koliopoulos D., Ravanis K. (1998). L'enseignement de l'énergie au collège vu par les enseignants. Grille d'analyse de leurs conceptions. *Aster* 26, 165-182.

Masselot P. (2004). Une analyse des pratiques quotidiennes en mathématiques d'un enseignant dans sa première classe. In Peltier-Barbier, M.L. (Direction), *Dur pour enseigner les élèves, dur pour enseigner les enseignants, dur d'enseigner en Zep*. Grenoble : La Pensée sauvage, éditions.

Mouton J-C. (2009). Analyse de l'activité de conseil du maître formateur en stage de pratique accompagnée. *Recherche et formation* 62, 65-76.

Nebout-Arkurst P. (2017). *L'évaluation des apprentissages. Evaluer, oui mais comment* ? Abidjan : Collection repères didactiques.

Orlandi E. (1991). Conceptions des enseignants sur la démarche expérimentale. *Aster* 13, 111-132.

Shulman L.S. (1986). «Those who understand : knowledge growth in teaching». *Educational Researcher* 15(2), 4-14.

Shulman L.S. (1987). Knowledge and teaching : foundations of the new reform. Harvard *Educational Review*57(1), 1-22.

Vermersch P. (1994). *L'entretien d'explicitation en formation initiale et en formation continue*. Paris : ESF Editeurs.

REGARD DE L'ÉTUDIANT ET DE L'ENSEIGNANT ASSOCIÉ SUR UN DISPOSITIF DE FORMATION À L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

ADIHOU[*] Adolphe –ARSENAULT[**] Cathy

Résumé – Nous avons mené une enquête auprès des étudiants en formation à l'enseignement et des enseignants associés afin de connaître les impacts d'un dispositif de formation à l'enseignement des mathématiques. Les types de connaissances et la démarche personnelle de formation des étudiants pour développer leurs compétences en mathématiques ont été caractérisés. Nous avons aussi identifié les attentes et perceptions des enseignants associés afin d'améliorer ce dispositif.

Mots-clefs : dispositif de formation, enseignement, mathématiques, enseignant associé, stagiaire.

Abstract – We conducted a survey of teacher education students and associate teachers to determine the impacts of a mathematics teacher education program. The types of knowledge and the personal training approach of students to develop their mathematical skills were characterized. We also identified the expectations and perceptions of associate teachers in order to improve this system.

Keywords: training system, teaching, mathematics, associate teacher, trainee.

I. INTRODUCTION

Pour assurer la formation initiale à l'enseignement des mathématiques, les universités québécoises proposent différentes modalités aux étudiants[1]. Depuis l'année 2003, l'Université du Québec à Rimouski (UQAR) a mis en place un dispositif visant la maitrise et la compréhension des savoirs mathématiques et didactiques chez les étudiants inscrits au baccalauréat en éducation préscolaire et en enseignement au primaire (BEPEP)[2]. Dans cet article, nous présentons les résultats d'une enquête qui a permis de mieux connaître les démarches et attentes des étudiants, leur sentiment de compétence, ainsi que les attentes et perceptions des Enseignants Associés[3] (EA) au regard des compétences professionnelles à l'enseignement des mathématiques. Les cadres théoriques et l'approche méthodologique seront décrits, puis la pertinence et l'efficacité du dispositif réexaminées eu égard aux résultats de l'enquête. Nous mettrons en évidence le rôle de l'EA dans le dispositif de formation afin d'améliorer la formation à l'enseignement des mathématiques.

II. PROBLÉMATIQUE

Au Québec, plusieurs chercheurs en didactique des mathématiques s'intéressent à la formation initiale à l'enseignement des mathématiques. Diverses problématiques sont soulevées: le type de mathématiques pour les futurs enseignants (Proulx, Corriveau et Squalli, 2012), les différentes entrées possibles pour une formation à l'enseignement des mathématiques (Deblois, 2010), les difficultés en mathématiques chez les futurs enseignants (Adihou et Arsenault, 2012; Adihou, Arsenault et Marchand, 2012; Arsenault, 2010;

[*] Université de Sherbrooke – Canada – adolphe.adihou@usherbrooke.ca
[**] Université du Québec à Rimouski – Canada – cathy_arsenault@uqar.ca

[1] La forme masculine utilisée dans cet article désigne aussi bien les femmes que les hommes. Le genre masculin est utilisé sans aucune discrimination et dans le seul but d'alléger le texte.

[2] Pour de plus amples informations sur le dispositif de formation, nous vous référons aux textes présentés dans le cadre des colloques EMF 2012, 2006 (Adihou, Arsenault et Marchand, 2012, 2006).

[3] Au Québec, un enseignant associé est une personne détenant une expérience d'au moins cinq ans en enseignement. Elle doit être responsable d'une classe d'élèves et dans ce contexte, elle accueille pour une période déterminée un étudiant stagiaire, inscrit dans un programme de formation à l'enseignement.

Marchand, 2010; Morin, Theis, Rosa-Francoeur, 2012; Proulx et Bednarz, 2009). Ces travaux proposent des pistes de solutions et des moyens pour répondre aux besoins et difficultés des futurs maitres, et ainsi, assurer une formation tenant compte des orientations ministérielles (MÉQ, 2001). Ces pistes de solutions et moyens mis en place permettent-ils aux étudiants de développer des compétences professionnelles à l'enseignement des mathématiques? Sont-ils satisfaits?

Pour atteindre les objectifs de la formation à l'enseignement[4], certaines études (Barioni, 2012; Gervais et Correa-Molina, 2011; Gervais et Desrosiers, 2005; Perez-Roux, 2012; Portelance, 2008) affirment la nécessité d'articuler les savoirs théoriques et expérientiels. En effet, les concepts étudiés en milieu universitaire alimentent les réflexions sur les situations vécues en stage et ces dernières sont réinvesties dans la formation didactique pour donner sens aux concepts. Ces allers-retours entre les deux milieux de formation favorisent la contextualisation et la conceptualisation des savoirs (Desjardins, 2013). Ainsi, l'EA est un acteur important dans tout dispositif de formation à l'enseignement. Bien que les didacticiens étudient les problématiques liées à la formation à l'enseignement des mathématiques, que cette formation repose sur le principe de l'alternance et que l'EA y soit impliqué, peu de recherches traitent de ses attentes et perceptions au regard de la formation (Bednarz, 2012). Il en est de même en ce qui concerne les attitudes et compétences à l'enseignement des mathématiques des étudiants en fin de formation initiale. Notons toutefois que plusieurs études portent sur les pratiques enseignantes dans l'enseignement des mathématiques (Masselot et Robert, 2012; Robert, 2008, 2001; Roditi, 2013, 2008, 2005). Dans la perspective d'améliorer le dispositif de formation à l'enseignement des mathématiques, le regard de l'étudiant et de l'EA comme partenaire de la formation initiale doit être pris en compte. Notre enquête vise donc à recueillir et à analyser les démarches, attentes, des étudiants, leur sentiment de compétence, ainsi que les attentes et perceptions des EA au regard des compétences professionnelles démontrées par les futurs maitres.

III. CADRE DE REFERENCE

Le cadre de référence de cette recherche articule les travaux traitant des différents types de connaissances nécessaires à l'enseignement des mathématiques (Ball *et al.*, 2008) et ceux liés aux compétences professionnelles à développer au regard de la pratique des enseignants (Robert, 2008). En effet, les différents types de connaissances selon la catégorisation de Ball *et al*. (2008) permettent de traiter des connaissances du sujet ou de la matière et des connaissances pédagogiques et didactiques. Cependant, certains aspects du métier d'enseignant négligés par ce cadre, entre autres les savoirs expérientiels, se retrouvent dans les composantes des pratiques développées par Robert (2008). L'articulation de ces deux cadres permet ainsi de mieux caractériser la formation à l'enseignement des mathématiques.

1. Cadre théorique pour l'analyse de la démarche des étudiants

Cette recherche s'appuie sur les travaux traitant de la nature des connaissances mathématiques à l'enseignement, leurs liens et usages en formation (Ball *et al.*, 2008; Bednarz, 2012; Clivaz, 2011; DeBlois, 2010; Lajoie et Barbeau, 2000; Proulx, 2010). Ces études soulignent le fait que les étudiants possèdent des connaissances mathématiques, mais

[4] Ces objectifs découlent du programme de formation de la profession enseignante pour l'éducation préscolaire et l'enseignement au primaire. Le ministère de l'Éducation y définit les orientations, les compétences professionnelles attendues au terme de la formation initiale ainsi que les profils de sortie.

surtout qu'ils doivent construire d'autres connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement et développer des compétences relatives à celles-ci. Ce travail s'effectue en différents lieux de formation afin de mieux contextualiser les savoirs théoriques et ainsi créer un lien entre les connaissances théoriques et pratiques. Ces recherches pointent également la relation entre les connaissances mathématiques des enseignants et la réussite des élèves. Ainsi, il est essentiel de favoriser et de soutenir le développement de celles-ci dans les programmes de formation à l'enseignement des mathématiques. Pour y arriver, des chercheurs (Ball *et al*., 2008; Shulman, 1987, 1986) ont catégorisé les connaissances mathématiques pour l'enseignement (voir la figure 1). Notre recherche réfère à ces types de connaissances pour caractériser la démarche de formation des étudiants, leurs attentes et satisfactions au regard du dispositif mis en place. Par exemple, dans le cadre de ce dispositif, un examen diagnostique permet aux étudiants de démontrer leur maitrise des connaissances mathématiques pour l'enseignement, soit les connaissances du sujet ou de la matière (CS). Ensuite, lorsqu'ils s'engagent dans une démarche personnelle de développement de leurs compétences en mathématiques, ces connaissances (CS) sont mobilisées dans la formation mathématique. Celles-ci sont par la suite convoquées dans la formation didactique afin de développer les compétences professionnelles à l'enseignement reposant sur les connaissances pédagogiques et didactiques (CPD). Les trois volets de ce dispositif, examen, formation mathématique et formation didactique regroupent ainsi l'ensemble des connaissances mathématiques pour l'enseignement selon Ball *et al.* (2008).

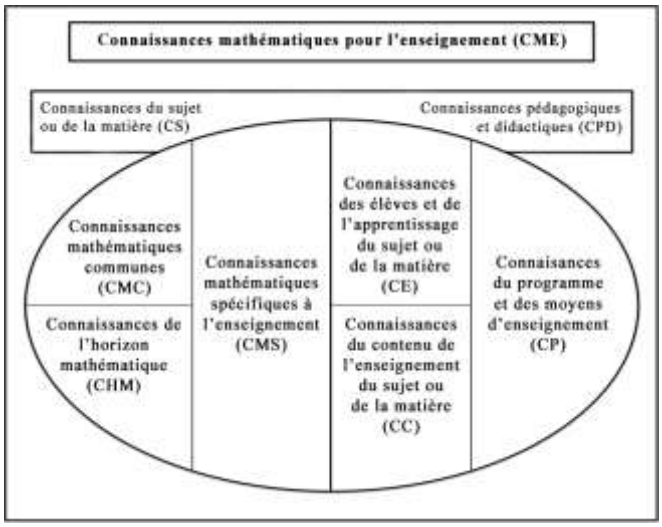


Figure 1 *- Connaissances mathématiques pour l'enseignement, traduit de Ball et al. (2008).*

2. Cadre théorique pour l'analyse des attentes des EA

La double approche didactique et ergonomique (Robert, 2008) permet l'étude en profondeur des pratiques des enseignants en articulant les théories en didactique des mathématiques et la théorie de l'activité. En effet, en considérant les «activités en classe», mais aussi les «contraintes du métier d'enseignant», Robert a identifié des composantes qui caractérisent et déterminent les pratiques des enseignants. Il s'agit des composantes «cognitive et méditative», liées aux activités possibles des élèves en classe. Elle dégage aussi les composantes du côté du métier permettant ainsi de déterminer la «composante personnelle» à la pratique de l'enseignant, la «composante institutionnelle» qui renvoie aux situations professionnelles permettant à l'enseignant de choisir les activités à réaliser en classe et la «composante sociale» qui concerne l'environnement social dans lequel les enseignants interviennent. Ces cinq composantes entrent en jeu dans la structure de notre analyse. C'est à

travers elles que l'on peut comprendre comment les étudiants stagiaires apprennent sur le terrain, le métier d'enseignant. Ce cadre permet ainsi de penser les pratiques des enseignants et de les analyser. À titre d'exemple, pour les énoncés suivants, tirés de nos questionnaires d'enquête: «Mon stagiaire anticipe les difficultés mathématiques que les élèves peuvent vivre» et «mon stagiaire utilise adéquatement le matériel d'enseignement pour préparer ses activités», le premier énoncé fait référence à la maitrise des contenus mathématiques et aux composantes cognitive et médiative, le second à la formation à l'enseignement des mathématiques et à la composante institutionnelle (Robert, 2008). Ces deux énoncés renvoient aux connaissances du sujet ou de la matière et aux connaissances pédagogiques et didactiques (Ball *et al.*, 2008).

3. Articulation des deux cadres

L'articulation de la double approche (Robert, 2008) et des types de connaissances mathématiques pour l'enseignement (Ball *et al.*, 2008) permet d'illustrer et d'analyser l'ensemble des dimensions de la pratique enseignante. En effet, dans le cadre de l'enseignement des mathématiques, les savoirs mathématiques et didactiques issus de la formation théorique (Ball *et al.*, 2008) nourrissent les expériences des stagiaires en formation pratique tandis que les différentes expériences d'enseignement et de partage avec l'EA favorisent l'exploration des composantes cognitive, médiative, personnelle, institutionnelle et sociale des pratiques des enseignants (Robert, 2008). Si la formation à l'enseignement des mathématiques doit fournir les outils nécessaires pour affronter les défis de son enseignement au primaire, elle doit aussi prendre en compte la réalité du terrain avec ses contraintes et exigences qui définissent les pratiques enseignantes (Roditi, 2008; Robert, 2008). C'est le rôle que joue l'EA dans la formation à l'enseignement d'où l'importance de tenir compte de ses perceptions et attentes fondées sur les connaissances mathématiques et sur les dimensions de la pratique enseignante que doivent développer les étudiants.

IV. QUELQUES ÉLÉMENTS MÉTHODOLOGIQUES

Cette recherche propose une analyse et une réflexion sur la formation à l'enseignement des mathématiques dans le cadre du programme de BEPEP à l'UQAR. La démarche méthodologique est une étude de cas (Giroux, 2003; Karsenti et Demers, 2000) adoptant une approche qualitative/interprétative (Savoie-Zajc, 2000). 150 étudiants et 130 EA ont été sollicités dans le cadre de cette étude. Sur une base volontaire, le premier échantillon se compose de 54 étudiants inscrits au huitième et dernier trimestre de leur formation à l'enseignement. Le second échantillon (voir tableau 1) comporte 23 EA de plus de 10 années d'expérience en enseignement, intervenant au préscolaire ou au primaire et travaillant pour les commissions scolaires de la grande région de Québec. Ces derniers ont participé à des journées de formation visant l'appropriation d'outils pour favoriser les liens théorie-pratique et l'évaluation des compétences des stagiaires. Ils ont tous reçu des stagiaires inscrits à leur dernier stage de formation d'une durée de 4 mois. Dans les deux cas, les échantillons sont constitués de femmes en majorité.

Nombre d'années d'expérience à titre d'EA	**Nombre de stagiaires reçus**	**Nombre total d'EA**
Moins d'un an	Moins de 5 stagiaires	1
Entre 1 et 5 ans	Moins de 5 stagiaires	5
Plus de 5 ans	Entre 5 et 15 stagiaires	10
	Plus de 15 stagiaires	6

	Non indiqué	1

Tableau *- Caractéristiques des EA du second échantillon*

Deux questionnaires comportant trois parties et 26 questions ont été élaborés. La première partie vise à recueillir des données sociodémographiques caractérisant les répondants. La seconde, composée de questions à degré d'accord permet de recueillir les perceptions et attentes au regard des mathématiques et de la formation mathématique. La dernière partie sous forme de questions ouvertes à court développement vise à obtenir plus d'informations sur la qualité de la formation à l'enseignement des mathématiques. Les questions des deuxième et troisième parties ont été classées initialement en quatre catégories, puis elles ont été associées aux catégories de Ball *et al.* (2008). La première, «Contenu mathématique» renvoie aux questions qui évoquent des savoirs, des concepts, des notions mathématiques; la seconde «Maitrise des contenus» fait appel aux questions qui sont spécifiques à l'acquisition et à la maitrise des savoirs, des concepts et des notions mathématiques par l'étudiant; la troisième «Rapport mathématique» se réfère au rapport qu'entretiennent les étudiants au regard des mathématiques (émotion et affectivité); la dernière catégorie «formation mathématique» regroupe les questions qui interpellent la pertinence de la formation mathématique pour l'enseignement des mathématiques. Le tableau 2 présente la répartition des questions en fonction des catégories initiales et celles de Ball *et al.* (2008).

Catégories de Ball *et al.* (2008)	**Numéro des questions dans le questionnaire**	**Nombre de questions**	**Catégories initiales**
Connaissance du sujet ou de la matière (CS)	Q17; Q19 Q25	3	Formation mathématique Maitrise des contenus
Connaissances mathématiques communes (CMC) et connaissances de l'horizon mathématique (CHM)	Q5 Q21; Q23 Q10; Q11; Q22 Q1; Q2; Q6	9	Contenu mathématique Formation mathématique Maitrise des contenus Rapport aux mathématiques
Connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement (CMS) et connaissances pédagogiques et didactiques (CPD)	Q7 Q8 Q13 Q4; Q9	5	Contenu mathématique Formation mathématique Maitrise des contenus Rapport aux mathématiques
Toutes les catégories	Q3; Q14; Q24 Q12; Q20; Q26 Q16; Q18 Q15	9	Contenu mathématique Maitrise des contenus Formation mathématique Rapport aux mathématiques

Tableau 2 - *Catégorisation des questions destinées aux étudiants de 4e année selon Ball* et *al. (2008)*

Les données recueillies ont été compilées dans un fichier Excel. Quant aux questions ouvertes, une analyse de contenu a été réalisée par un découpage et un classement en unité de sens, en fonction des catégories dégagées *a priori* dans les réponses aux questions (Huberman et Miles, 1991; Mucchielli, 2006). Pour chaque catégorie, non exclusive, la fréquence a été calculée en utilisant le nombre de répondants par catégorie par rapport à l'ensemble des

répondants. Ces fréquences ont permis d'obtenir des informations pertinentes et de tirer des conclusions, entre autres, au regard de leurs attentes, perceptions, satisfactions et démarches.

V. RÉSULTATS

1. Que font les étudiants pour développer leurs compétences en mathématiques?

Pour améliorer leurs compétences en mathématiques, principalement les connaissances du sujet ou de la matière (CMC et CHM)[5] selon Ball *et al.* (2008), 50,5 % des étudiants consultés ont recours aux services du Centre d'Aide à la Réussite (CAR) et aux moyens proposés par l'UQAR. La démarche poursuivie par les étudiants comporte quelques étapes, combinant différentes mesures d'aide. Elle se caractérise par: a) une activité préparatoire à l'examen[6] avec le soutien du CAR, soit des ateliers mathématiques (39,7 %), des exercices (31,0 %) à l'aide du guide de préparation à l'examen (15,5 %) et d'ouvrages mathématiques (13,6 %); b) la passation de l'examen de compétences en mathématiques dont le seuil de réussite est fixé à 75 %; c) des activités pour remédier aux difficultés diagnostiquées, soient consulter leur examen (42,6 %), faire des exercices (31,0 %), suivre un ou des cours de mathématiques offerts par l'UQAR (21,3 %) et des cours privés (17,2 %). À ce propos, l'étudiant EL35[7] dit: «*Ce qui a été le plus bénéfique selon moi, ce sont les exercices que j'ai faits durant plusieurs semaines dans mes temps libres. Le fait d'aider mes collègues a également été très bénéfique*». Ainsi, faire des exercices permet aux étudiants de revisiter les connaissances mathématiques et «à faire des maths» (Conne, 1999; Proulx, 2010). En d'autres termes, cette activité amène l'étudiant à parfaire ses connaissances mathématiques (CS) et à développer ses compétences à l'enseignement des mathématiques (CMS et CPD) en expliquant les concepts à ses pairs. Si pour les didacticiens, «faire des maths» est l'une des entrées envisagées pour entreprendre un travail didactique (Conne, 1999; Proulx, 2010), la démarche proposée à l'UQAR remplit ce rôle. En somme, le dispositif de formation à l'enseignement des mathématiques qui articule les formations mathématique et didactique favorise le développement des connaissances mathématiques pour l'enseignement selon les catégories de Ball *et al.* (2008).

2. Sont-ils satisfaits et se sentent-ils prêts à enseigner les mathématiques?

Pour 50 %[8] des étudiants, la démarche (préparation à l'examen, passation et différentes mesures au regard du diagnostic sur les compétences en mathématiques) contribue à les sensibiliser à revoir les notions et concepts mathématiques (CMC et CHM). Certains étudiants reconnaissent l'importance de la maitrise des contenus mathématiques au regard de la formation didactique (15,7 %), comme en témoigne l'étudiant EL34: « *[…] l'approfondissement des connaissances en mathématiques m'a aidé à comprendre comment les enseigner et à déterminer les erreurs que les élèves peuvent commettre. Connaitre que ce que je vais enseigner m'a donné confiance en ma maitrise des notions* ».

Majoritairement, 92,6 % des étudiants reconnaissent qu'il faut avoir une solide base en mathématiques (CMC et CHM) pour les enseigner et 50 % estiment qu'il est nécessaire de

[5] Nous faisons référence aux connaissances de Ball *et al.* (2008) et utilisons les acronymes apparaissant dans la figure 1.

[6] Il s'agit d'un examen à double statut, soit diagnostique et certificatif. L'étudiant doit le réussir avant le début de sa quatrième année de formation.

[7] La codification des étudiants s'est effectuée ainsi: la lettre E pour étudiant, suivi de la lettre L ou R pour les groupes de Lévis et de Rimouski, ainsi qu'un numéro des répondants.

[8] Nous rappelons que les catégories ne sont pas exclusives.

faire des efforts pour y arriver. Même si 73 % des étudiants ont le sentiment d'être compétents à l'enseignement des mathématiques (CMS et CPD) à la fin de leurs études, 30 % aimeraient avoir plus de moyens pédagogiques et de matériel d'enseignement et apprentissage à leur disposition pour un arrimage efficace des savoirs théoriques et pratiques. Pour les formateurs, ces résultats consolident les choix effectués dans le cadre du dispositif de formation. Toutefois, ils confirment la nécessité de mieux articuler les formations mathématique, didactique et pratique. Les types de connaissances mathématiques pour l'enseignement selon Ball *et al.* (2008) et leurs interactions dans le contexte de la formation à l'enseignement des mathématiques peuvent favoriser cette articulation.

3. Attentes des enseignants associés au regard de la formation

L'ensemble des réponses des EA fait référence aux différents éléments structurant les composantes des pratiques des enseignants selon Robert (2008). Concernant les caractéristiques de la formation mathématique, 60,9 % des EA jugent qu'elle doit permettre aux futurs enseignants de connaitre des méthodes et stratégies variées d'enseignement et 56,5 % considèrent qu'elle doit viser la maitrise des contenus mathématiques à enseigner au primaire. Il s'agit des composantes cognitive et méditative des pratiques (Robert, 2008) et des CMS et CPD (Ball *et al.*, 2008). Comme le mentionne l'EA_2[9], une bonne formation c'est: « *avoir une bonne vue d'ensemble des différents concepts enseignés au cours du primaire, permettre de développer la maitrise de ceux-ci en mettant en évidence les difficultés fréquentes des enfants, les prérequis, rappeler l'importance de la manipulation* ». Selon 39,1 % des EA, la formation mathématique vise aussi à développer chez l'étudiant une réflexion sur sa pratique, un questionnement sur le sens des concepts, processus et stratégies mathématiques afin de comprendre et d'anticiper les difficultés des élèves (composantes cognitive et personnelle, CPD). Cette information justifie la pratique réflexive, une des compétences professionnelles de la formation en enseignement (Desjardins, 2013; MEQ, 2001), mais aussi l'importance de l'activité mathématique chez le futur maitre (Proulx, Corriveau et Squalli, 2012).

4. Perceptions des enseignants associés au regard des compétences des étudiants

Les perceptions des EA reposent sur les pratiques effectives des étudiants stagiaires observées lors des stages et celles-ci représentent leur jugement sur ces pratiques. Au regard des composantes des pratiques (Robert, 2008), nos analyses révèlent que 61 % des EA considèrent que les étudiants sont bien préparés au métier d'enseignant et qu'ils savent moduler leur enseignement aux besoins et rythmes des élèves (78,3 %). Par ailleurs, selon eux, les étudiants prennent le temps de comprendre le raisonnement mathématique d'un élève lorsqu'il fait une erreur (73,9 %). En somme, pour 71,7 % des EA, les stagiaires enseignent avec facilité les mathématiques, savent anticiper les difficultés des élèves (60,9 %) et vérifient leurs démarches auprès des pairs afin de s'ajuster au besoin (17 %). L'ensemble de ces pratiques fait référence aux composantes cognitive, médiative, personnelle et sociale de Robert (2008) et prend appui sur les connaissances mathématiques pour l'enseignement de Ball *et al.* (2008). Concernant l'atteinte du niveau de compétences, 82,6 % des EA jugent que leurs stagiaires répondent aux exigences de la formation à l'enseignement des mathématiques. Toutefois, selon 26 % d'entre eux, un travail reste à accomplir, celui de faire des liens entre la réalité de la classe et les savoirs abordés au cours de la formation universitaire. Selon eux, l'expérience permettra de consolider certaines compétences ou certains savoirs, entre autres,

[9] La codification s'est effectuée ainsi: EA pour enseignant associé, suivi d'un numéro des répondants.

le lien théorie-pratique, l'enseignement et l'évaluation de la résolution de problèmes, la connaissance des difficultés des élèves et des outils liés à la tâche enseignante (programme, progression des apprentissages, matériel de manipulation).

VI. CONCLUSION

Les résultats de cette étude font ressortir les attentes et la satisfaction des étudiants et des EA au regard de la formation à l'enseignement des mathématiques. Le dispositif de formation à l'enseignement des mathématiques de l'UQAR propose aux étudiants une démarche personnelle leur permettant de prendre conscience de leurs lacunes et du travail à accomplir pour développer leurs compétences. Cette démarche réflexive favorise le développement d'attitudes professionnelles. Elle nécessite la prise en compte des diverses composantes liées à la pratique (cognitive, médiative, personnelle, institutionnelle et sociale) et à la maitrise des savoirs à enseigner. Dans cette optique, il est nécessaire d'avoir une bonne compréhension des contenus mathématiques (CMC et CHM) et didactiques (CPD) ainsi qu'une ouverture à la formation continue (CMS et CPD). Notre étude montre aussi la priorité à accorder à l'activité mathématique (CMC et CHM) chez le futur enseignant. «Faire faire des mathématiques aux futurs enseignants contribue à former les enseignants à se former eux-mêmes en mathématiques et à trouver des moyens d'y parvenir» (Proulx, Corriveau et Squalli, 2012, p. 336). Cette priorité est reconnue par les étudiants, les EA et les formateurs en didactique des mathématiques. Le dispositif de formation proposé à l'UQAR favorise une telle activité. Celle-ci doit être légitimement liée à la pratique enseignante (Robert, 2008) et doit tenir compte des types de connaissances mathématiques pour l'enseignement (Ball *et al.*, 2008). Ainsi, le rôle des EA dans la formation est indispensable afin de mieux contextualiser les concepts mathématiques abordés dans la formation didactique. Les étudiants percevront mieux leur utilité et leur portée dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Par conséquent, une meilleure articulation des formations prenant appui sur une véritable intégration de l'EA au processus de formation à l'enseignement des mathématiques favoriserait la contextualisation, indispensable au lien théorie-pratique (Desjardins, 2013).

RÉFÉRENCES

Adihou, A., Arsenault, C. & Marchand, P. (2012) Dispositif de formation à l'enseignement des mathématiques à l'UQAR: caractéristiques, résultats et impacts. In J.-L. Dorier & S. Coutat (Eds.), *Enseignement des mathématiques et contrat social: enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du 5e Colloque Espace Mathématique Francophone* (pp. 260-279). Genève: Université de Genève. Repéré à http://emf.unige.ch/files/3614/5320/1461/EMF2012GT2ADIHOU.pdf

Adihou, A., Arsenault, C. & Marchand, P. (2006) Réflexion sur un dispositif de formation pour le développement de compétences en mathématiques chez les futurs maitres. In N. Bednarz & C. Mary (Eds.), *L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés - Acte du 3e colloque international Espace mathématique francophone* [Cédérom]. Sherbrooke: Éditions du CRP. Repéré à http://emf.unige.ch/files/2314/5388/8555/EMF2006_GT2_Adihou.pdf

Adihou, A. & Arsenault, C. (2012) Dispositif de formation mathématique pour les enseignants du primaire: choix, caractéristiques, résultats et impacts. In J. Proulx, C. Corriveau & H. Squalli (Eds.), *Formation mathématique des enseignants de mathématiques: pratiques, orientations et recherches* (pp. 225-253). Québec: Presses de l'Université du Québec.

Arsenault, C. (2010) Le spectre de la maitresse d'école: conceptions et résistances au développement des compétences professionnelles des enseignants en mathématiques. In J. Proulx & L. Gattuso (Eds.), *Formation des enseignants en mathématiques: tendances et perspectives actuelles* (pp. 121-124). Sherbrooke: Éditions du CRP.

Ball, D.L., Thames, M.H. & Phelps, G. (2008) Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.

Bednarz, N. (2012) Formation mathématique des enseignants – état des lieux, questions et perspectives. In J. Proulx, C. Corriveau & H. Squalli (Eds.), *La formation mathématique pour l'enseignement des mathématiques* (pp. 13-54). Québec: Presses de l'Université du Québec.

Barioni, R. (2012) Formation initiale et enseignement des mathématiques: regard sur le travail de l'étudiant-stagiaire par le formateur en institution et le formateur de terrain. *Revue des Hautes écoles pédagogiques et institutions assimilées de Suisse romande et du Tessin, Varia,* 14, 197-219.

Clivaz, S. (2011) *Des mathématiques pour enseigner: analyse de l'influence des connaissances mathématiques d'enseignants vaudois sur leur enseignement des mathématiques à l'école primaire.* Thèse de doctorat, Université de Genève, Genève. Repéré à http://archive-ouverte.unige.ch/unige:17047

Conne, F. (1999) Faire des maths, faire faire des maths, regarder ce que ça donne. In G. Lemoyne & F. Conne (Eds.), *Le cognitif en didactique des mathématiques* (pp. 31-69). Montréal: Les Presses de l'Université de Montréal.

DeBlois, L. (2010) Développer une formation à l'enseignement: trois entrées possibles. In J. Proulx & L. Gattuso (Eds.), *Formation des enseignants en mathématiques: tendances et perspectives actuelles* (pp. 31-36). Sherbrooke: Éditions du CRP.

Desjardins, J. (2013) Des étudiants résistants? Mais qu'en est-il des dispositifs de formation? In M. Altet, J. Desjardins, R. Étienne, L. Paquay & P. Perrenoud (Eds.), *Former des enseignants réflexifs – Obstacles et résistances* (pp. 24-38). Bruxelles: De Boeck.

Gervais, C. & Correa Molina, E. (2011) Se former professionnellement par la pratique: une dynamique individuelle et collective. *Revue des sciences de l'Éducation*, 37(2), 231-236.

Gervais, C. & Desrosiers, P. (2005) *L'école, lieu de formation d'enseignants. Questions et repères pour l'accompagnement de stagiaires*. Québec: Les Presses de l'Université Laval.

Giroux N. (2003) L'étude de cas. In Y. Giordano (Ed.), *Conduire un projet de recherche. Une perspective qualitative* (pp. 41-84). Paris: Édition EMS.

Huberman, A.M. & Miles, M.B. (1991) *Analyse des données qualitatives. Recueil de nouvelles méthodes*. Bruxelles: De Boeck Université.

Karsenti, T. & Demers, S. (2000) L'étude de cas. In T. Karsenti & L. Savoie-Zajc (Eds.), *Introduction à la recherche en éducation* (pp. 225-247). Sherbrooke: Éditions du CRP.

Lajoie, C. & Barbeau, E. (2000) Des cours de mathématiques pour les futurs enseignants et enseignantes du primaire. In E. Simmt, B. Davis & J.G. McLoughlin (Eds.), *Actes de la 24e rencontre annuelle du Groupe canadien d'étude en didactique des mathématiques* (pp. 35-41). Edmonton: Groupe canadien d'étude en didactique des mathématiques *(GCEDM)*.

Marchand, P. (2010) Quelle formation mathématique en formation des maitres au primaire et en adaptation scolaire et sociale. In J. Proulx & L. Gattuso (Eds.), *Formation des enseignants en mathématiques: tendances et perspectives actuelles* (pp. 31-36). Sherbrooke: Éditions du CRP.

Masselot, P. & Robert, A. (2012) Dynamiques des pratiques enseignantes et double approche didactique et ergonomique. In M. Altet, M. Bru & C. Blanchard-Laville (Eds.), *Observer les pratiques enseignantes* (pp. 69-81). Paris: L'Harmattan.

Ministère de l'Éducation (2001) *La formation à l'enseignement. Les orientations. Les compétences professionnelles.* Québec: Gouvernement du Québec.

Morin, M.-P., Theis, L. & Francoeur-Rosa, J. (2012) Intégrer les connaissances mathématiques et didactiques: le cas de la formation en enseignement au préscolaire et au primaire de l'Université de Sherbrooke. In J.-L. Dorier & S. Coutat (Eds.), *Enseignement des mathématiques et contrat social: enjeux et défis pour le 21e siècle - Actes du 5e Colloque Espace Mathématique Francophone* (pp. 195-205). Genève: Université de Genève. Repéré à http://emf.unige.ch/files/6314/5320/1207/EMF2012GT1MORIN.pdf

Mucchielli, R. (2006) *L'analyse de contenu des documents et des communications* (9e éd.). Issy-les-Moulineaux, France: Les Éditions ESF.

Perez-Roux, T. (2012) Introduction. In T. Perez-Roux (Ed.), *La professionnalité enseignante. Modalités de construction en formation* (pp. 11-18). Rennes: Presses universitaires de Rennes.

Portelance, L. (2008) L'apport attendu des enseignants associés à la formation des stagiaires. In M. Boutet & J. Pharand (Eds.), *L'accompagnement concerté des stagiaires en enseignement* (pp. 53-71). Québec: Presse de l'Université du Québec.

Proulx, J., Corriveau, C. & Squalli, H. (2012) Conclusion. In J. Proulx, C. Corriveau & H. Squalli (Eds.), *La formation mathématique pour l'enseignement des mathématiques: pratiques, orientations et recherches* (pp. 335-346). Québec: Presses de l'Université du Québec.

Proulx, J. (2010) Reconnecter les futurs enseignants avec les mathématiques du secondaire: travailler autour de conceptualisations riches en «faisant» des mathématiques. In J. Proulx & L. Gattuso (Eds.), *Formation des enseignants en mathématiques: tendances et perspectives actuelles* (pp. 129-152). Sherbrooke: Éditions du CRP.

Proulx, J. & Bednarz, N. (2009) Quelle formation mathématique pour les futurs enseignants du secondaire? Un éclairage fondé sur une analyse des recherches. In A. Kuzniak & M. Sokhna (Eds.), *Enseignement des mathématiques et développement: enjeux de société et de formation - Actes du 4e colloque international Espace Mathématique Francophone* (pp. 129-142). LIENS, numéro spécial. Repéré à http://emf.unige.ch/files/6014/5322/1761/EMF2009_GT1_Proulx_Bednarz.pdf

Robert, A. (2008) La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques d'enseignants de mathématiques. In F. Vanderbrouck (Ed.), *La classe de mathématiques: activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp. 59-68). Toulouse: Éditions Octares.

Robert, A. (2001) Les recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l'exercice du métier enseignant. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 21(1.2), 57-80.

Roditi, E. (2013) Le métier d'enseignant et l'éclairage de la recherche collaborative. In N. Bednarz (Ed.), *Recherche collaborative et pratique enseignante* (pp. 350-363). Paris: L'Harmattan.

Roditi, E. (2008) Des pratiques enseignantes à la fois contraintes et personnelles, et pourtant cohérentes. In F. Vanderbrouck (Ed.), *La classe de mathématiques: activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp. 73-93). Toulouse: Éditions Octares.

Roditi, É. (2005) *Les pratiques enseignantes en mathématiques – entre contraintes et liberté pédagogique.* Paris: L'Harmattan.

Savoie-Zajc, L. (2000) La recherche qualitative/interprétative en éducation. In T. Karsenti & L. Savoie-Zajc (Eds.), *Introduction à la recherche en éducation* (pp. 171-198). Sherbrooke: Éditions du CRP.

Shulman, L.S. (1987) Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.

Shulman, L.S. (1986) Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.

DIFFFERENTS LEVIERS POUR DES FORMATIONS DE PROFESSEURS DES ECOLES INITIÉES AU SEIN D'UN LEA[1]

BLANCHOUIN[*] Aline – MOUNIER[**] Eric – GRAPIN[***] Nadine – SAYAC[****] Nathalie

Résumé – Le *LéA*[1] que nous portons est centré sur les pratiques évaluatives. Il fonctionne à partir de trois dispositifs de recherche-formation (continue) pour des professeurs des écoles de cycle 2. Dans cette communication, nous présentons le projet scientifique puis la spécificité de chacun des dispositifs. La troisième partie est l'occasion d'une mise en perspective de deux des trois dispositifs. Après avoir précisé la méthodologie mobilisée, nous nous centrerons sur ce qui a émergé de commun en termes de principes de formation.

Mots-clefs : Formation, Professeur des écoles, Recherche, Evaluation, Mathématiques

Abstract – Three vocational training will be carried out at the same time within the framework of a *LéA*[1] centered on the assessment practices in classroom and external assessments of knowledge of the pupils. They associate researchers and school teachers from the same geographical place. These three vocational training pursue the same general objectives but the way to reach them are different. The purpose of the communication is to present an analysis from these three device.

Keywords: Vocational training, School teacher, Research, Assessment, Mathematics

I. INTRODUCTION

Les LéA (Lieux d'Education Associés) sont « définis dans le programme scientifique de l'IFÉ (Institut français de l'éducation) comme des lieux à enjeux d'éducation, rassemblant un questionnement des acteurs, l'implication d'une équipe de recherche, le soutien du pilotage de l'établissement, et la construction conjointe d'un projet dans la durée. ». Un LéA est contractualisé pour 3 ans (renouvelable). Le LéA EvalnumC2[2] a débuté en juin 2016 et concerne les classes de cycle 2[3] de quatre écoles du REP[4] Lenain de Tillemont de Montreuil (Seine-Saint-Denis, France). En tout une vingtaine de professeurs des écoles (PE) de CP (Cours Préparatoire, grade 1) et CE1 (Cours Elémentaire 1re année, grade 2) ainsi que quatre enseignants-chercheurs (les auteurs de ce texte) sont impliqués dans des actions de recherche et de formation. Notre intervention à EMF 2018 vise à décrire et analyser les différents dispositifs[5] de recherche-formation du LéA. Il s'agit de comparer, en particulier, les leviers de formation utilisés par chacun en fonction de leur contribution au projet scientifique.

Dans un premier temps, nous présentons les objectifs de recherche du LéA et son fonctionnement général. Puis (2e partie), nous élaborons une problématique au regard de la thématique du GT1 relative à la formation des enseignants. Enfin (3e partie), nous apportons des éléments de réponse en nous focalisant sur deux des trois dispositifs du LéA.

---

[1] Lieux d'Education Associés encadrés par l'IFE (Institut Français de l'Education) http://ife.ens-lyon.fr/lea

[*] CREAD, Université de Rennes – France – aline.blanchouin@espe-bretagne.fr
[**] LDAR, Université-Paris-Est-Créteil – France – eric.mounier@u-pec.fr
[***] LDAR, Université-Paris-Est-Créteil – France – nadine.grapin@u-pec.fr
[****] LDAR, Université-Paris-Est-Créteil – France – nathalie.sayac@u-pec.fr

[2] Evaluation (Eval) des connaissances numériques (Num) des élèves de Cycle 2 (C2). Correspondants IFE : Elodie Foussard et Zola Zemrani, Conseillères Pédagogiques de la Circonscription (CPC) de Montreuil 1 (Seine-Saint-Denis).

[3] Elèves âgés de 6 à 9 ans des classes de Cours Préparatoire (CP), Cours élémentaire 1re année (CE1) et Cours élémentaire 2e année (CE2).

[4] Réseau d'Education Prioritaire. http://www.education.gouv.fr/cid187/l-education-prioritaire.html.

[5] « Un terme qui met en valeur l'interrelation entre l'offre et l'usage et la mise en adéquation des formes d'interventions prévues par les concepteurs avec les comportements effectifs des publics destinataires » Albéro (2010).

II. CONTEXTE DES FORMATIONS : OBJECTIFS ET FONCTIONNEMENT

1. Les connaissances des élèves sur le nombre et la formation sur l'évaluation

L'évaluation est une question vive faisant l'objet de plusieurs recommandations institutionnelles récentes. Or, les pratiques évaluatives des PE sont reconnues comme complexes et dépendant de différents paramètres externes (injonctions ministérielles, projets d'école, attentes des parents, etc.) et internes (hétérogénéité, absentéisme, etc.). Alors que les enseignants disent dépenser beaucoup de temps pour évaluer leurs élèves, ils le font majoritairement de façon sommative avec, en mathématiques, des tâches peu complexes (Sayac, 2016), qui s'avèrent généralement peu exploitées dans une perspective d'apprentissage (rapport IGEN, 2013, Sayac, 2016). Par ailleurs, les élèves de l'école primaire présentent de nombreuses difficultés sur le nombre (évaluations nationales CEDRE, 2014), qui perdurent et se retrouvent en fin de collège (Dalibard & Arzoumanian, 2015).

De manière plus précise, des recherches menées en didactique des mathématiques au cycle 2 (Mounier, 2017, pour le CP) montrent l'hétérogénéité des connaissances des élèves en numération mais ne donnent pas une vue de l'ensemble du champ conceptuel du nombre et des opérations. La méthodologie d'analyse de la validité et le modèle d'analyse des connaissances numériques des élèves de fin d'école développés par Grapin (2015) répondent à ce manque et peuvent permettre aux enseignants de concevoir des évaluations diagnostiques avec une visée formative.

Complémentairement, l'activité évaluative (Jorro, 2016) du PE lorsqu'il enseigne les mathématiques, peut être interrogée depuis le quotidien de sa journée de classe (Blanchouin, 2015), c'est-à-dire depuis la nécessité de tenir la multi prescription « à faire apprendre et à évaluer » dans toutes les disciplines. Dans cette perspective, l'enseignant lors de l'interaction avec les élèves, est amené à réaliser des compromis opératoires entre logiques d'actions épistémiques, pragmatiques et relationnelles (Vinatier, 2013). De plus, ces compromis sont le fruit de coûts cognitifs mais aussi socio-affectifs, matériels et temporels engagés dès la préparation (emploi du temps ; contenu et déroulé de séance).

L'ensemble de ces éléments a mené les chercheurs à vouloir étudier et enrichir les pratiques évaluatives des PE concernant l'enseignement du nombre au cycle 2 : quelles évaluations le PE conçoit-il ? Comment ? Pour quels usages ? Comment les ressources utilisées par le PE influencent-elles le contenu des évaluations ? Quel rôle jouent les éléments constitutifs de l'exercice de sa polyvalence ? Nous avons souhaité intégrer aux questions sur les pratiques évaluatives des questions portant directement sur les connaissances des élèves sur le nombre et sur la façon dont elles pouvaient être évaluées : quelles tâches d'évaluation proposer pour concevoir une évaluation valide ? Quelles sont les connaissances des élèves de fin CP sur le nombre ? Peut-on interpréter les réponses des élèves en les liant à l'enseignement dispensé ?

Ces constats concernant la fragilité des connaissances des élèves et le peu de formation sur l'évaluation sont partagés au sein du REP. Ils poussent les professeurs à approfondir leur réflexion dans ces domaines. L'objectif opérationnel est de créer des outils communs d'évaluation en collaboration avec des chercheurs permettant ainsi aux PE d'asseoir leurs décisions collectives sur un cadre théorique et de faire évoluer leurs représentations et leurs propositions pédagogiques en mathématiques.

2. Problématique de recherche et lien avec des questions du terrain

Les travaux que nous avons déjà menés nous amènent à considérer les pratiques évaluatives des PE en relation avec les connaissances des élèves, l'enseignement dispensé en mathématiques et la place de cette discipline parmi toutes celles enseignées. Notre projet (figure 1) vise donc non seulement à concevoir une évaluation externe valide permettant de dresser un état des lieux des connaissances des élèves sur le nombre au cycle 2, mais aussi, pour les PE, de concevoir des évaluations pour leur classe. L'évaluation externe (axe 1) permet d'étudier la robustesse d'une ressource et les usages que les PE en font (axe 2) et servira également d'outil pour enrichir les pratiques d'évaluation des PE (axes 3 et 4).

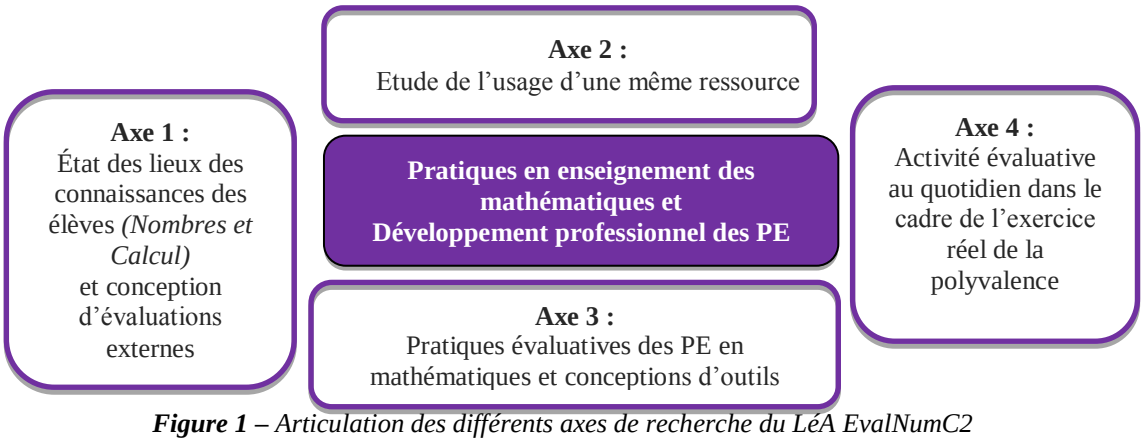


***Figure 1** – Articulation des différents axes de recherche du LéA EvalNumC2*

Ces axes de recherche ont conduit à la composition de trois collectifs mixtes d'enseignants-chercheurs et de professeurs des écoles [EC-PE] qui partagent la même visée de développement professionnel des enseignants engagés, dans ce que nous allons nommer pour la suite de la communication, une formation. Ce changement sémantique permet de mettre l'accent, pour cette communication, sur la dimension formative des dispositifs de recherche-formation.

3. Description des trois formations en 2e année (2017-2018)

Les formations ont été précédées d'une année où EC et PE se sont côtoyés de manière différente selon les collectifs, ce qui a engagé des négociations différentes sur les objectifs de formation et influé les objets et le cadre des collaborations. C'est ce que nous précisons à présent.

Formation 1. Le collectif (1) est composé de douze PE de CP du REP+ et de trois chercheurs (Nadine Grapin et Eric Mounier en didactique des mathématiques ; Aline Blanchouin en Sciences de l'éducation)

Les douze classes de CP (effectif maximum de 14 élèves par classe) suivent la ressource Mon Année de Maths CP (Mazollier, Mounier & Pfaff, 2016) qui adopte le nouvel itinéraire d'apprentissage sur le nombre élaboré dans le cadre d'une thèse en didactique des mathématiques (Mounier, 2010). Six enseignants de ce collectif ont en outre déjà suivi cette ressource l'année précédente, sans qu'il y ait de dispositif de formation : les rencontres étant alors consacrées à la remontée d'informations sur l'emploi de la ressource. Le dispositif mis en place en 2017-2018 se décline en 6 rencontres de 3 heures environ où sont présents tous les PE et au moins deux chercheurs en didactique des mathématiques, Nadine Grapin et Eric Mounier. Aline Blanchouin (Sciences de l'éducation) accompagne l'analyse des pratiques à partir de vidéos de séances ordinaires réalisées par les PE du REP+. L'objectif est de questionner les pratiques de chacun pour les enrichir. Les chercheurs (ici en position de

formateur) indiquent la séance sur laquelle la réflexion va être menée, séance issue de la ressource suivie et qui a déjà été conduite par chacun auparavant. Le dispositif évolue tout au long de l'année. Au début les discussions sont menées en petits groupes (deux ou trois de 4 à 6 PE) dans lequel un chercheur régule les échanges : chaque petit groupe doit réaliser une synthèse des discussions dont il doit rendre compte aux autres. Les enregistrements audios sont réalisés. Certains points sont dégagés qui permettent de proposer un thème pour la rencontre suivante. Après quelques rencontres de ce type, les participants se filment, toujours concernant une même séance (même scénario *a priori*). Les extraits des vidéos sont choisis par les formateurs pour alimenter et orienter les rencontres qui suivent.

Formation 2. Le collectif (2) est composé de trois PE de CE1, d'un PE de CP et de deux chercheurs (Eric Mounier en didactique des mathématiques et Aline Blanchouin en Sciences de l'éducation)

Le collectif a évolué par rapport à l'année 1, de par les changements de situations professionnelles des PE (changement de niveau de classe ; mutation) et le besoin ressenti de la présence d'un chercheur en didactique des mathématiques pour mieux comprendre les obstacles épistémiques des élèves. Car, l'an passé, en se centrant sur une dimension de l'activité évaluative dénommée « le regard au jour le jour sur les élèves », le collectif avait abouti à la définition suivante du geste quotidien évaluatif à visée formative : un couple d'actions [identifier l'activité des élèves-réguler] qui s'actualise dans un environnement matériel, temporel, humain et spatial dont les caractéristiques sont le produit de choix de variables relatives à la transposition didactique et aux modalités de la forme scolaire. Si le dispositif de formation (hors temps scolaire) général procède toujours de la méthode de la clinique de l'activité (observations/tournages, entretiens individuel, croisé et collectif à partir des enregistrements vidéo et de photos à chaque période de l'année scolaire), ont été contractualisés en début d'année 2, de mener une séance « nombres et calculs » lors des demi-journées de tournage et de privilégier la controverse lors des entretiens à partir des séances de mathématiques.

Formation 3. Le collectif (3) est composé de sept PE enseignant en CE1, d'une CPC et de deux chercheurs en didactique des mathématiques (Nathalie Sayac et Nadine Grapin).

Les professeurs des écoles volontaires qui composent ce collectif ont des expériences professionnelles variées, deux étant titulaires depuis la rentrée 2017, les autres étant plus expérimentés. Un entretien individuel a été mené avec chacun d'eux avant le début de la formation afin de repérer et caractériser leur « logique évaluative » (Sayac, 2017) et un second (similaire) a été réalisé à l'issue de la formation pour étudier les éléments de leur logique évaluative qui ont évolué ou pas (conception, jugement professionnel et didactique en évaluation, notation). Ce collectif s'est réuni 6 fois dans l'année autour d'une thématique de formation à l'évaluation déterminée de manière collaborative (évaluations communes, grilles d'évaluation, corrections, etc.). L'objectif est d'enrichir les pratiques évaluatives des PE engagés tout en permettant aux chercheurs de les analyser. Chacun des membres (PE, chercheurs, CPC) met à la disposition du collectif ses outils (Engeström, 2001) dans une visée de développement professionnel. Le partage de ces différents outils vise à amener le PE à réfléchir sur sa propre pratique et à concevoir des outils d'évaluation communs.

III. PROBLEMATISATION A PROPOS DE LA FORMATION CONTINUE

Nous constatons d'une part que les collectifs des trois formations sont composés de certains intervenants, encadrants et participants communs. Et d'autre part, que les EC sont aussi en position de formateur. Cependant, si les objectifs communs concernent les pratiques

d'enseignement des mathématiques, les objectifs spécifiques et les leviers de formation sont en fait sensiblement différents. Nous en rendons compte dans le paragraphe qui suit.

1. *La formation 1 : les connaissances des élèves en relation avec l'utilisation d'itinéraire cognitif commun proposant des leviers pour l'évaluation (même manuel scolaire)*

La formation aborde la compréhension de la nature des objets d'apprentissage concernant la numération. Le premier levier utilisé est l'emploi par tous d'un nouvel itinéraire d'enseignement pour l'apprentissage des écritures chiffrées au CP (Mounier, 2010). Les PE sont en effet confrontés à une approche didactique qui change la façon dont le savoir sur la numération est traditionnellement abordé et donc qui change potentiellement les conceptions des PE sur cet enseignement. La moitié des enseignants de la formation ont adopté l'année précédente la ressource qui porte ce nouvel itinéraire, les autres la découvrent. L'hypothèse pour la formation est que l'utilisation de cette ressource modifie effectivement les représentations des PE sur le contenu d'enseignement mais interroge aussi plus généralement les pratiques pédagogiques. La ressource, Mon Année de Maths, comporte en effet une approche ergonomique et constructiviste, que nous ne détaillons pas ici, qui invite les enseignants à mener des séances avec des situations-problèmes (Fénichel & Pfaff, 2004-2005) comportant une phase de mise en commun et d'institutionnalisation. Ce 1e levier lié à l'emploi de la ressource se conjugue à un 2e utilisé lors de la formation en 2017-2018. Il consiste à faire partager les expériences des PE concernant, au niveau local, la mise en place et le déroulement effectif de « mêmes » séances (même scénario *a priori* décrit dans la ressource) et, au niveau plus global, la programmation de la progression réellement adoptée. Les thèmes de ces rencontres sont négociés au fur et à mesure entre PE et formateurs-chercheurs : les évaluations externes effectuées l'année précédente (résultats et tâches), les phases de mise en commun et d'institutionnalisation des séances menées en classe. Ces séances ont été choisies aussi pour des raisons didactiques, visant des moments clés de l'avancée du savoir sur la numération.

2. *La formation 2 : analyser le geste évaluatif (en mathématiques) pour rendre moins chronophages et stressantes les activités relevant du remplissage des livrets*

La formation 2 vise à accompagner les PE à repérer, dans le contexte de l'exercice au quotidien de leur polyvalence, les différentes configurations de situations (Pastré, 2011) d'enseignement-apprentissage dans lesquelles se déploie leur activité évaluative et à en interroger les ressources mobilisées du métier (personnelles et triplement sociale selon Clot, 2008) à partir des compromis opératoires réalisés. Cela s'est traduit en 2016-2017 par des enjeux contractualisés autour de l'analyse de leur pratique professionnelle (au sens large), de la mutualisation des outils de travail (fiches, livrets, programmations…) et d'une problématique commune autour de comment faire de « l'évaluation un outil de progression des élèves ». S'est ajouté en 2017-2018, l'enjeu autour de l'appropriation d'une nouvelle ressource (Mon Année de Maths CE1). Ainsi, tout d'abord (année 1) l'objet de la collaboration a été de décrire puis d'interroger le geste évaluatif au quotidien à partir des observations de classes filmées de chacune des PE et de leur point de vue (trois strates d'entretiens post séance). La méthode a été proposée par le chercheur, et acceptée par les enseignantes polyvalentes de CP-CE1 (charte collaborative d'octobre 2016), afin d'œuvrer collectivement à formuler/expérimenter des solutions pour le problème professionnel formulé lors de notre prise de contact. Il s'agissait du constat de l'écart régulièrement perçu entre leurs attendus et les performances observées de certains élèves lors de la passation des tâches conçues pour l'évaluation finale (le plus souvent proposées pour remplir les livrets). Nous

avions ainsi retenu de nous centrer sur leur regard sur leurs élèves « au jour le jour » qualifié alors de « flou et de pas assez précis ». A présent, en 2017-2018, le travail s'est centré sur les mathématiques à partir de contextes variés d'échanges (individuel/collectif ; découverte/re-visionnage des images ; commentaires spontanés/interpellations…) autour de séances filmées. C'est l'occasion d'aborder le lien entre geste quotidien évaluatif à visée formative et le geste évaluatif en fin de période, à visée, lui informative (De Ketele, 2016) lorsqu'il s'agit de rédiger les livrets à partir des tâches proposées (qualifiées « d'artillerie lourde » par les PE).

3. La formation 3 : faire évoluer la pratique d'évaluation en mathématiques

Dans la formation 3 c'est l'évolution de la pratique d'évaluation en mathématiques qui est visée de manière spécifique, potentiellement porteur d'une évolution des pratiques plus générale (Sayac, 2017). L'approche prend en compte l'étude des différents épisodes évaluatifs constituant les pratiques évaluatives du professeur des écoles, les tâches proposées durant ces épisodes, le contrat didactique en évaluation adopté, la logique de conception des évaluations proposées, son jugement professionnel en évaluation ainsi que la notation qu'il a adoptée (Sayac, 2017). Ces éléments sont non seulement explicités aux PE au cours des séances de formation, mais sont aussi mobilisés pour étudier l'évolution de leurs pratiques. Les « productions évaluatives » des professeurs des écoles sont en particulier étudiées pour identifier l'évolution des tâches proposées. Les enseignants partagent leurs outils d'évaluations (tests, productions d'élèves, grilles, etc.) et les chercheurs proposent des évaluations externes, des résultats de la recherche, des outils d'analyse, etc.

IV. ANALYSE COMPARATIVE DES FORMATIONS 1 ET 2

Dans les formations 1 et 2, en fin de 1re année, chacun des collectifs a ressenti la nécessité de faire appel à un EC de l'autre discipline (mathématiques et Sciences de l'Education) : c'est ce que nous voulons comprendre ici. Le tableau 1 présente de façon synthétique les contextes de chacune des deux formations à partir des critères suivants : l'axe de recherche (objectif spécifique relatif au projet scientifique), la composition du collectif mixte, le statut de la formation pour les PE (obligatoire sur temps scolaire *vs* volontaire en hors temps scolaire contractualisé), la modalité d'introduction de l'enseignant chercheur en année 2 (entre chercheurs *vs* dans le collectif mixte) et les raisons du renouvellement des PE.

	Collectif 1 ***Axes 1 et 2***	Collectif 2 ***Axes 4***
	-PE de Rep + identifiés par la Cpc -Temps Scolaire : séances au plan de formation (3 à 4)	-PE de Rep repérés par Cpc et identifiés par EC -Hors Temps Scolaire : contractualisation de 6 périodes de rencontres à partir d'observations et d'entretiens
Année 1 **2016-2017**	EM-NG 6PE Cp	AB 5PE : 4 Cp + 1 Ce1
Année 2 **2017-2018**	EM-NG +AB *Discussions entre EC* 12 PE de Cp : 6+ 6 -Cadre des Cp dédoublés : augmentation du collectif de fait.	AB +EM *Discussions entre EC et entre les PE-AB* 4PE : 3 Cp et 3 Ce1. -Changement de niveau classe ; nouvelle arrivée sur proposition d'un PE ; choix de 2 PE de recourir à la ressource Math du chercheur

Tableau 1 *– Les 3 collectifs au service des 4 axes de recherche. Enseignants-Chercheurs : Aline Blanchouin (AB), Nadine Grapin (NG), Eric Mounier (EM) et Nathalie Sayac (NS)*

1. Méthodologie employée

Nous considérons que ce qui se passe tout au long de la collaboration (formation) comme un milieu (en référence à Guy Brousseau), soit « un système de contraintes et de ressources, aussi bien matérielles que symboliques » (Assude, Mercier & Sensévy, 2007, p. 226) dans lequel évoluent ici des EC et des PE. Dans cette filiation, nous avons choisi de transposer à la situation de formation, les trois descripteurs de l'action conjointe [professeur-élèves] en didactique comparée (Mercier, Shubauer-Léoni & Sensevy, 2002) qu'est le triplet des genèses -chronogénèse, mésogénèse et topogénèse. Le tableau 2, récapitule les indicateurs utilisés pour chacune de deux phases de collaboration distinguée.

Phases	Critères	Indicateurs
Initialisation de la collaboration / de la Formation	Espace-temps de contractualisation d'un objet commun	Existence ; temporalité ; méthode ; action conjointe
	Levier de départ de conception du dispositif	Stratégie ; outils ; objet commun de départ
	Analyse de pratiques	Entrée privilégiée au regard du triangle didactique ; références de la recherche
	Postures d'engagement de départ	Enjeux que chacun s'assigne dans la collaboration
Dispositif et Dynamique collective de la Formation	Sur quoi on « travaille ensemble »	Enjeux des séances et les objets de la pratique *« discutés »*
	Comment et avec quoi « on travaille ensemble »	Stratégie ; outil ; références communes ; lexique partagé
	Rapports PE/Chercheur-Formateur	Partage des responsabilités dans le travail : alternance tour de parole ; objet de prise de parole ; rôle dans le fonctionnement /la production de connaissances sur la pratique

Tableau 2 – *Grille d'analyse des deux dispositifs de recherche-formation*

2. Des principes communs au cœur de la dynamique collaborative des deux formations

Même si le traitement du matériau (enregistrements des séances de formation et de moments de classes) est en cours, nous pouvons déjà faire trois observations a), b), et c).

a) L'évolution de chacun des dispositifs de formation s'est faite par la dynamique de travail des collectifs mixtes. En effet, en année 1, l'analyse des pratiques enseignantes au cœur de chacun des dispositifs mettait en arrière-plan certaines dimensions du système didactique Savoir (S)-Enseignant (Ens)-Elèves (El), ce que montre le tableau 2.

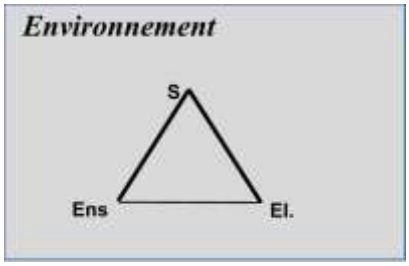
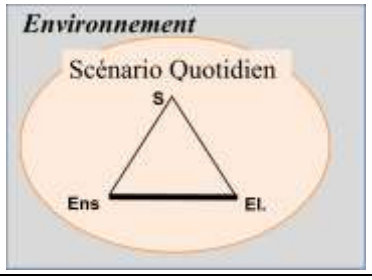
Formation 1	Formation 2
Les relations S-Ens. (via la ressource) et S-El. (via les tests) sont majorées. Les EC ne voulaient pas créer de perturbations dans l'usage de la ressource.	L'entrée par les S est minorée lors de la description des gestes d'interaction avec les élèves au bénéfice des « façons de faire de l'enseignant » et des dilemmes (y compris épistémiques) et aux motifs qui ont présidé l'arbitrage réalisé.
	

Tableau 3 – *L'entrée privilégiée de l'analyse de pratiques au cœur de chacun des dispositifs*

Or, en année 2, sous l'impulsion des échanges [EC-PE], ont dû être réintroduites : pour la formation 1, la gestion des phases orales collectives (mises en commun) et pour la formation 2, la nécessité que les gestes déployés lors de ces mêmes phases s'appuient sur des connaissances mathématiques relatives aux obstacles épistémiques rencontrés par les élèves. Pour chacune des formations, un rééquilibrage des relations de l'ensemble des dimensions du système didactique a été ainsi obtenu.

b) Le recours à un outil commun. La ressource Mon Année de Maths à la base de la formation 1, s'est invitée dans la formation 2 au fil des échanges de l'année 2. Elle est apparue au collectif comme un des leviers potentiels pour rendre l'activité de conception des tâches du livret moins chronophage et moins insatisfaisante. Malgré des fonctions différentes au départ, il nous apparaît que, pour chacun des collectifs, la ressource joue un même rôle de facilitateur pour produire du sens commun en introduisant un référentiel de construction de scénario de séquence à partir duquel controverser et un vocabulaire partagé pour le faire.

c) La vigilance à faire un lien avec les résultats de la recherche. Dans la formation 1, les résultats de recherche (l'itinéraire cognitif proposé dans la ressource) ont été insufflés dès le départ et ont servi en fin d'année 2, à éclairer les PE (sur leur demande) sur les différences avec d'autres manuels. Pour la formation 2, c'est seulement en fin de premier semestre qu'ont été introduits par l'EC les quatre analyseurs de l'activité évaluative de Jorro (2016) et les six modes d'étayage de Bruner afin d'outiller le repérage du geste évaluatif que le collectif venait de définir ensemble. On le voit, les temporalités de recours à des références théoriques n'est pas tout à fait la même, en revanche, ces références, une fois introduites sont manipulées régulièrement afin de devenir des leviers pour les pratiques des PE.

V. CONCLUSION

Il nous semble que l'étude du lien entre formation et recherche collaborative est une voie à investiguer pour :

- penser des dispositifs de formation continue qui se saisissent des contextes de travail au quotidien comme « lieu potentiel d'apprentissage » (Mayen, 2018),

- asseoir l'idée que la dimension formative est constitutive d'une recherche collaborative. Ce qui engage une réflexion d'une part sur les transformations des pratiques visées des PE mais aussi des chercheurs, et d'autre part sur l'ingénierie à mettre en œuvre, en lien avec le cadre théorique et méthodologique de la recherche.

REFERENCES

Albéro, B. (2010). La formation en tant que dispositif : du terme au concept. *La technologie de l'éducation : recherches, pratiques et perspectives*, 47-59.

Assude, T., Mercier, A. & Sensévy, G. (2007). L'action didactique du professeur dans la dynamique des milieux. *Recherches en didactique des mathématiques*, 27/ 2, 221-252

Blanchouin, A. (2015). *La journée de classe de l'enseignant polyvalent du primaire : étude sur une année scolaire du cours d'action quotidien en cours préparatoire.* Thèse de doctorat. Université Paris 13, Paris.

Clot, Y. (2008). *Travail et pouvoir d'agir*. Paris : PUF.

Dalibard, E. & Arzoumanian, P. (2015). CEDRE 2014. Mathématiques en fin de collège : une augmentation importante du pourcentage d'élèves de faible niveau. *Note d'information*, 19, MEN - DEPP.

De Ketele, J-M (2016). L'évaluation et ses nouvelles tendances, sources de dilemmes. *Education Permanente,* 208(3).

Engeström, Y. (2001). Expansive learning at work: Toward an activity theoretical reconceptualization. *Journal of Education and Work*, 14, 133–156.

Fénichel, M. & Pfaff, N. (2004-2005). *Donner du sens aux mathématiques.* (2 tomes) Paris : Bordas.

Grapin, N. (2015). *Étude de la validité de dispositifs d'évaluation et conception d'un modèle d'analyse multidimensionnelle des connaissances numériques des élèves de fin d'école.* Thèse de doctorat. Université Paris-Diderot, Paris.

Jorro, A. (2016). Se former à l'activité évaluative. *Education Permanente,* 208/2016-3, 53-64.

Mayen, P. (2018). S'écarter du travail pour mieux l'apprendre. Une réflexion pour l'ingénierie de formation en situation de travail et pour la conception d'organisations apprenantes. *Education permanente*, 216/2018-3, 141-158.

Mazollier, M-S., Mounier, E. & Pfaff, N. (2016 et 2017). *Mon année de Maths CP et CE1*. Fichier élève et manuel pédagogique pour l'enseignant. Paris : Editions SED.

Mercier, A., Shubauer-Léoni, M-L. & Sensevy, G. (2002). Vers une didactique comparée. *Revue Française de Pédagogie*, 141, 5-16

Mounier, E. (2010). *Une analyse de l'enseignement de la numération au CP. Vers de nouvelles pistes.* Thèse de doctorat. Université Paris-Diderot, Paris.

Mounier, E. (2017). Nouveaux outils d'analyse des procédures de dénombrement pour explorer leur lien avec la numération écrite chiffrée et la numération parlée. *Recherches en didactique des mathématiques,* 36(3), 347-396

Pastré, P. (2011). *La didactique professionnelle. Approche anthropologique du développement chez les adultes.* Paris : PUF.

Sayac, N. (2016). Nature et diversité des tâches mathématiques proposées en évaluation sommative par des professeurs des écoles, en France *In Actes du XXVIIIème Colloque de l'ADMEE- Lisbonne-13-15 janvier 2016.*

Sayac, N. (2017). *Approche didactique de l'évaluation et de ses pratiques en mathématiques : enjeux d'apprentissages et de formation.* Habilitation à Diriger des Recherches. Université Paris-Diderot, Paris.

Rapport IGEN 2013 (2013). La notation et l'évaluation des élèves éclairées par des comparaisons internationales. *Rapport n°2013-072.*

Vinatier, I. (2013). *Le travail de l'enseignant. Une approche par la didactique professionnelle.* Bruxelles : De Boeck.

L'ÉVALUATION EN MATHÉMATIQUES DES PROFESSEURS DES ÉCOLES DÉBUTANTS : QUELLES ALTERNATIVES FACE AUX CONTRAINTES DE LA FORMATION ?

CELI[*] Valentina – MASSELOT[**] Pascale – TEMPIER[***] Frédérick

Résumé – En France, depuis la masterisation, une des tâches qui incombe au formateur d'enseignants consiste à évaluer les connaissances acquises par les formés. À travers l'analyse des diverses modalités et des contenus d'évaluations conçues par des formateurs de professeurs des écoles, nous cherchons à identifier certaines raisons des choix effectués ainsi que les potentialités de différentes épreuves, en lien plus ou moins direct avec l'exercice du métier.

Mots-clefs : évaluation, enseignants, formation, connaissance pour enseigner, vigilance didactique.

Abstract – In France, one of the tasks of the teacher trainer is to evaluate the knowledge acquired by the trainees. Through the analysis of the various modalities and contents of assessments designed by teacher trainers, we seek to identify some reasons for the choices made and the potentialities of different tests, in more or less connection with the teaching profession.

Keywords: evaluation, teachers, training, knowledge to teach, didactic vigilance

I. PROBLÉMATIQUE, CADRE THÉORIQUE ET MÉTHODOLOGIE

Cette étude vise à analyser l'une des tâches du formateur en mathématiques lorsqu'il intervient dans le cadre de la seconde année de master MEEF (Métiers de l'Enseignement, de l'Éducation et de la Formation) en France, tâche qui consiste à évaluer l'unité d'enseignement relative aux mathématiques. À travers l'analyse des diverses modalités et des contenus d'évaluations conçues et mises en œuvre par des formateurs de Professeurs des écoles, nous cherchons à identifier, d'une part, certaines raisons des choix effectués par les formateurs, d'autre part, les connaissances à mobiliser pour réaliser les tâches proposées ainsi que le potentiel de ces évaluations en lien plus ou moins direct avec l'exercice du métier de Professeur des écoles. Nous nous appuyons sur le cadre de la double approche didactique et ergonomique (Robert et Rogalski, 2002). Pour rendre compte du système à la fois complexe et cohérent des pratiques du professeur de mathématiques, ce cadre théorique se propose en général de partir d'observations de déroulements en classe en vue de reconstituer les choix réalisés par le professeur (composantes cognitives et médiatives) en lien avec les apprentissages potentiels des élèves, puis de les mettre en relation avec d'autres déterminants du métier de professeur (composantes personnelles, sociales, institutionnelles). Dans cette étude, les « élèves » sont des professeurs des écoles en formation[1] et leur « activité » met en jeu à la fois des connaissances pédagogiques, didactiques et mathématiques (Houdement, 2013). Tout comme Sayac (2002), nous mobilisons ce cadre théorique pour étudier les pratiques de formateurs de mathématiques, que nous considérons donc comme des professionnels exerçant un métier, faisant des choix de préparation et de mise en œuvre de séances et soumis à des contraintes personnelles, sociales et institutionnelles. Ainsi, même si nous restreignons notre étude à un aspect particulier de l'activité du formateur, l'évaluation de ses étudiants, nous cherchons à investiguer, à partir des évaluations proposées aux étudiants, certains déterminants des pratiques des formateurs en vue de mieux comprendre la cohérence de leurs choix et de mettre en évidence la complexité de leur pratique. S'intéresser à l'évaluation nous amène à étudier, dans ce contexte particulier de la formation des

[*] Lab-E3D, Université de Bordeaux, COPIRELEM – France – valentina.celi@u-bordeaux.fr
[**] LDAR, Université de Cergy-Pontoise, COPIRELEM – France – pascale.masselot@u-cergy.fr
[***] LDAR, Université de Cergy-Pontoise, COPIRELEM – France – frederick.tempier@u-cergy.fr
[1] Professeurs des écoles stagiaires exerçant à mi-temps dans une classe

enseignants en France dans les ÉSPÉ[2], les composantes personnelles, sociales et institutionnelles du formateur (membre d'une équipe de formateurs du site ÉSPÉ). Nous identifions les modalités d'évaluation choisies (en accord avec les contraintes de la maquette de formation de l'université) et les contraintes et marges de manœuvre du formateur dans la conception de son évaluation. Les composantes cognitives et médiatives sont quant à elles approchées à travers le contenu de l'évaluation (corpus qui comprend un choix de tâches, la conception d'un corrigé, les critères d'évaluation retenus, un barème, etc.) et à travers sa mise en œuvre (modalités de travail des étudiants, exploitation des travaux, modes de correction, etc.).

Nous considérons qu'un enjeu essentiel de la formation est d'amener les professeurs à exercer une certaine vigilance didactique, c'est-à-dire « en amont de l'action en classe, pendant l'action en classe ou après la classe, une sorte d'ajustement didactique permanent de la part du professeur qui fait ainsi fonctionner des connaissances mathématiques et didactiques » (Charles-Pézard 2010, p. 210). Nous ne pouvons dire, *a priori*, si un certain niveau d'exercice de la vigilance didactique est un référent pour les formateurs pour évaluer positivement un étudiant, et donc si un des objectifs de l'évaluation serait d'apprécier son niveau d'exercice. De plus, alors que la notion de vigilance didactique est à l'origine très attachée à la pratique effective du professeur (en classe et hors classe), ici il s'agit de l'apprécier à travers une pratique au mieux « déclarée » du professeur. L'évaluation place les étudiants dans une situation « artificielle » plus ou moins proche de celle de la pratique effective.

Pour limiter notre étude, nous étudierons, dans les évaluations analysées, les items relatifs à la notion de variable didactique, notion qui semble faire consensus dans le milieu des formateurs. Nous faisons l'hypothèse qu'elle est effectivement travaillée en formation dans différents contextes et à travers différentes tâches. La réflexion sur les variables didactiques d'une situation (au sens large) lors de la préparation, de la mise en œuvre ou des prolongements, amène à mobiliser à la fois des connaissances pédagogiques, didactiques et mathématiques, et peut donc relever de, ou révéler un élément de l'exercice de la vigilance didactique. Nous cherchons ainsi, dans les tâches mettant en jeu plus ou moins explicitement la notion de variable didactique, incluses dans une évaluation plus large, les possibilités de mise en œuvre de la vigilance didactique et les traces effectives de son exercice dans les réponses des étudiants.

Comme il existe peu de données sur les modalités d'évaluation des étudiants en deuxième année de Master dans les ÉSPÉ, nous avons dans un premier temps cherché à nous donner une vision plus large des pratiques d'évaluation des formateurs. Pour cela, nous avons fait passer, en juin 2016, un premier questionnaire auquel ont répondu des formateurs issus de 20 ÉSPÉ différentes (sur les 32 ÉSPÉ de France). Les questions portaient notamment sur le nombre d'heures de formation en mathématiques, le nombre d'évaluations, la modalité d'évaluation utilisée. Nous avons alors sélectionné trois formateurs issus d'ÉSPÉ différentes et utilisant trois modalités d'évaluation différentes. Nous avons réalisé avec chacun d'eux un entretien individuel portant sur les modalités de conception de leurs sujets d'évaluation de l'année en cours, sur leurs contraintes et leurs marges de manœuvre afin de faire émerger certains aspects de leurs composantes personnelles, sociales et institutionnelles. Le choix des trois modalités d'évaluation est guidé par notre volonté de mettre en évidence des potentialités des sujets proposés pour évaluer les connaissances des étudiants. Pour chacun de ces sujets, nous avons sélectionné une copie d'étudiant évaluée positivement par le formateur, afin d'étudier ce qui peut se passer « dans le meilleur des cas ». Le sujet du troisième

[2] École Supérieure du Professorat et de l'Éducation : les instituts de formation des professeurs en France

formateur (Jules) étant un « vrai ou faux », nous n'avons pas vu d'intérêt à étudier la copie d'un étudiant. Signalons toutefois qu'une question de ce sujet porte sur la notion de variable didactique, en particulier sur sa définition[3]. Les attentes sont de l'ordre de la restitution de connaissances didactiques relatives à la notion de variable didactique. Les deux autres sujets constituent les sujets les plus représentatifs de ceux proposés dans les ÉSPÉ (le « dossier » et le « devoir »).

II. CONTRAINTES ET MARGES DE MANŒUVRE DES FORMATEURS

Les réponses au questionnaire montrent que le nombre d'évaluations en mathématiques peut varier de zéro à quatre alors que le nombre d'heures de formation se situe entre dix et vingt-neuf[4]. Ce n'est pas forcément là où il n'y a pas d'heures spécifiques de formation qu'il n'y a pas d'évaluation. Après quelques années de mise en place des ÉSPÉ, la modalité la plus utilisée est le contrôle continu (plutôt que le contrôle terminal). Les épreuves portent parfois, au choix, sur les mathématiques ou le français, par exemple selon le semestre ; dans quelques cas, il n'y a aucune épreuve sur les mathématiques.

Lorsque les épreuves sont écrites, il s'agit : soit d'un dossier qui comporte l'élaboration, la présentation et l'analyse (*a priori* et/ou *a posteriori*) d'une séquence, d'une séance, d'une situation d'enseignement ; soit d'un devoir sur table, en temps limité, ou d'un devoir maison portant sur l'analyse d'une séance ou d'une situation d'enseignement (des ressources pédagogiques, transcriptions de séances ou vidéos sont alors fournies par le formateur) et/ou de productions d'élèves ; soit d'un questionnaire de type « vrai ou faux ». Lorsque les épreuves se passent à l'oral, il s'agit alors d'un entretien portant sur une séquence préparée et mise en œuvre. Une variété se dégage en termes de modalités d'évaluation et de cadrage de ces modalités par rapport : à la nature du contrôle ; au nombre d'épreuves par semestre ; au choix d'une discipline autre que les mathématiques ; au nombre de pages dans le cas d'un devoir à la maison ou d'un dossier ; à la durée pour les devoirs sur table ; sur un semestre, sur les deux ou sur aucun des deux.

Il ne semble pas exister de véritables relations entre le nombre d'heures de formation et le format de l'évaluation. Quelques formateurs nous ont précisé que la modalité décrite n'était valable que pour l'année en cours. Il semblerait donc que les modalités d'évaluation ne soient pas encore stabilisées et varient dans les différentes ÉSPÉ d'une année à l'autre. C'est un point qui mériterait d'être questionné pour en comprendre les raisons.

Afin d'approfondir ce travail, nous avons mené des entretiens avec trois formateurs dont le statut est différent, qui appartiennent à des ÉSPÉ différentes et qui, disposant d'un nombre d'heures de formation identique (24 heures), utilisent des modalités d'évaluation différentes.

1. Le cas de Carole

Carole a en charge les dix groupes d'étudiants de M2 de son site de formation, Lors de chaque séance, un thème mathématique et une question professionnelle sont traités simultanément. Ce choix est propre à cette formatrice, la programmation n'est pas partagée avec les autres formateurs de son ÉSPÉ. Au second semestre, en contrôle continu, Carole propose une seule épreuve d'évaluation de mathématiques de type « dossier », comportant notamment l'analyse d'une « situation d'apprentissage » mise en œuvre par l'étudiant lors de

[3] « Une variable didactique est un élément de la situation qui peut être modifié par le maître, et qui affecte la hiérarchie des stratégies de résolution (par le coût, la validité, la complexité…) : vrai ou faux ? »

[4] Dans une seule ÉSPÉ, aucune heure n'est consacrée à la formation en mathématiques ; dans une seule ÉSPÉ, on y consacre cinquante heures, voire davantage.

son stage ou observée dans une autre classe. Ce choix est fait dans le but d'évaluer le réinvestissement des apports des TD[5] par rapport à une notion mathématique qui n'a pas été abordée en TD.

Les questions professionnelles abordées dans les séances de TD structurent le dossier (comportant huit à dix pages, hors annexes) ; un guide de travail est proposé ; le dossier doit ainsi comporter : une présentation de la séquence et les ressources utilisées ; une analyse *a priori* de la situation d'enseignement ; la préparation de la mise en commun, des éléments de synthèse, des modalités de différenciation, des détails sur les séances d'entraînement et les modalités d'évaluation ; une analyse de quelques productions d'élèves et des aides apportées ; une analyse des réussites et difficultés éprouvées par les élèves ; si besoin, une proposition d'amélioration de la situation. Le barème proposé reprend les différents items du guide de travail proposé. Le dossier correspond finalement à une fiche de préparation très détaillée accompagnée de justifications des différents choix et la réflexion porte sur le avant/pendant/après la classe.

2. Le cas de Sylvie

Responsable de l'UE[6], Sylvie conçoit les sujets et les corrigés, qui sont proposés aux étudiants de tous les sites de son ÉSPÉ. Il s'agit d'un sujet décliné par cycle sur un même « thème » mathématique. En contrôle continu et sur le temps d'une séance de TD de deux heures, les épreuves donnent lieu à deux notes pondérées différemment : une note (sur 14 ou 15) est attribuée à un travail de groupe et l'autre (sur 6 ou 5) à un travail individuel ; la compensation avec d'autres UE est possible mais un seuil en mathématiques est fixé à 7.

Il s'agit d'épreuves de type « devoir sur table » en temps limité comportant : un « support » pédagogique à analyser et une suite à proposer (par groupe de 4, en 1 h 30 min) puis une analyse de productions d'élèves ou une adaptation en lien avec ce qui précède (individuel, en 15 min). La grille de questionnement pour conduire l'analyse, exploitée durant les TD, reste à disposition des étudiants. Il s'agit de préparer un scénario, une organisation de différentes situations (ou séances) à partir des différents éléments proposés ; d'analyser *a priori* une tâche à partir de quelques éléments bien choisis (analyser le matériel, anticiper les procédures, les difficultés et erreurs, envisager des observables) ; de proposer une situation (dans la continuité des situations analysées, préparer les supports, les consignes …) ; d'analyser des productions d'élèves (les classer, trouver des points communs, puis revenir sur la consigne, le matériel proposé…).

Le choix est de ne pas « sacrifier » une séance et de faire en même temps « avancer le savoir », ceci en proposant un travail proche mais sur un contenu qui n'a pas encore été abordé en TD. Par la même occasion, il s'agit de « montrer la richesse du travail en groupe ». Cette évaluation a ainsi une double fonction : valider l'UE et permettre au formateur de mesurer l'écart « entre ce qui se dit dans les groupes et ce qui est restitué à l'écrit », puisque le formateur assiste, voire participe aux échanges dans chaque petit groupe.

3. Le cas de Jules

Le programme, établi collectivement, est le même sur tous les sites de l'ÉSPÉ où exerce Jules. Il est choisi dans le but de « traiter au minimum des thèmes importants avant de quitter la formation ». À chaque séance de TD, un thème différent est traité. Une seule épreuve d'évaluation de mathématiques, par an, est proposée à la fin du second semestre, en contrôle

[5] Travaux dirigés
[6] Unité d'Enseignement

continu ; la seconde session n'est pas envisagée mais la compensation est possible, à condition de ne pas avoir moins de 5 sur 20 (note éliminatoire).

Conçue collectivement et proposée lors de la dernière séance de l'année sur tous les sites, l'épreuve est constituée d'un test de type « vrai ou faux ? » en temps limité (trente minutes) en début de séance. Une phase collective de quatre-vingt-dix minutes est prévue tout de suite après. Le dispositif retenu permet d'éviter une évaluation finale avec un corrigé ; ou alors un dossier car, dans ce cas, « les étudiants se limitent à fournir des descriptions alors que des analyses seraient attendues ». L'évaluation ainsi conçue a une double fonction : elle valide l'UE (évaluation sommative) ; elle sert de « support et prétexte pour des retours réflexifs sur les savoirs professionnels relatifs aux mathématiques rencontrés en TD » (évaluation formative). La phase collective est vécue par Jules comme un « moment riche de questions de la part des étudiants » permettant de « renforcer la conscientisation des savoirs institutionnalisés au sein des TD ».

III. POTENTIALITÉS DES SUJETS D'ÉVALUATION

À la suite de l'analyse de ces premiers éléments « de contexte », nous proposons ici une sorte de zoom portant sur l'analyse de deux copies d'étudiants, une parmi les copies de Carole et l'autre parmi celles de Sylvie. Cette analyse, visant à dégager certaines potentialités de chacun des sujets, est centrée sur les tâches mettant en jeu explicitement ou implicitement la notion de variable didactique.

1. Analyse de la copie d'un étudiant pour le sujet de Carole de type « dossier »

La copie porte sur une séquence sur l'introduction de la technique de la soustraction posée au CE2. Elle respecte scrupuleusement les différentes rubriques du guide de travail proposé par le formateur. L'étudiante a choisi de travailler la technique de soustraction « par emprunt » et de justifier les retenues en lien avec la numération. L'analyse de ses fiches de préparation permet de repérer quelques choix en lien avec trois variables didactiques : la taille des nombres, la relation entre les deux nombres (mettant en jeu une retenue ou pas) et la possibilité d'utiliser un matériel ou pas. Ainsi, pour faire apprendre la soustraction posée, l'étudiante prévoit : de travailler la technique avec des petits nombres (65 – 23, 165 – 28), de faire apprendre d'abord la technique de la soustraction posée dans le cas sans retenue, avant d'étudier le cas avec retenue, et de permettre aux élèves d'utiliser la « manipulation » en laissant à disposition le matériel. Le jeu sur les deux premières variables didactiques pourrait relever d'un choix de progressivité du « simple au complexe ». Pour la troisième, il relève d'un choix lié à l'apprentissage de la technique avec nécessité d'introduire la retenue, que nous allons étudier plus en détail ensuite. Ces choix sont visibles à travers le contenu de ses fiches de préparation ou dans le dossier mais sont peu (ou pas) argumentés ou justifiés dans le dossier.

Dans la séance 3 d'introduction de la technique de soustraction avec retenue, le choix des valeurs de ces variables est particulièrement important pour amener les élèves à comprendre le statut de la retenue de la soustraction, conformément aux objectifs que se donne l'étudiante. La résolution d'un problème de type transformation d'état amène les élèves à effectuer la soustraction 165 – 28 et du matériel de numération (organisé en unités, dizaines et centaines) est donné pour « matérialiser » le nombre 165. Elle ne précise pas si les élèves ont par exemple 28 unités ou si le nombre d'unités de chaque ordre est au plus 9. Plusieurs procédures sont possibles : faire des échanges avec le matériel, décompter de 165 à 137, calculer en ligne ou mentalement, effectuer un calcul posé en s'inspirant de la technique sans retenue étudiée lors de la séance précédente. Seule la première est visée par l'enseignante.

Cela est amené par le fait de devoir donner 28 jetons à l'élève de son binôme (et pas seulement de calculer combien il reste à la fin). Ce qui est important est donc l'ordre des tâches : d'abord donner les jetons puis déterminer combien il reste (pas d'anticipation demandée, seulement un constat « sur » le matériel). Sans cette chronologie imposée, les élèves pourraient utiliser les autres procédures.

Dans son dossier, l'étudiante n'explicite pas ces éléments d'analyse *a priori* relatifs aux procédures susceptibles d'être mobilisées. Ne sachant pas si les effets de ces choix ont été anticipés, il est difficile de les attribuer à un exercice d'une vigilance didactique, surtout sans avoir accès au document de préparation (manuel, guide l'enseignant, …) sur lequel elle s'appuie, qui pourrait aider à mettre en évidence ou non certaines adaptations de la ressource.

L'étudiante fournit des éléments d'analyse du déroulement de sa séance qui sont exclusivement relatifs au travail des élèves (catégorisation des procédures utilisées, analyse de certaines difficultés). Il n'y a pas de lien explicite avec le choix des valeurs des variables didactiques, ni de questionnement de ces choix à la lumière du déroulement effectif. Dans l'analyse de la mise en commun de la séance (demandée dans le dossier), l'étudiante explique son choix *a priori* d'exploiter une procédure d'échange avec matériel en faisant le lien avec la technique de calcul posé pour « faire comprendre le sens de la retenue dans une soustraction ». Elle a donc identifié le lien entre le statut de la retenue dans la mise en œuvre de la technique qu'elle a privilégiée et les savoirs de numération qui le « justifient » (par la réalisation d'échanges avec le matériel). Cela peut expliquer son choix de proposer du matériel dans cette séance. Dans l'analyse du déroulement de sa séance, elle ne revient pas sur l'analyse des procédures et des arguments utilisés par les élèves en lien avec ses prévisions. Elle analyse des éléments qui sont plus de nature pédagogique (difficulté des élèves à expliquer, gestion du temps, souci d'obtenir l'écoute des élèves...). Elle justifie le choix des élèves interrogés dans la mise en commun (« pas de grandes difficultés avec l'échange entre les centaines, les dizaines, les unités »). Elle ne précise pas si d'autres procédures que celle des « échanges » sont apparues et comment sont prises en compte ou non ces éventuelles autres procédures. L'étudiante indique : « je leur ai expliqué ce qu'il fallait faire », ce qui laisse penser à une exploitation minimale ou inexistante des autres procédures. Il n'y a pas d'analyse précise de ce qu'il s'est effectivement passé (« nous avons réussi à réaliser ce qui était prévu »).

L'exercice de la vigilance didactique se manifeste principalement lors de l'analyse des productions des élèves mais cette dernière est peu mise en lien avec le choix des valeurs des variables didactiques. La notion de variable didactique est utilisée implicitement, « en actes », dans la préparation de l'étudiante et n'apparait pas comme un savoir didactique permettant d'argumenter les choix effectués. Ceci pourrait être lié à cette modalité d'évaluation par « dossier » qui semble amener l'étudiante à montrer les différents aspects de sa séquence, certainement en lien avec les contenus de la formation (utiliser un problème pour introduire une nouvelle notion, recueillir et faire expliciter les procédures, institutionnaliser, différencier, proposer des exercices d'entraînement…) mais sans entrer dans une justification de ses choix liés au contenu spécifique qui pourrait permettre d'identifier des traces d'exercice de la vigilance didactique.

2. *Analyse de la copie d'un étudiant pour le sujet de Sylvie de type « devoir » en temps limité*

L'étudiant a travaillé sur le sujet proposé pour le cycle 1 dans le domaine « Espace et Géométrie » (domaine commun aux trois sujets, un par cycle). Le devoir proposé au groupe consiste à : « à partir du document proposé, proposer un plan de séquence (deux pages

maximum) et analyser une des séances de cette séquence ». Le document proposé se trouve en annexe.

La dernière des six questions complémentaires communes aux trois sujets, porte spécifiquement sur l'identification des « variables didactiques (caractéristiques de la situation à modifier pour provoquer une évolution des procédures) ». Cependant l'élaboration de la séquence, à travers l'enchaînement des séances, voire des phases des séances, le choix des modalités de travail, des consignes, du matériel, des contraintes, l'anticipation des procédures, des modes de validation, etc. peut amener également à identifier les variables didactiques de la situation et à « jouer » sur leurs valeurs. Plus précisément dans le sujet « cycle 1 », « Les colonnes colorées »[7] (Problème 2 - Annexe), les documents proposés sont essentiellement descriptifs (liste du matériel, deux problèmes succinctement présentés et illustrés). Dans le cadre du travail individuel, ici une adaptation du second problème pour des élèves d'un autre niveau est demandée, ainsi qu'une question relative à l'enjeu de la situation. Cette tâche « adapter le problème à un autre niveau » devrait également amener à repérer et à choisir les valeurs des variables didactiques.

Le corrigé rédigé par le concepteur du sujet, à l'intention des étudiants ainsi que de tous les formateurs qui évalueront les copies de leurs étudiants, explicite les attentes et conforte cette première analyse des tâches proposées. En effet, dans la partie « Matériel », les variables, ainsi que les conséquences sur la tâche de l'élève de certains choix de leurs valeurs, sont citées : les hauteurs des colonnes (« les 5 colonnes ont toutes une hauteur différente »), les positions des colonnes (« elles sont posées verticalement »), le nombre de colonnes, le rôle des cartes nombres selon le problème, les bandelettes, les bonhommes. De même, dans la partie « stratégies », deux procédures sont évoquées dans le corrigé mais également : « les moyens pour « bloquer » une stratégie », donc un jeu sur les contraintes pour amener l'élève à résoudre le problème en mobilisant certaines connaissances. Les configurations de colonnes font également l'objet d'une analyse. Dans la partie « Variables didactiques » : la liste des variables et les conséquences des choix de certaines valeurs sont explicitement rédigés. Notons également que, dans ce corrigé, d'autres variables sont évoquées et le fait que ce ne sont pas des variables didactiques est argumenté. Dans la partie « autres situations de la séquence » : méso espace, position de « l'observateur », rôle de la prévision, « bloquer » la stratégie perceptive, simplifier/complexifier, nouvelle situation/nouveaux enjeux constituent également des éléments de réflexion incluant cette notion.

Dans la copie rendue par le groupe de quatre étudiants, la notion apparaît seulement dans la partie « variables didactiques », et ces dernières ne sont pas citées explicitement. Des éléments sont seulement listés en terme de simplification/complexification de la tâche qui peuvent être mis en relation avec des valeurs de certaines variables : le nombre de tours, les différences de hauteur (écarts) entre les tours, le nombre de points de vue, la présence du personnage, le support photo, les couleurs différentes ou non. Aucune justification en lien avec une anticipation des procédures n'est donnée. Dans le plan de séquence, ce qui change d'une séance à l'autre peut être lié à un jeu sur les valeurs de certaines variables comme : passage d'un alignement de tours à des tours posées sur un quadrillage. Il y a bien un jeu sur le support qui est prévu mais il est difficile de l'interpréter en termes de variable didactique en l'absence d'explicitation, de justification en lien avec une évolution attendue de procédure chez les élèves.

Dans la copie individuelle de l'étudiant, concernant les adaptations proposées du problème 2 pour des élèves plus jeunes, il est question de « contraintes modifiables » que l'on

[7] Extrait de Valentin D. (2005), *Découvrir le monde avec les mathématiques GS : Situations pour la grande section de maternelle*, éditions Hatier.

peut donc assimiler à des variables, dans le sens du moins où on peut dire que dans sa réponse, l'étudiant traite cette question comme une réflexion sur les variables didactiques en cherchant les éléments de la situation que l'on peut modifier pour adapter à des élèves plus jeunes. Sont cités, par exemple : le nombre de colonnes et les conséquences d'une diminution de ce nombre (« moins de tâtonnements » qui peut être mis en relation avec le nombre de configurations), le nombre de points de vue considérés et les conséquences du fait de n'en donner qu'un seul (plusieurs solutions possibles), la taille des objets (sous-entendu un travail dans le méso espace faciliterait la résolution du problème, « l'élève est moins extérieur ») …

À travers l'analyse du corrigé, donc des attentes du formateur, nous pouvons conclure que l'exercice de la vigilance didactique, notamment ici en termes de mobilisation de la notion de variable didactique dans le cadre de l'analyse ou de l'adaptation de situations, pouvait se manifester sous diverses formes dans les réponses aux questions posées. Cependant dans les productions des étudiants, un niveau d'exercice de la vigilance didactique se révèle principalement lors de la question sur les variables didactiques explicitement posée mais les réponses ne traduisent pas réellement une analyse de celles-ci. La notion de variable didactique est utilisée implicitement, dans les propositions de modifications du problème par l'étudiant et elle est réduite à un outil pour simplifier/complexifier sans évocation de l'impact des choix sur les procédures des élèves. Ici dans ce type de sujet, l'exercice de la vigilance didactique « n'est pas spontané » mais largement induit par la nature des questions posées.

IV. CONCLUSION

Lors des entretiens, les propos des trois formateurs apportent des éléments sur la mise en relation des contraintes de la formation, des besoins des enseignants et des besoins de la profession (indicateurs relevant des composantes institutionnelle, personnelle et sociale). Chaque formateur évalue en fonction du contenu de son cours. Des déterminants sociaux ou personnels – notamment liés à la charge de travail de correction et de conception des sujets – peuvent apparaître. Des entretiens plus approfondis pourraient permettre de les mettre davantage en évidence, c'est une perspective envisagée. D'autres éléments se rattachent davantage aux composantes cognitive et médiative. Pour ces trois formateurs, les contraintes de temps de la formation sont presque équivalentes et tous manifestent le souhait de faire de ce temps d'évaluation un temps de formation, voire même une certaine institutionnalisation. Chacun propose cependant des modalités d'évaluation différentes ; les connaissances évaluées sont à mobiliser dans des tâches diversifiées, dans le lien avec la pratique de classe et avec les contenus des TD, comme nous l'avons montré en nous centrant sur la notion de variable didactique. Les formateurs font preuve d'inventivité dans le choix des modalités d'évaluation et dans la façon d'investir les marges de manœuvre qu'il leur reste. Cela leur permet peut-être de mieux faire accepter aux étudiants de réaliser cette tâche en leur montrant que certains outils pourront être utiles dans l'exercice de leur métier.

Les propos révélant l'exercice de la vigilance didactique (en lien avec le concept de variable didactique) dans les copies des étudiants montrent des potentialités des sujets pour évaluer les connaissances des étudiants très différentes. Un sujet de type *dossier* permet un lien avec la pratique effective de l'étudiant mais l'ouverture des questions rend difficile l'évaluation de connaissances didactiques « outils » mobilisées par l'étudiant. Un sujet de type *devoir sur table* semble offrir davantage de potentialités de mobilisation de connaissances didactiques, notamment parce que les questions sont plus ciblées, mais rien ne garantit que à plus long terme, les étudiants puissent mettre en œuvre effectivement ces connaissances dans leur pratique effective (préparation et mise en œuvre de séances). Parce qu'il permet notamment de mettre à jour ce type de phénomène en précisant les enjeux d'une formation, le concept de vigilance didactique nous semble bien adapté pour nos analyses. En

outre, il nous semble qu'il pourrait constituer un outil théorique utile aux formateurs, ce qui offre une perspective de formation des formateurs, pour aider à faire des choix raisonnés quant aux dispositifs d'évaluation mis en place en réponse aux contraintes importantes qui peuvent peser sur ces choix.

RÉFÉRENCES

Charles-Pézard, M. (2010). Installer la paix scolaire, exercer une vigilance didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *30*(2), 197-261.

Houdement, C. (2013). Au milieu du gué : entre formation des enseignants et recherche en didactique des mathématiques. HDR. Université Paris Diderot – Université de Rouen.

MEN, Ministère de l'Éducation Nationale (2013). Le référentiel de compétences des métiers du professorat et de l'éducation, *Le Bulletin officiel*, n° 30, 25 juillet 2013.

Robert, A. & Rogalski, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : Une double approche. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, vol. 2*, n° 4, 505-528.

Sayac, N. (2002). Pratiques de formateurs en mathématiques dans le premier degré, *Recherche et formation*, *71*, 115-130.

ANNEXE

Problème 1 : Point de vue à chaque extrémité de la bande

L'enseignant aligne 5 colonnes sur une bande de papier et demande à l'élève de dire combien de colonnes voit chacune des figurines. L'élève doit placer à chaque extrémité de la bande l'étiquette rouge dont le nombre correspond au nombre de colonnes visibles par la figurine.





Problème 2 : Placement des colonnes

L'enseignant donne une bande-problème et l'élève doit positionner les colonnes sur la bande.



DEBUTER DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES : QUEL IMPACT DE LA FORMATION INTIALE ?

CHOQUET[*] Christine, ZEBICHE[**] Nadia

Résumé – Cette contribution a pour but de présenter une recherche en cours. Il s'agit d'étudier l'impact de la formation initiale sur les pratiques d'enseignants débutants. Ce travail se place dans le cadre théorique de la double approche didactique et ergonomique (Robert & Rogalski, 2002) auquel sont associés les notions de gestes et de routines professionnels (Butlen, 2004) et des éléments du cadre de la Problématisation (Orange, 2012). Les résultats montrent des réussites et des difficultés dans la pratique des débutants, ils permettent d'envisager des pistes de formation afin d'assurer un développement professionnel axé sur l'enseignement/apprentissage des mathématiques dans le primaire et le secondaire.

Mots-clefs : formation initiale, formation continue, pratique enseignante, professeur débutant

Abstract – This contribution aims at presenting a current research in which we study the impact of pre-service training on the practice of novice teachers. This work uses the theoretical framework of the didactic and ergonomic dual approach (Robert & Rogalski, 2002) to which are associated the notions of professional gestures and routines (Butlen, 2004) and some elements of the framework of the *Problématisation* (Orange, 2012). The results show success and difficulties and allow planning pre-service and continuous trainings to assure a professional development centered on the teaching and learning of mathematics at the primary and middle school level.

Keywords: pre-service training, teacher training, teacher practice, novice teacher

Cette contribution rend compte d'une recherche en cours dont le but est d'étudier les pratiques de professeurs débutants en lien avec la formation qu'ils ont reçue. Notre étude s'inscrit dans le prolongement d'autres études réalisées révélant que « *les difficultés mises en évidence dans les pratiques des débutants nous incitent, en tant que formateurs et chercheurs, à réfléchir davantage aux* ***différents types de savoirs*** *véhiculés en formation* » (Charles-Pézard, Butlen & Masselot, 2012, p. 15). L'objectif pour nous, est de fournir des éléments permettant de repérer, de décrire et de comprendre l'impact de la formation initiale sur les pratiques d'enseignement des mathématiques. Ces éléments pourront, à terme, permettre de cibler au mieux les besoins des enseignants débutants afin d'accompagner le plus efficacement possible leur développement professionnel de début de carrière.

I. PRESENTATION DE NOTRE RECHERCHE

1. Inclusion dans un projet ESPE plus vaste

La recherche présentée dans ce colloque s'inscrit dans un projet pluridisciplinaire plus vaste - *Débuter, quelle activité pour quelle école ?* - porté par l'Ecole Supérieure du Professorat et de l'Education (ESPE) de l'Académie de Nantes regroupant une trentaine d'enseignants-chercheurs et formateurs depuis l'année 2013. Le projet ESPE au regard de la didactique professionnelle, des didactiques des disciplines et de la psychologie du travail s'intéresse aux processus de développement de la professionnalité des enseignants débutants dans le cadre de la formation dispensée dans les ESPE. Il cherche à en identifier et comprendre les fonctionnements afin de repérer les conditions favorables à leur construction. Il envisage de répondre à une évolution depuis quelques années des contextes d'enseignement et de la prescription institutionnelle sur la formation. Cette évolution amène à réinterroger le concept d'activité (Clot, 1999 ; Robert, 2008) des enseignants, notamment des débutants, et

[*] CREN, Université de Nantes, ESPE de l'Académie de Nantes (France) christine.choquet@univ-nantes.fr
[**] ESPE Académie de Nantes (France) nadia.zebiche@univ-nantes.fr

les difficultés auxquelles ils doivent faire face dans le contexte actuel. L'objectif de ce projet est de construire, en réinterrogeant ce concept d'activité, des cadres d'analyses et des outils susceptibles de permettre l'étude puis l'ajustement des contenus de formation destinée aux enseignants. Le projet ESPE depuis l'année 2017 se répartit selon cinq groupes de travail. Nous pilotons un de ces groupes, intitulé « *Débuter : quelles activités de formation pour quelles pratiques en mathématiques ?* ».

2. *Origine de la recherche « Débuter : quelles activités de formation pour quelles pratiques en mathématiques »*

Force est de constater que, pendant les deux années du Master MEEF, les étudiants et professeurs stagiaires des premier et second degrés bénéficient d'un nombre non négligeable d'heures d'enseignement dédiées à la didactique des mathématiques. Néanmoins, les observations que nous avons réalisées en tant que formateur dans les classes des débutants ainsi que les différents travaux produits par les étudiants/stagiaires montrent des déficiences dans leur maîtrise et l'enseignement de cette discipline. Notre recherche trouve son origine dans le constat de ces difficultés identifiées par les formateurs de notre groupe ainsi que dans la volonté de favoriser le développement professionnel des étudiants/stagiaires lors des deux années de Master en cherchant à améliorer leur formation initiale à l'enseignement des mathématiques. L'entrée choisie par notre groupe est donc disciplinaire et l'étude, placée dans le cadre de la didactique des mathématiques, s'inscrit dans le prolongement de travaux de recherche déjà réalisés sur les pratiques d'enseignement des mathématiques (Butlen, Masselot, Pézard, 2003 ; Chenevotot, Galisson, Mangiante, 2012 ; Guille-Biel Winder, Petitfour, Masselot, Girmens, 2015). Le questionnement est principalement centré sur les activités en classe d'enseignement/apprentissage des mathématiques. Il est également associé à des champs plus transversaux tels que l'usage des ressources, les pratiques d'évaluation, etc.

Deux axes de recherche sont envisagés : le premier (Axe 1) vise à mettre à jour les réussites et les difficultés de la pratique quotidienne des enseignants débutants. L'analyse de ces difficultés, en lien avec la formation reçue au préalable par ces professeurs, permettra d'identifier les éventuels manques de celle-ci et d'envisager une amélioration de ses contenus et modalités. Le second (Axe 2) consiste à proposer aux étudiants/stagiaires une ingénierie de formation et à identifier ensuite, dans l'observation et l'analyse de la pratique des enseignants débutants, les retombées de cette formation. Autrement dit, il s'agit de proposer des pistes de formation, de les mettre en œuvre et de constater l'étendue de son impact sur la pratique des professeurs afin de les valider ou de les ajuster. Lors de cette communication, nous présentons des éléments de recherche et des résultats associés aux deux axes.

II. CADRAGE THEORIQUE

Nous situons ce travail dans le cadre théorique de la double approche didactique et ergonomique (Robert, Rogalski, 2002). Ce cadre a déjà été mobilisé par d'autres recherches présentées lors de colloques EMF précédents (Masselot, Butlen, Charles-Pézard, 2012 ; Horocks, Grugeon-Allys, Pézard-Charles, 2015).

S'appuyant sur la théorie de l'activité, il considère l'enseignant dans l'exercice de son métier. Il permet d'analyser l'activité du professeur dans toute sa complexité selon cinq composantes cognitive, médiative, sociale, personnelle et institutionnelle. Les composantes médiative et cognitive examinent l'approche didactique de la pratique et les composantes sociale, personnelle et institutionnelle rendent compte de l'approche ergonomique en révélant notamment des contraintes du métier (internes et externes à la classe). Afin de renseigner les

cinq composantes de la pratique des professeurs, nous faisons appel aux notions de gestes et routines professionnels (Butlen, 2004) ainsi qu'à celle d'espaces de contraintes (Orange, 2012) afin d'analyser plus précisément l'activité des élèves organisée par l'enseignant. Nous utilisons ces dernières notions afin d'examiner la pratique selon trois niveaux de granularité (Choquet, 2017) : un *panorama* sur l'année scolaire, un *premier zoom au niveau d'une séance* et un *second zoom au niveau de moments de la séance* -moments de dévolution, de régulation et d'institutionnalisation.

III. METHODOLOGIE

1. Constitution du corpus d'étude

L'étude porte sur la pratique de professeurs débutants en lien avec la formation qu'ils reçoivent ou qu'ils ont reçue. Nous avons accès à plusieurs types de données qui constituent le corpus de recherche. Certaines de ces données permettent de rendre compte des formations. Il s'agit des contenus proposés par le (ou les) formateur(s) sous forme de fiches de préparation et des documents fournis aux étudiants/stagiaires. A cela s'ajoutent leurs travaux produits lors des formations (dossiers réalisés lors de travaux dirigés, écrits réflexifs, mémoires, etc.). Les autres données concernent la pratique des débutants dans leurs classes : nous recueillons des comptes rendus d'observations effectuées par un formateur (certains rédigés par le professeur débutant, d'autres par le formateur). Nous filmons et retranscrivons quelques séances, récoltons les documents de préparation ainsi que des productions d'élèves. Nous réalisons un entretien avant chaque séance observée puis organisons des entretiens après les séances, certains étant menés sous la forme d'une auto confrontation : l'enseignant revoit des extraits de sa séance, la commente et, accompagné du chercheur, explicite ses choix.

2. Méthode d'analyse

Le corpus ainsi constitué est vaste et permet d'avoir accès à de nombreuses informations liées à la formation du professeur débutant et à sa pratique. Les résultats de nos analyses, visent à renseigner les composantes cognitive et médiative tout en précisant les composantes personnelle, sociale et institutionnelle de la pratique. Pour cela, nous utilisons des indicateurs définis par Charles-Pézard, Butlen et Masselot (2012). Ces indicateurs permettent de rendre compte de la situation mathématique prévue puis mise en œuvre par l'enseignant dans la classe.

Afin de renseigner la composante cognitive, nous analysons *a priori* les énoncés choisis par l'enseignant afin d'identifier les savoirs et compétences mathématiques en jeu dans les séances observées. Nous repérons en particulier si les problèmes choisis sont *consistants* (s'ils permettent aux élèves de construire et/ou de mobiliser le savoir en jeu dans la séance), si l'enseignant a anticipé les procédures envisageables par les élèves et les erreurs possibles, s'il a prévu à l'avance le déroulement de la séance, des aides et une phase d'institutionnalisation. La composante médiative s'intéresse à la mise en œuvre dans la classe. Nous découpons les séances observées en différentes phases, nous repérons notamment la durée des phases de recherche laissées aux élèves, d'explicitation de leurs productions. Nous étudions les modalités (orales, écrites, fidèles à ce qui étaient prévues ou improvisées, etc.) réservées au processus d'institutionnalisation, la manière dont l'enseignant prend en compte les erreurs des élèves et comment il le fait. En comparant la mise en œuvre lors des séances avec ce qu'avait prévu *a priori* l'enseignant, nous mettons à jour des similitudes ainsi que des différences. Les similitudes peuvent être assimilées à des éléments de sa pratique pour lesquels l'enseignant (ayant bien identifié à l'avance ce qui allait se passer et comment cela allait se passer)

rencontre peu de difficultés alors que les différences peuvent être perçues par le chercheur comme des difficultés. Par exemple, lorsqu'un enseignant a prévu une phase de synthèse s'appuyant sur les productions des élèves et ne réussit pas à la mettre en œuvre, faute de temps ou des réponses attendues des élèves, l'enseignant révèle ses difficultés à anticiper la durée des différentes phases ou les réponses attendues des élèves.

Les différents éléments recueillis en dehors des séances nous permettent de renseigner les trois autres composantes. Les documents issus de la formation permettent d'alimenter les composantes personnelle et institutionnelle, en ayant accès aux contenus des formations initiales reçues ainsi qu'aux travaux réalisés par l'enseignant débutant révélant une partie de ses propres connaissances de la didactique des mathématiques. Les entretiens avant et après les séances permettent d'identifier les représentations personnelles de l'enseignant sur l'enseignement en général et sur l'enseignement des mathématiques en particulier. Les quelques entretiens d'auto explicitation permettent de préciser les choix effectués pour la séance. Ces entretiens portant sur les justifications des choix permettent également de renseigner la composante sociale, en dégageant l'impact que peuvent avoir sur lui et sur ses choix, l'entourage professionnel de l'enseignant (le groupe classe, les collègues de l'enseignant, les formateurs, etc.).

Cette grille d'analyse appliquée à notre corpus, permet de décrire la pratique de chacun des débutants et peut amener à repérer des régularités intra individuelles que nous pensons pouvoir identifier comme des gestes et routines professionnels, tout cela afin, à terme, de catégoriser leurs pratiques et définir des profils de professeurs enseignant les mathématiques (Choquet, 2017) en lien avec la formation initiale reçue.

IV. RESULTATS

Lors de notre communication, nous avons présenté plusieurs résultats issus des travaux de notre groupe.

1. Axe 1 : analyser les pratiques afin d'étudier les contenus de formation

Trois professeurs de mathématiques titularisés en juin 2017 sont observés dans leurs classes et des entretiens d'auto confrontations permettent d'avoir accès à leurs réussites et difficultés lors de cette première année d'enseignement à plein temps. Ces éléments mettent à jour les éventuels atouts et manques de la formation initiale qu'ils ont reçue l'année précédente. Les résultats concernant un des enseignants (G) sont présentés lors de la communication et proposés à la discussion.

1.1 Présentation de la séance observée dans la classe de G

Titularisé à l'issue de son année de stage en responsabilité, G enseigne dans deux classes de 6ème, deux classes de 5ème et une classe de 4ème d'un collège rural. La séance observée concerne la classe de 4ème, elle est la première d'une séquence relative au calcul algébrique. Les séances suivantes sont dédiées à un entrainement technique sur les développements, factorisations et sur la réduction d'écritures algébriques. L'organisation de la séance est représentative des séances menées par G. Le déroulement correspond à ce qu'avait prévu G. La première phase (11 minutes) est constituée d'activités rapides dans lesquelles il s'agit de calculer, développer, factoriser, réduire mentalement des expressions simples. La deuxième phase est consacrée à la recherche/résolution du problème *Le cadre de Pierre* (*Des maths ensemble et pour chacun 4ème*, CRDP, 2009) : 8 minutes de consignes, 5 minutes liées à

l'organisation des groupes, 9 minutes de recherche en groupes, 1 minute d'intervention de l'enseignant (ce qu'il appelle *Le cours*) puis 18 minutes de poursuite des recherches en groupes. A la fin de la séance, des stratégies des élèves ont conduit à la production de quatre formules permettant de calculer le nombre de mosaïques. La preuve de ces formules a été menée de manière discursive, aucune synthèse collective n'est organisée.

1.2 Analyse

G propose un problème consistant mettant les élèves en activité et leur permettant de construire des connaissances mathématiques liées à son objectif d'apprentissage en termes de calcul algébrique. Les analyses *a priori* de l'énoncé et *a posteriori* des productions des élèves en témoignent. Elles montrent le cheminement des raisonnements des élèves dans le cadre de la recherche/résolution. Il révèle une entrée acceptée par tous les élèves dans le cadre algébrique, le cadre numérique n'étant mobilisé qu'au début de la séance. De plus les nécessités construites témoignent d'une avancée dans les apprentissages (Zebiche, 2017).

G s'appuie surtout lors de cette séance sur des éléments de formation. Les composantes institutionnelle et personnelle de sa pratique influent donc sur les composantes cognitive et médiative. En effet, le problème proposé et sa mise en œuvre ont été longuement étudiés lors de travaux dirigés et lors de la rédaction de son mémoire. G apporte néanmoins une nouveauté : il prévoit des activités rapides en lien avec le problème à résoudre puis un apport personnel en cours de séance en projetant un document *Le cours*. Il montre ainsi qu'il a anticipé des éléments d'institutionnalisation. En revanche, ceux-ci ne s'appuient pas sur les recherches des élèves de la classe, mais plutôt sur ce que G imagine obtenir des élèves suite à ce qu'il a étudié en formation.

2. Axe 2 : développer une formation puis repérer son impact sur les pratiques

Nous avons proposé à des étudiants/stagiaires une formation à la didactique des mathématiques ainsi qu'une initiation à la recherche en didactique des mathématiques dans le cadre de leur Master MEEF. Les contenus de cette formation ont été élaborés et précisés suite aux premiers résultats obtenus lors d'une première phase de recherche sur l'impact de la formation sur les pratiques des débutants (Choquet, 2015).

2.1 Précisions sur l'organisation de la formation

La formation initiale a pris en compte des difficultés identifiées dans la pratique en classe de professeurs stagiaires et, à travers l'étude de recherches existantes sur le sujet, visé à les faire s'interroger sur ces difficultés. Lors de Travaux Dirigés (TD) de Didactique des Mathématiques, d'Analyse de Pratiques et d'initiation à la Recherche, les notions de dévolution et d'institutionnalisation ont été développées en lien avec des exemples de pratiques fournis par le formateur ainsi que des articles issus de revues professionnelles dédiées à la didactique des mathématiques. Plusieurs cadres théoriques utilisés dans la recherche en didactique des mathématiques ont été présentés et des travaux s'intéressant à l'analyse de l'activité de l'enseignant et de l'élève ont été étudiés. Suite à cela, des observations ont été menées dans les classes de plusieurs professeurs-stagiaires – un professeur des écoles du premier degré et trois professeurs de mathématiques du second degré- et les séances analysées selon la méthodologie présentée. Les résultats concernant le professeur des écoles (L) et un des professeurs de collège (M) sont développés ci-après et sont soumis à la discussion lors de notre communication, en lien avec les résultats concernant les autres professeurs du second degré.

Nous obtenons dans un premier temps que L et M maîtrisent les éléments abordés en formation et tentent de les mettre en pratique dans leur(s) classe(s) tout au long de l'année. Autrement dit, lorsque nous évoquons avec eux les éléments de didactique abordés en formation, lorsque nous étudions leurs travaux réalisés lors de la formation initiale (écrits lors de Travaux Dirigés, Mémoire), ils montrent qu'ils les ont compris et acquis. Cependant, lors d'analyses plus fines selon des premier et second zooms (Choquet, 2017) d'une séance observée dans la classe de CE1 de L ainsi que dans la classe de 5ème de M, nous percevons que des difficultés persistent dans la mise en œuvre de ces éléments en classe.

2 .2 Présentation de la séance observée dans la classe de L

La séance proposée par L se déroule comme L l'avait prévu. L'énoncé *Le thé des maitresses* (ERMEL CE1, 2005) est proposé à la classe, explicité puis chaque élève tente de le résoudre d'abord individuellement, ensuite en petits groupes (20 minutes). Une mise en commun collective est organisée. Les élèves, désignés par L, viennent présenter leur solution et expliciter leur procédure (20 minutes). Une synthèse est organisée le lendemain afin de repérer, parmi les propositions des élèves, les procédures efficaces pour résoudre le problème.

2.3 Analyse de la séance observée dans la classe de L

L est d'avis que les mathématiques en cycle 2 ne s'enseignent que par la résolution de problèmes. Cet élément montre que la composante personnelle de la pratique de L influe sur la composante cognitive. En effet, la séance fait partie de son projet d'amener tous les élèves de cette classe à être capable de résoudre des problèmes, en leur proposant toute l'année des problèmes consistants. L montre une bonne maitrise des éléments étudiés en formation et s'attache à les mettre en œuvre, ce qui montre que des éléments de la composante institutionnelle de sa pratique influe également sur la composante cognitive. Il identifie les savoirs en jeu dans les situations choisies et son analyse *a priori* du problème choisi lui permet d'envisager les différentes procédures des élèves et ainsi d'organiser pendant la séance une hiérarchisation des procédures de ses élèves au moment de la mise en commun.
Cependant deux difficultés persistent. Une première, identifiée par le professeur débutant lors des entretiens, concerne le choix des énoncés. En effet, le problème choisi est d'un niveau complexe pour des élèves de cet âge et certains n'ont pas réussi à se représenter correctement la situation (Choquet, 2018). L met en avant une difficulté relevant de la composante cognitive de sa pratique. Une deuxième est repérée lors de l'analyse de la séance et renseigne la composante médiative : la synthèse finale réalisée par L ne tient pas compte des différentes représentations des élèves, elle n'est pas reliée avec leurs propres recherches. Les recherches des élèves ne sont suffisamment pas utilisées pour construire les savoirs et compétences en jeu dans cette séance.

2.3 Présentation de la séance observée dans la classe de M

La séance observée est représentative des séances organisées par M dans sa classe de 5ème. Il prévoit pour chaque séquence un document qu'il nomme *Bilan de chapitre* distribué aux élèves après la recherche/résolution de quelques problèmes. Il s'agit ici de la première séance d'une séquence consacrée à un travail sur les échelles. La fiche de préparation montre qu'il prévoit la recherche/résolution de deux problèmes avant de demander aux élèves de rédiger individuellement une définition de la notion d'échelle. M indique qu'en fin de séance, il s'appuiera sur ces définitions, sur des mots clés repérés pour amener son document bilan. Lors de la séance observée, les élèves rencontrent des difficultés dans la résolution du premier problème *Plan du collège* (Les élèves renoncent à mesurer sur le plan proposé du fait d'un travail réalisé en géométrie précédemment qui leur interdisait des mesures sur une figure).

Ces difficultés n'étaient pas anticipées par M et il ne réussit pas à les régler lors de la séance. Il abandonne le deuxième problème (qui sera traité le lendemain) ainsi que la rédaction d'une définition en précisant que les élèves ne sont pas capables de l'écrire seuls étant données leurs difficultés. La séance se termine par la correction collective du premier problème.

2.4 Analyse de la séance observée dans la classe de M

L'analyse de la séance et des entretiens montrent que M s'attache à développer un enseignement des mathématiques basé sur la résolution de problèmes. Les problèmes sont choisis et construits en lien avec les notions que M souhaite aborder dans sa classe. Cependant, lors de la séance, M rencontre des difficultés à mettre cette ambition en œuvre. Face aux difficultés des élèves pour entrer dans le problème choisi, il renonce à s'appuyer sur les travaux des élèves et s'engage dans des corrections collectives non prévues à l'avance. La réaction du groupe-classe influe donc sur la pratique de M. Nous pouvons en déduire que cette séance révèle que des éléments de la composante sociale de la pratique de M influe sur la composante médiative qui se trouve alors quasiment en opposition avec sa composante cognitive.

V. CONCLUSION

Cette étude nous donne des éléments de compréhension de la pratique d'enseignants débutants. Elle révèle une place importante laissée à la composante cognitive dans leur pratique : ces débutants passent du temps à préparer leurs séances, à choisir les problèmes qu'ils vont faire étudier en classe même si tout n'est pas toujours bien anticipé. La composante cognitive de leur pratique est influencée par les composantes personnelle et institutionnelle. En effet, ces débutants ont des représentations personnelles de l'enseignement des mathématiques, ont acquis des connaissances sur cet enseignement et tiennent à les mettre en œuvre dans leur(s) classe(s). Les résultats d'analyse montrent également des difficultés rencontrées par les débutants dans leur(s) classe(s) ce qui renseigne la composante médiative de leur pratique. Elles sont liées à la difficile mise en œuvre de ce qu'ils ont préparé et de ce qu'ils ont appris en formation. Des éléments de la composante médiative de leur pratique viennent donc parfois en opposition avec leurs composantes personnelle, institutionnelle et même cognitive.

Cette étude permet ainsi de réinterroger l'articulation nécessaire entre la formation initiale et la pratique des débutants, elle amène également à l'enrichir en proposant des pistes d'amélioration concrètes en termes de contenus et de modalités de formation. Il s'agirait, par exemple, de proposer une analyse de leur propre pratique, afin de mettre à jour avec eux des divergences voire des oppositions entre la composante médiative de leur pratique et les composantes personnelles, cognitive et institutionnelle. Il pourrait être envisagé ensuite en collaboration avec eux lors de la formation (initiale ou continue) de proposer, d'étudier des alternatives à leur pratique, tout en restant au plus près de leur composantes personnelle, institutionnelle et cognitive afin d'engager un changement et une amélioration de leur pratique d'enseignement des mathématiques.

La recherche est en cours, elle se poursuit avec plusieurs formateurs dans notre groupe et plusieurs expérimentations. Les résultats d'analyse suite aux expérimentations en cours pourront permettre de réfléchir à des conditions pour envisager une cohérence entre les contenus et modalités de la formation initiale et ceux de la formation continue. Cette cohérence est en effet nécessaire pour assurer avec efficacité le développement professionnel des professeurs enseignant les mathématiques.

REFERENCES

Butlen D. (2004) *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire. Des difficultés des élèves de milieux populaires aux stratégies de formation des Professeurs des Ecoles.* HDR Paris : Université Paris 8.

Butlen D., Masselot P., Pezard M. (2003). De l'analyse de pratiques effectives de professeurs d'école débutants nommés en ZEP / REP à des stratégies de formation, *Recherche et Formation*, n° 44, 45-61

Charles-Pézard M., Butlen D., Masselot P. (2012) *Professeurs des écoles débutants en ZEP. Quelles pratiques ? Quelle formation ?* La Pensée Sauvage éditions.

Chenevotot F., Galisson M.P., Mangiante C. (2012) Le développement professionnel de professeurs de mathématiques débutants. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* - GT2, 301–313. http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Choquet C. (2015) *Professeurs débutants enseignant les mathématiques dans le second degré: que savent-ils du processus d'institutionnalisation ?* Journées Scientifiques de l'Université de Nantes, 11-12 juin. Disponible en ligne http://www.espe.univ-nantes.fr/recherche/journees-d-etudes-colloques-conferences/journees-d-etudes-activites-de-l-enseignant-debutant-et-activites-pour-debuter-1221059.kjsp

Choquet C. (2016) *Professeurs des écoles débutant enseignant les mathématiques: quel impact de la formation initiale sur leur pratique en construction* ? Journées Scientifiques de l'Université de Nantes, 8-10 juin.

Choquet C. (2017) Profils de professeurs des écoles proposant des problèmes ouverts en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 36 (1) 11-47.

Choquet C. (2018) Multiplication au CE1. *Au fil des Maths Bulletin de l'APMEP*. 527.

Clot Y. (1999) *La fonction psychologique du travail.* Paris : PUF.

Guille-Biel Winder C., Petitfour E. Masselot P. et Girmens Y. (2015) Proposition d'un cadre d'analyse de situations de formation des professeurs des écoles. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage – Actes du colloque EMF2015* – GT2, 159-172.

Horoks J., Grugeon-Allys B., Pezard-Charles M. (2015) Former des enseignants par la recherche: quels outils pour analyser les effets potentiels sur les pratiques? In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage – Actes du colloque EMF2015* – GT2, 173-184.

Masselot P., Butlen D., Charles-Pézard M. (2012) Deux dimensions de l'activité du professeur des écoles exerçant dans des classes de milieux défavorisés : installer la paix scolaire, exercer une vigilance didactique. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* - GT2, 362–370. http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf- 2012

Orange C. (2012) *Problèmes, débats et savoirs scientifiques en classe*. De Boeck.

Robert A, Rogalski J. (2002) Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *La revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, 2(4), 505-528.

Robert A. (2008) La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques d'enseignants de mathématiques. In Vandebrouck F. (Ed.) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*. Toulouse : Octarès, 45-52.

Zebiche N. (2017) *Calcul algébrique et preuve au cycle 4*. Mémoire de Master EEA. Nantes.

COMMENT UN PROCESSUS DE LESSON STUDY CONDUIT-IL LES ENSEIGNANTS À UTILISER ET À DEVELOPPER LEURS CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES ?

CLIVAZ[*] Stéphane

Résumé – Ce texte présente brièvement le processus de lesson study et le modèle que nous utilisons pour analyser l'utilisation en situation des connaissances mathématiques pour l'enseignement. Un exemple est esquissé afin d'illustrer comment, par leur participation à une lesson study, les enseignants utilisent tous les types de connaissances mathématiques pour l'enseignement, à divers niveaux d'activité, lorsqu'ils planifient, observent et analysent une leçon de recherche.

Mots-clefs : lesson study, connaissances mathématiques pour l'enseignement.

Abstract – This text provides a brief presentation of the lesson study process and the model I use in order to analyse the use of mathematical knowledge for teaching in a teaching context. A series of examples is introduced to illustrate how, in their participation in lesson study, teachers use all elements of their mathematical knowledge for teaching at all levels of teacher activity when planning, observing and reflecting on a research lesson.

Keywords: Lesson Study, Mathematical Knowledge for Teaching.

I. INTRODUCTION

La question de l'articulation des connaissances mathématiques et didactiques des enseignants, dans les pratiques enseignantes et dans la formation est un des axes de travail du GT1 d'EMF 2018. Elle est aussi au cœur de mes activités de chercheur en didactique des mathématiques et de formateur à la Haute École Pédagogique du Canton de Vaud (Suisse). La catégorisation des connaissances mathématiques utiles dans l'enseignement et l'analyse de l'influence de ces connaissances sur les choix didactiques des enseignants a ainsi habité mes premières recherches en didactique des mathématiques (voir par exemple Clivaz, 2011, 2014, 2016). Ces recherches ont d'ailleurs été présentées dans un EMF précédent (Clivaz, 2012b). En me basant sur les catégories développées par Ball et son équipe (Ball, Thames & Phelps, 2008), et sur le modèle de la structuration du milieu (Margolinas, 2002), j'ai ainsi pu mettre en évidence de manière fine l'interaction entre ces connaissances et les choix des enseignants (Clivaz, 2012a, 2014, 2017). En lien avec mon activité de formateur, la question est aujourd'hui pour moi de décrire comment des connaissances sont utilisées dans un processus de formation particulier, les lesson studies (voir par exemple Clivaz, 2015a, 2015b, 2015c, 2018a; Clivaz, Clerc-Georgy & Batteau, 2016) et de développer un cadre théorique permettant de décrire avec des outils de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1986) ce qui, dans le processus de lesson study, permet plus particulièrement l'utilisation en situation et, potentiellement, le développement des connaissances mathématiques pour l'enseignement. Cette contribution au GT 1 d'EMF 2018 est pour moi l'occasion de reprendre certains éléments de ces recherches et de les illustrer brièvement par quelques exemples afin d'ouvrir une discussion avec la communauté francophone de l'espace mathématique.

Dans un premier temps, ce texte précisera ce que sont les lesson studies ainsi que le modèle d'analyse développé avec Ní Shúilleabháin (Clivaz & Ni Shuilleabhain, 2019; Ni Shuilleabhain & Clivaz, 2017). Afin d'illustrer ces analyses, nous esquisserons ensuite une série d'exemples développés graphiquement lors des discussions du GT1. Enfin, nous pointerons la particularité des lesson studies quant à l'utilisation des connaissances mathématiques et didactiques mise en lumière par nos analyses.

[*] HEP Vaud, UER MS et laboratoire 3LS – Suisse – stephane.clivaz@hepl.ch

II. CADRE THÉORIQUE

1. Les lesson study

Les *Jugyo Kenkyu*, littéralement études de leçons ou *lesson study* (LS), sont nées au Japon dans les années 1890. Pris dans le courant de réformes liées à l'occidentalisation du Japon lors de l'ère Meiji (1868-1912), des enseignants des écoles primaires attachées aux écoles normales nouvellement crées ont commencé à se réunir afin d'observer des leçons, en particulier de mathématiques, et de les examiner de manière critique (Inagaki, 1995, cité par Shimizu, 2014, p. 359). Ces LS se sont ensuite généralisées dans l'ensemble du Japon. Dans les années 1990, suite aux études internationales montrant les bonnes performances des élèves japonais en mathématiques, l'étude TIMSS a comparé en détail les leçons de mathématiques de grade 8[1], notamment japonaises et étatsuniennes. Les chercheurs ont été frappés de constater que ces leçons variaient énormément d'un pays à l'autre, mais fort peu à l'intérieur d'une même culture. Stigler et Hiebert (1999) ont ainsi parlé d'un *Teaching Gap*, un fossé en matière d'enseignement, entre le Japon, l'Allemagne et les USA en particulier. Dans cet ouvrage, Stiegler et Hiebert ont décrit ce qui, selon eux, expliquait pourquoi, par contraste avec l'enseignement essentiellement procédural aux USA, les enseignants japonais avaient un enseignement des mathématiques à la fois efficace et essentiellement axé sur la compréhension des mathématiques et la résolution de problème : la pratique des *Jugyo Kenkyu*. Fort de cette promotion, et grâce en particulier aux travaux de Lewis qui a formalisé et popularisé les LS aux USA (Lewis, 2002, 2015; Lewis & Hurd, 2011), ce mode de développement professionnel s'est développé aux USA. Dans la méta analyse de Gersten, Taylor, Keys, Rolfhus et Newman-Gonchar (2014) un programme LS (Perry & Lewis, 2011) a par exemple été jugé comme un des deux seuls programmes de développement professionnel en mathématiques (sur 643) amenant une amélioration significative des résultats des élèves selon les critères du US Department of Education Institute of Education Sciences. Cette expansion est aussi visible en Europe du Nord et dans le reste de l'Asie. En Suisse romande, un laboratoire de recherche et de formation autour des LS, le Laboratoire Lausannois Lesson Study (3LS, voir www.hepl.ch/3LS) a été fondé à Lausanne en 2014. Dans le modèle de cycle en quatre étapes, notamment pratiqué à Lausanne (voir la partie droite, en jaune, de la Figure 1), les LS démarrent à partir d'une difficulté d'enseignement ou d'apprentissage identifiée par un groupe d'enseignants. Les enseignants analysent l'apprentissage visé, étudient la notion, consultent les divers manuels, étudient des articles de revues professionnelles, etc. Cette étude leur permet de planifier ensemble une leçon, de la donner et de l'observer puis de l'analyser.

Même si les LS connaissent un certain nombre de variations au Japon et surtout dans leurs adaptations hors du Japon (Takahashi & McDougal, 2016), le processus reste codifié autour de ce modèle dont le cœur est la leçon de recherche (Shimizu, 2014), véritable phase expérimentale d'un processus de recherche. Miyakawa et Winsløw (2009) considèrent ainsi qu'une LS est

> un travail de recherche : elle procède à partir de travaux documentés antérieurs, ainsi que de questions et de buts précis; elle implique la formulation explicite d'hypothèses, ainsi que des points et des conditions d'observations pour les tester; elle organise des expérimentations avec un dispositif concret (la leçon) qui « intègre» les hypothèses et permet de les tester, et qui est évalué de façon souvent très rigoureuse; elle rend public (ou, au moins, partageable) ses résultats sous forme de document sous une forme standardisée, et permet donc en principe aux collègues de refaire l'expérience sous des conditions déterminées (p. 83)

[1] Le grade 8 (degré international), 10ème HarmoS en Suisse, 4ème en France correspond à des élèves de 13 à 14 ans.

Au Japon notamment, cette leçon de recherche, ainsi que la discussion qui suit, sont souvent ouvertes à l'ensemble des enseignants de l'école, voire d'un district scolaire, permettant une diffusion de pratiques innovantes, voire une exploration de nouvelles leçons ou de nouveaux sujets d'enseignements lors de réformes curriculaires (Lewis & Takahashi, 2013).

2. *Le cadre proposé*

Afin d'analyser l'utilisation des connaissances mathématiques des enseignants au cours d'un processus de LS, nous avons combiné la catégorisation des types de connaissances mathématiques pour l'enseignement (Ball, Hill & Bass, 2005), les niveaux d'activités du professeur (Margolinas, 2002) et les phases du processus LS (Lewis & Hurd, 2011) pour analyser l'apparition des connaissances mathématiques des enseignants au cours du processus.

Ce modèle (voir Figure 1) vise à repérer et à catégoriser les Connaissances mathématiques pour l'enseignement (CME) utilisées par les enseignants à chaque étape lors du processus LS et à situer à quel niveau d'activité elles s'expriment. Il vise également à suivre ces connaissances au cours du processus et à tenter de percevoir leur développement.

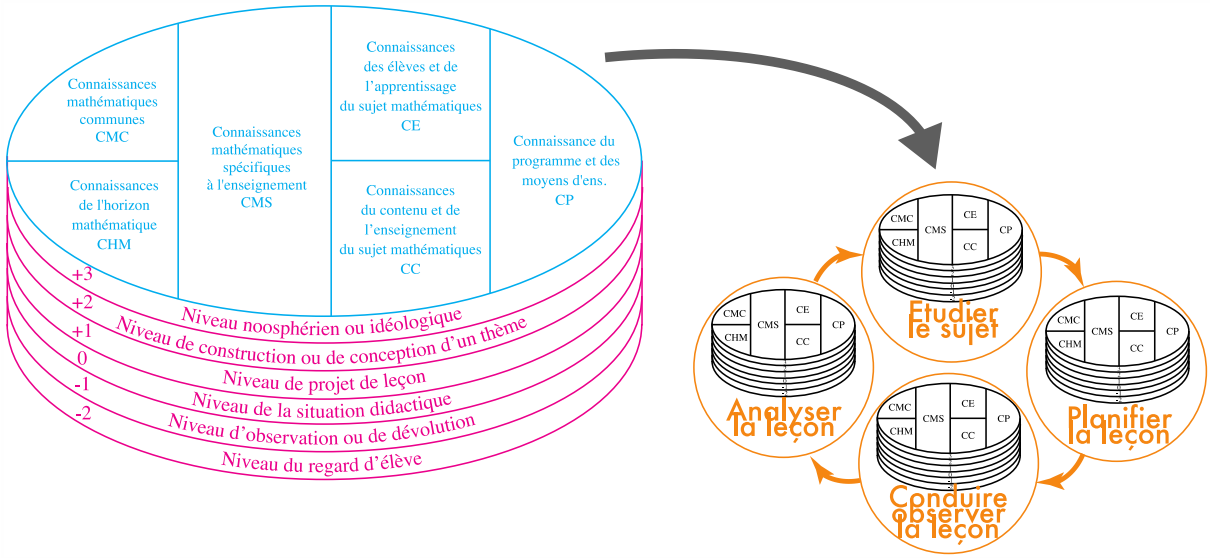


Figure 1. *– Notre modèle d'analyse des CME durant un cycle LS*

Il existe plusieurs types de groupes ou de communautés de pratiques dans lesquels les enseignants s'expriment à propos de leurs valeurs ou de questions générales concernant l'enseignement et l'apprentissage de manière générale ou à propos des mathématiques (niveau +3) ou à propos de l'enseignement et de l'apprentissage du sujet mathématique donné (niveau +2). Le processus LS a toutefois la particularité de permettre de recueillir également des données sur la préparation de la leçon (niveau +1). Ce processus permet de plus d'analyser ce que fait l'enseignant en classe quand il enseigne (niveau 0) ou observe ses élèves (niveau -1), mais aussi de recueillir les réflexions et les observations des enseignants quant à ces niveaux +1, 0 et -1, tant durant les phases de planification ou d'analyse que durant la leçon de recherche elle-même. De plus, lors du processus LS et comme relevé par Fernandez, Cannon et Chokshi (2003) et repris par Ni Shuilleabhain (2015), les enseignants voient parfois certains éléments de la leçon « through the eyes of their students » (Fernandez *et al.*, 2003, p. 176), s'exprimant même comme des élèves. Ce « student lens » nous semble être situé à un niveau encore en dessous du niveau d'observation et nous en avons donc fait un niveau -2.

III. CONTEXTE ET MÉTHODOLOGIE

En suivant le modèle décrit plus haut, un groupe de huit enseignants de 5H-6H[2] de deux établissements primaires de la région lausannoise a travaillé durant deux ans autour de leçons de mathématiques. Encadré par deux facilitateurs, un didacticien des mathématiques (l'auteur de cette contribution) et une spécialiste des processus d'enseignement-apprentissage (Anne Clerc-Georgy), le groupe *Lesson Study en Maths* (LSM) a effectué quatre cycles de leçons de mathématiques consacrées à la numération décimale, aux transformations géométriques et à la résolution de problèmes (deux cycles). Les deux facilitateurs ont plusieurs rôles : un rôle d'animateur dans lequel ils organisent les séances et les conduisent, un rôle de formateur d'enseignants, un rôle d'expert dans lequel ils amènent du contenu mathématique, didactique ou pédagogique et un rôle de participant-chercheur à l'intérieur du dispositif avec la participation à l'écriture de plans de leçons finaux (disponibles sur le site du laboratoire 3LS) ou d'articles dans des revues professionnelles (voir par exemple Baetschmann *et al.*, 2015). Leur rôle a d'ailleurs évolué au cours du dispositif et selon les sujets abordés. Ainsi, pendant les séances collectives, ils orientent, parfois imposent des choix didactiques, parfois laissent les enseignants faire leurs choix puis les expérimenter lors des leçons de recherche (Clerc-Georgy & Clivaz, 2016). Les facilitateurs ont attendu la fin du dispositif LS pour analyser les données de recherche et pour séparer leur rôle de facilitateurs et de chercheurs sur le processus.

Les données du premier cycle concernant la numération décimale de position ont été dénombrées afin de décrire à quelles phases du cycle et à quel niveau d'activité du professeur les CME intervenaient. Ces analyses ont été réalisées en collaboration avec Ní Shúilleabháin en comparant un cycle LS irlandais et ce cycle suisse romand (Clivaz & Ni Shuilleabhain, 2019; Ni Shuilleabhain & Clivaz, 2017). Nous présentons ci-dessous un graphique issu de ces analyses.

IV. ANALYSES ET RÉSULTATS : UN EXEMPLE

1. Les niveaux d'activité, étapes LS et CME utilisées au cours d'un cycle

Les croisements de catégories que nous avons conduits et représentés graphiquement concernent

- la répartition des niveaux d'activité du professeur au cours d'un cycle,
- la répartition, chronologique ou non, des étapes LS au fil des séances,
- les niveaux d'activités auxquels se situent les enseignants quand ils utilisent chaque type de CME,
- la répartition des CME au cours d'un cycle.

Nous donnons dans ce texte uniquement quelques exemples liés à ces deux derniers croisements, renvoyant le lecteur intéressé au chapitre paru en anglais (Clivaz & Ni Shuilleabhain, 2019), que ce soit pour d'autres exemples ou pour le détail des indicateurs utilisés.

[2] Le degré 5HarmoS correspond au grade 3, CE2 en France, et donc à des élèves de 8 à 9 ans. Le degré 6HarmoS correspond au grade 4, CM1 en France, et donc à des élèves de 9 à 10 ans.

2. *Les CME au cours d'un cycle*

Le croisement de l'utilisation des types de CME au cours des phases du cycle LS nous permet une analyse de l'utilisation des diverses catégories de CME.

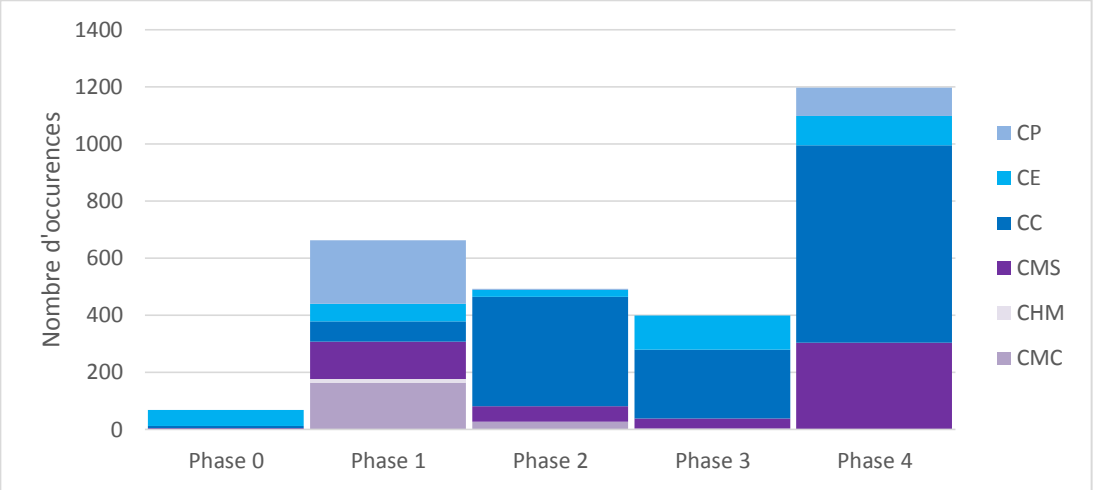


Figure 2. *– CME exprimées au cours du cycle LS.*

Si les différents types de CME apparaissent au cours de la phase 1, la planification de la leçon proprement dite (phase 2) voit les enseignants surtout utiliser des Connaissances du contenu et de l'enseignement du sujet mathématique (CC). C'est en planifiant la leçon de manière collaborative que les enseignants doivent transposer le contenu mathématique et développer des activités d'apprentissages permettant de favoriser le développement de la pensée numérique des élèves :

> Vanessa On a réfléchit à ça, hein. Finalement, on réfléchit aux objectifs de la tâche. Et puis, on a, est-ce que vraiment, est-ce que l'apprentissage moi, j'pense que oui, mais après je sais pas, est-ce que l'apprentissage réside aussi dans le fait d'avoir l'idée d'échange ?
>
> Edith Alors soit on décide qu'on veut pas qu'il le trouve tout seul et le but c'est vraiment qu'il s'entraine à échanger. Parce que à ce moment-là, on explique et après c'est bon…
>
> Valentine Ouais.
>
> Edith Ou alors on se dit le but c'est justement de les amener à réfléchir pour qu'ils trouvent cette solution et à ce moment-là, c'est-à-dire il faut qu'on définisse quand même ce qu'on veut viser.

La conduite et l'observation de la leçon de recherche (phase 3) comportaient des occurrences de Connaissances du contenu et l'enseignement du sujet mathématique (CC), des Connaissances des élèves et de l'apprentissage du sujet mathématique (CE) et des Connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement (CMS). Par exemple, comme illustré dans la Figure 3, l'observateur a noté une action d'un élève suggérant d'échanger une centaine contre neuf dizaines et dix unités. Cette remarque a ainsi été codée comme une observation de l'activité des élèves utilisant une connaissance particulière de l'aspect décimal de la numération décimale de position, et donc une connaissance mathématique spécifique à l'enseignement (CMS).

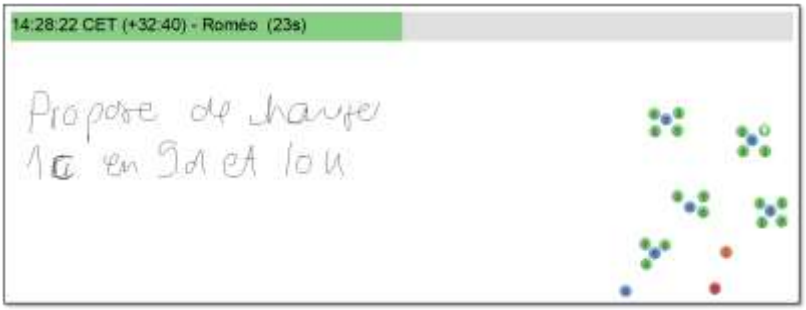


Figure 3. *– CME exprimées au cours du cycle LS.*

La phase d'analyse de la leçon (phase 4) est celle qui a vu le plus grand nombre d'utilisation des CME, mais aussi une très grande variété quant au type de connaissances (CC, CMS, CE, CP).

La participation à un cycle LS demande aux enseignants d'utiliser les diverses catégories de CME au cours des discussions à propos de la planification, de la conduite ou de l'observation et surtout de la discussion de la leçon de recherche.

3. Les CME et les niveaux d'activités de l'enseignant

Nous avons également examiné l'ensemble des occurrences des CME et des niveaux d'activité de l'enseignant (voir **Figure 4**). Cette analyse fournit une image du type de connaissances, à un niveau d'activité de l'enseignant donné.

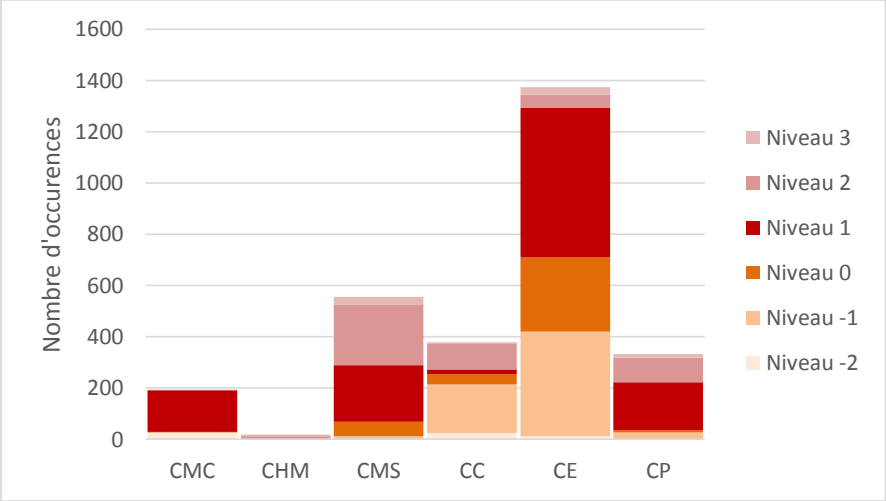


Figure 4. *– CME exprimées selon les niveaux d'activité de l'enseignant au cours d'un cycle LS.*

La Figure 4 indique clairement que les Connaissances des élèves et du sujet mathématique (CE) étaient le type de connaissances le plus fréquent lors du cycle LS. Il est intéressant d'observer que ce type de connaissances a été utilisé à presque tous les niveaux d'activité de l'enseignant au cours des phases de la LS. Comme on pouvait s'y attendre, lorsque les enseignants utilisent des Connaissances du contenu et de l'enseignement du sujet mathématique (CC) ou des Connaissances des élèves et du sujet mathématique (CE) au cours du cycle, c'est souvent au niveau d'observation des élèves (niveau -1). Il est également intéressant de relever que les enseignants ont perçu les mathématiques à travers les yeux de leurs élèves (niveau -2) lorsqu'ils ont utilisé leurs Connaissances du contenu et de l'enseignement du sujet mathématiques (CC).

Au cours de leur participation à la LS, sans qu'une question leur ait été posée, les enseignants ont réfléchi à l'impact de leur participation à cette forme collaborative de développement professionnel sur leurs pratiques pédagogiques en dehors de la LS. Dans l'exemple ci-dessous, Valentine, en phase 1, élaborait une réflexion quant au lien entre les connaissances mathématiques et une tâche spécifique (indicateur pour les Connaissances du programme et des moyens d'enseignement, CP). Elle indiquait que sa participation à la LS avait un impact sur ses choix d'activités hors de la LS.

> Valentine Moi, peut-être aussi de participer à cette série, peut-être aussi ça change mon, enfin, je veux dire ça a modifié certaines certaines approches dans mon enseignement, enfin, dans le sujet. Je pense à autre chose.
>
> Autre enseignante hum. Quoi?
>
> Valentine Ben, par exemple, ça rejoint un peu ce qu'a dit Edith, je pense plus peut-être à différents moyens à disposition. Je fais des activités supplémentaires par exemple "en pièces" qui est une activité du livre. Je l'ai faite encore une deuxième fois. J'ai continué mes différentes activités. J'image plus peut-être aussi. Je suis plus voilà j'suis plus attentive à certaines euh à certaines difficultés que pourraient avoir quelques-uns qui seraient mises en évidence.

Il est également intéressant de noter le très faible nombre de connaissances de l'horizon mathématique (CHM) dans les conversations des enseignants au cours de ce cycle LS (voir **Figure 4**). Cela est peut-être dû au fait qu'au cours de ce cycle LS, il n'y avait pas d'expert externe (knowledgeable other en anglais, voir par exemple Takahashi, 2014) distinct du facilitateur. Au Japon notamment, cet expert externe fait souvent le lien entre les observations de la leçon de recherche et les apprentissages futurs des élèves. Il intègre ainsi les aspects de l'horizon mathématiques des connaissances travaillées durant la leçon de recherche (Takahashi, 2014). Cet aspect devra faire l'objet de recherches futures.

V. CONCLUSION

Nos analyses montrent qu'un des bénéfices des LS, tout au moins du cycle helvétique et du cycle irlandais que nous avons analysés, est que les enseignants sont amenés à utiliser presque tous les types de CME au cours de chaque étape du cycle et en se plaçant à divers niveaux d'activités. Cette utilisation de chaque type de CME à chaque niveau d'activité est permise par le fait que les étapes du cycle LS mettent en lumière les facettes essentielles de la part didactique de la profession enseignante : l'étude du sujet, la préparation de leçons, la conduite et l'observation de leçons et la réflexion sur le lien entre enseignement et apprentissage lors de la leçon. De plus, chacune de ces facettes est en lien avec les autres, ce qui restitue, dans une situation de développement professionnel, la complexité de l'enseignement. Cette mise en lumière est possible par un travail qui se déroule sur la durée, dans un processus relativement codifié, de manière collaborative et mettant la focale sur le lien entre l'apprentissage d'élèves et l'enseignement (et non l'enseignant, voir notamment Hiebert & Stigler, 2017). L'ensemble de ces éléments nous fait considérer le processus LS comme une infrastructure paradidactique (Winsløw, Bahn & Rasmussen, 2018) liée au développement professionnel des enseignants, voire comme une situation fondamentale de l'apprentissage des connaissances professionnelles, mathématiques et didactiques, de l'enseignement (Clivaz, 2015b, 2018b). Par la suite, l'étude fine des processus dialogiques à l'œuvre entre les participants lors des séances LS ainsi que l'analyse des aspects adidactiques et didactiques (pour l'apprentissage des connaissances professionnelles) des phases LS devraient nous permettre de comprendre un peu mieux les spécificités des LS en tant que situation d'apprentissage des connaissances professionnelles de l'enseignement.

RÉFÉRENCES

Baetschmann, K., Balegno, M., Baud, E., Chevalley, M., Clerc-Georgy, A., Clivaz, S. et al. (2015). Une expérience de Lesson Study en mathématiques en 5-6 Harmos. *L'Educateur, 11*, 32-34. Consulté le 10 mai 2016, dans http://www.hepl.ch/files/live/sites/systemsite/files/laboratoire_3ls/EducateurLessonStudy11_2015.pdf

Ball, D. L., Hill, H. C. & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching, who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator* (Fall 2005), 4-17, 20-22, 43-46. Consulté le 15 décembre 2018, dans http://deepblue.lib.umich.edu/bitstream/2027.42/65072/4/Ball_F05.pdf

Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407. Consulté le 15 décembre 2018, dans http://jte.sagepub.com/cgi/content/abstract/59/5/389

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(2), 33-115.

Clerc-Georgy, A. & Clivaz, S. (2016). Evolution des rôles entre chercheurs et enseignants dans un processus lesson study: quel partage des savoirs? In F. Ligozat, M. Charmillot & A. Muller (Eds.), *Le partage des savoirs dans les processus de recherche en éducation* (pp. 189-208). Série Raisons Educatives, n°20. Bruxelles: De Boeck.

Clivaz, S. (2011). *Des mathématiques pour enseigner, analyse de l'influence des connaissances mathématiques d'enseignants vaudois sur leur enseignement des mathématiques à l'école primaire.* Thèse de doctorat. Université de Genève, Genève. Consulté le 15 décembre 2018, dans http://archive-ouverte.unige.ch/unige:17047

Clivaz, S. (2012a). Connaissances mathématiques de l'enseignant et bifurcations didactiques : analyse d'un épisode. *Recherches en didactique, 14*, 29-46.

Clivaz, S. (2012b). Connaissances mathématiques des enseignants et enseignement de l'algorithme de la multiplication. In J.-L. Dorier & S. Coutat (Eds.), *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (pp. GT1, 172–182). Genève. Consulté le 15 décembre 2018, dans http://emf.unige.ch/files/7014/5320/1192/EMF2012GT1CLIVAZ.pdf

Clivaz, S. (2014). *Des mathématiques pour enseigner? Quelle influence les connaissances mathématiques des enseignants ont-elles sur leur enseignement à l'école primaire?* Grenoble: La Pensée Sauvage.

Clivaz, S. (2015a). French Didactique des Mathématiques and Lesson Study: a profitable dialogue? *International Journal for Lesson and Learning Studies, 4*(3), 245-260. Consulté le 15 décembre 2018, dans http://www.emeraldinsight.com/doi/abs/10.1108/IJLLS-12-2014-0046

Clivaz, S. (2015b). Les Lesson Study : Des situations scolaires aux situations d'apprentissage professionnel pour les enseignants. *Revue des HEP et institutions assimilées de Suisse romande et du Tessin, 19*, 99-105. Consulté le 15 décembre 2018, dans http://www.revuedeshep.ch/site-fpeq-n/Site_FPEQ/19_files/2015-Clivaz-FPEQ-19.pdf

Clivaz, S. (2015c). Les Lesson Study ? Kesako ? *Math-Ecole, 224*, 23-26. Consulté le 15 décembre 2018, dans http://www.revue-mathematiques.ch/files/2614/6288/8786/ME224_Clivaz.pdf

Clivaz, S. (2016). Connaissances mathématiques des enseignants et enseignement de l'algorithme de la multiplication. *Recherche en didactique des mathématiques, 36*(2), 231-261.

Clivaz, S. (2017). Teaching multidigit multiplication: combining multiple frameworks to analyse a class episode. *Educational Studies in Mathematics*. Consulté le 8 juillet 2017, dans http://rdcu.be/t1e7

Clivaz, S. (2018a). Développement des connaissances mathématiques pour l'enseignement au cours d'un processus de lesson study. In T. Barrier & C. Chambris (Eds.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2016* (pp. 287-302). Paris: IREM de Paris – Université Paris Diderot. Consulté le 15 décembre 2018, dans https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01704879

Clivaz, S. (2018b). Lesson study as a fundamental situation for the knowledge of teaching. *International Journal for Lesson and Learning Studies, 7*(3), 172 - 183. Consulté le 15 décembre 2018, dans https://www.emeraldinsight.com/doi/abs/10.1108/IJLLS-03-2018-0015

Clivaz, S., Clerc-Georgy, A. & Batteau, V. (2016). Lesson study en mathématiques : un dispositif japonais de développement professionnel des enseignants à l'épreuve du contexte suisse-romand. In Y. Matheron & G. Gueudet (Eds.), *Actes de la 18e école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 487-502). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Clivaz, S. & Ni Shuilleabhain, A. (2019). Examining Teacher Learning in Lesson Study: Mathematical Knowledge for Teaching and Levels of Teacher Activity. In R. Huang, A. Takahashi & J. P. da Ponte (Eds.), *Theory and practices of lesson study in mathematics: An international perspective*: ZDM, Springer.

Fernandez, C., Cannon, J. & Chokshi, S. (2003). A US–Japan lesson study collaboration reveals critical lenses for examining practice. *Teaching and teacher education, 19*(2), 171-185.

Gersten, R., Taylor, M. J., Keys, T. D., Rolfhus, E. & Newman-Gonchar, R. (2014). Summary of research on the effectiveness of math professional development approaches. *Tallahassee, FL Southeast Regional Educational Laboratory at Florida State University*, 3-15.

Hiebert, J. & Stigler, J. W. (2017). Teaching Versus Teachers as a Lever for Change: Comparing a Japanese and a U.S. Perspective on Improving Instruction. *Educational Researcher, 0*(0), 0013189X17711899. Consulté le 15 décembre 2018, dans http://journals.sagepub.com/doi/abs/10.3102/0013189X17711899

Inagaki, T. (1995). Meiji kyouju rironshi kenkyu [A historical research on teaching theory in Meiji-era]. *Tokyo: Hyuuron-Sya*.

Lewis, C. (2002). *Lesson study: A handbook of teacher-led instructional change*. Philadelphia: Research for Better Schools.

Lewis, C. (2015). What Is Improvement Science? Do We Need It in Education? *Educational Researcher, 44*(1), 54-61.

Lewis, C. & Hurd, J. (2011). *Lesson study step by step: How teacher learning communities improve instruction*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Lewis, C. & Takahashi, A. (2013). Facilitating curriculum reforms through lesson study. *International Journal for Lesson and Learning Studies, 2*(3), 207-217.

Margolinas, C. (2002). Situations, milieux, connaissances: Analyse de l'activité du professeur. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Eds.), *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 141-155). Grenoble: La Pensée Sauvage. Consulté le 15 décembre 2018, dans https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00421848

Miyakawa, T. & Winsløw, C. (2009). Un dispositif japonais pour le travail en équipe d'enseignants: Etude collective d'une leçon. *Education et Didactique, 3*(1), 77-90. Consulté le 15 décembre 2018, dans https://journals.openedition.org/educationdidactique/420

Ni Shuilleabhain, A. (2015). *Developing Mathematics Teachers' Pedagogical Content Knowledge through Lesson Study: A Multiple Case Study at a Time of Curriculum Change.* Doctor of Philosophy Ph.D. Trinity College Dublin, Trinity College Dublin Library

Ni Shuilleabhain, A. & Clivaz, S. (2017). Analyzing Teacher Learning in Lesson Study: Mathematical Knowledge for Teaching and Levels of Teacher Activity. *Quadrante*, *26*(2), 99-125. Consulté le 15 décembre 2018, dans https://www.researchgate.net/publication/322203792_Analyzing_teacher_learning_in_lesson_study_mathematical_knowledge_for_teaching_and_levels_of_teacher_activity

Perry, R. & Lewis, C. (2011). *Improving the mathematical content base of lesson study summary of results* Consulté le 15 décembre 2018, dans https://www.texasgateway.org/sites/default/files/resources/documents/Lesson%20Study%20PD.Catherine%20Lewis.pdf

Shimizu, Y. (2014). Lesson Study in Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 358-360). New York: Springer. Consulté le 15 décembre 2018, dans http://dx.doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_91

Stigler, J. W. & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap. Best ideas from the worlds teachers for improving education in the classroom*. New York: The Free Press.

Takahashi, A. (2014). The role of the knowledgeable other in lesson study: Examination of comments of experienced lesson study practitioners. *Mathematics Teacher Education and Development*, *16*(1), 4-21.

Takahashi, A. & McDougal, T. (2016). Collaborative lesson research: maximizing the impact of lesson study. *ZDM*, *48*(4), 1-14. Consulté le 15 décembre 2018, dans http://dx.doi.org/10.1007/s11858-015-0752-x

Winsløw, C., Bahn, J. & Rasmussen, K. (2018). Theorizing Lesson Study: Two related frameworks and two Danish case-studies. In M. Quaresma, C. Winsløw, S. Clivaz, J. P. da Ponte, A. Ni Shuilleabhain, A. Takahashi & T. Fujii (Eds.), *Mathematics lesson study around the world: Theoretical and methodological issues* (pp. 123-142). Cham, Switzerland: Springer.

COMPARAISON DES RAPPORTS AU SAVOIR EN MATHEMATIQUES ET EN PHYSIQUE DE PROFESSEURS DES ÉCOLES

DECROIX[*] Anne-Amandine – CHENEVOTOT[**] Françoise – GALISSON[***] Marie-Pierre BAHEUX[****] Carole

Résumé – Notre communication cherche à comprendre le rapport au savoir des professeurs des écoles à enseigner les mathématiques et la physique. Nous faisons l'hypothèse que cela pourrait permettre de concevoir des formations plus adaptées. Nous nous inscrivons dans le cadre théorique de l'approche socio-anthropologique du rapport au savoir de Charlot (1997) adapté aux enseignants.

Mots-clefs : Professeurs des écoles, rapport au savoir, mathématiques et physique, formation continue

Abstract –Our communication tries to understand relationship to knowledge for teachers in mathematics and physics. Our hypothesis is that this study could allow to us to develop more adapted in-service training. In this context, we could adapt Charlot's socio-anthropological relationship to knowledge for teachers.

Keywords: primary school teachers, relationship to knowledge, mathematics and physics, in-service training

I. INTRODUCTION

Notre communication interroge les pratiques d'enseignement en vue de concevoir des formations (initiales et continues) et prend en compte la question des approches interdisciplinaires. Les croisements entre disciplines sont de plus en plus mis en avant dans les réformes curriculaires dans divers pays. Que ces réformes tendent à aider les élèves à appréhender la complexité du monde qui les entoure (« Questionner le monde »), à développer des compétences transversales, ou simplement à donner sens aux apprentissages, leur mise en œuvre soulève la question de la formation et des pratiques des enseignants. Ainsi, les programmes actuels de l'école élémentaire (élèves de 6 à 11 ans) en France (Bulletin officiel n°17 du 23 avril 2015) ont introduit une rubrique novatrice « Croisement des disciplines ». S'adressant à des enseignants polyvalents (en France, un professeur des écoles enseigne toutes les disciplines), cette recommandation souligne l'existence d'une difficulté (l'inexistence d'une interdisciplinarité réfléchie). Plus encore, au-delà des liens, ces nouveaux programmes posent la question des pratiques enseignantes dans les diverses disciplines de l'école primaire.

Affectés en France à l'enseignement primaire (élèves de 2 à 11 ans), les Professeurs des Écoles (PE) sont des enseignants polyvalents qui, le plus souvent, n'ont pas une formation scientifique. Les dernières évaluations TIMSS 2015 (MEN 2016) ont souligné deux aspects. D'une part, les enseignants français sont plus souvent mal à l'aise que leurs pairs européens pour enseigner les mathématiques et les sciences[1], hypothèse qui avait été émise par Baillat Espinoza&Vincent 2001). D'autre part, au cours des deux années précédant l'étude, moins

[*] LDAR (EA 4434) UA UCP UPD UPEC URN – COMUE et ESPE Lille Nord de France – France – anne-amandine.decroix@espe-lnf.fr

[**] Laboratoire LDAR (EA 4434) UA UCP UPD UPEC URN – COMUE et ESPE Lille Nord de France – France –francoise.chenevotot@espe-lnf.fr

[***] Laboratoire LDAR (EA 4434) UA UCP UPD UPEC URN – COMUE et ESPE Lille Nord de France – France – mpgalisson@espe-lnf.fr

[****] LML (EA 2462), Fédération CNRS Nord-Pas-de-Calais FR 2956, Université d'Artois – France – carole.baheux@univ-artois.fr

[1] Le terme « sciences » recouvre ici les sciences expérimentales et la physique-technologie.

d'un enseignant sur deux a reçu une formation continue en mathématiques et seul un quart d'entre eux a bénéficié d'une formation continue en sciences.

Nous cherchons à caractériser le rapport au savoir des PE en mathématiques et en physique[2]. Nous faisons l'hypothèse que cela pourrait permettre de comprendre leur mobilisation à enseigner ces disciplines et donc de concevoir des formations plus adaptées (Decroix&Kermen 2016). Pour cela, nous souhaitons documenter le rapport au savoir des PE en mathématiques et en physique dans le cadre d'entretiens semi-directifs qui donneront accès à leurs pratiques déclarées. Plus précisément, nous nous demandons : Quelles sont les spécificités du rapport au savoir en mathématiques et en physique des PE ? Y- a-t-il des liens entre ces rapports ? Quelles perspectives peut-on en tirer pour une formation dans ces disciplines ?

II. CADRE THEORIQUE

Notre objectif est de caractériser le rapport au savoir des Professeurs des Écoles en mathématiques et en physique. Nous nous inscrivons dans le cadre théorique de l'approche socio-anthropologique du rapport au savoir de Charlot (1997) que nous avons adapté au contexte de notre recherche.

L'approche développée par Charlot est centrée sur l'élève. Le rapport au savoir présente une dimension épistémique qui regroupe les relations au savoir-objet dans l'acte d'apprendre (rapport à l'apprendre) et une dimension identitaire qui caractérise les relations entretenues par le sujet avec le monde et les autres lorsqu'il est confronté à l'apprendre (rapport à soi, aux autres). Ces dimensions épistémique et identitaire sont modulées par une dimension sociale qui traduit le fait que le sujet est inscrit dans un espace social (Charlot 2003).

Nous nous intéressons ici à des enseignants. Les enseignants se livrent à deux types d'activités vis-à-vis des savoirs : apprendre mais aussi enseigner (Cappiello&Venturini 2011) ou « faire apprendre » (Pautal&al 2008) ou « transmettre » (Maizières 2011). La dimension épistémique concerne l'action engagée lors de l'appropriation du savoir scolaire en jeu mais aussi lors de l'enseignement de ce savoir (Maizières 2011). La dimension identitaire représente le sens et la valeur que l'enseignant accorde au savoir (Mornata 2015). Transversale, la dimension sociale influe sur la composante identitaire car le rapport au savoir est formaté par notre environnement socio-culturel dans lequel les savoirs et les savoir-faire en jeu sont des produits historiques et sociaux. La dimension sociale joue aussi sur la dimension épistémique car apprendre et faire apprendre consiste à s'engager dans des activités dans des institutions (au sens large) en interaction avec autrui ou avec un milieu (apprentissage autodidacte).

III. PLACE DES MATHEMATIQUES ET DE LA PHYSIQUE DANS LES PROGRAMMES DE L'ECOLE ELEMENTAIRE

Les programmes scolaires de 2008[3] pour l'enseignement des mathématiques et de la physique au cycle 3[4] traduisent les attentes de l'institution (contenus, quelques démarches pédagogiques) et dressent l'image d'un certain rapport institutionnel à ces disciplines.

[2] Nous nommerons « physique » ce qui apparaît sous « physique-technologie » dans les programmes scolaires.
[3] Les programmes scolaires de 2008 étaient en vigueur au moment de notre étude (B.O. Hors-série n°3 du 19 juin 2008).
[4] Le cycle 3 comprenait les classes de CE2, CM1 et CM2 au moment de notre étude (Grades 3, 4 et 5).

L'enseignement des mathématiques et de la physique s'organise autour de quatre domaines d'étude pour chaque discipline : d'une part nombre et calcul, géométrie, grandeurs et mesures, organisation et gestion de données pour les mathématiques, d'autre part le ciel et la Terre, la matière, l'énergie, les objets techniques pour la physique. L'horaire annuel dévolu aux mathématiques s'élève à 180 heures, soit un horaire hebdomadaire de 5 heures, avec l'obligation de faire 15 minutes de calcul mental par jour. L'horaire annuel dédié à la physique-technologie est laissé à l'appréciation du PE à condition qu'il s'élève globalement à 78 heures pour les sciences expérimentales (quatre domaines d'étude en SVT) et la physique (quatre domaines cités plus haut). Le PE est également libre de répartir les 11 heures hebdomadaires consacrées à l'éducation physique et sportive, la langue vivante, les sciences expérimentales et la physique-technologie, la culture humaniste, comme il le souhaite.

Les programmes scolaires de 2008 proposent des progressions pour le cycle 3 pour chacun des domaines d'étude en mathématiques. Par contre, des progressions pour les sciences expérimentales et la physique-technologie n'apparaitront que quatre ans plus tard dans le Bulletin officiel n°1 du 5 janvier 2012. Dans tous les cas, ces progressions ne relèvent pas d'une obligation : « Les tableaux suivants donnent des repères aux équipes pédagogiques pour organiser la progressivité des apprentissages ». Ces programmes préconisent le recours à une démarche pédagogique spécifique. L'accent est mis sur la résolution de problèmes en mathématiques : « La résolution de problèmes joue un rôle essentiel dans l'activité mathématique. Elle est présente dans tous les domaines et s'exerce à tous les stades des apprentissages ». Tandis que la démarche d'investigation est valorisée en physique : « les connaissances et les compétences sont acquises dans le cadre d'une démarche d'investigation qui développe la curiosité, la créativité, l'esprit critique et l'intérêt pour le progrès scientifique et technique ».

En décrivant les savoirs scolaires et les démarches pédagogiques préconisées, les programmes scolaires esquissent une certaine image institutionnelle d'un rapport à ces deux disciplines scolaires. Ils distinguent notamment un rapport à un savoir mathématique scolaire constitué de domaines stabilisés, organisé temporellement, piloté par une activité emblématique qui semble aller de soi : la résolution de problèmes. Au contraire, le savoir physique scolaire est une composante d'un domaine élargi aux sciences, subordonné à des conditions de viabilité (place relative, organisation temporelle) sous la responsabilité du seul enseignant, dont l'enseignement s'appuie sur une démarche (la démarche d'investigation) qui est en elle-même un objet d'apprentissage en plus d'être un outil au service des apprentissages.

IV. METHODOLOGIE DE RECUEIL ET D'ANALYSE DES DONNEES

Charlot utilise deux procédures pour le recueil des données, les bilans de savoir auxquels s'ajoutent pour certains élèves des entretiens semi directifs approfondis de type clinique. Dans le cas des études en didactique cherchant à caractériser le rapport au savoir des enseignants dans une discipline, les entretiens individuels sont généralement privilégiés (Pautal&al 2008, Maizières 2011, Venturini&al 2007). Dans cette étude, nous avons effectué des entretiens semi-directifs avec des professeurs des écoles chevronnés de cycle 3 (élèves de 8 à 11ans). Ces entretiens sont construits sur une même trame, instanciée selon la discipline. L'analyse des entretiens permet d'appréhender certains aspects de la dimension épistémique et de la dimension identitaire du rapport au savoir en mathématiques et en physique de ces enseignants. Quatorze entretiens ont été réalisés en physique et neuf en mathématiques auprès de PE ayant enseigné plusieurs années en cycle 3 et ayant des formations initiales diverses. Cinq professeurs des écoles ont participé à la fois aux entretiens en physique et en mathématiques.

Les entretiens, sont organisés en plusieurs étapes. Chacune des questions posées renvoie à une ou plusieurs des dimensions du rapport au savoir adapté aux enseignants. Dans la dimension épistémique, nous avons recueilli des éléments sur leur rapport aux savoirs disciplinaires scolaires, à l'institution et à des ressources et démarches pédagogiques ou didactiques. En mathématiques, les ressources didactiques sont celles dont les PE s'emparent pour enseigner les mathématiques tandis que la démarche pédagogique est la résolution de problèmes parfois accompagnée du recours à la manipulation. En physique, les connaissances pédagogiques pour enseigner la physique concernent uniquement la démarche d'investigation. Dans la dimension identitaire, en lien avec le sens et la valeur que les enseignants confèrent au savoir, nous avons pris en compte la manière dont les enseignants jugent leur propre légitimité à enseigner les mathématiques et la physique et leur insertion dans un réseau constitué par les autres. Nous avons aussi recueilli des informations sur leur parcours universitaire et professionnel ainsi que sur les formations initiales et continues suivies en mathématiques et en physique. Enfin, ils nous ont livré leurs attentes en formation continue. Afin que les PE se livrent avec franchise, nous les avons traités en professionnels et nous n'avons pas posé de questions directes sur leurs connaissances pour ne pas les déstabiliser.

Les entretiens ont été écoutés de façon détaillée afin de répertorier les éléments correspondants aux dimensions du rapport au savoir. Cela nous a conduites à formuler des catégories d'analyse pour chacune des sous dimensions présentées précédemment.

V. SYNTHESE DES PRINCIPAUX RESULTATS

Pour comparer le rapport au savoir des PE en mathématiques et en physique, nous avons affiné nos caractérisations des dimensions épistémique et identitaire du rapport au savoir pour chacune de ces disciplines lors de nombreux échanges, avant, pendant et après l'analyse des entretiens.

1. Dimension épistémique

Rapport à des savoirs disciplinaires scolaires

En mathématiques, majoritairement, les PE accordent une importance prédominante aux apprentissages numériques. La géométrie, bien que minorée, est souvent plébiscitée pour ses aspects concrets, instrumentaux, en lien avec les arts. Le calcul mental est peu cité. S'ils sont partiellement déchargés de leur classe, ils choisissent de déléguer les grandeurs et mesures et la géométrie. Certains thèmes sont jugés délicats à apprendre pour des élèves de cycle 3 : les grandeurs et mesures, les fractions et les décimaux, la proportionnalité. Les liens entre les disciplines ou entre les différents domaines mathématiques sont peu évoqués : exploitation de la gestion de données en lien avec d'autres disciplines, de la géométrie (rabattue au dessin géométrique) en lien avec les arts plastiques ou la technologie (maquette).

En physique, seuls deux des PE interrogés déclarent posséder les connaissances disciplinaires scolaires nécessaires pour enseigner toute la physique en cycle 3. Les autres déclarent avoir des difficultés sur certains thèmes. Ces difficultés conduisent généralement les PE à éviter, quand ils le peuvent, d'aborder tout ou partie de ces thèmes en classe.

L'analyse des entretiens en mathématiques et en physique révèle donc un discours très différent selon les deux disciplines. Les PE n'ont jamais été questionnés de manière directe sur leurs connaissances. On constate cependant qu'ils justifient facilement une non pratique de certains thèmes en physique par un manque de connaissances dans ce domaine alors qu'ils ne remettent jamais en cause leurs connaissances en mathématiques..

Rapport à l'institution

En mathématiques, les PE interrogés connaissent et suivent les IO. Peu d'entre eux remettent en cause leur pertinence. La répartition des enseignements entre les quatre domaines figurant dans les programmes n'est appliquée à la lettre de manière hebdomadaire que par deux PE. Ainsi, les autres tendent à établir un équilibre global au moyen d'une progression spiralaire (trois PE) ou d'un module qui se déroule sur trois semaines puis donne lieu à un rééquilibrage (un PE).

En physique, les programmes scolaires sont généralement connus des PE interrogés. Deux PE déclarent enseigner la physique car elle figure au programme. Les différentes étapes de la démarche d'investigation sont connues des PE interrogés. Ces PE insistent d'ailleurs sur l'intérêt de faire des sciences sous forme de démarche d'investigation. Les instructions officielles ne donnent aucun volume horaire hebdomadaire en sciences. Chaque enseignant adapte donc ses enseignements à sa convenance. Trois PE déclarent essayer de respecter le volume horaire imposé par l'institution. Les autres, ne respectant pas ce volume horaire, insistent sur la lourdeur des programmes.

Alors que les PE interrogés soulignent la lourdeur des programmes en physique, cette critique n'est pas apparue pour les mathématiques. Par contre, pour les deux disciplines, les PE hiérarchisent les domaines à enseigner.

Rapport à des ressources et des démarches pédagogiques et/ou didactiques

En mathématiques, les PE interrogés utilisent des manuels diversifiés qu'ils jugent adaptés aux besoins des élèves. Ils plébiscitent la résolution de problèmes sans expliciter. Ils signalent des difficultés avec la typologie des problèmes[5] figurant dans les programmes scolaires de 2002 (MEN 2002). Ils soulignent les obstacles rencontrés pour mettre en place la résolution de problèmes complexes (la mise en œuvre d'une étape de recherche, l'institutionnalisation des connaissances). Ils privilégient les problèmes concrets et familiers. La résolution de problèmes investit des problèmes numériques mais rarement géométriques. Ils plébiscitent la manipulation et citent quelques notions qui s'y prêtent bien (fractions, aires, géométrie) mais sans lier explicitement manipulation et résolution de problèmes. Ils préconisent un schéma dominant : manipuler pour abstraire, faire pour comprendre.

En physique, plus de la moitié des PE interrogés déclarent se documenter avant de préparer une séquence en sciences pour acquérir les connaissances qu'ils jugent nécessaires pour enseigner le thème en question et pour avoir des informations sur la manière de l'aborder en classe. L'appropriation de la démarche d'investigation s'effectue à des degrés divers dans la mesure où certains déclarent faire essentiellement des cours transmissifs, en s'aidant éventuellement de documents. D'autres disent privilégier l'étape d'investigation mais négligent la phase d'institutionnalisation. Certains PE interrogés indiquent que le temps de préparation des séances de sciences par rapport à d'autres domaines disciplinaires est particulièrement conséquent. Les difficultés liées à la nécessité de disposer d'un matériel dédié sont évoquées. Ces difficultés peuvent entrainer l'absence d'enseignement de certains thèmes de la physique.

Une différence majeure apparaît ici pour les ressources citées par les PE interrogés. En mathématiques, sont citées des ressources destinées aux élèves alors que, en physique, ce sont des ressources à usage des PE pour combler leurs lacunes qui sont rapportées. On peut cependant signaler que l'offre de manuels scolaires pour les élèves est moindre en physique qu'en mathématiques. Dans les deux cas, les enseignants ont cependant le réel souci d'adapter les ressources aux besoins des élèves. Concernant la démarche pédagogique ou didactique,

[5] Quatre types de problèmes sont évoqués et peuvent être associés à des objectifs d'apprentissage différents : problèmes pour apprendre, de réinvestissement, complexes, pour chercher.

nous avons relevé que les démarches préconisées par les IO, c'est à dire la résolution de problèmes et la démarche d'investigation, sont connues par les PE interrogés mais aucun exemple précis n'a émergé lors des entretiens. Enfin, les difficultés matérielles ne sont apparues que pour l'enseignement de la physique.

2. Dimension identitaire

Rapport à soi

Pour plus de la moitié des PE interrogés, les mathématiques ont été source de mal être scolaire. Mais près de la moitié d'entre eux témoigne d'une appétence explicite et fait état d'un intérêt ou même d'une fascination pour les maths. Les PE ne questionnent pas leur maîtrise des notions à enseigner (thème jamais évoqué pendant les entretiens par les PE). Peu font explicitement référence à des connaissances professionnelles issues de la formation. Mais la référence aux ressources ERMEL[6] traduit un certain impact de la formation initiale.

Plus de la moitié des PE interrogés considère la physique comme quelque chose « d'abstrait », « des équations », qu'ils ne relient pas à des éléments de la vie quotidienne contrairement à la biologie. Le terme « sciences » est essentiellement associé à des exemples concrets en biologie pour cinq des PE. Seuls trois PE parlent de la physique comme une science permettant de comprendre comment fonctionne le monde qui nous entoure. En physique, certains thèmes ne sont pas enseignés car les PE déclarent ne pas éprouver d'intérêt pour eux. Les entretiens révèlent que les PE placent volontairement un ou plusieurs thèmes en fin d'année (faute de temps, ils peuvent ne pas être abordés) : thèmes pour lesquels l'enseignant manque de connaissances, se sent moins à l'aise, qu'il ne sait pas comment aborder en classe ou qui ne l'intéressent pas. Le manque d'intérêt de certains PE pour des thèmes de physique ont conduit certains à essayer de faire, quand ils le peuvent, des liens entre la physique et une autre discipline qu'ils maîtrisent mieux, qui est plus concrète pour eux. Certains PE évoquent un mauvais souvenir de leurs cours de physique dans le secondaire ou un sentiment de malaise, d'autres n'ont pratiquement aucun souvenir dans ce domaine.

La perception du caractère formel des deux disciplines et de leur enseignement est un premier trait commun. En position d'élève, ces deux disciplines ont parfois été sources de souffrance. Par contre, en position d'enseignant, les PE ont un rapport positif aux mathématiques et un peu plus nuancé pour la physique à enseigner. La formation les a réconciliés avec une certaine image des maths, qu'ils véhiculent auprès de leurs élèves : des maths pratiques et éducatives (liées notamment à des compétences transversales).

Rapport aux autres

Dans cette sous dimension de la dimension identitaire, les autres désignent les inspecteurs, et les intervenants extérieurs, les proches, les collègues, les élèves.

Lors des entretiens en mathématiques, aucun n'évoque ses rapports avec l'Inspection. Ils font état d'un travail collaboratif très fluctuant qu'ils souhaiteraient plus intense. Ils se sentent légitimes dans leurs fonctions vis à vis des élèves dont ils ne craignent pas les questions. Leur interprétation des besoins des élèves joue un rôle important sur leurs pratiques déclarées. Leur attitude face aux difficultés des élèves diffère : maintenir ou pas le niveau d'exigence.

En physique, un professeur des écoles dit se sentir contraint d'enseigner la physique car son inspecteur y tient particulièrement. Cela laisse entendre qu'il pourrait y avoir des configurations où l'enseignement de la physique ne serait pas une obligation. Certains profitent de la présence d'intervenants extérieurs compétents pour leur déléguer la conduite de

[6] Ressources pédagogiques et didactiques recommandées en formation.

certaines séances. Les proches et les collègues ont été peu évoqués par les PE interrogés ; seuls les PE bénéficiant ou ayant bénéficié d'une décharge de service parlent de leur remplaçant car ils lui donnent souvent les sciences à enseigner en indiquant que c'est une discipline « facile à isoler ». La plupart des PE interrogés soulignent que les séances de sciences intéressent particulièrement les élèves (ils ne font pas de distinction entre SVT et physique). Cet intérêt apparaît comme un facteur de motivation. Beaucoup précisent que la réflexion des élèves est favorisée par un enseignement sous forme de démarche d'investigation. Les PE interrogés ont eu peu de formation continue en physique, mais lorsque c'est le cas, l'attitude hautaine et méprisante des formateurs est signalée.

Une grande majorité des PE interrogés insiste sur le fait que les élèves aiment les mathématiques et les sciences et sont très demandeurs. Le recours à la manipulation en mathématiques et à l'expérimentation en sciences sont légitimés : les élèves y trouvent plaisir et intérêt. Par ce biais, les PE trouvent intéressant de développer des compétences transversales comme la réflexion des élèves. Ils soulignent la nécessité de répondre aux questions posées par les élèves

3. Dimension sociale

Pour la majorité des PE interrogés, les mathématiques sont partout et il est nécessaire de faire des mathématiques. Les mathématiques représentent un mode de pensée et un outil interdisciplinaire et culturel. C'est encore un outil pour réussir à l'école mais aussi un instrument de sélection. A l'école primaire, les PE privilégient la construction de compétences transversales : « manipuler, découper, schématiser, calculer, compter… » c'est-à-dire, maîtriser des types de tâches universelles, utilisables hors de l'école qui font écho aux compétences transversales développées dans les programmes de l'école primaire de 1995 (Journal officiel du 2 mars 1995) « se montrer inventif, […], comparer des représentations, à des échelles différentes d'une même réalité, distinguer temps linéaire et cyclique, organiser son travail, le présenter, savoir lire un graphique, un plan, un schéma, un tableau, sélectionner les informations utiles, exposer, argumenter, communiquer sa démarche ». Pour la physique, notre interprétation des entretiens montre que la dimension sociale est fortement liée à la dimension identitaire ; le sens et la valeur sont évoqués via des souvenirs d'enfance et les relations familiales. Nous faisons l'hypothèse que l'importance accordée aux aspects transversaux des apprentissages dans les deux disciplines est un point commun, qui rend compte de la fonction sociale du PE (polyvalence, éducation citoyenne).

VI. CONCLUSION ET DISCUSSION : VERS DES PISTES DE FORMATION

L'analyse des trois dimensions du rapport au savoir nous conduit d'une part à dégager des informations sur les spécificités des rapports au savoir en mathématiques et en physique de ces PE et d'autres part, à mesurer l'influence de ce rapport sur les pratiques déclarées pour estimer la mobilisation à enseigner ces deux disciplines scolaires. Ces résultats nous permettent d'envisager des pistes de formation.

1. Leurs attentes en termes de formation

En mathématiques, les PE interrogés déclarent avoir des besoins limités en formation continue. Leurs demandes ciblent des domaines ou des sujets d'études jugés plus difficiles à enseigner (grandeurs et mesures, proportionnalité). Ils aimeraient favoriser des échanges et pouvoir utiliser des situations clé en main.

En physique, ils souhaiteraient des formations réduisant au minimum les moments d'exposition des savoirs disciplinaires (bien que considérés comme indispensables). Ils ont

besoin de vivre les investigations comme des élèves. Ils aimeraient des exemples de séquences d'enseignement qui permettent des adaptations rapides.

2. Ce que notre étude nous permet d'envisager en termes de formation

La caractérisation du rapport au savoir permet de proposer des pistes pour concevoir des formations susceptibles de faire évoluer les pratiques des PE en mathématiques et en physique. Une formation est susceptible de modifier les rapports au savoir en mathématiques ou en physique. Certains PE ont pris conscience que les mathématiques à enseigner ne sont pas les mathématiques qu'ils ont apprises en tant qu'élève. Leur rapport à l'apprendre a modifié leur rapport au savoir. C'est le cas d'un PE qui, après avoir suivi une formation continue en géométrie, aime enseigner ce domaine pourtant détesté dans l'enfance. Ce changement de regard sur la géométrie, dû à une formation continue, peut laisser espérer un même changement de rapport au savoir en physique. La physique est considérée par certains des PE interrogés comme abstraite et absente de la vie quotidienne Différents leviers peuvent favoriser une pratique de la physique en classe : apporter des savoirs disciplinaires aux enseignants, montrer que le programme de physique permet de comprendre le monde dans lequel nous vivons, montrer qu'il est possible de créer des liens entre la physique et d'autres disciplines scolaires mieux maitrisées ou pour lesquelles les enseignants éprouvent un intérêt.

Exploiter les liens entre pratiques privilégiées en mathématiques et physique est une approche à développer en formation. En mathématique comme en physique, les PE privilégient la construction de compétences transversales. L'intérêt des élèves pour la manipulation via les démarches pédagogiques préconisées motive les PE. Des formations continues exploitant la manipulation dans le cadre de la résolution de problèmes et la démarche d'investigation pourraient satisfaire leurs attentes. Mais les PE n'établissent pas pour autant des liens entre la construction des compétences transversales et des compétences dans ces deux disciplines faute d'appui sur des savoirs qui pourraient être exploités de manière interdisciplinaire. Les nouveaux programmes de 2015 encouragent explicitement une approche interdisciplinaire des apprentissages.

REFERENCES

Baillat, G., Espinoza, O. & Vincent, J. (2001) De la polyvalence formelle à la polyvalence réelle : une enquête nationale sur les pratiques professionnelles des enseignants du premier degré. Revue française de pédagogie, 134, 123-136.

Cappiello, P. & Venturini, P. (2011) Usages de l'approche socio-anthropologique du rapport au savoir en sciences de l'éducation et en didactique des sciences : étude comparatiste. *Carrefours de l'éducation*, 31, 237-252.

Charlot, B. (1997) Du rapport au savoir, éléments pour une théorie. Paris : Anthropos.

Charlot, B. (2003). La problématique du rapport au savoir. In Maury S. & Caillot M. (eds), *Rapport au savoir et didactiques* (p. 33‑50). Paris : Fabert.

Decroix, A.-A. & Kermen, I. (2016) Rapport au savoir en physique-technologie des professeurs des écoles. Neuvièmes rencontres scientifiques de l'ARDIST, Lens 30-31/03 et 1/04 2016.

Maizières, F. (2011) Rapport au savoir musical des professeurs des écoles et pratiques d'enseignement : un transfert parfois complexe. *Éducation et didactique*, 5(2), 53-64.

Mornata, C. (2015) Le rapport au savoir des enseignants : complémentarité des dimensions épistémiques, identitaires et sociales. In Vincent V. & Carnus M.-F. (eds), *Le rapport au(x) savoir(s) au coeur de l'enseignement : enjeux, richesse et pluralité* (p. 75‑86). Louvain-la-Neuve, Belgique : De Boeck supérieur.

Ministère de l'Education Nationale (2002) Mathématiques. Documents d'accompagnement de 2002. Les problèmes pour chercher.

Ministère de l'Education Nationale (2016) Direction de l'Évaluation, de la Prospective et de la Perspective. Note d'information n°33, novembre 2016. TIMMS 2015

Pautal, E., Venturini, P., & Dugal, J.-P. (2008) Prise en compte du rapport aux savoirs pour mieux comprendre un système didactique. *Didaskalia*, 33, 63-88

Venturini P., Calmettes B., Amade-Escot C., Terrisse A. (2007). Analyse didactique des pratiques d'enseignement de la physique d'une professeure expérimentée. *Aster*, 45, 211-234.

LA MULTIPLICATION POSEE EN FORMATION DES ENSEIGNANTS

DERUAZ[*] Michel – BALEGNO[**] Martine – BATTEAU[***] Valérie

Résumé – Cette contribution se situe dans la continuité des travaux que nous avons présentés lors des deux dernières éditions d'EMF. Nous nous intéressons à la formation initiale des enseignants du premier degré et nous proposons quelques éléments d'une recherche qui porte sur l'enseignement de la multiplication posée dans le contexte de la formation initiale et d'une transposition de certains éléments de cette formation dans une classe.

Mots-clefs: formation, multiplication, manipulation, abaque, transposition

Abstract – This contribution is in line with our work presented during the last two editions of EMF. We are interested in the initial training of primary school teachers and we propose some elements of a research which deals with the teaching of the multiplication posed in the context of the initial formation and a transposition of certain elements of this formation in a class.

Keywords: formation, multiplication, manipulation, abacus, transposition

I. INTRODUCTION

1. Notre positionnement de formateur

Avant d'intégrer l'équipe des formateurs de l'Unité d'Enseignement et de Recherche en didactiques des Mathématiques et des Sciences (UER MS) de la Haute École Pédagogique du canton de Vaud (HEP VD) pour participer à la formation des maîtres, nous étions enseignants au Gymnase (Lycée), à l'école primaire ou au Collège. Nous avons complété nos formations par un Master en didactique des mathématiques pour l'un, un Master en sciences de l'éducation pour l'une et par une thèse en didactique des mathématiques pour la dernière.

2. Le contexte de cette contribution

Cette contribution s'inscrit dans une démarche de recherche-action mise en œuvre depuis 2010 dans un module de didactique des mathématiques de la filière préscolaire-primaire de la HEP VD. Cette formation s'étale sur trois années, avec pour les mathématiques un semestre en première et un semestre en troisième année, ce qui correspond à un volume de 78 heures (ou 12 crédits ECTS) au total. Pour accéder à cette formation, il faut une maturité fédérale (baccalauréat) ou un titre jugé équivalent. La plupart des étudiants n'ont donc pas de formations universitaires préalables à leur formation d'enseignant. Avec la création des HEP au début des années 2000 et l'universitarisation de la formation des enseignants de l'école primaire, le cadre est devenu universitaire, mais pas nécessairement le profil des étudiants. Selon Cros (2009), la professionnalisation de l'université et l'augmentation du nombre de jeunes avec des motivations très différentes a souvent servi de détonateur à l'innovation dans l'enseignement supérieur.

Ce travail se situe dans la continuité de ceux que nous avons présentés dans les éditions précédentes de EMF : la première dans le groupe de travail GT1 à EMF 2012 (Deruaz &

[*] HEP Vaud, UER MS– Suisse – michel.deruaz@hepl.ch
[**] HEP Vaud, UER MS– Suisse – martine.balegno@hepl.ch
[***] Joetsu University of Education – Japon– vbatteau@gmail.com

Clivaz, 2012) et la seconde dans le GT1 à EMF 2015 (Deruaz & Bünzli, 2015) dans lesquelles nous décrivions la mise en place de certains dispositifs particuliers d'un cours de savoir disciplinaire dans le cadre de la formation initiale des maîtres du premier degré. Après quelques années d'observation et malgré des retours positifs des étudiants et de l'institution nous trouvons que les étudiants ne sont pas assez sollicités et nous observons lors des examens qu'une partie d'entre eux se contentent d'appliquer des procédures mémorisées sans chercher à les comprendre, sans chercher à articuler entre elles les connaissances travaillées.

Ces observations sont par ailleurs confirmées par les résultats d'une autre recherche que nous menons sur les difficultés d'apprentissage des mathématiques rencontrées par des élèves du Gymnase (élèves de 15 à 18 ans) dont certains peuvent se destiner ensuite à l'enseignement

> Le dispositif mis en place a peut-être aussi permis à Isabelle de prendre conscience qu'elle savait beaucoup de choses, mais qu'il lui fallait apprendre à articuler ses connaissances entre elles. Cette prise de conscience lui aura alors permis de reprendre confiance en ses compétences en mathématiques, ce que l'on observe pendant cette semaine d'appui par une attitude de moins en moins passive et par une prise de risque de plus en plus grande au fur et à mesure des séances (Deruaz & Dias 2016, p. 31)

Isabelle avait le projet de devenir enseignante à l'école primaire et nous l'avons retrouvée dans le cadre de cette formation. Nous nous sommes alors souvenus des conclusions de notre article.

> Enfin, à travers la mise en place de ces dispositifs d'appui, il nous semble primordial de faire comprendre aux enseignants que c'est bien le changement de vision sur les mathématiques et leur enseignement qui est susceptible de faire retomber un peu la pression sur la montée persistante des étiquettes de dyscalculie. (Deruaz & Dias 2016, p. 32)

Afin que les étudiants puissent mieux articuler leurs connaissances entre elles, il faut que nous leur proposions des dispositifs d'apprentissages qui leur permettent d'être actifs pendant les séances de cours et lorsque c'est possible de manipuler des objets concrets pour faire des liens avec les objets mathématiques qu'ils représentent. Nous faisons l'hypothèse que s'ils rencontrent ce type d'ingénieries en formation, ils oseront plus facilement en mettre en œuvre plus tard dans leurs classes avec leurs futurs élèves.

Ceci nous a incités à construire une nouvelle ingénierie, notamment autour de la multiplication posée. Une partie de cette ingénierie qui entremêle une présentation à l'aide d'un diaporama, des manipulations effectuées par le formateur avec un abaque d'un nouveau type et des fiches pour les étudiants est décrite dans cette contribution. Nous compléterons cette description avec les premiers résultats d'une expérimentation avec des élèves dans une classe.

II. QUELQUES MOTS SUR NOTRE CADRE THÉORIQUE

1. La multiplication posée

De nombreux auteurs ont écrit sur la multiplication et plus particulièrement sur la multiplication posée. Nous pouvons notamment citer ce que nous écrivions déjà en 2013.

> Dans un article de 2010 reprenant des travaux réalisés dès les années 1960, Brousseau a montré à quel point l'enseignement de l'algorithme de la multiplication était coûteux en temps et peu efficace. Il y a aussi affirmé qu'« on ne peut plus enseigner le calcul élémentaire traditionnel » […] et qu'« on aurait tort de vouloir le conserver ». Cette position est d'ailleurs présente dans les manuels romands qui posent la question : « On peut même se demander si le citoyen du XXIème siècle, qui disposera vraisemblablement de calculatrices ou d'autres instruments de calcul, l'utilisera encore ou l'oubliera ! » (Danalet, Dumas, Studer & Villars-Kneubühler, 1999, p. 164). Et pourtant, assumant le dilemme qu'il pose, Brousseau soutient fermement « qu'on ne doit pas abandonner l'enseignement du calcul élémentaire traditionnel "à

la plume" » et il propose des dispositions de calcul et des séquences d'enseignement permettant d'améliorer cet enseignement. (Clivaz & Deruaz 2013, pp. 15-16)

Nous concluions alors par :

Ce sont ces connaissances mathématiques d'ailleurs qui devront être développées chez ceux d'entre eux qui deviendront enseignants dans un processus cyclique décrit par Ma chez les enseignants chinois.

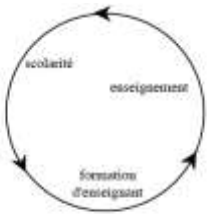


Figure 9 – Les trois périodes du développement des connaissances mathématiques des enseignants chinois (Ma, 1999, p. 145)

Selon plusieurs études (Clivaz, 2011 ; Ma, 1999 ; Schmidt et al., 2007 ; Stevenson & Stigler, 1992 ; Stigler & James, 1999), cette dynamique semble toutefois ne pas fonctionner chez les enseignants occidentaux. Nous avons vu dans cet article une entrée possible au niveau de la scolarité pour faire fonctionner le premier stade de développement de ces connaissances : distributivité, associativité, numération décimale de position et définition de la multiplication comme produit cartésien. Nous décrirons dans un prochain article deux expériences pour développer ces connaissances mathématiques pour l'enseignement autour de l'algorithme de la multiplication, en formation initiale d'une part et en formation continue d'autre part. (Clivaz & Deruaz 2013, pp. 30-31)

Nous situons cette contribution comme la description de la première expérience annoncée dans cette conclusion : celle qui concerne la formation initiale.

2. Le nombre et ses représentations

Pour permettre au lecteur de situer l'ingénierie que nous proposons pour la multiplication, nous devons dire quelques mots sur ce que nous présentons au préalable aux étudiants au sujet du nombre et de ses représentations. Les éléments qui suivent ont été présentés dans le cadre d'un atelier de la COPIRELEM 2017 à Épinal et figureront dans les actes du colloque (Deruaz & Batteau 2018).

On peut associer n'importe quel nombre entier au cardinal d'un ensemble ou d'une collection d'objets. On associera, par exemple, le nombre seize à n'importe quel ensemble de seize objets. Nous pouvons ainsi le représenter de manière décontextualisée par une collection de seize points :



À la suite de Dehaene (1992), on parle de « représentation analogique » du nombre. Dans les lignes qui précèdent, nous avons déjà utilisé plusieurs fois une autre représentation de ce nombre en écrivant, en lisant ou en disant, « seize ». Dehaene appelle cette représentation « auditive-verbale ». C'est en effet celle qui est utilisée dans le langage parlé, celle que l'on dit ou que l'on entend, même si le nombre est écrit 16.

Lorsqu'on écrit 16 avec des chiffres, on utilise une troisième représentation du nombre qui utilise le fait que l'on peut mettre en évidence un groupement de dix des seize éléments de la collection pour en faire un groupe de dix et laisser six éléments isolés comme dans la figure ci-dessous :



Dans ce qui suit, nous appellerons cette représentation à l'aide de chiffres, « représentation symbolique décimale » ou « représentation symbolique en base dix ».

L'adaptation que nous avons réalisée du modèle du triple code (Dehaene, 1992, p.31) dans le cadre du cours permet de visualiser en un seul schéma ces trois représentations du nombre :

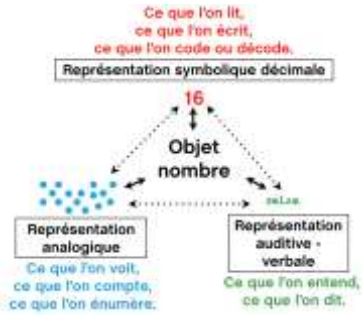
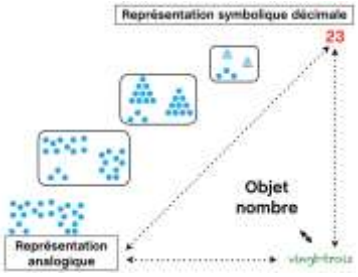


Figure 1 *– Représentations du nombre adapté du modèle du triple code (Dehaene, 1992, p.31)*

Nous nous intéressons essentiellement aux passages entre les représentations analogique et symbolique en mettant en évidence un certain nombre de représentations intermédiaires qui nous apparaissent comme importantes. En effet, notre objectif est que les futurs enseignants puissent faire des liens entre ces représentations analogique et symbolique et qu'ils puissent ensuite proposer ces liens à leurs élèves et peut-être encore plus particulièrement à ceux qui seraient en difficulté avec les nombres et leurs représentations.

Nous classons ces représentations intermédiaires en deux catégories : la première contient les représentations que nous qualifierons d'iconiques puisque les points sont encore présents, la seconde contient celles que nous qualifierons de symboliques et qui font intervenir l'aspect positionnel de l'écriture symbolique décimale du nombre.



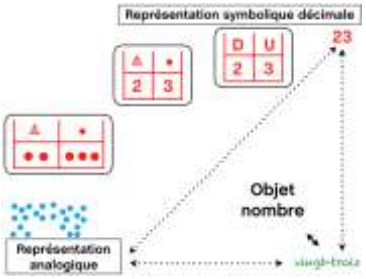


Figure 2 *– Représentations intermédiaires iconiques* *Représentations intermédiaires symboliques*

Si les représentations intermédiaires iconiques permettent de travailler les opérations additives, pour la multiplication, nous utilisons essentiellement les représentations intermédiaires symboliques (tableau de nombres, abaque).

III. LA DESCRIPTION DE L'INGÉNIERIE PROPOSÉE EN FORMATION

1. Enjeux liés à la manipulation

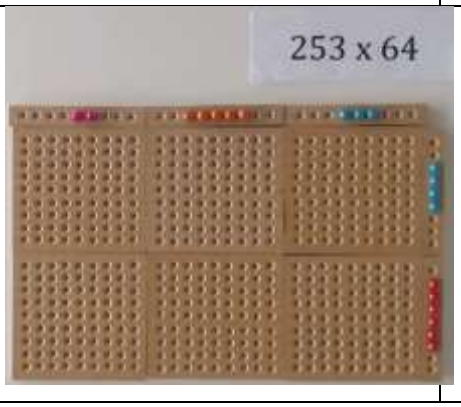
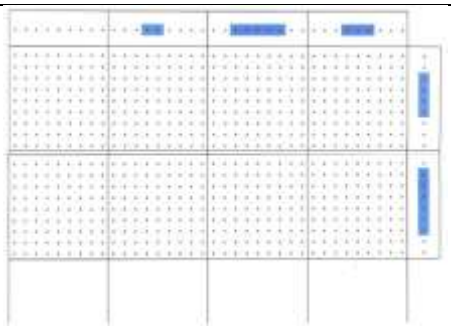
Dès les premières occurrences du cours, le formateur présentait, dans son diaporama, des animations dans la représentation analogique, puis les aspects algorithmiques liés à ces animations dans la représentation symbolique. Nous avons toujours souhaité permettre aux étudiants d'effectuer des manipulations pour la partie sur la numération et les outils de

calculs. Or, il était impossible d'avoir suffisamment de matériel car le cours est donné en amphithéâtre à environ 360 étudiants (répartis en trois groupes). Les étudiants retenaient essentiellement des « recettes » de type algorithmique qu'ils appliquaient en vue de l'examen. Dans celles-ci les étudiants restaient uniquement dans la représentation symbolique du système de numération. Pour casser cette représentation des mathématiques et de leur enseignement, nous avons modifié le cours afin de les amener à faire des liens entre les représentations symboliques et analogiques.

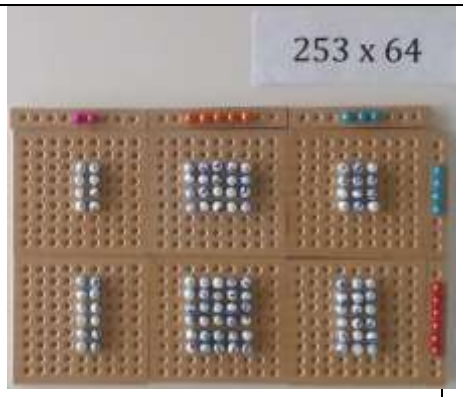
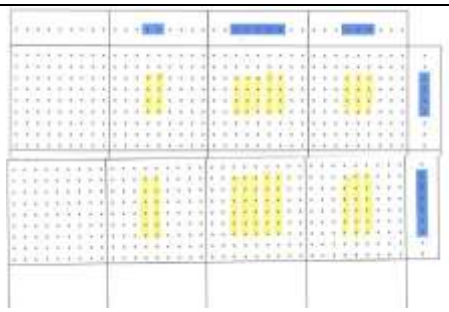
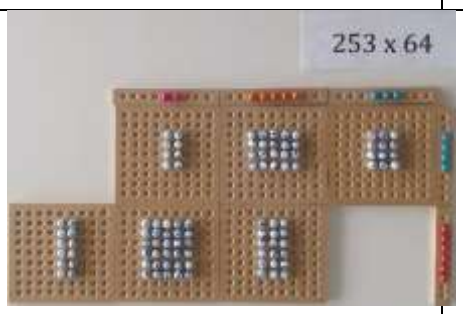
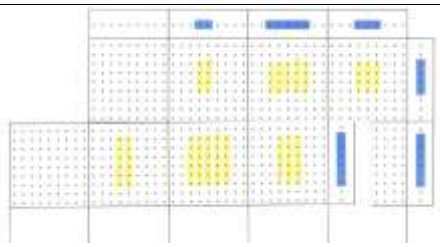
Dès lors, nous présentons toujours un diaporama avec des animations qui relient les représentations symboliques et analogiques, mais également une manipulation filmée et projetée en direct pour que tous les étudiants puissent la voir avec du matériel dans la représentation analogique. En suivant les manipulations du formateur, les étudiants vont, à l'aide de fiches, essayer par eux-mêmes de représenter ces manipulations. Par la suite, le formateur propose au rétroprojecteur une utilisation possible de ces fiches. Les objectifs de formation sont multiples : les étudiants ont une posture active pendant le cours, ils s'approprient ce qui est présenté en essayant de le représenter. De plus, les fiches permettent de faire les liens entre les représentations analogiques et symboliques et constituent une trace des manipulations auxquelles ils ont assisté. Elles représentent également un support intermédiaire qui permet de faire les liens entre les représentations analogiques des manipulations et les représentations symboliques utilisées plus couramment.

2. Ce que nous proposons pour la multiplication

Dans ce qui suit, nous allons présenter une série de photographies qui illustrent à l'aide d'un exemple la première partie de ce que nous avons proposé pour la multiplication posée. Avant de faire sa démonstration le formateur propose aux étudiants d'effectuer la multiplication 253 par 64.

Ce qui est montré par le formateur	**Ce qui est noté par les étudiants en observant le formateur**[1]	**Ce qui est donné comme explications orales**
		Pour effectuer la multiplication 253x64 on pose le 253 en en-tête de colonnes de notre abaque et le 64 en posant le 4 sur la première ligne et le 6 sur la seconde

[1] Nous avons choisi de ne pas mettre les billes sur les bords pour insister sur l'aspect du produit cartésien.

		On complète alors les différentes cases de l'abaque en respectant dans chaque case le bon nombre de colonnes et de lignes.
		Lorsque l'on a complété la seconde ligne, on l'a fait comme pour une multiplication par 6 alors que l'on multiplie par 6x10. Il faut donc décaler les colonnes d'un cran vers la gauche.[2]

3. Quelques remarques

Cette ingénierie est proposée à des futurs enseignants qui savent déjà effectuer une multiplication posée. L'objectif n'est donc pas d'introduire l'algorithme, mais de permettre aux étudiants de comprendre son fonctionnement ainsi que les enjeux liés à son enseignement.

L'utilisation de la représentation de la multiplication en lignes-colonnes sur chaque plaque de l'abaque permet de donner du sens au produit cartésien et de se passer du répertoire mémorisé et ainsi d'échapper à la représentation auditive-verbale.

Ce dispositif en plusieurs étapes permet de séparer dans le temps ce qui correspond à la distributivité (en multipliant case par case), ce qui correspond à la multiplication dans chaque case de l'abaque, ce qui correspond à la numération décimale de position (les regroupements vers la case située à gauche) et ce qui correspond à la multiplication par des dizaines (décalage des plaques de la seconde ligne vers la gauche). Ces particularités se retrouvent aussi dans la multiplication *Per Gelosia*, mais les liens avec l'algorithme habituel nous semblent plus apparents avec l'abaque et les billes.

IV. EXPERIMENTATION EN CLASSE

1. Présentation du déroulement de la séquence proposée aux élèves

Cette séquence s'est déroulée dans une classe de 23 élèves de grade 3 (élèves de 8-9 ans). Elle est composée de 6 leçons d'environ 45 minutes chacune. Le but de celle-ci est d'introduire et de formaliser l'apprentissage de l'algorithme de la multiplication par un nombre

[2] Notons que le matériel « papier » utilisé donne l'impression qu'une bande bleue apparaît dans la colonne des unités, il s'agit en fait de la translation de la deuxième ligne. Des améliorations devront encore être apportées à cet outil de calcul encore en développement.

à un chiffre. Les élèves connaissent déjà les tables de multiplication (ou livrets) de deux, trois et cinq, mais ils découvrent l'algorithme de la multiplication par un nombre à un chiffre lors de cette séquence.

Lors de la première leçon, nous avons préparé les élèves à ce nouveau matériel. Nous leur avons alors proposé de dénombrer des jetons distribués et de donner leur réponse à l'aide d'un code : 1 jeton vert = 10 jetons rouges, 1 jeton bleu = 10 jetons verts. Ce travail permet de vérifier d'une part, qu'ils connaissent la méthode de groupement par 10 et d'autre part, qu'ils sont capables de procéder à des échanges comme ils devront le faire pour poser une retenue dans la multiplication avec l'abaque.

Dans la deuxième partie de cette leçon, nous avons distribué une feuille d'exercices avec des plateaux de friandises (annexe 1). Les élèves ont dû indiquer le nombre de friandises présentes sur le plateau ainsi que leur démarche. Nous avons constaté les diverses procédures suivantes :

- l'utilisation de l'addition itérée
- une multiplication avec application des tables de multiplication
- le dénombrement de toutes les croix
- une multiplication avec une résolution à l'aide de calcul réfléchi
- des groupements par 10 et l'addition de ceux-ci

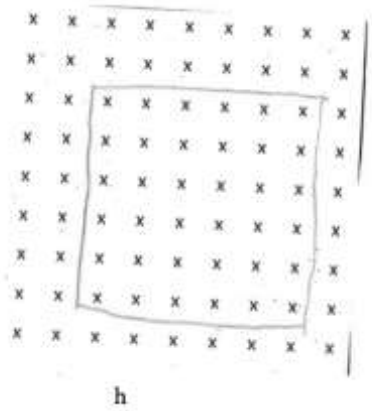


Figure 3 *– Un plateau de friandises représentées par des croix*

Lors de la leçon suivante, nous avons repris cette dernière procédure (des groupements par 10 et l'addition de ceux-ci) pour faire le lien avec l'utilisation de l'abaque et des billes. Cette leçon a pour objectif de faire manipuler les élèves et de leur permettre d'appréhender plusieurs représentations du nombre. Elle permet de rendre explicite et visible les différentes étapes de la multiplication. Elle est aussi un événement phare dans la séquence qui doit servir d'expérience commune à toute la classe et servir de référence lors du passage à la multiplication posée par écrit.

Tout d'abord, le formateur présente l'abaque et son utilisation avec pour commencer une simple multiplication du type 6×4. Les élèves effectuent ensuite le calcul 27×4 à l'aide de l'abaque. Une fois cette étape réussie, ils reçoivent une fiche avec le calcul 37×5. Ils peuvent s'ils le désirent s'aider de l'abaque ou contrôler leur réponse avec. Pour finir, ils inventent des calculs sur une fiche.

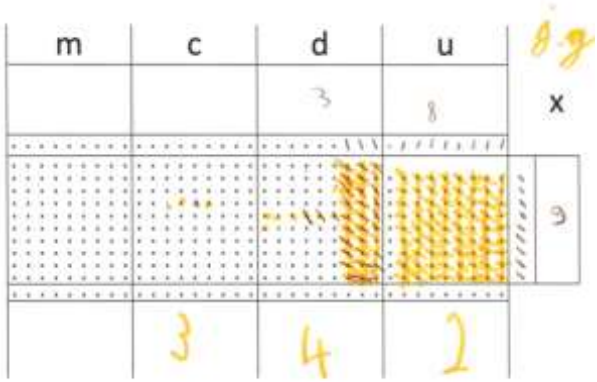


Figure 4 *– Fiche avec un calcul inventé par un élève*

Lors de la 3ème leçon, les élèves retravaillent à l'aide de la fiche ci-dessus et pour les élèves en difficulté des abaques sont proposés. Les élèves qui ont de la facilité peuvent essayer de résoudre un calcul directement avec l'algorithme de la multiplication. Cela implique de transposer ce qu'ils ont vu au travers de l'abaque et de la fiche.

Lors de la 4ème leçon, l'enseignante explique l'algorithme de la multiplication au tableau noir en faisant explicitement référence au travail réalisé avec l'abaque et avec la fiche. Les gestes, lorsqu'on remplace un groupement de billes (on vide le récipient) par une autre bille (retenue) sont également réinvestis. Pour finir, les élèves effectuent des exercices d'entraînement plus traditionnel avec des multiplications posées.

2. Quelques remarques

Très rapidement, nous remarquons un type d'erreur plutôt inhabituel apparaître chez beaucoup d'élèves : ils oublient les retenues lorsqu'ils multiplient les centaines, mais pas lorsqu'ils traitent les unités ou dizaines. Cela peut s'expliquer par le fait que lors de la phase de manipulation et lors du travail sur les fiches, il n'y avait pas de nombre à 3 chiffres. Afin de remédier à cette erreur, nous reprenons un exemple au tableau noir (447×3) en collectif. Dès lors, nous constatons que cette erreur disparaît dans les exercices suivants et qu'il y a maintenant globalement peu d'erreurs de retenues.

En outre, l'erreur généralement assez fréquente qui consiste à multiplier la retenue au lieu de l'additionner est quasiment inexistante. Nous faisons l'hypothèse que la manipulation et la visualisation des billes permettent de mieux comprendre la signification de la retenue et de dépasser cette difficulté.

V. PERSPECTIVES ET CONCLUSIONS

Les travaux que nous avons choisis de vous proposer dans cette contribution sont très récents et nous n'avons pas encore eu la possibilité d'analyser finement les nombreuses traces. En effet, les cours de formation initiale ont été filmés et nous avons aussi commencé à analyser les feuilles de brouillon utilisées par les étudiants pendant leur examen et à les comparer avec celles des autres années qui correspondaient à l'ancienne version du cours. Nous faisons l'hypothèse que les étudiants utilisent beaucoup plus la représentation analogique depuis qu'ils ont assisté à des manipulations pendant le cours que lorsqu'ils n'avaient que des représentations de ces manipulations.

Des liens doivent aussi être envisagés avec les travaux récents effectués par Constantin (2017) sur les connaissances pour enseigner la multiplication à l'école primaire et les liens avec la distributivité dans le cadre du calcul algébrique. Nous faisons l'hypothèse que l'utilisation de l'abaque facilite la perception de ces liens dans le contexte du calcul posé et pas seulement dans celui du calcul mental.

La question de la transposition en classe de certains éléments de l'ingénierie proposée en formation est déjà apparue pendant le cours par des questions d'étudiants. Elle est aussi apparue lors de notre atelier à la COPIRELEM ou d'autres présentations de nos travaux. Dans un premier temps, nous n'avons pas pu y apporter de réponses, mais l'expérimentation en cours devrait nous permettre de construire un protocole pour mettre en œuvre une expérimentation plus consistante d'un point de vue de chercheur.

RÉFÉRENCES

Brousseau, G. (2010) Le calcul humain des multiplications et des divisions de nombres naturels. *Grand N* 85, 13-41.

Clivaz, S. (2011) *Des mathématiques pour enseigner, analyse de l'influence des connaissances mathématiques d'enseignants vaudois sur leur enseignement des mathématiques à l'école primaire*. Thèse de doctorat. Université de Genève, Genève. Consulté le 7 novembre 2017, dans http://archive-ouverte.unige.ch/unige:17047

Clivaz, S. & Deruaz, M. (2013). Des mathématiques à leur enseignement, l'algorithme de la multiplication. *Grand N* 92, 15-23.

Constantin, C. (2017) La distributivité : Quelles connaissances pour enseigner la multiplication à l'école primaire. *Grand N* 100, 105-130.

Cros, F. (2009). *Préface*. Il D. Bédard & J.-P. Béchard (Eds), Innover dans l'enseignement supérieur (pp. 11-17). Paris : Presses Universitaires de France.

Danalet, C., Dumas, J.-P., Studer, C. & Villars-Kneubueler, F. (1998) *Mathématiques 3ème année : Livre du maître, livre de l'élève et fichier de l'élève*. Neuchâtel: COROME.

Danalet, C., Dumas, J.-P., Studer, C. & Villars-Kneubueler, F. (1999) *Mathématiques 4ème année : Livre du maître, livre de l'élève et fichier de l'élève*. Neuchâtel: COROME.

Dehaene, S. (1992). Varieties of numerical abilities. *Cognition* 44, 1-42.

Deruaz, M. & Batteau, V. (2017). Dix ou 10: quelle est la question? In ARPEME (Ed.), *44ème Colloque de la COPIRELEM Epinal les 13, 14 et 15 juin 2017. Manipuler, représenter, communiquer: quelle est la place de la sémiotique dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques?* (pp. 231-255). Epinal.

Deruaz M. & Bünzli L.-O. (2015) L'utilisation des degrés de certitude comme outil de professionnalisation en formation des maîtres du premier degré. In L. Theis (Éd.), *Actes du colloque Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* (pp. 95-107). Alger : Université d'Alger.

Deruaz, M. & Clivaz, S. (2012). Un cours de savoirs disciplinaires en mathématiques en formation des maitres primaires. In J.-L. Dorier (Éd.), Actes du colloque Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle (pp. 183-194). Genève: Université de Genève.

Deruaz, M. & Clivaz, S. (2018). *Des mathématiques pour enseigner à l'école primaire*. Lausanne : Presses polytechniques et universitaires romandes.

Deruaz, M. & Dias, T. (2016). Élèves en difficulté : dyscaluliques ? *Petit x* 101, 7–32.

Ma, L. (1999) *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Schmidt, W. H., Taou, M. T., Bankov, K., Bömeke, S., Cedilio, T., Cogan, L. & al. (2007). *The preparation gap: Teacher education for middle school mathematics in six countries* : Mathematics Teaching in the 21st Century, Center for Research in Mathematics and Science Education, Michigan State University. Consulté le 7 novembre 2013, dans http://www.educ.msu.edu/CONTENT/SITES/USTEDS/DOCUMENTS/MT21REPORT.PDF

Stevenson, H. W. & Stigler, J. W. (1992) *The learning gap: why our schools are failing and what we can learn from Japanese and Chinese education*: Summit Books.

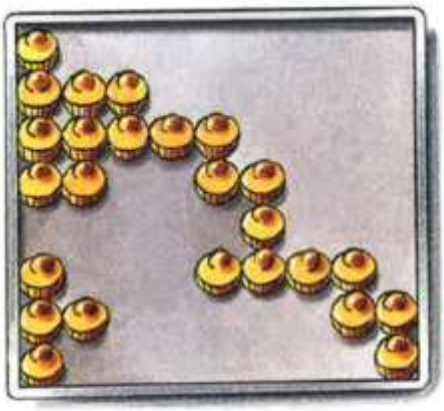
Stigler, J. & James, H. (1999) *The teaching gap. Best ideas from the worlds teachers for improving education in the classroom*. New York: The Free Press.

ANNEXE

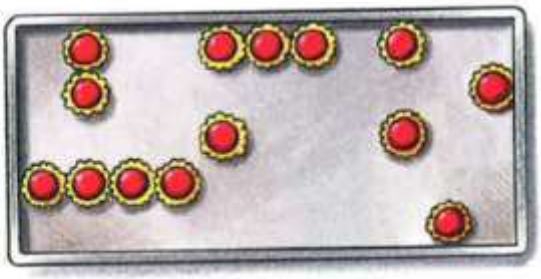
Friandises

Ce matin, ces plateaux étaient entièrement remplis de petits gâteaux bien alignés.

Combien y en avait-il?



Madeleines



Tartelettes



Macarons

(Danalet & al, 1998, p. 36)

QUELLES PISTES POUR UNE EVALUATION DU DISPOSITIF DE FORMATION PACAL ?

GRUGEON-ALLYS[*] Brigitte – CHENEVOTOT-QUENTIN[**] Françoise

PILET[*] Julia – HOROKS[*] Julie

Résumé – Cette communication présente le dispositif de formation PACAL[1] proposé dans l'académie de Créteil (France). Notre objectif est de mettre en relation les pratiques enseignantes et les apprentissages des élèves. Nous nous intéressons particulièrement aux pratiques enseignantes relatives à l'évaluation pour l'apprentissage de l'algèbre élémentaire. Le dispositif PACAL s'appuie sur des résultats de recherche autour de l'apprentissage de l'algèbre (Grugeon-Allys & al. 2012, Pilet 2015), de l'évaluation (Grugeon-Allys & Grapin à paraître) et de l'intégration de ressources en classe (Horoks & Pilet 2015).

Mots-clefs : Evaluation formative, algèbre élémentaire, pratiques enseignantes, formation continue, travail collaboratif

Abstract – This communication presents the PACAL training program proposed in the academy of Creteil (France). Our goal is to relate teachers' practices and students' learning We are particularly interested in teaching practices related to the assessment for learning of elementary algebra. PACAL is based on research findings around the learning of algebra (Grugeon-Allys & al. 2012, Pilet 2015), assessment (Grugeon-Allys & Grapin in press) and the integration of classroom resources (Horoks & Pilet 2015).

Keywords: Formative assessment, elementary algebra, teachers' practices, in-service training, collaborative work

INTRODUCTION

Notre communication s'intéresse à la formation des enseignants (GT1) et exploite des liens entre la recherche et la formation pour concevoir, analyser et évaluer des dispositifs de formation continue. Nous présentons le dispositif de formation à public désigné PACAL de l'académie de Créteil (France) pour des enseignants de mathématiques en collège (élèves de 11 à 15 ans). Ce dispositif prend appui sur des résultats issus de plusieurs recherches : des recherches sur l'apprentissage de l'algèbre et la modélisation des connaissances des élèves dans ce domaine (Grugeon-Allys & al. 2012, Pilet 2015), des recherches sur l'évaluation (Grugeon-Allys & Grapin à paraître) et des recherches sur l'intégration de ressources sur l'enseignement de l'algèbre élaborées dans le cadre d'un travail collaboratif avec des enseignants mené dans le LéA Pécanuméli[2] au collège Roger Martin du Gard en Zone d'Education Prioritaire à Epinay-Villetaneuse (Horoks & Pilet 2015).

L'objectif de cette présentation est de décrire les fondements théoriques de ce dispositif de formation PACAL et dans une moindre mesure de proposer des pistes pour son évaluation. Comment ce dispositif de formation continue articule-t-il les résultats des recherches relatives

[*] Laboratoire de Didactique André Revuz – Université Paris Est-Créteil – France – brigitte.grugeon-allys@u-pec.fr, julia.pilet@u-pec.fr, julie.horoks@u-pec.fr

[**] Laboratoire de Didactique André Revuz – COMUE et ESPE Lille Nord de France – France – francoise.chenevotot@espe-lnf.fr

[*] Laboratoire de Didactique André Revuz – Université Paris Est-Créteil – France – brigitte.grugeon-allys@u-pec.fr, julia.pilet@u-pec.fr, julie.horoks@u-pec.fr

[**] Laboratoire de Didactique André Revuz – Université Paris Est-Créteil – France – francoise.chenevotot@espe-lnf.fr

[1] Parcours d'Acquisition de Compétences en Calcul Littéral au cycle 4

[2] Les Lieux d'Education Associés (LéA), créés en 2011 par l'Institut Français de l'Éducation, visent à promouvoir des recherches avec des acteurs d'un lieu à enjeu d'éducation, et associent pendant 3 ans une équipe de recherche et des acteurs de terrain afin de répondre à des questionnements sur des enjeux d'apprentissage, d'enseignement et d'éducation, et de produire des ressources utilisables par d'autres enseignants.

aux pratiques des enseignants et leur développement avec les résultats de recherches sur les apprentissages des élèves en mathématiques ? Comment prend-t-il en compte les contraintes de la formation, les besoins des enseignants, de la profession, des élèves et de la recherche ?

Dans un premier paragraphe, nous présentons d'abord le dispositif PACAL puis nous identifions les éléments de recherche sur lesquels s'appuie la conception et la mise en œuvre du dispositif de formation continue. Nous spécifions la méthodologie pour analyser et évaluer ce dispositif, donnons les premiers résultats et terminons par des perspectives de recherche.

I. LE DISPOSITIF DE FORMATION PACAL

1. Objectifs

Ce stage de formation continue vise d'abord à diffuser et percoler des résultats de recherche sur l'évaluation en algèbre élémentaire au cycle 4 (élèves de 12 à 15 ans) dans les établissements de l'académie de Créteil. Un autre objectif concerne la conception, la mise en œuvre et l'analyse de déroulements de séances visant à développer une évaluation formative et une régulation de l'enseignement au service des apprentissages des élèves. Plus précisément, il s'agit d'amener les enseignants à repérer et analyser les difficultés des élèves en calcul numérique et littéral à partir de l'évaluation diagnostique numérique standardisée *Pépite* (Grugeon-Allys & al. 2012) puis à analyser des séquences prenant en compte les besoins d'apprentissage des élèves, à les adapter et les mettre en œuvre dans leurs classes.

2. Présentation du dispositif

Ce stage est mis en place pour un public désigné constitué d'un enseignant correspondant par collège dans trois districts[3] de l'académie de Créteil à la rentrée 2017. Appelé à durer plusieurs années, ce dispositif sera ensuite progressivement étendu à l'ensemble des 30 districts de l'académie par un passage à l'échelle à raison d'environ 5 districts supplémentaires impliqués par an.

Plusieurs contenus et ressources sont mis en jeu dans ce stage. Il débute par l'étude de la caractérisation des différents aspects de la compétence algébrique en lien avec le programme du calcul littéral en cycle 4 (élèves de 12 à 15 ans) de 2015[4] et la mise en évidence de classes d'erreurs. Cette étude mène à l'analyse de l'évaluation diagnostique numérique *Pépite* qui vise à caractériser les difficultés des élèves. Les enseignants font alors passer une première version de l'évaluation *Pépite* dans leur classe et analysent les productions de leurs élèves.

La formation propose ensuite une présentation et une analyse de séances (documents et vidéos) pour concevoir des séquences (introduction aux expressions littérales et aux équations, calcul littéral contrôlé) organisant une progressivité des apprentissages au cycle 4. Les enseignants sont engagés dans l'analyse de tâches et l'étude de leur adéquation par rapport aux objectifs d'apprentissage visés, l'analyse des démarches, techniques et raisonnements des élèves en lien avec les compétences et les connaissances attendues en calcul littéral, l'analyse de mises en commun en classe.

La formation prend en compte des retours d'expérience en classe (productions d'élèves, vidéos) pour permettre aux enseignants de développer une analyse réflexive de leurs pratiques

[3] Regroupement administratif de villes pour la formation continue à public désigné dans une académie. L'académie de Créteil comprend les départements de la Seine-et-Marne (12 districts), la Seine-Saint-Denis (8 districts) et le Val-de-Marne (10 districts)

[4] Bulletin officiel spécial n°2 du 26 mars 2015

réelles dans leurs classes. En fin de stage, les élèves passent une deuxième version de l'évaluation *Pépite* pour permettre aux enseignants de mettre en perspective les résultats des élèves, l'enseignement proposé en formation et transposé en classe, les difficultés rencontrées, les alternatives à envisager.

3. Contraintes imposées au dispositif

Le stage PACAL s'étend d'octobre 2017 à avril 2018 sur dix-huit heures organisées en cinq séances de formation. L'équipe des formateurs est composée de quatre enseignants, d'un formateur et de quatre enseignants-chercheurs impliqués dans le LéA Pécanuméli.

Les enseignants participant à la formation sont désignés par les chefs d'établissement : ces correspondants sont chargés de diffuser la formation aux enseignants de leur établissement. En ce sens, les correspondants devraient être les enseignants les plus expérimentés de l'établissement, ce qui n'est pas le cas dans de nombreux établissements de Seine-Saint-Denis où aucun titulaire n'est présent, faute d'équipes suffisamment stables. Ce contexte constitue une contrainte forte qui limite la diffusion de la formation dans les établissements. Les enseignants non titulaires qui, le plus souvent, n'ont pas reçu de formation initiale, ont pourtant de grands besoins de formation.

Une autre contrainte de formation concerne les difficultés d'accès des enseignants aux installations informatiques, peu développées dans certains établissements de l'académie de Créteil, qui complexifient la passation du test numérique *Pépite* par les élèves.

II. ELEMENTS THEORIQUES ET RESULTATS DE RECHERCHE MIS EN JEU

1. Résultats sur l'enseignement / apprentissage du calcul littéral

L'algèbre élémentaire constitue un verrou pour l'accès à des études supérieures scientifiques car, porteur de forts enjeux, ce domaine représente aussi un obstacle difficile à surmonter pour beaucoup d'élèves (Kieran 2007). L'évaluation au service de la réussite des élèves dans ce domaine présente donc des enjeux capitaux. Pour identifier les caractéristiques d'une évaluation diagnostique automatique dédiée aux apprentissages des élèves en algèbre, Grugeon-Allys & al. (2012) se sont appuyés, d'une part, sur une approche cognitive et épistémologique et, d'autre part, sur une approche anthropologique.

Considérons tout d'abord une approche cognitive et épistémologique.

Pour repérer les cohérences de fonctionnement des élèves en algèbre, Grugeon (1997) a défini une référence multidimensionnelle pour la compétence algébrique en fin de scolarité obligatoire (16 ans en France), qui est le fondement de l'évaluation diagnostique. Les connaissances algébriques sont structurées selon deux principales dimensions, dépendantes l'une de l'autre et partiellement hiérarchisées, les dimensions *outil* et *objet*, termes pris selon l'acception de Douady (1986).

Sur le plan *outil*, la compétence algébrique s'évalue à travers la capacité à produire des expressions et des relations algébriques pour modéliser un problème, à les interpréter puis à mobiliser le calcul algébrique adapté à leur résolution. Cette dimension *outil* de l'algèbre s'exerce dans des contextes variés sur des problèmes de généralisation et de preuve, de modélisation dans un contexte d'arithmétique traditionnelle visant la mise en équation ou de modélisation fonctionnelle (Chevallard 1985). Elle met en jeu la mise en relation entre différents registres de représentation sémiotique.

Sur le plan *objet*, la manipulation formelle redonnant sa juste place à la dimension technique d'un traitement algébrique raisonné s'appuie sur le double aspect syntaxique et sémantique des expressions algébriques. Ainsi la compétence algébrique s'évalue à travers des capacités techniques d'ordre syntaxique et des capacités interprétatives mettant en jeu dénotation, interprétation et sens des expressions[5].

Cette référence multidimensionnelle de la compétence algébrique, croisée avec les différents types de problèmes du domaine algébrique[6] décrits dans le programme de mathématiques du cycle 4, permet de caractériser les tâches diagnostiques d'un test visant à identifier les cohérences de l'activité algébrique des élèves puis d'en suivre l'évolution.

Considérons ensuite une approche anthropologique.

Les connaissances mathématiques dépendent fortement de l'institution dans laquelle elles doivent vivre, être enseignées et être apprises. Les objets mathématiques n'existent pas pour eux-mêmes mais émergent de pratiques qui varient d'une institution à une autre. Chevallard (1999) les analyse en termes de praxéologies, c'est-à-dire en termes de types de tâches, de techniques utilisées pour résoudre ces tâches (praxis), de discours technologique développé dans le but d'expliquer et justifier ces techniques et, enfin, de théories qui structurent le discours (logos). La Théorie Anthropologique du Didactique propose un modèle de structuration progressive des praxéologies pour d'abord former des praxéologies locales par regroupement de praxéologies ponctuelles partageant une même technologie, puis des praxéologies régionales par regroupement de praxéologies locales ayant une même théorie ou partie de théorie. Etudier l'activité algébrique dans une institution aux différentes étapes de la transposition didactique relève de l'étude de la complétude et de l'agrégation des praxéologies de modélisation (produire une expression ou une formule, mettre en équation) et de preuve, des praxéologies de calcul (développer, factoriser une expression, résoudre une équation).

Pour chaque niveau scolaire du curriculum, caractériser les tâches diagnostiques qui composent le test revient à leur associer un type de tâches et les valeurs des variables didactiques associées, la complexité des objets algébriques mis en jeu, les techniques attendues relativement aux éléments technologiques et théoriques visés.

Du côté des élèves, l'analyse des praxéologies apprises par les élèves, déterminées par une évaluation diagnostique, permet de repérer les techniques et technologies mises en jeu (technologie arithmétique, technologie arithmétique généralisée ou technologie modélisation) et les grandes classes d'erreurs liées à des techniques utilisées en dehors de leur domaine de validité, puis de faire des liens avec l'enseignement reçu. Cette étude permet de mettre en relation les besoins d'apprentissage des élèves et ceux ignorés dans les programmes (Castela 2008) pour définir les praxéologies mathématiques et didactiques à développer dans l'enseignement (ainsi que des feedbacks adaptés aux réponses des élèves).

Du côté des enseignants, cette approche permet d'étudier les praxéologies mathématiques et didactiques (Chevallard 1999) mises en jeu par les enseignants pour couvrir le domaine mathématique considéré, leur complétude, le niveau d'agrégation entre les différentes praxéologies de modélisation / preuve et de calcul. Elle permet aussi de suivre l'évolution des praxéologies didactiques pour étudier les raisons d'être des expressions algébriques, les

[5] Au niveau scolaire considéré (cycle 4), « l'entrée dans l'algèbre suppose une rupture épistémologique avec l'arithmétique. L'efficacité algébrique requiert une capacité à interpréter des expressions algébriques à la fois au niveau procédural et au niveau structural tout en s'adaptant à la variété des usages visés » (Grugeon, 1997).

[6] Problèmes de modélisation dans des situations d'origine arithmétique ou géométrique, ou faisant intervenir des grandeurs physiques, problèmes se ramenant à des équations ou des inéquations du premier degré, problèmes de généralisation ou de preuve de propriétés générales.

processus de formulation / validation, d'institutionnalisation, en particulier les savoirs et justifications utilisées, le topos des élèves.

2. Résultats sur l'évaluation en algèbre dans le cadre de l'ANR Néopraeval

Depuis une vingtaine d'années, une équipe pluridisciplinaire de chercheurs (didacticiens des mathématiques, informaticiens, psychologues, ergonomes, enseignants de mathématiques) est engagée dans différents projets de recherche concernant la conception et la diffusion d'outils pour accompagner les enseignants dans la gestion de l'hétérogénéité des apprentissages des élèves en algèbre élémentaire. Actuellement, le projet ANR Néopraéval « Nouveaux outils pour de nouvelles pratiques d'évaluation »[7] a pour objectif de produire des outils d'évaluation et de régulation pour l'apprentissage de l'algèbre élémentaire au collège.

Pour le domaine de l'algèbre élémentaire, cette équipe a élaboré l'évaluation diagnostique automatique standardisée *Pépite* qui teste les compétences des élèves en algèbre élémentaire (Delozanne & al. 2010, Grugeon-Allys & al. 2012) puis propose aux enseignants des parcours d'enseignement différencié (Pilet 2015) adaptés aux difficultés des élèves. L'évaluation diagnostique permet de décrire des caractéristiques de l'activité algébrique de l'élève, concernant sa maitrise du calcul algébrique et son usage de l'outil algébrique pour résoudre des problèmes du domaine algébrique (cf. §II.1). Les parcours permettent de travailler les raisons d'être des expressions algébriques ou des équations à partir de situations (patterns - généralisation et preuve, mise en équation), leur équivalence, d'engager une activité de calcul littéral raisonné autour d'exercices adaptés aux besoins d'apprentissage des élèves via un choix pertinent de valeurs de variables didactiques.

3. Résultats sur les pratiques enseignantes dans le cadre du LéA Pécanuméli

Le travail collaboratif mené dans le LéA Pécanuméli présente des enjeux à la fois pour les enseignants et les chercheurs impliqués. Du côté des enseignants, il vise à faire évoluer les pratiques, à développer des ressources viables (en particulier en ce qui concerne l'évaluation et la régulation de l'enseignement en algèbre au cycle 4) en s'appuyant sur les résultats en didactique de l'algèbre et sur l'évaluation. Du côté des chercheurs, il s'agit d'étudier les pratiques d'évaluation et d'enseignement de l'algèbre ainsi que leurs impacts sur les apprentissages des élèves.

> Ce travail a un double enjeu : pour les chercheurs, il s'agit produire de la connaissance sur les pratiques d'évaluation mais aussi d'enseignement de l'algèbre, et leur impact sur les apprentissages des élèves, et pour les enseignants, le LéA est un moyen de développement professionnel. (Horoks & Pilet 2015).

Comme dans la double approche (Robert & Rogalski 2002), nous retenons la théorie de l'activité pour appréhender et analyser les pratiques enseignantes réelles, ensemble des activités hors la classe et dans la classe. Les pratiques des enseignants sont questionnées : quel est l'impact sur les apprentissages des élèves des tâches qu'ils sélectionnent et du déroulement qu'ils proposent ? Plus précisément, les résultats de recherche s'appuient sur l'analyse des pratiques des enseignants du LéA Pécanuméli *via* les tâches proposées aux élèves (choix, variété, complexité en termes de niveau de mise en fonctionnement des connaissances), les modalités de travail (temps de recherche, organisation de mise en commun, synthèse) et le discours de l'enseignant (niveau de justification, synthèses mathématiques). L'étude vise à mettre en perspective ces critères avec les composantes du métier d'enseignant (personnelle, institutionnelle et sociale) (Horoks & Pilet 2015). Les activités d'évaluation des productions des élèves sont particulièrement étudiées compte tenu

[7] http://www.ldar.univ-paris-diderot.fr/page/praeval

de leur impact potentiel sur les apprentissages des élèves. Quelles informations les enseignants en tirent-ils ? De quelle nature sont ces informations ? Comment les exploitent-ils pour faire évoluer les apprentissages des élèves ?

Après trois ans de travail collaboratif dans le cadre du LéA Pécanumeli, Horoks et Pilet (2015) ont constaté, d'une part, la stabilité des pratiques d'évaluation formative pour un même enseignant et, d'autre part, leur variété chez plusieurs enseignants. En ce qui concerne les pratiques liées à l'enseignement de l'algèbre, Horoks et Pilet (à paraître dans EEDM 2017) relèvent une plus grande couverture du domaine algébrique, une meilleure présentation des enjeux d'introduction des expressions algébriques à partir de situations plus adaptées, un essai d'évolution des arguments de validation et l'existence d'un retour vers les élèves. Enfin, en ce qui concerne à la fois les pratiques évaluatives et l'enseignement de l'algèbre, ces auteurs ont constaté une stabilité de l'écart entre ce qui est évalué et ce qui est travaillé en amont.

III. METHODOLOGIE POUR EVALUER LE DISPOSITIF DE FORMATION

L'atout majeur de notre étude est qu'elle repose sur une double analyse qualitative et quantitative aussi bien du côté des élèves que des enseignants.

L'analyse qualitative de la compétence algébrique des élèves repose sur l'évaluation diagnostique automatique *Pépite* que les enseignants soumettent à leurs élèves en début et en fin du dispositif de formation continue PACAL. L'existence de plusieurs versions du test diagnostique informatisé permet d'évaluer l'évolution des différents aspects de l'activité algébrique entre les différentes passations. Ces différentes versions du test partagent des types de tâches communs qui recouvrent le domaine algébrique tout en se différenciant par l'adaptation au niveau scolaire considéré des valeurs de variables didactiques (Chenevotot & al. 2016). Par exemple, le test à l'entrée en 4e propose une tâche de preuve qui met en jeu une expression à quatre opérations et un seul niveau de parenthésage « $(x + 6) \times 3 - 3x$ » et celui de fin de 4e, une expression à cinq opérations et deux niveaux de parenthésage « $((x + 4) \times 3 - 3x) / 2$ ». L'analyse quantitative repose sur la grande taille de l'échantillon des élèves. En effet, pour la rentrée 2017, la formation continue PACAL touche 3 districts imposés par l'institution, ce qui représente 39 établissements et leurs correspondants sans formation sur l'évaluation, 250 enseignants et leurs classes de 4e, soit environ 4000 élèves.

Une analyse qualitative et quantitative des pratiques déclarées des enseignants est en cours. Consistant en des questionnaires adressés aux enseignants pendant et à la fin du stage, elle vise à étudier des aspects des pratiques enseignantes développées déclarées.

IV. PREMIERS RESULTATS

Nous présentons ici les résultats concernant les compétences algébriques de 1100 élèves de 4e (13-14 ans) des enseignants des établissements des districts impliqués dans PACAL qui ont passé pour la première fois le test diagnostique *Pépite*[8] en octobre et novembre 2017, l'enseignement en calcul littéral n'ayant pas commencé.

Conformément au programme de cycle 4 (élèves de 12 à 15 ans) en France, la compétence algébrique des élèves est représentée selon quatre des six compétences spécifiques aux mathématiques que l'enseignement vise à développer : modéliser, représenter, raisonner, calculer. La figure 1 (Cf. annexe1) présente une vue globale du niveau des 1100 élèves pour

[8] Le test Pépite destiné aux élèves en début de de 4e se compose de 10 tâches diagnostiques, soit 18 items, recouvrant les différents types de problèmes du domaine algébrique. Il peut s'agir de QCM ou d'exercices à question ouverte.

la compétence modéliser[9] du programme. La figure 2 (Cf. annexe2) donne leur réussite moyenne par item.

L'évaluation *Pépite* indique qu'environ 10% d'élèves (niveau très satisfaisant et niveau satisfaisant) utilisent les lettres pour produire des expressions littérales complexes ou non et des formules liées aux grandeurs mesurables. Près de la moitié des élèves (niveau fragile) utilisent les lettres pour produire des expressions littérales simples (premier degré sans parenthèse) qui sont souvent incorrectes dans des cas plus complexes. Enfin, une petite moitié d'entre eux (niveau insuffisant) utilise une démarche arithmétique et n'a pas ou peu d'usage des lettres ou de façon abréviative (Cf. annexe1, figure 1).

L'évaluation diagnostique *Pépite* montre aussi que les items les plus réussis mettent en jeu des compétences en calcul numérique (ex 1.1, ex 1.2, ex 8.1, ex 8.2), plutôt qu'en calcul littéral ainsi qu'un faible nombre de compétences simultanément (2 compétences : modéliser et prouver). Au contraire, les items les moins réussis font travailler des compétences en calcul littéral ou pour représenter ainsi qu'un grand nombre de compétences simultanément (4 compétences : modéliser, représenter, prouver, calculer dans le domaine littéral) (Cf. annexe2, figure 2).

V. DISCUSSION ET CONCLUSION

Dans cette contribution sur un travail de recherche en cours, nous avons présenté les contenus et les modalités de PACAL fondé sur des résultats de recherche autour de l'enseignement du calcul littéral au cycle 4 et de l'évaluation. Nous voulions mettre en relation les pratiques enseignantes et les apprentissages des élèves. La mise en œuvre de la formation a déjà mis en évidence des contraintes liées à l'organisation du stage : des correspondants sans classe de 4e car désignés sans prendre en compte la répartition des classes dans les établissements, des difficultés pour diffuser la formation au sein des établissements en raison d'équipes éducatives peu stables constituées de nombreux correspondants non titulaires de leurs classes.

Nous n'avons pas encore dépouillé les premiers questionnaires. Les réponses vont-elles permettre d'étudier si les enseignants perçoivent l'incomplétude des praxéologies développées et les liens potentiels avec les difficultés des élèves ? Nous poursuivons la mise en œuvre de PACAL et présenterons l'évolution des praxéologies enseignées et apprises en relation avec la formation.

REFERENCES

Castela, C. (2008) Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'apprentissage. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 28(2), 135–182.

Chenevotot-Quentin, F., Grugeon-Allys, B., Pilet, J., Delozanne, E. & Prévit, D. (2016) The diagnostic assessment Pépite and the question of its transfer at different school levels. In Krainer, K. & Vondrová, N. (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME9, 4-8 February 2015) (pp. 2326–2332). Prague, Czech Republic: Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME.

[9] Modéliser : traduire en langage mathématique une situation réelle (par exemple, à l'aide d'équations, de fonctions, de configurations, d'outils statistiques) (Bulletin officiel spécial n°2 du 26 mars 2015, p. 369).

Chevallard, Y. (1985) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Première partie. L'évolution de la transposition didactique. *Petit x*, 5, 51–94.

Chevallard, Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique de mathématiques*,19(2), 221–265.

Delozanne, E., Prévit D., Grugeon-Allys B. & Chenevotot-Quentin F. (2010) Vers un modèle de diagnostic de compétence. *Revue Techniques et Sciences Informatiques,* 29(8/9), 899–938.

Douady, R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil/objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 7(2), 5–32.

Grugeon, B. (1997) Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 17(2), 167–210.

Grugeon-Allys, B. & Grapin, N. (à paraître) Approches psychométrique et didactique de la validité d'une évaluation externe en mathématiques : quelles complémentarités ? Quelles divergences ? *Mesure, Evaluation en Education* 41(2).

Grugeon-Allys, B., Pilet, J., Chenevotot-Quentin, F., & Delozanne, E. (2012) Diagnostic et parcours différenciés d'enseignement en algèbre élémentaire. In Coulange, L., Drouhard, J.-P., Dorier, J.-L. & Robert, A. (Eds.), *Recherche en Didactique des Mathématiques, Enseignement de l'algèbre élémentaire* (pp. 137–162). Grenoble : La pensée sauvage.

Horoks J. & Pilet J. (2015) Analyser les pratiques d'évaluation des enseignants de mathématiques. Dans Matheron Y. & Gueudet G. (eds) *Actes de la 18e école d'été de didactique des mathématiques à Brest. Enjeux et débats en didactique des mathématiques.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Horoks J. & Pilet J. (2015) Etudier et faire évoluer les pratiques d'évaluation des enseignants de mathématiques en algèbre au collège dans le cadre d'un Léa. In Theis, L. (Ed.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage, Actes du 6e colloque Espace Mathématique Francophone* (EMF 2015 – GT9, 10-14 octobre 2015) (pp. 791–804). Alger, Algérie : Faculté de Mathématiques.

Kieran, C. (2007) Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In Lester F.K. (Ed.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp.707–762). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Pilet, J. (2015) Réguler l'enseignement en algèbre élémentaire par des parcours d'enseignement différencié. *Recherches en didactique des mathématiques*, 35(3), 273–312.

Robert, A., & Rogalski, J. (2002) Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Canadian Journal of Math, Science & Technology Education*, 2(4), 505–528.

ANNEXE 1

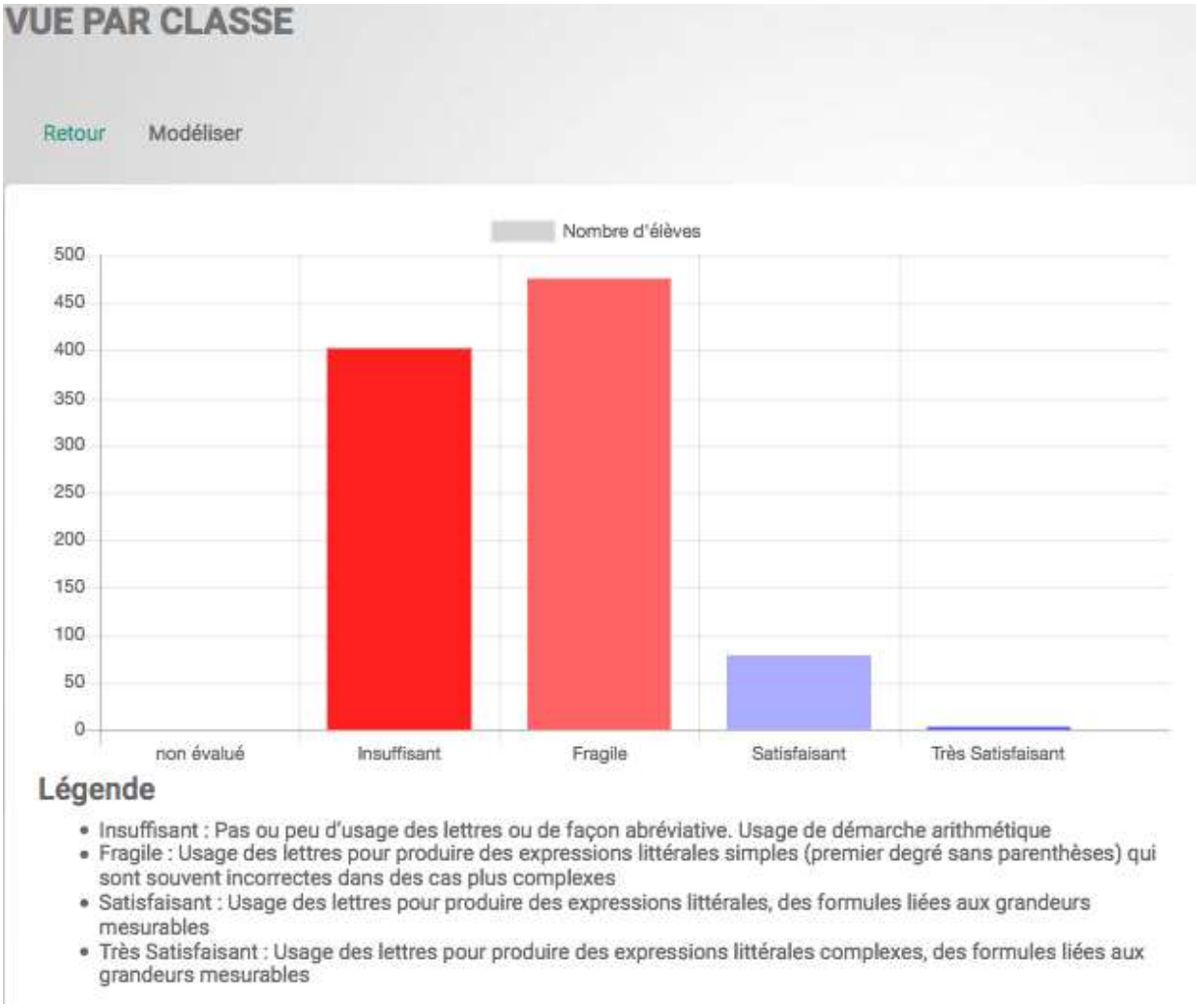


Figure 1 – Niveau pour la compétence « Modéliser »

ANNEXE 2

activité	réussite moyenne	compétences liées
activité		
ex1.1	45 %	Calculer (numérique)
ex1.2	53 %	Calculer (numérique)
ex10	16 %	Modéliser ; Représenter
ex2.1	38 %	Modéliser ; Prouver ; Calculer (littéral)
ex2.2	63 %	Modéliser ; Prouver ; Calculer (littéral)
ex2.3	35 %	Modéliser ; Représenter ; Prouver ; Calculer (littéral)
ex3.1	18 %	Modéliser ; Représenter ; Calculer (numérique) ; Calculer (littéral)
ex3.2	35 %	Représenter ; Calculer (littéral)
ex4.1	57 %	Modéliser ; Prouver ; Calculer (littéral)
ex4.2	48 %	Modéliser ; Prouver ; Calculer (littéral)
ex5	18 %	Représenter ; Calculer (numérique)
ex6	7 %	Modéliser ; Représenter ; Prouver ; Calculer (littéral)
ex7	4 %	Calculer (littéral)
ex8.1	44 %	Calculer (numérique)
ex8.2	46 %	Calculer (numérique)
ex9.1	13 %	Représenter
ex9.2	46 %	Représenter
ex9.3	33 %	Représenter

Figure 2 – Réussite moyenne par item

IDENTIFICATION DES POTENTIALITÉS D'UN JEU DE RÔLES DANS LE CADRE D'UNE FORMATION DE PROFESSEURS DES ÉCOLES

GUILLE-BIEL WINDER[*] Claire – MANGIANTE-ORSOLA[**] Christine – MASSELOT[***] Pascale – PETITFOUR[****] Edith – SIMARD[*****] Arnaud

Résumé – Dans cet article nous cherchons à identifier les potentialités d'un type de situations de formation peu usuel dans la pratique des formateurs d'enseignants en France, le Jeu de Rôles (Lajoie et Pallascio, 2001 ; Lajoie, 2010), en termes de connaissances mathématiques, didactiques et pédagogiques à transmettre à des professeurs des écoles. Nous utilisons pour cela un cadre d'analyse de situations de formation (Guille-Biel Winder et al., 2015 ; Mangiante-Orsola et al., à paraître) permettant de caractériser les activités de formation en fonction de leur nature, du positionnement du formé et des connaissances convoquées.

Mots-clefs : Jeu de Rôles, stratégies de formation, professeurs des écoles, cadre d'analyse des situations de formation, connaissances pour enseigner les mathématiques

Abstract – In this article, we try to identify the mathematical, didactical and pedagogical knowledge potentially at stake in role-play (Lajoie et Pallascio, 2001 ; Lajoie, 2010), training situations of primary schoolteachers, that are unusual in French training practices. We use an analysis framework (Guille-Biel Winder et al., 2015 ; Mangiante-Orsola et al., forthcoming) which characterises training activities according to their type, to the posture of the prospective teachers expected by the teacher educator and to the knowledge at stake.

Keywords: role-play, training strategies, primary schoolteachers, analysis framework of training situations, knowledge for teaching mathematics

I. INTRODUCTION ET ÉLÉMENTS THÉORIQUES

Ce travail prend sa source dans la présentation d'un dispositif de formation de professeurs des écoles, le *Jeu de Rôles,* dans le cadre du GT2 « Analyse de dispositifs et de stratégies de formation initiale et continue des enseignants » du colloque EMF 2012. Ce type de dispositif, courant dans la pratique des formateurs d'enseignants en mathématiques au Québec (Lajoie et Pallascio, 2001 ; Lajoie, 2010 ; GREFEM, 2012), est hors, ou à la marge, des pratiques usuelles des formateurs d'enseignants en France. Outre son aspect « novateur », il est présenté comme proposant « une articulation entre préoccupations "pratiques" et "didactiques" » (GREFEM, 2012, p. 352) en plongeant les étudiants dans un contexte simulé d'une situation de classe. L'analyse proposée est pensée en termes de tensions entre ces deux préoccupations, mais elle ne porte pas sur la nature des connaissances pouvant être transmises aux professeurs des écoles dans le cadre de ce dispositif. Or nous avons élaboré au sein de la Commission Permanente des IREM sur l'enseignement élémentaire (COPIRELEM) un cadre d'analyse (Guille-Biel Winder et al., 2015 ; Mangiante-Orsola et al., à paraître) qui permet de mettre en lumière différentes potentialités de situations de formation, d'une part en clarifiant les enjeux possibles des différentes phases de la mise en œuvre, enjeux liés à des objectifs de formation concernant l'appropriation de savoirs mathématiques, didactiques et/ou pédagogiques, et d'autre part, en rendant compte de la manière dont s'articulent ces différents types de savoirs « utiles pour enseigner ». Nous faisons ici fonctionner ce cadre pour mieux identifier les potentialités d'un Jeu de Rôles en termes de connaissances à transmettre aux professeurs des écoles et à institutionnaliser lors de la formation. Après une brève présentation de l'approche

[*] COPIRELEM, LDAR, ADEF, ESPE –Aix-Marseille Université – France – claire.winder@univ-amu.fr
[**] COPIRELEM, LML, ESPE LNF, christine.mangiante@espe-lnf.fr
[***] COPIRELEM, LDAR, ESPE – Université de Cergy Pontoise – France – pascale.masselot@u-cergy.fr
[****] COPIRELEM, LDAR, ESPE – Université Rouen Normandie – France – edith.petitfour@univ-rouen.fr
[*****] COPIRELEM, LMB (UMR 6623), FR-Educ, LEARN-O, ESPE – Université Franche-Comté – France – arnaud.simard@univ-fcomte.fr

du Jeu de Rôles développée par l'équipe de didacticiens des mathématiques de l'Université du Québec à Montréal (UQAM), nous présentons ce cadre d'analyse. Puis nous explicitons la conception et l'analyse d'un Jeu de Rôles visant à travailler des gestes du métier d'enseignant liés à l'institutionnalisation de savoirs en géométrie plane pour des élèves de cours préparatoire (élèves de 6-7 ans).

1. Jeu de Rôles

« Le Jeu de Rôles est la mise en scène d'une situation problématique impliquant des personnages ayant un rôle donné. Le Jeu de Rôles peut être utilisé à des fins thérapeutiques, de formation personnelle, de formation professionnelle, ou encore comme approche pédagogique » (Mucchiellli, 1983, p. 3). « L'idée derrière le Jeu de Rôles est que des personnes doivent se glisser dans la peau de personnages plongés dans une situation donnée et agir exactement comme ils croient que ces personnages pourraient agir. » (Lajoie et Pallascio, 2001). L'approche des jeux de rôles développée à l'UQAM a fait l'objet de plusieurs publications (Lajoie et Pallascio, 2001 ; Lajoie, 2010 ; GREFEM, 2012 ; Lajoie et al, 2012 ; Marchand et al, 2012). Chaque Jeu de Rôles est structuré de la même manière et se déroule en quatre temps. Tout d'abord, une *mise en situation* est proposée aux étudiants, qui sont placés en équipes. Cette mise en situation implique des « élèves » (en nombre variable, selon le Jeu de Rôles - parfois un seul) et un « enseignant » et appelle une solution. Une fois la mise en situation explicitée, l'étape de *préparation* par équipe débute : au cours de cette étape, les contenus mathématiques en jeu dans la situation peuvent être examinés, les raisonnements sous-jacents possibles envisagés, des moyens d'intervention de l'« enseignant » imaginés, les réactions des « élèves » anticipées, etc. Lors de la *mise en scène*, le formateur choisit les équipes qui devront envoyer une personne à l'avant de la classe pour jouer le rôle de l'« enseignant » ou d'un/des « élève(s) », et fait en sorte que les différents acteurs proviennent d'équipes différentes, de manière à éviter qu'ils s'entendent préalablement sur le déroulement (une équipe ne sait pas à l'avance si l'un de ses membres devra jouer un rôle devant toute la classe). Puis le jeu a lieu et les observateurs, tout comme le formateur, ont l'occasion d'observer l'« enseignant » et son/ses « élève(s) » en action. La dernière phase correspond à un *retour collectif* dont le formateur est l'animateur. Ce retour peut porter sur tout aspect pertinent ayant retenu l'attention des observateurs (incluant celle du formateur), ou même celle des acteurs (identification de moments clés dans l'intervention, clarification sur les concepts mathématiques impliqués). Aussi, le retour peut être l'occasion de discuter de ce qui a été fait et de ce qui pourrait (ou devrait) être fait dans l'avenir, que ce soit dans le contexte d'un autre Jeu de Rôles ou dans celui d'une « vraie » classe. Remarquons que pour soutenir les formés dans la préparation et la mise en œuvre du Jeu de Rôles, il apparaît nécessaire de leur proposer une *activité préalable* qui peut prendre différentes formes : par exemple l'appropriation d'une activité de classe, la présentation d'un matériel, l'analyse de productions d'élèves, voire même une lecture préparatoire d'un ou plusieurs articles portant sur les concepts mathématiques en jeu, sur des conceptions d'élèves, sur des erreurs fréquentes.

Le Jeu de Rôles est un dispositif de formation où la « part d'inconnu » à gérer par le formateur est particulièrement importante. En effet, même s'il a réfléchi aux conséquences des choix qu'il a été amené à faire, la *mise en scène*, qui simule une réalité de classe, n'est pas prévisible, et le formateur doit faire émerger les « savoirs utiles pour enseigner » au moment du *retour collectif*, en s'appuyant sur une « analyse à chaud » du jeu, par les acteurs et les observateurs. Pour identifier les savoirs susceptibles d'être institutionnalisés par le formateur, une analyse de la situation de formation est nécessaire. Pour ce faire, nous mobilisons le cadre d'analyse présenté dans la sous-partie suivante.

2. Cadre d'analyse

Nous inscrivons notre travail dans le cadre de la double approche (Robert et Rogalski, 2002). Pour concevoir notre cadre d'analyse, nous empruntons donc des concepts à la fois à la didactique des mathématiques (notamment la théorie des situations didactiques (Brousseau, 2000)) et à la psychologie ergonomique (Leplat, 1997). Nous appelons « situation de formation » une situation qui implique des formés (étudiants en formation initiale ou enseignants en formation continue) et des formateurs (professeurs, PEMF[1], CPC[2], etc.) au sein d'une institution de formation d'enseignants. De telles situations sont constituées d'un ensemble de tâches (au sens de la théorie de l'activité) pouvant être proposées par un formateur à des formés. À partir d'une « situation de formation », le formateur peut élaborer un « scénario de formation », succession de tâches (sous-ensemble de l'ensemble des tâches qui constituent la situation), proposées par le formateur et organisées chronologiquement, une sorte d'itinéraire conçu par le formateur avec une intention précise. Nous distinguons ainsi situation et scénario dans le but de faire apparaître l'aspect dynamique de l'enchaînement des tâches dans un scénario.

Type d'activité. Dans une « situation de formation », la réalisation d'une tâche donnée induit une activité de la part du formé, c'est-à-dire ce qu'il développe lors de la réalisation de la tâche (Rogalski, 2003). Nous distinguons cinq types d'activités qui seront exemplifiés dans la suite de ce texte : « activité mathématique » lorsque le formé convoque des mathématiques dans la résolution d'une tâche mathématique ; « activité d'analyse mathématique » lorsque le formé analyse les mathématiques en jeu dans la résolution d'une tâche mathématique ; « activité didactique et/ou pédagogique » lorsque le formé met en lumière les choix didactiques et/ou pédagogiques liés à la tâche mathématique ; « activité d'analyse didactique et/ou pédagogique » lorsque le formé analyse ces choix didactiques et/ou pédagogiques ; « activité de problématisation » lorsque le formé identifie et investigue une question professionnelle, en mobilisant des concepts mathématiques, didactiques et pédagogiques. Le choix de ces cinq types d'activités découle de la prise en compte de trois dimensions : le type de connaissances convoquées, le degré de décontextualisation de ces connaissances et la posture attendue du formé dans l'activité. Nous présentons maintenant ces trois dimensions en explicitant les points d'appuis théoriques qui ont guidé notre travail de mise au point du cadre d'analyse.

Type de connaissances convoquées. Pour une situation de formation donnée, nous considérons différents enjeux de formation, en lien avec les trois types de « savoirs utiles pour enseigner » (Houdement, 2013 ; Simard et al., 2011) : le savoir mathématique correspond aux mathématiques nécessaires à l'enseignant pour préparer, réguler et évaluer sa séance et ses élèves ; le savoir didactique est nourri par les recherches en didactique des mathématiques et plus particulièrement celles qui portent sur le primaire, il est transposé pour être rendu accessible en centre de formation ; le savoir pédagogique oscille entre deux pôles, « l'un théorique mais parfois très éloigné de la pratique future des étudiants (…), l'autre proche du sens commun et de la pratique, mais privé de l'adaptabilité d'un modèle plus théorique » (Houdement, 2013, p. 13). Ainsi, à travers les différentes tâches prescrites dans une situation de formation, le formateur vise à faire acquérir différents types de savoirs. Les formés, quant à eux, développent différents types de connaissances[3] (relatives à ces savoirs) : des

[1] Professeur des écoles maître formateur

[2] Conseiller pédagogique de circonscription

[3] Selon Margolinas (2013), « une connaissance est ce qui réalise l'équilibre entre le sujet et le milieu, ce que le sujet met en jeu quand il investit une situation ». En ce sens, une connaissance est intimement liée au sujet, alors qu'un « savoir est une construction sociale et culturelle qui vit dans une institution. (…) [Il est] dépersonnalisé, décontextualisé, détemporalisé » (*ibid*, p. 14).

connaissances mathématiques, didactiques et pédagogiques. Les *connaissances mathématiques* correspondent aux savoirs mathématiques que les formés enseigneront à leurs élèves ainsi que ceux non enseignés aux élèves mais nécessaires aux formés pour enseigner les premiers. Les *connaissances pédagogiques* relèvent des conceptions de l'apprentissage, de l'organisation et de la gestion de la classe, indépendamment des contenus disciplinaires : par exemple, envisager différentes modalités de travail (individuel, en petits groupes pour favoriser les interactions, en grand groupe). Les *connaissances didactiques*, spécifiques au contenu mathématique enseigné, sont des connaissances pour l'enseignant : elles correspondent à des transpositions de savoirs didactiques initialement conçus dans le cadre de la recherche.

Degré de décontextualisation. Brousseau (1988) et Douady (1986) ont identifié trois degrés de décontextualisation d'une connaissance mathématique : mobilisée en contexte implicitement (en acte) ; mobilisée en contexte explicitement ; décontextualisée (pour devenir mobilisable dans d'autres contextes). Une connaissance mathématique est mobilisée en contexte implicitement (en acte) lorsqu'elle est utilisée comme outil (Douady, 1986) dans l'activité mathématique considérée, c'est-à-dire convoquée lors de la réalisation d'actions sur des objets matériels ou symboliques. Une connaissance mathématique est explicitée en contexte lorsque son utilisation dans l'activité en tant qu'outil est formulée et elle est décontextualisée lorsqu'elle est présentée en tant qu'objet, généralement dans une phase d'institutionnalisation. Nous transposons les trois degrés de décontextualisation d'une connaissance mathématique aux connaissances didactiques et pédagogiques. Les connaissances didactiques ou pédagogiques sont mobilisées en acte dans l'identification par le formé des choix didactiques ou pédagogiques effectués dans l'activité mathématique considérée, elles sont explicitées en contexte dans une analyse des implications de ces choix et elles sont décontextualisées dans la mise en évidence et l'explicitation des concepts didactiques ou pédagogiques sous-jacents.

Posture attendue du formé. En liaison avec les différentes manières dont un formateur peut s'adresser à des stagiaires (en formation initiale ou continue) dégagées par Sayac (2010), nous distinguons plusieurs postures spécifiques qu'attend le formateur de la part du formé. Ainsi le formé est placé dans une *posture d'élève* par rapport aux connaissances mathématiques lorsqu'il doit réaliser la tâche mathématique ou lorsqu'il s'intéresse aux connaissances mathématiques décontextualisées mobilisées dans la réalisation de cette tâche. Il est placé dans une *posture d'élève-enseignant* (au sens de « élève ingénieur ») lorsqu'il étudie des activités à destination des élèves ou des productions d'élèves, ou lorsqu'il analyse les conditions de mise en œuvre en classe de la tâche mathématique considérée. Il est placé dans une *posture d'enseignant* lorsqu'il entre dans un questionnement plus large sur les pratiques de classe ou sur les enjeux d'apprentissages mathématiques. Enfin, il est placé dans une *posture* de *praticien-chercheur* lorsqu'il s'agit de problématiser une question professionnelle en lien avec les pratiques de classe et les enjeux d'apprentissage.

Cinq paliers d'étude. Dans une « situation de formation », nous distinguons des tâches de natures différentes qui induisent (implicitement ou explicitement) des postures spécifiques attendues par le formateur de la part du formé. Les différentes tâches peuvent se répartir dans cinq paliers caractérisés par la nature de l'activité du formé. La figure 1 récapitule les caractéristiques générales des cinq paliers d'étude. Un descriptif plus détaillé de ce cadre d'analyse est proposé dans Mangiante et al. (à paraître).

Dans la seconde partie, nous mobilisons ce cadre d'analyse afin d'expliciter la conception d'une situation de « Jeu de Rôles » et d'en analyser les potentialités.

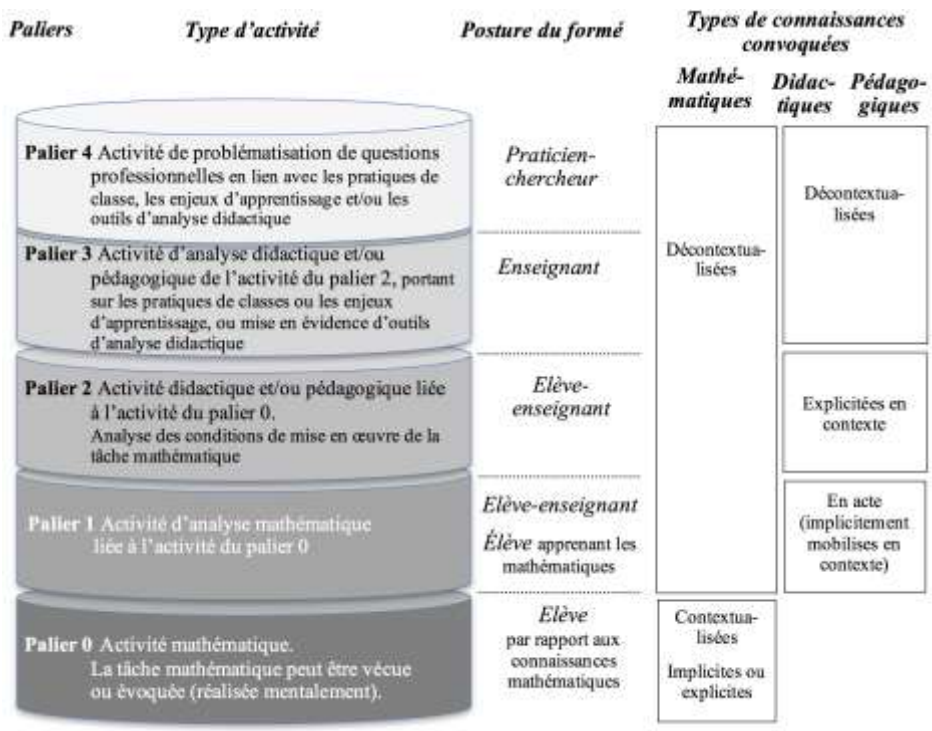


Figure 1 *– Présentation du cadre d'analyse*

II. CONCEPTION ET ANALYSE DE LA SITUATION DE FORMATION

1. Choix de formation

Au cours de leurs recherches sur l'analyse des pratiques des professeurs des écoles enseignant les mathématiques, Butlen, Pézard et Masselot (2009) ont mis en évidence des tensions entre les processus de dévolution et d'institutionnalisation. Ils ont notamment constaté des difficultés lors de la gestion des phases de mise en commun dans la prise en compte des dire des élèves et dans le passage aux formulations orales et écrites en lien avec les objectifs d'apprentissage. La situation de formation, dont nous allons analyser les potentialités, vise ainsi à travailler des gestes du métier d'enseignant liés à l'institutionnalisation de savoirs en géométrie plane pour des élèves de cours préparatoire (élèves de 6-7 ans). Pour ce niveau de classe, il est parfois difficile pour les enseignants de saisir les enjeux d'apprentissage liés à la résolution de problèmes géométriques s'appuyant sur des manipulations, comme par exemple les problèmes de reproduction de figures par pliage (Guille-Biel Winder, 2014) ou par pliage et découpage (Peltier, 2003). La situation de formation proposée cherche ainsi à apporter des éléments de réponse à cette question de l'institutionnalisation des savoirs prenant appui sur ce que produisent les élèves – en action et en mots – lors de mises en commun de procédures. Le Jeu de Rôles (Lajoie et Pallascio, 2001 ; Lajoie, 2010), permet de placer les étudiants dans un contexte proche de l'exercice de la classe et semble être un dispositif de formation approprié pour répondre à cet objectif de formation. Il amène en effet à aborder la dimension langagière du travail de l'enseignant en la mettant à l'épreuve dans un moment de classe mis en scène, au plus près des conditions réelles de la classe. En terme d'ajustement didactique (Charles-Pézard, 2010), il contraint l'enseignant à se placer du point de vue des élèves et ainsi à chercher à mieux comprendre l'état de leurs connaissances pour pouvoir les faire évoluer.

2. Déroulement du Jeu de Rôles « institutionnalisation en géométrie »

La situation problématique retenue consiste à résoudre la tâche : « proposer une institutionnalisation faisant suite à une mise en commun autour de la résolution d'un problème géométrique dans une classe de cours préparatoire » (problème géométrique présenté en annexe).

M*ise en situation.* Le formateur présente aux formés le problème géométrique proposé aux élèves, des éléments du contexte de la classe dans lequel le problème a été donné (période de l'année, ressources utilisées habituellement par l'enseignant, etc.), et les différentes étapes de la séance réalisées avant la phase de mise en commun des procédures de résolution des élèves. Il s'appuie sur un montage vidéo qui montre différents moments collectifs de l'activité de la classe étudiée qui ont lieu avant et après une phase d'action (passation de la consigne, analyse de la figure, mise en commun). Il pourrait également s'appuyer sur des productions d'élèves. Il s'agit ainsi d'apporter des éléments portant sur ce que peuvent faire les élèves de CP confrontés à ce problème.

P*réparation*. Par groupe, les formés envisagent la suite à donner à la mise en commun qu'ils viennent de visionner. À l'issue de ce temps de préparation, le formateur choisit un formé issu de chaque groupe, l'un pour jouer le rôle de l'enseignant et les autres, le rôle des élèves.

M*ise en scène*. Les formés qui ne jouent pas observent la scène attentivement et prennent des notes selon différentes pistes d'observation données par le formateur : le discours de l'enseignant (forme, contenu) / ce qu'il ne dit pas ; les actions de l'enseignant et leurs effets sur les élèves ; ce que disent et/ou font les élèves ; les interactions élèves/enseignant.

R*etour collectif*. En s'appuyant sur une « analyse à chaud » du jeu, par les acteurs et les observateurs, une discussion a lieu en vue de faire émerger les choix réalisés par l'enseignant et de les discuter. La discussion peut être initiée à partir de questions telles que : Qu'est-ce qui a bien fonctionné ? Qu'est-ce qui a été particulièrement difficile ? Qu'auriez-vous fait, ou feriez-vous désormais, de manière différente ? Les échanges doivent en particulier porter sur la façon dont les connaissances en jeu dans la résolution du problème ont été exposées ainsi que sur le contenu et la forme de la synthèse réalisée par l'enseignant, en lien avec les objectifs de formation privilégiés par le formateur.

3. Analyse des potentialités de la situation de formation

M*ise en situation.* Le point de départ du Jeu de Rôles est une situation professionnelle avec un problème d'enseignement à résoudre (palier 3) : il s'agit de la gestion d'une phase collective devant conduire à une synthèse et une institutionnalisation de savoirs en géométrie suite à la recherche d'un problème en cours préparatoire (élèves de 6-7 ans). Le problème géométrique peut avoir été rencontré et analysé dans une situation de formation préalable ou être découvert à l'occasion de cette situation de formation. Les formés sont dans une posture d'enseignant.

Préparation. Pendant la *préparation*, les formés sont dans une posture d'élève lorsqu'ils cherchent à résoudre le problème, mentalement ou de façon effective avec le matériel (palier 0) ; dans ce cas les connaissances mathématiques en jeu sont contextualisées. Les formés sont également dans une posture d'élève-enseignant lorsqu'ils analysent le problème du point de vue mathématique pour dégager les connaissances en jeu à institutionnaliser suite à la mise en commun des productions ; les connaissances mathématiques sont décontextualisées et des connaissances didactiques sont implicitement utilisées en contexte (palier 1). Le visionnement de la vidéo, si l'on s'attache à observer les élèves, permet

d'identifier des procédures pour résoudre le problème, ainsi que des erreurs commises et des difficultés rencontrées : les connaissances pédagogiques et didactiques sont utilisées en contexte (palier 1). Une analyse des productions des élèves – procédures et mises en mots – et de la nature de leurs difficultés – manipulatoires, techniques, langagières – place les formés en posture d'élève-enseignant (palier 2) et permet de préparer l'exposition des connaissances en jeu dans le problème (posture d'enseignant, palier 3).

Mise en scène. Lors de la *mise en scène*, il est nécessaire de distinguer les différents statuts. Le formé jouant le rôle de l'enseignant (et donc mis dans une posture d'enseignant, palier 3) doit s'essayer à des formulations orales et/ou écrites des connaissances en lien avec les objectifs d'apprentissage identifiés, à partir des productions des élèves. Pour ce faire, il revient sur les mathématiques en jeu pour comprendre ce que disent les élèves et y réagir. De nombreux va-et-vient entre les différents paliers 0, 1, 2 et 3 sont alors réalisés. Les formés jouant le rôle des élèves (et donc mis dans une posture d'élève, palier 0) agissent et réagissent conformément aux difficultés ou facilités des élèves de CP analysées lors de la préparation du jeu (alternance entre les paliers 0 et 1). Les autres formés, par leur activité d'observation, sont amenés à se positionner au palier 2.

Retour collectif. Les questions posées lors du *retour collectif* amènent les formés à se positionner au palier 2 pour analyser la (ou les) mise(s) en commun proposée(s). Il peut alors être nécessaire de se situer aux paliers inférieurs pour discuter des procédures, des difficultés, des erreurs et de leur exploitation dans la mise en commun. Des éléments plus généraux sur la gestion des mises en commun et de l'institutionnalisation, relevant du palier 3, peuvent également apparaître dans la discussion. Par rapport à l'objectif annoncé du Jeu de Rôles, le formateur institutionnalise des savoirs didactiques relatifs à l'organisation d'une mise en commun : sur la formulation en mathématiques et plus généralement, en géométrie, sur la nécessité de se détacher du langage courant lié à la manipulation pour proposer un discours portant sur les objets géométriques, sur les tâches de l'enseignant en amont, pendant et après la mise en commun (palier 3). Il met notamment en évidence la nécessité de réaliser une analyse *a priori* de la situation d'enseignement pour pouvoir s'adapter aux propositions des élèves et s'en saisir au regard des enjeux d'apprentissage géométriques préalablement identifiés. La discussion peut également déboucher sur une réflexion concernant la formulation des savoirs (palier 2), et le formateur peut plus généralement mettre en évidence la distinction entre « institutionnalisation » et « exposition des savoirs » (palier 3).

III. CONCLUSION

Le cadre proposé a été conçu pour pouvoir analyser des situations de formation et en transmettre les modalités en restant au plus près de la pratique des formateurs pour leur permettre de s'emparer de ces situations, de les adapter et de les exploiter en fonction de leurs objectifs de formation et du moment de la formation. Par ailleurs, la mise à l'épreuve du cadre d'analyse en le faisant fonctionner sur différents scénarios de formation, nous a permis de conforter le choix des cinq types d'activités ainsi que leur caractérisation. Grâce à une analyse fine des scénarios de formation telle que celle présentée ici, nous avons constaté une certaine « porosité » entre les différents paliers d'étude, de même qu'une organisation non chronologique de ces paliers. Enfin, ce cadre d'analyse permet de mettre au jour la complexité de ce qui se joue en formation, en lien avec le rôle du formateur.

La mise en fonctionnement du cadre d'analyse nous a permis d'identifier les potentialités d'une situation faisant intervenir un Jeu de Rôles dans le cadre d'une formation de professeurs des écoles. Nous avons pu mettre en évidence la spécificité de ce dispositif de formation : les formés sont mis d'entrée dans une posture d'enseignant donc au niveau du palier 3 et le

problème auquel ils sont confrontés les amène à « redescendre » dans les paliers inférieurs pour analyser les conditions de mise en œuvre de la tâche mathématique, ainsi que la tâche mathématique elle-même. Ceci se déroule via des allers retours fréquents dans les différents paliers : à tout moment le passage d'un palier à l'autre est nécessaire et par voie de conséquence la mise en lien des connaissances mathématiques, didactiques et pédagogiques. Plus généralement cette situation de formation peut faciliter l'enrôlement des formés et elle permet de rendre explicite le caractère outil (pour l'exercice du métier) d'un certain nombre de connaissances. Mais cette situation nécessite, peut-être plus que d'autres, une mise à distance de ce qui a été produit dans un certain contexte et une réflexion sur les différents niveaux d'institutionnalisation des savoirs qui pourront être transposés lorsque le futur enseignant sera confronté à une telle tâche dans sa classe : en ce sens, le rôle du formateur apparaît essentiel.

RÉFÉRENCES

Brousseau G. (1988). Les différents rôles du maître. *Bulletin de l'A.M.Q.*, 14-24.

Brousseau G. (1998). Théorie des situations didactiques. La pensée Sauvage, Grenoble.

Butlen D., Masselot P., Pézard M. (2009). Gestes et routines professionnels : un enjeu pour analyser et intervenir sur les pratiques enseignantes *in actes du colloque « Espace Mathématique Francophone »,* Dakar, Sénégal.

Charles-Pézard M. (2010). Installer la paix scolaire, exercer une vigilance didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 30(2), 197-260.

Douady R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherche en Didactique des Mathématiques* 7(2), 5-31.

GREFEM (2012) Formation didactique articulée à la pratique enseignante : illustrations et conceptualisation. *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone, Genève 2012*, 348-361.

Guille-Biel Winder C. (2014). Étude d'une situation de reproduction de figures par pliage en cycle 2 : le PLIOX. *Annales de didactique et de sciences cognitives* 19, 103-128.

Guille-Biel Winder C., Petitfour E., Girmens Y., Masselot P. (2015). Proposition d'un cadre d'analyse de situations de formation des professeurs des écoles. *Actes du colloque international EMF 2015 Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage*.

Houdement C. (2003) Au milieu du gué : entre formation des enseignants et recherche en didactique des mathématiques. *Note d'habilitation à diriger des recherches*. Université Paris Diderot – Université de Rouen.

Lajoie C. (2010) Les jeux de rôles : une place de choix dans la formation des maîtres du primaire en mathématiques à l'UQAM. In Proulx J., Gattuso L. (Eds.) (pp. 101-113) *Formation des enseignants en mathématiques : tendances et perspectives actuelles*. Sherbrooke, Qc : Éditions du CRP.

Lajoie C., Pallascio R. (2001) Le jeu de rôle : une situation-problème en didactique des mathématiques pour le développement de compétences professionnelles. *Actes du colloque des didacticiens des mathématiques du Québec* (pp. 120-132). Montréal : GDM.

Leplat J. (1997). Regards sur l'activité en situation de travail. Paris : PUF.

Mangiante-Orsola C., Masselot P., Petitfour E., Winder C., Simard A., Tempier F. (à paraître). Proposition d'un cadre d'analyse de situations de formation de professeurs des écoles. *Colloque ARCD Toulouse 2016*. Presses Universitaires du Midi.

Marchand, P., Adihou, A., Lajoie, C., Maheux, J.-F., Bisson, C. (2012). Les jeux de rôles en formation initiale : Mettre les compétences professionnelles en action dans la formation didactique. Quelle université pour demain ? (pp. 198-208). In *Actes du 27e congrès de l'Association Internationale de Pédagogie Universitaire* (AIPU). Trois-Rivières : AIPU.

Mucchielli, A. (1983) Les jeux de rôles. *Paris : Presses Universitaires de France, Que sais-je ?*

Peltier M-L. (2003). « Le napperon » - Un problème pour travailler la symétrie axiale. Concertum, Carnets de route de la COPIRELEM (tome 2). ARPEME. 161-172.

Robert A., Rogalski J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche, la revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies, 2(4), Toronto, 505-528.

Rogalski J. (2003). Y a-t-il un pilote dans la classe ? Une analyse de l'activité de l'enseignant comme gestion d'un environnement dynamique ouvert. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 23(3), 2003, 343-388.

Sayac N. (2010). Appréhender la formation des professeurs des écoles en France à travers la pratique des formateurs en mathématiques. *Actes du congrès de l'AREF*. Université de Genève, pp. 1-9.

Simard A., Masselot P., Imbert J-L., Ouvrier-Buffet C. (2011). Quelles modalités de contrôle des connaissances dans la formation en mathématiques des professeurs des écoles ? *Actes 37e Colloque de la COPIRELEM*. La Grande Motte 2010.

ANNEXE : LE PROBLÈME GÉOMÉTRIQUE POSÉ EN CLASSE

Le problème géométrique s'appuie sur un artefact appelé PLIOX (Guille-Biel Winder, 2014) qui consiste en un carré de papier présentant sur une face quatre zones également carrées et colorées respectivement en rouge, bleu, vert et jaune (l'autre face n'est pas colorée). Les lignes de pli autorisées correspondent aux axes de symétrie du carré et des carrés « secondaires » (les carrés colorés) (figure 2).

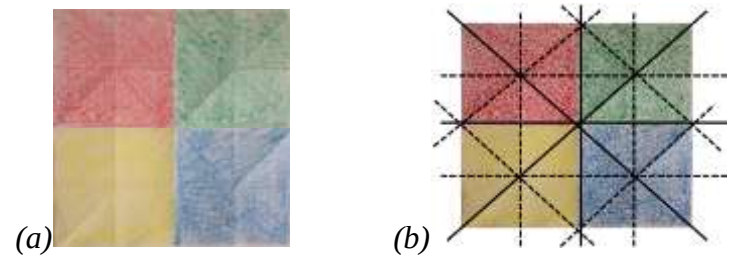


Figure 2 *– Un PLIOX (a) ainsi que les directions de pli autorisées (b)*

Le problème posé aux élèves est le suivant : Reproduire la figure modèle (figure 3) par pliage effectif du PLIOX. Après une discussion collective portant sur une première analyse de la figure modèle, la résolution du problème est réalisée individuellement. La séance se poursuit par une mise en commun des procédures et se conclut par une synthèse.



Figure 3 *– La figure modèle donnée aux élèves*

DE LA FORMATION À LA PRATIQUE : QUE PEUT NOUS APPRENDRE L'ANALYSE DE PRATIQUES DE STAGIAIRES ?

HERSANT* Magali

Résumé – À partir de l'analyse d'une séance menée par une professeure des écoles stagiaire, nous identifions deux problèmes professionnels auxquels répond sa pratique. Nous les analysons avec le cadre de la problématisation et mettons en relation les solutions trouvées par la stagiaire et la formation à l'enseignement des mathématiques qu'elle a reçue.

Mots-clefs : formation initiale, institutionnalisation, pratiques, problématisation

Abstract – Analysing the practice of a preservice teacher at the elementary school, we identify two professionnal problems that her practice answers. We analyze them with the framework of the problematization and put in relation the solutions found by the preservice teacher and the teacher's professional mathematics education.

Keywords: preservice teachers, institutionnalization, teaching practices, problématization

I. INTRODUCTION

Cette communication questionne les effets de la formation initiale de professeurs des écoles (PE) en mathématiques dans le contexte français en 2014 : les étudiants sont à mi-temps en formation à l'ESPE[1] et à mi-temps stagiaires de l'Éducation Nationale en charge d'une classe. Il s'agit d'une étude de cas qui doit se garder de toute généralisation abusive. En particulier, cette étude de cas ne peut constituer une évaluation de la formation.

L'effet de la formation est envisagé à partir de l'analyse d'une séance sur les fractions et décimaux en CM1 menée par une stagiaire dans le contexte suivant : une présentation commentée de la progression Cap Math CM1 (Charnay et *al*, 2003) a été effectuée en formation et la stagiaire réalise quelques jours après cette formation dans sa classe la séance 2 de cette même progression (introduction et signification de l'écriture fractionnaire ; utilisation de cette écriture pour coder des longueurs) ; Cap Maths est l'ouvrage habituellement utilisé dans la classe et la stagiaire a prévu de réaliser la leçon comme le propose le guide du maître.

À partir de l'identification d'écarts significatifs entre le prévu et le réalisé et de moments critiques dans la séance (moment où l'on perçoit que la stagiaire est déstabilisée face à la contingence) nous reconstruisons des problèmes professionnels auxquels la stagiaire est confrontée et questionnons l'apport de la formation dans la résolution de ces problèmes. Pour cela nous mobilisons le cadre de la problématisation (Fabre, Orange, 1997 ; Fabre, 2006) et la catégorisation des connaissances mathématiques de l'enseignant (Ball et al., 2008). Nous utilisons aussi la notion de registre de représentation sémiotique de Duval (1995).

Il serait réducteur de ne prendre en compte dans l'étude que la formation sur les fractions, c'est pourquoi le corpus est constitué d'éléments concernant la formation réalisée (fiches de préparation de l'ensemble des séances de formation, diaporama de la séance sur les fractions et enregistrement audio de cette séance) et de la réalisation en classe de la séance (entretien pré-séance, vidéo et transcription partielle de la séance, travaux d'élèves, entretien post-séance). La formation en mathématiques dont a bénéficié la stagiaire est synthétisée dans la première partie de ce texte.

* ESPE de Nantes, CREN, Université de Nantes – France – magali.hersant@univ-nantes.fr
[1] École supérieure du professorat et de l'éducation

II. METHODOLOGIE ET CADRE D'ANALYSE

L'enseignement de mathématiques est une activité qui mobilise de façon singulière les mathématiques (Ball & al, 2008) dans des situations dynamiques riches de contingences et qui demandent de prendre des décisions en situation (Robert, Rogalski, 2002 ; Ball, 2017). Nous considérons que, de ce fait, l'enseignant est confronté à des problèmes professionnels mathématiques lorsqu'il prépare une séance et lorsqu'il la met en œuvre et que la pratique est une solution à ces problèmes. Nous faisons l'hypothèse que les écarts entre le prévu et le réalisé traduisent la résolution d'un problème de ce type et que certaines hésitations de l'enseignant correspondent à un problème émergent dont la solution ne lui apparaît pas facilement. Mais « traiter la pratique comme une « solution » n'implique pas que l'acteur ait intégralement construit le problème, ni même qu'il ait vécu sa pratique comme un problème. » (Fabre, 2006, p. 135), c'est pourquoi les problèmes professionnels sur lesquels nous travaillons sont des constructions du chercheur. Nous analysons ces problèmes professionnels avec le cadre de la problématisation (Fabre, Orange, 1997 ; Fabre, 2006). Ainsi nous reconstruisons le problème de l'enseignant en considérant les données dont il dispose et les normes qu'il se donne. Ces normes permettent de définir les conditions du problème (Fabre, 2006, p. 135). Dans le cas étudié, les données sont constituées à partir des connaissances des élèves et de leurs difficultés en général ou bien spécifiquement sur la notion en cours d'apprentissage, de leur production orales et écrites, ainsi que des ressources dont dispose la stagiaire pour construire sa séance. Les conditions relèvent de principes pédagogiques, par exemple dérivés du socio-constructivisme, et de principes spécifiques à l'enseignement d'une notion, par exemple l'écriture fractionnaire doit être introduite en lien aves pliages et des reports de la bande unité. La mise en tension des données et des conditions permet d'arriver à une solution du problème.

Nous considérons que les données et conditions spécifiques de l'enseignement d'une notion peuvent s'analyser selon la classification des connaissances mathématiques pour l'enseignement que proposent Ball et al. (2008, cité par Clivaz, 2014) et dont voici un rapide rappel : connaissance du sujet (au sens de notion) qui comprennent les connaissances mathématiques communes, celles spécifiques à l'enseignement et les connaissances relatives à l'horizon mathématique ; connaissances pédagogiques du contenu qui comprennent les connaissances des manières possibles d'enseigner le sujet, les connaissances des réactions des élèves sur le sujet ; les connaissances des programmes et des moyens d'enseignement.

III. LA FORMATION DONT A BÉNÉFICÉ LA STAGIAIRE

1. Le dispositif global de formation

En première année de master, la PE a préparé à l'ESPE le concours de professeur des écoles qui porte, essentiellement, sur le programme de mathématiques de collège. Au cours de sa deuxième année de master, avant l'observation, elle a bénéficié de 4 séances de 3h de formation en mathématiques.

Cette formation a été réalisée par l'auteure. Elle prend appui sur des travaux didactiques (ingénieries didactiques, situations d'homologie et conditions pour l'apprentissage de mathématiques) et tente de s'ancrer dans des problématiques professionnelles en proposant des tâches très contextualisées susceptibles, d'une part, de permettre aux stagiaires d'anticiper leur séance lors de leur temps de préparation et, d'autre part, de les mettre en situation proche de situations de décisions en classe. Par exemple nous utilisons la situation d'homologie sur l'aire (Houdement, Peltier, 2001) et lui associons un travail sur cette situation avec des élèves

de CM1 (EuroMaths, CM1) (TD3). Ces problèmes de la profession peuvent être anticipés par nous. Ainsi, par exemple, à partir de la situation de tri en PS selon deux modalités, boites ouvertes ou boites fermées (Briand, 2000) le TD 1 permet un travail sur la question de la validation et l'anticipation des procédures des élèves. Ils peuvent aussi provenir des stagiaires. Par exemple, le TD2 traite de la manipulation en mathématiques en réponse à une question de stagiaire. Différentes situations sont proposées à l'analyse des stagiaires : un agrandissement de puzzle en CM2 avec des productions erronées d'élèves permet de faire ressortir la fonction « invalider une conception erronée » de la manipulation, en lien avec ce qui a été dit lors de la séance 1 ; la fabrication de napperons au CM (Peltier, 2000) à partir de la situation du manuel EurosMaths (Peltier et al., 2009) permet de mettre en évidence le rôle de la manipulation dans la conceptualisation de la notion d'axe de symétrie ainsi que l'importance de l'anticipation préalable à la manipulation ; à partir de la comparaison des formes proposées à des élèves de CM1 puis du CM2 les stagiaires sont amenés à mettre en évidence l'importance du choix des formes, leurs orientations, leurs positions relatives en fonction des connaissances des élèves, dans une perspective de progression ; la question des « critères de ressemblance » à préciser aux élèves dès le début de l'activité est travaillée.

Par ailleurs, parce que la formulation des savoirs à destination des élèves est essentielle pour les apprentissages, qu'elle est difficile pour les enseignants dans la mesure où elle suppose à la fois des connaissances mathématiques communes et des connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement et qu'elle est finalement peu présente dans les ressources, nous lui accordons une place particulière. Ainsi, par exemple, lors du travail sur le système de numération décimale au cycle 2 (TD4), les stagiaires sont d'abord invités à lister et hiérarchiser les connaissances que les élèves doivent acquérir au CP à propos du nombre, à les formuler pour des parents d'élèves puis, à partir d'une situation qui porte sur la mise en relation de l'écriture chiffrée d'un nombre et de l'organisation d'une quantité en pièces isolées et paquets de 10 pièces proposée par une titulaire et de productions d'élèves, les stagiaires sont mis en situation de formuler, comme ils le feraient pour les élèves, les consignes pour certaines phases de la situation et une synthèse de la séance avant de préparer une phase d'entrainement. Ce travail se poursuit par une analyse de quelques extraits de manuels qui cible sur, d'une part les erreurs possibles des élèves (en particulier les erreurs de dénombrement qui ne disent rien de la compréhension du codage) et, d'autre part, sur certaines façons de présenter les décompositions de collection (par exemple on présente toujours dizaines puis unités ou toujours des unités en nombre inférieur à 10) qui ne permettent pas de s'assurer pleinement de la compréhension du codage par les élèves.

Cette formation essaie aussi de mettre en perspective les enjeux de l'enseignement des notions abordées dans la scolarité future des élèves. Ce qui renvoie à un travail sur l'horizon mathématique (Ball et al, 2008). Par exemple, dans la formation sur l'enseignement du calcul posé de la multiplication de deux nombres décimaux en CM2 (TD2), les stagiaires sont amenés à réfléchir sur les enjeux associés à l'apprentissage de cette multiplication (pourquoi on fait encore ça ?) et les pré-requis pour cet enseignement - autrement dit, ce qui a dû être travaillé dans les classes précédentes et avant au cours de l'année de CM2 avant de discuter une proposition d'activité d'introduction à cette multiplication en questionnant le choix de la situation par rapport aux connaissances visées, en envisageant des procédures possibles des élèves, en commentant la trace écrite et l'évaluation proposées par l'enseignante.

2. Une formation qui intègre un cours magistral

Plusieurs raisons président à ce choix qui n'est pas une solution pragmatique dans un contexte contraint. D'abord, la formation a tendance à mettre en avant les situations-problèmes et les stagiaires pensent souvent (en creux) que c'est la seule façon d'enseigner. Or

cela n'est pertinent ni du point de vue des mathématiques (par exemple pour les conventions), ni du point de vue du travail d'un enseignant débutant. Adopter en formation une posture magistrale assumée est une façon de montrer qu'ils peuvent eux aussi assumer une telle posture. Ensuite, la thématique de « fractions-décimaux » se prête particulièrement bien à cet enseignement qui requiert justement des changements de postures de l'enseignant : d'abord une situation problème pour montrer l'insuffisance des nombres entiers, puis une posture magistrale pour l'introduction du signe fractionnaire. Par ailleurs, il demande la mise en place d'un processus d'institutionnalisation permettant un tissage fin et progressif entre actions de pliage – report et construction du sens de l'écriture fractionnaire. Or nous savons que ce processus est toujours délicat à gérer (Butlen & al., 2012). À cela s'ajoute des caractéristiques mathématiques de la notion qui rendent les stagiaires peu à l'aise avec cet enseignement : la fraction est souvent perçue comme un nombre inférieur à 1 ; la différence entre l'écriture fractionnaire et le nombre rationnel ou décimal est floue (par exemple 2 n'est pas perçue comme un nombre rationnel ni décimal) ; les stagiaires perçoivent la fraction comme une division...

La formation sur fractions-décimaux prend donc la forme d'une intervention magistrale d'une heure vingt, avec un groupe de 26 étudiants, entrecoupée d'échanges avec les stagiaires prévus (par exemple pour qu'ils explicitent les difficultés de leurs élèves sur les fractions et décimaux) ou provoqués par des questions ou réactions de stagiaires (par exemple « on ne peut pas faire ça avec nos élèves c'est trop difficile ») et de moments de mise en activité des stagiaires (résolution d'exercices du Cap Maths CM1, recherche des procédures des élèves ; formulation des connaissance aux élèves).

Après un travail sur la signification du signe fractionnaire pour un élève de l'école élémentaire et une mise en commun des difficultés perçues par les stagiaires chez leurs élèves concernant les fractions et les nombres décimaux, la progression du manuel Cap Maths est commentée et analysée. La ressource est présentée comme une ressource sur laquelle les stagiaires peuvent s'appuyer. Les choix de stratégies d'enseignement (situation problème ou présentation magistrale) et de variables didactiques qui n'apparaissent pas dans le livre du maitre sont expliqués et justifiés. En particulier, nous insistons sur le fait que l'écriture fractionnaire et l'écriture avec une virgule relèvent de conventions que les élèves ne peuvent pas deviner et que, pour cette raison, adopter une posture magistrale est pertinent et permet une présentation rapide qui laisse ensuite aux élèves du temps pour s'approprier le codage dans des exercices d'entrainement. Les procédures attendues font l'objet d'échanges ; les stagiaires sont mis en situation de chercher quelques exercices destinés aux élèves pour leur permettre d'imaginer leurs procédures et surtout de s'approprier le sens de la fraction comme pliage et report d'une bande unité ; une attention particulière est portée à la façon dont on dit et écrit les fractions aux élèves (on écrit avec une barre de fraction verticale, on ne dit pas « 1 sur 8 » mais « un huitième »…), aux savoirs en jeu dans chacune des séances et à la façon dont on peut les formuler et en garder trace (affiche, cahier d'élèves).

IV. ANALYSE DE DEUX PROBLEMES AUXQUELS EST CONFRONTÉE LA STAGIAIRE

La séance analysée est la seconde séance sur les fractions ; il s'agit d'expliquer l'écriture fractionnaire aux élèves et de leur permettre de se l'approprier en codant les longueurs de bande de papier utilisées dans la séance 1. Nous allons nous intéresser ici à deux problèmes que rencontre la stagiaire.

Le premier est en rapport avec une modification du déroulement prévu qui a dû apparaître mineure et justifiée à la stagiaire mais qui s'avère finalement très problématique pour la suite

de la séance. Le déroulement prévoit une explication par l'enseignante de l'écriture fractionnaire à partir de ¾[2] puis l'utilisation de cette écriture pour coder les longueurs des bandes de papier de la séance 1. Mais la stagiaire choisit de travailler à partir de la fraction ½ et demande à un élève de venir montrer comment il l'écrit. Nous verrons à quel problème cette modification de projet correspond.

Le second problème découle du premier et correspond aussi à une modification du projet initial : après une « explication » de l'écriture fractionnaire la stagiaire diffère le moment de mise au travail individuel des élèves et demande à une élève de donner une fraction correspondant à l'unité.

1. *Pourquoi la stagiaire demande- t-elle à Ellie de donner l'écriture de « moitié » au lieu d'expliquer elle-même ¾ ?*

Le projet de la stagiaire est de prendre la responsabilité d'expliquer le sens de l'écriture fractionnaire, elle l'indique clairement aux élèves (début de l'épisode 2a : « je vais vous donner une manière d'écrire parce que vous ne pouvez pas la deviner. On va l'expliciter et après on va faire un petit exercice avec la feuille que vous avez retrouvée. »). Elle a prévu de le faire en utilisant la fraction 3/4 conformément à ce que propose le manuel Cap Math. Pourtant après elle demande finalement : « Quand on parle de la moitié d'une unité (*elle note " une moitié ")* y'en a aussi qui ont dit que c'était un demi (*elle note " un demi ").* Est-ce que vous êtes d'accord avec moi ? Vous connaissez cette expression un demi ? Et en mathématiques est-ce que quelqu'un connaît l'écriture mathématique ? » Comment peut-on expliquer cette évolution de projet ?

Considérons la situation comme un problème professionnel « expliquer l'écriture fractionnaire à des élèves de CM1 ». Compte-tenu de la formation reçue et de ce qui s'est passé précédemment dans la séance (épisode 2a), et d'après ce qu'indique la stagiaire en entretien on peut considérer que les données et conditions que la stagiaire a en tête sont :

Données : (d1) les élèves savent ce que représente la moitié ou un demi dans le registre du pliage-report d'une bande unité mais confondent tiers et quarts (épisode 1b) dans ce même registre ; (d2) certains élèves savent des choses, en particulier Ellie qui a utilisé la notation 1/2 lors de la séance 1 ; (d3) beaucoup d'élèves de la classe ont des difficultés importantes (dans l'entretien avant la séance la stagiaire évoque ces difficultés) ; (d4) les élèves s'agitent facilement.

Conditions : (c1) : les élèves ne peuvent pas deviner le sens de l'écriture car c'est une convention ; (c2) l'écriture fractionnaire doit être introduite en lien avec les actions de pliage et report (formation mathématique et livre du maître) ; (c3) l'explication proposée doit être comprise de tous ; (c4) il faut s'appuyer autant que possible sur ce que savent les élèves (ils sont ainsi acteurs de leur apprentissage).

Commençons par essayer de comprendre pourquoi, en situation, avec ces données et ces conditions, la stagiaire décide de travailler sur ½ plutôt que ¾. Tout se passe comme si, consciente des difficultés de ses élèves en général (d3) et de leurs difficultés particulières avec les quarts (d1) elle estimait que travailler sur un demi plutôt que ¾ serait plus accessible pour un plus grand nombre d'élèves (c3) car, alors le travail serait ancré dans ce qu'ils savent (c4). Et pourquoi fait-elle intervenir Ellie ? Elle sait qu'Ellie a utilisé l'écriture ½ lors de la séance précédente (d2) alors lorsqu'il lève la main elle l'interroge. Cela permet en particulier de

[2] mon traitement de texte résiste à l'écriture fractionnaire avec une barre horizontale, c'est pourquoi toutes les fractions qui figurent dans ce texte sont avec une barre oblique mais lors de la formation et dans la classe elles sont écrites avec une barre horizontale.

s'appuyer sur ce que savent les élèves (c4) et, éventuellement évite une situation d'écoute longue propice à l'agitation (d4).

Pour ce qui concerne ce moment de la séance, on voit que la décision de la stagiaire est d'abord organisée par des raisons d'ordre pédagogique non spécifiques du contenu (c4), les raisons mathématiques (c1) ayant une priorité seconde. Dans la construction du problème une donnée de l'ordre des connaissances des élèves et de l'apprentissage du sujet n'est pas prise en compte : ce n'est pas parce que Ellie a utilisé l'écriture fractionnaire correcte pour coder la longueur de sa bande qu'il sait ce que signifie cette expression dans le registre des pliages-report et encore moins qu'il saura l'expliquer. En formation nous avons bien précisé les raisons pour lesquelles l'enseignant doit expliquer l'écriture fractionnaire sans expliciter cet élément. Ainsi les connaissances de la stagiaire n'apparaissent pas suffisantes pour qu'elle mesure l'incertitude dans laquelle elle s'engouffre. Bien sûr ce n'est pas parce qu'Ellie est venu écrire la fraction qu'il est obligé de l'expliquer. Mais, une fois au tableau, l'élève écrit non seulement ½ mais aussi 2/4 … et la stagiaire, surprise de cette proposition, va essayer de montrer leur équivalence dans le registre des pliages-reports de la bande unité. Elle perd alors de vue son objectif et elle donne l'explication de la moitié dans le registre des pliages-reports de la bande unité et non celle de l'écriture fractionnaire ½ : « la moitié ça veut dire qu'on a plié notre bande unité en deux parts égales et qu'on a pris que … une seule », en montrant sur la bande unité mais sans montrer le 1 et le 2 de la fraction.

Par ailleurs, le choix de la fraction ½ au lieu de ¾ n'est pas pertinent mais la stagiaire ne le perçoit pas. En effet, d'abord, ½ peut se lire « un demi » ou « une moitié » et dans les deux cas, il n'y a pas de congruence entre le registre du langage naturel et le registre des écritures fractionnaires (contrairement à ¾ où on « entend » le 3 et le 4), ce qui peut nuire à la compréhension du symbolisme. Ni l'ouvrage, ni la formation n'avait explicité cet élément qui relève des connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement.

2. *Pourquoi la stagiaire demande t-elle à Lise de venir écrire 1 comme une fraction au lieu de mettre les élèves en activité individuelle de codage ?*

Suite à cet épisode, la stagiaire a l'impression d'avoir donné l'explication de l'écriture fractionnaire. Elle passe donc à la partie « exercices » de la séance mais au lieu de demander aux élèves de coder individuellement les mesures des bandes de papier utilisées dans la séance 1, elle interroge les élèves sur la façon dont on peut écrire une unité avec des quarts et des demis. Elle invite Lise, une bonne élève, à venir au tableau. L'élève propose 4/1. Cette proposition étonne beaucoup la stagiaire :

> Stagiaire : tu m'as mis quoi ? une unité c'est quatre sur un ? combien j'ai de moitiés dans mon unité *en montrant la bande unité* Combien j'ai de moitiés ? Lise : 2 Stagiaire : donc une unité c'est ? Lise : deux sur un. Stagiaire : Le deux qui est en dessous *en montrant la fraction* ½ le deux qui est ici ça signifie que j'ai coupé la bande en deux parts égales et le 1 ça signifie que je n'ai pris qu'une seule partie de ma bande. J'ai pris que un des deux. Le deux sur deux ça veut dire que j'ai pris mes deux morceaux, je l'ai coupée deux et j'ai pris mes deux morceaux, d'accord ? Donc ça fait bien un.

Cet épisode n'était pas prévu dans le déroulement de la séance. La stagiaire l'ajoute car elle perçoit que les élèves n'ont pas tous compris le sens de l'écriture fractionnaire et se demande comment leur permettre de comprendre cette écriture. Ainsi, cet épisode est la réponse au problème « beaucoup d'élèves n'ont pas compris, comment les aider à comprendre ? » que nous reconstruisons ainsi du point de vue de la stagiaire :

Données : (d1) les élèves savent ce que représente la moitié ou un demi dans le registre du pliage-report d'une bande unité mais confondent tiers et quarts (épisode 1b) dans ce même registre ; (d2) certains élèves savent des choses, en particulier Ellie qui a utilisé la notation 1/2

lors de la séance 1 ; (d3) certains élèves ont compris le sens de l'écriture fractionnaire mais pas tous ; (d4) Ellie a déjà été interrogé ; (d5) beaucoup d'élèves de la classe ont des difficultés importantes (dans l'entretien avant la séance la stagiaire évoque ces difficultés) ; (d6) les élèves s'agitent facilement ; (d7) ½ a déjà été codé ; (d8) ¼ ressemble beaucoup à ½ ; (d9) les élèves ne connaissent probablement pas le mot « huitième » (formation)

Conditions : (c1) : les élèves ne peuvent pas deviner le sens de l'écriture car c'est une convention ; (c2) l'écriture fractionnaire doit être introduite en lien avec les actions de pliage et report (formation et livre du maître) ; (c3) l'explication proposée doit être comprise de tous ; (c4) il faut s'appuyer autant que possible sur ce que savent les élèves (ils sont ainsi acteurs de leur apprentissage) ; (c5) on ne peut pas interroger toujours les mêmes élèves ; (c6) dans l'enseignement des fractions on travaille d'abord sur des fractions dont le dénominateur est un multiple de 2 car plier en 2 est facile (par rapport à plier en 3) (formation)

Pourquoi la stagiaire choisit-elle de coder 1 avec des quarts et des demis ? On peut penser que les données (d7) à (d9) associées à (c6) conduisent à ce choix. Mais ses connaissances des réactions des élèves sur le sujet ne sont pas assez étendues pour qu'elle envisage les difficultés que ce choix génère (pas abordé en formation et pas précisé dans le livre du maître).

Là encore, la solution choisie consiste à faire intervenir une élève plutôt que de prendre la responsabilité de donner une nouvelle explication et, comme Ellie qui est un autre bon élève a déjà été interrogé, elle demande à Lise. Comme dans le premier problème, dans la décision de la stagiaire, les conditions pédagogiques (c4) et (c5) priment sur les conditions mathématiques (c1). En effet, la stagiaire aurait pu tout simplement « redonner » elle même l'explication.

Face à la réponse déconcertante de Lise, la stagiaire finit donner elle-même l'explication. Mais ce choix apparait alors comme un choix par défaut : ne comprenant pas l'erreur de Lise, réalisant que même de bons élèves n'ont pas compris, elle « redonne » l'explication. Dix-sept minutes se sont écoulées depuis le début de la séance !

V. CONCLUSION

L'analyse de ces deux problèmes n'épuise pas l'ensemble des problèmes auxquels est confrontée la stagiaire au cours de cette séance. On perçoit en particulier dans le deuxième cas des difficultés de compréhension des erreurs des élèves pour lesquels des connaissances des réactions des élèves sur le sujet et de l'apprentissage des fractions ne semblent pas disponibles.

Cette étude de cas traite de l'effet de la formation et de l'effet des pratiques à très court termes, elle ne dit rien des pratiques de la stagiaire et de apprentissages des élèves à long terme. Elle met cependant en évidence, d'abord, la difficulté pour la stagiaire à prendre une posture d'enseignante. Elle montre aussi qu'elle peine à identifier la différence importante entre l'explication qu'elle donne de ½ et l'explication prévue. Des connaissances mathématiques fines et spécifiques de l'enseignement sont en jeu à ce niveau (registres de représentation sémiotique) ; elles ont été abordées en cours mais trop peu pour qu'elles permettent une vigilance didactique dans le cours de l'action. On peut penser les évènements contingents de la classe – la proposition de ½ et 2/4 par Ellie en particulier – n'aident pas à cette mobilisation. Ensuite, pour les deux problèmes étudiés, alors qu'il s'agit de faire comprendre des mathématiques aux élèves, dans la tension entre une logique du savoir et une logique de l'élève au centre, pour cette stagiaire, la logique de l'élève au centre prime. Ces résultats sont à rapprocher des travaux de Butlen et Pézard (Butlen & al., 2012, Pézard, 2010) concernant la peu de vigilance didactique des PE. Ils sont singuliers dans la mesure où ils

concernent le processus d'institutionnalisation hors situation-problème. Autrement dit cette étude de cas montre que ce n'est pas seulement le tissage de savoirs à partir des productions des élèves qui est difficile mais simplement la prise de responsabilité par rapport au savoir, la posture même d'enseignant. Ainsi ces résultats questionnent la formation et les conditions dans lesquelles elle se réalise. En effet, les connaissances mathématiques et spécifiques à l'enseignement (Ball et al., 2008) sont au cœur de la formation reçue par la stagiaire et travaillées en références à des problématiques professionnelles. Comment permettre aux PE qui sont, rappelons-le, à 80% non scientifiques, d'assumer pleinement leur rôle par rapport au savoir que les élèves doivent apprendre, en relation avec une situation-problème ou pas ? Nous l'avons vu, l'effet cours magistral ne suffit pas à infléchir les décisions prises dans l'instant. Il est toutefois important de noter que cet enseignement a été réalisé avant que les stagiaires enseignent les fractions dans leur classe, et donc, d'une certaine façon avant que cet enseignement ne fasse problème pour eux. Dans un autre groupe, le même cours sur les fractions effectué après que les stagiaires aient commencé à enseigner les fractions a donné lieu à un nombre très important de questions relatives du type « comment faire si… ? » « comment faire quand … ? », en appui sur les procédures des élèves et les difficultés d'apprentissage observées par les stagiaires dans leurs classes. On peut donc s'interroger sur l'importance de la temporalité formation mathématique – « expérience » en classe. Et, sans aller trop hâtivement vers une solution, on peut penser *a minima* qu'une formation plus longue permettrait de travailler, précisément, pour chaque notion au programme, les connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement et les connaissances des réactions des élèves sur le sujet, en articulation avec des problèmes professionnels rencontrés par les stagiaires dans leur classe, en particulier ceux liés à la gestion de la contingence. Former à l'analyse de problèmes professionnels avec le cadre de la problématisation est aussi, peut-être, une piste à explorer. Mais il nous semble essentiel d'avoir une vision large de la formation. En effet, ces analyses posent la question de la cohérence entre la formation (mathématique) disciplinaire et les autres formations dispensées aux stagiaires PE. Ces questions sont cruciales car ce type de pratique limite fortement l'activité mathématique des élèves et nourrit, à termes, la difficulté scolaire.

REFERENCES

Ball D., Thames M. H., & Phelps G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of teacher education 59*(5), 389-407.

Ball D. (2017). Uncovering the special mathematical work of teaching. In *Proceedings of the 13th ICME* (Kaiser), 11-34

Briand J. (2000). Trier en petite section. Activité rituelle ou solution d'un problème ? Construire une situation fondamentale du tri. *Grand N 65*, 7-14.

Butlen D., Pézard M. & Masselot P. (2012). *Professeurs des écoles débutants en ZEP : quelles pratiques ? Quelle formation ?* Grenoble : la Pensée sauvage.

Charnay R., Conmbier G., & Dussuc M.-P. (2003). *Cap Maths CM1*. Hatier.

Clivaz S. (2014). *Des mathématiques pour enseigner ?* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Duval R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine : registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.

Fabre M. (2006). Analyse des pratiques et problématisation. *Recherche & formation 51*, 135-145.

Fabre M., & Orange C. (1997). Construction des problèmes et franchissements d'obstacles. *ASTER, 24*, 37-57.

Houdement C., & Peltier M. L. (2001). Aire de formation. In *Cahier du formateur n°5, Copirelem*.

Pézard M. (2010). Installer la paix scolaire, exercer une vigilance didactique. *Recherche en Didactique des Mathématiques 30*(2), 197-261

Peltier M.-L. (2000). « Le napperon ». Un problème pour travailler sur la symétrie axiale. *Grand N 68*, 17-27.

Peltier M.-L., Briand J., Ngono B., & Vergnes D. (2009). *EuroMaths CM1*. Hatier.

Robert A., & Rogalski J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Canadian Journal of Sciences, Mathematics and Technologies Education 2*(4), 505-528.

LA CONNAISSANCE DES FUTURS ENSEIGNANTS DE MATHEMATIQUES : UNE ETUDE PAR L'APPROCHE INTERDISCIPLINAIRE. LE CAS DE LA NOTION D'INTEGRALE

LÊ [*] Thi-Hoài-Châu – NGÔ [**] Minh-Đức

Résumé – L'interdisciplinarité dans l'enseignement des mathématiques est considérée comme une nécessité pour donner du sens aux apprentissages des élèves. Les difficultés observées chez les enseignants de mathématiques dans la mise en œuvre de pratiques suivant cette approche sont à l'origine de nos questions sur la formation. Dans cette communication, nous essaierons de mettre en évidence des éléments à introduire dans la formation. La notion d'intégrale sera utilisée ici comme exemple.

Mots-clefs : interdisciplinarité, enseignants, formation, physique, intégrale.

Abstract – Interdisciplinarity in mathematics education is considered a necessity to make sense of student learning. The difficulties observed in mathematics teachers in practice following this approach are the origin of our questions about training. In this paper, we will try to highlight elements to introduce into the training. The concept of integral will be used here as an example.

Keywords: interdisciplinary, teachers, training, physics, integral.

I. INTRODUCTION

Certains travaux de recherches (par exemple Bautier et Rochex, 1998) ont insisté sur les difficultés éprouvées par les élèves de l'enseignement secondaire pour donner du sens aux savoirs qui leur sont enseignés dans le cadre des disciplines scolaires. La distance entre les savoirs scolaires "segmentés" et le "monde réel" non disciplinaire, fait de relations, de complexité et de globalité, a souvent été soulignée. De nouveaux types d'approches, qui rompent avec les logiques disciplinaires, ont été développés dans plusieurs pays. Parmi ces approches, l'interdisciplinarité est considérée depuis quelques dizaines d'années comme l'une des solutions pour donner du sens aux apprentissages des élèves. Ceci nous semble pertinent pour l'enseignement des mathématiques, science dont plusieurs branches ont émergé de problèmes extra-mathématiques.

Comment la pratique d'enseignement répond-elle à cette volonté institutionnelle ? Nos recherches portant sur l'observation en classe au niveau secondaire au Viêt-Nam montrent que les enseignants observés ont des difficultés dans la conception des situations d'enseignement qui permettent leurs élèves de reconnaître le rôle d'outil des mathématiques dans d'autres sciences. En tant que formateurs, nous nous demandons donc comment est prise en compte l'interdisciplinarité par la formation des enseignants de mathématiques ? Dans cette communication nous choisissons la notion d'intégrale pour étudier ce problème. Le résultat obtenu dégagera pour nous des points à revoir sur le dispositif et la stratégie de formation initiale. Remarquons qu'il ne s'agit pas pour nous de proposer une formation à un enseignement interdisciplinaire. Notre objectif est d'aller vers une formation qui apporte aux enseignants de mathématiques des connaissances utiles pour concevoir des situations d'enseignement prenant en compte l'interdisciplinarité dans le but de donner du sens au savoir à enseigner.

La notion d'intégrale donne aux enseignants des mathématiques une bonne occasion pour réaliser l'interdisciplinarité dans la pratique professionnelle. Dans une approche

[*] Université pédagogique de Hochiminh ville – Viêt-Nam – chaulth@hcmup.edu.vn
[**] Université pédagogique de Hochiminh ville – Viêt-Nam - k22ngominhduc@gmail.com

interdisciplinaire, nos premières questions qui se posent sur la notion d'intégrale sont les suivantes : dans la discipline d'enseignement "sciences physiques" enseignée au lycée, quels sont les types de tâches dont la résolution fait, de façon explicite ou implicite, intervenir l'intégrale ? Et que doivent connaître sur le plan mathématique les étudiants pour les résoudre ?

Le choix de la physique est suggéré par notre étude épistémologique sur la genèse de la notion d'intégrale (LÊ Thi-Hoài-Châu, 2004), d'une part, et par l'analyse institutionnelle de l'enseignement de physique aux lycées vietnamiens (NGÔ Minh-Duc, 2017), d'autre part.

Concernant la première question, l'analyse institutionnelle (cf. NGÔ Minh-Duc, 2017) portant sur l'étude du programme et des manuels de science physique enseignée aux lycées a mise en évidence les types de tâches suivants :

***T1*:** Etant donnée la vitesse d'un point matériel en fonction du temps, trouver la distance parcourue dans un temps donné.

***T2*:** Etant donnée l'accélération d'un point matériel en fonction du temps, trouver le changement de la vitesse.

***T3*:** Calculer le travail effectué par une force variable.

A propos de la deuxième question, notre étude épistémologique montre l'importance de la formule Newton – Leibniz $f(b) - f(a) = \int_a^b f'^{(x)} dx$ qui présente le lien entre les notions de dérivée et d'intégrale. Dans les manuels de mathématiques utilisés au niveau secondaire du Viêt-Nam, la dérivée est présentée explicitement comme l'outil nécessaire pour la résolution de plusieurs types de problèmes de physique. Mais ce n'est pas le cas de la notion d'intégrale. Dans ce contexte, un professeur de mathématiques peut exploiter ce lien pour trouver certains problèmes de physique dont l'intégrale est nécessaire. De plus, comme le graphique est souvent présent dans beaucoup de problèmes physiques, nous nous intéressons au comportement des futurs enseignants lorsqu'ils doivent trouver l'intégrale d'une fonction donnée uniquement par sa représentation graphique.

II. CONTEXTE DE RECHERCHE

Selon les programmes en vigueur dans les lycées vietnamiens, ces trois types de tâches sont tous étudiés en physique avant l'introduction de l'intégrale en mathématiques. Plus concrètement, ils apparaissent dans le programme de physique de la classe 10 (qui correspond à la seconde en France), tandis que l'intégrale est enseignée en classe 12 (qui correspond à la terminale). Avec cette contrainte, le manuel de physique ne peut pas utiliser explicitement l'intégrale.

Les trois types de tâches sont limités d'abord au cas où la vitesse pour *T1*, l'accélération pour *T2*, la force pour *T3* sont constantes. Les formules physiques sont construites en utilisant l'aire d'un rectangle. Ensuite, le manuel étudie le cas où ces quantités physiques sont uniformément variées. Pour introduire les formules correspondantes, le manuel raisonne sur la surface limitée par le graphique, de la vitesse par exemple, l'axe orienté de *t*, les droites $t = t_0$ et $t = t_1$. Cette surface est un trapèze. On divise l'intervalle $[t_0 ; t_1]$ en *n* petites parties pour pouvoir considérer que la vitesse est constante sur chaque partie. On dit que la distance est une approximation de la somme des distances trouvée sur chaque partie (en utilisant la formule vient d'être introduite). L'élève doit admettre enfin que la distance dans l'intervalle $[t_0 ; t_1]$ est l'aire du trapèze.

Le manuel ne peut pas démontrer ces formules parce que la limite et l'intégrale ne sont pas encore étudiées en mathématiques à ce niveau. Or, lors de l'introduction de l'intégrale en classe 12 (cf. Đoàn Quỳnh et Nguyễn Huy Đoan, 2012), le manuel de mathématiques ne les démontrera pas, pas plus qu'il n'étudiera ces trois types de tâches dans les cas où les quantités physiques concernées (vitesse, l'accélération, force) sont non-uniformément variées. On constate donc l'existence d'une rupture entre les manuels de physique et de mathématiques utilisés au lycée.

Comment relier ces deux domaines scientifiques en formation des enseignants de mathématiques en général ? Comment faire pour que la formation aide les étudiants à reconnaître l'usage multiple de la notion d'intégrale dans l'enseignement de physique au lycée en particulier ? Cela nous semble d'autant plus important que l'absence de connaissance de ces usages est à nos yeux l'origine des difficultés relevées de la pratique professionnelle.

Les étudiants impliqués par notre étude sont en troisième année du curriculum de formation de l'université pédagogique portant sur 4 ans, qui vise à former de futurs professeurs de mathématiques qui enseigneront au niveau secondaire.

Il nous faut préciser qu'au Viêt-Nam la formation des professeurs secondaires est confiée aux universités pédagogiques. Le temps de formation universitaire est de 4 ans. Chaque étudiant est formé pour l'enseignement d'une seule discipline. Par exemple, dans notre université (Université pédagogique de Hochiminh ville), il y a autant de départements que disciplines : les professeurs de mathématiques, de physique, de biologie, de chimie, de géographie, d'histoire, etc. sont formés dans différents départements sans relations entre eux.

Le programme de formation des professeurs de mathématiques comporte 3 parties avec 125 unités au total. La première (27 unités) est consacrée à la philosophie, à l'informatique et à une langue étrangère (partie commune pour tous les départements). La deuxième (60 unités) porte sur les mathématiques pures. La dernière (38 unités) est une formation en sciences de l'éducation, psychologie et méthodologie de l'enseignement. Cette partie comprend deux stages (de 6 semaines en troisième année et puis 8 en quatrième) qui correspondent à 10 unités. Pendant les trois premières années, les étudiants sont formés en mathématiques, en psychologie et en sciences de l'éducation. Ils étudient la didactique en quatrième année, avant de suivre le deuxième stage dans un lycée.

III. METHODOLOGIE DE RECHERCHE

Nous avons proposé trois problèmes de physique à 32 étudiants de l'université pédagogique de Hochiminh ville. Chaque problème appartient à l'un des trois types de tâches précisés précédemment. Nous avons joué sur les valeurs de différentes variables didactiques lors de la conception des problèmes pour étudier le comportement des étudiants confrontés à la résolution de tâches en physique. Comment réagissent-ils lors de la nécessaire mobilisation du lien entre intégrale, surface et quantités physiques ?

IV. ANALYSE A PRIORI DES PROBLEMES

1. *Problème 1*

Un point matériel se déplace sur une droite. La vitesse qui varie en fonction du temps t ($0 \leq t \leq 24$, indiqué en secondes), est donnée par le graphique (figure 1).

Calculer la distance parcourue par ce point matériel dans les 24 premières secondes.

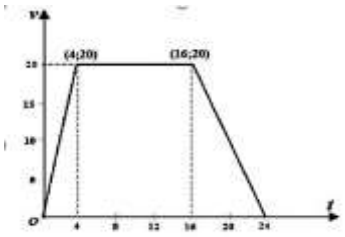


Figure 1

Stratégies possibles

Ce problème appartient au type de tâche *T1*.

En physique, la distance est calculée par la formule $S = \int_a^b v(t)dt$. Mathématiquement, il y a deux stratégies permettant de trouver $\int_a^b v(t)dt$, l'une est de nature géométrique et l'autre analytique. Pour la première, il s'agit d'utiliser des connaissances acquises en géométrie afin de chercher l'aire de la surface "en dessous" du graphique (qui est limitée par le graphique de $v(t)$, les droites $t = a$, $t = b$ et l'axe des abscisses). Pour la deuxième, on cherche l'expression exprimant $v(t)$ et on calcule l'intégrale avec la formule Newton-Leibniz. Nous les appelons respectivement "aire" et "primitive". De plus, il existe une troisième stratégie, appelée par nous la stratégie physique, pour laquelle on utilise les formules concernant des mouvements rectilignes uniformément variés.

• *Stratégie "aire"* (S_A) :

Ici, on calcule l'aire du trapèze dont les bases mesurent 24 et 12, la hauteur 20.

• *Stratégie "primitive"* (S_{Pr}) :

Trouver la fonction exprimant la vitesse en fonction du temps puis calculer l'intégrale de la vitesse.

Dans ce cas, la vitesse varie différemment suivant les trois intervalles de temps. Il faut donc trouver trois expressions. Pourtant, le fait que le graphique se compose de trois segments dont les coordonnés des deux extrémités sont données facilite la recherche des expressions. La solution est : $S = \int_0^4 5tdt + \int_4^{16} 20tdt + \int_{16}^{20}(-\frac{5}{2}t + 60)dt = \cdots$

• *Stratégie "physique"* (S_{Ph}) :

Le problème concerne des mouvements rectilignes uniformément variés : l'accélération constante est donnée par la formule : $a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$. La distance se trouve par l'utilisation de l'une des deux formules suivantes :

$S = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$ (1)

$S = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$ (2)

Dans le cas d'un mouvement uniforme la distance est : $S = vt$.

Ces trois formules sont étudiées en classe de dixième (cf, Nguyễn Thế Khôi et Phạm Quý Tu, 2012).

Dans le contexte du problème posé, la vitesse est donnée ici par le graphique et la surface "en dessous" est un trapèze dont l'aire peut être trouvée facilement. La stratégie "aire" est donc optimale. Les deux stratégies restantes ne sont pas difficiles non plus (parce que le graphique se compose des segments dont les cordonnées des extrémités sont données), mais plus compliquées par rapport à la première.

2. Problème 2

L'accélération en fonction du temps de deux points matériels P1 et P2 est donnée par la figure ci-dessous :

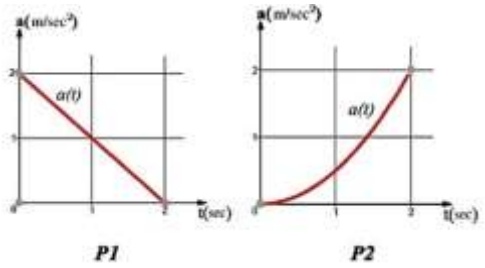


Figure 2

a) *Notons que l'accélération de P1 varie suivant la loi :* $a(t) = -t + 2$. *Calculer le changement de sa vitesse du moment de t = 0 au moment de t = 2.*

b) *Quel point matériel a le plus grand changement de vitesse dans l'intervalle de temps [0;2]? Expliquer.*

Stratégies possibles

La recherche de la réponse à la question *a* mène au type de tâche *T2* (étant donnée l'accélération d'un point matériel en fonction du temps, trouver le changement de la vitesse). Dans le cas de la question 2b, comme l'accélération de *P2* est non-uniformément variée, il est impossible d'utiliser les formules physiques introduites en classe de 10 où seulement des mouvements uniformément variés sont étudiés. Ainsi, on est obligé de calculer l'intégrale par la primitive ou par l'aire.

• *Stratégie "primitive"* (S_{Pr}) :

Utiliser la formule $\Delta f = f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)dx$. Dans le contexte de ce problème, elle devient $\Delta v = \int_a^b a(t)dt$. Cette stratégie ne marche que dans le cas où l'expression de l'accélération est donnée ou peut être trouvée. Ainsi, cette stratégie permet de trouver facilement le changement de la vitesse de *P1*. Mais ce n'est pas le cas de *P2*. Plus exactement, la stratégie S_{Pr} ne donne qu'une valeur approximative du changement de la vitesse de *P2*.

• *Stratégie "aire"* (S_A) :

Dans le cas de la question *a*, le graphique de l'accélération est aussi donné. Comme la surface "en dessous" est un triangle rectangle, on peut trouver facilement la réponse par la stratégie S_A.

Pour la question *b*, il est difficile de trouver une expression exprimant approximativement la fonction de la vitesse, la stratégie S_A est donc optimale : il s'agit seulement de comparer deux aires qu'on peut évaluer facilement à l'œil nu et puis raisonner avec la figure.

3. Problème 3

Un objet se déplace sur une droite, de la position s = 0 m à s = 3 m, avec une force F.

a) *Supposons que F constante est la valeur de 5N et a le même sens que celui du déplacement. Calculer le travail effectué par cette force pour tirer l'objet de la position S = 0 m à la position S = 3 m.*

b) *En réalité, la force obéit à la relation* $F(s) = 5 - \frac{1}{30}s^2$ *(figure 3), avec F en Newton et s en seconde*.

b1- *Calculer approximativement le travail de la force*.

b2- *Proposer une autre méthode mathématique qui permet de calculer le travail de la force. Expliquer.*

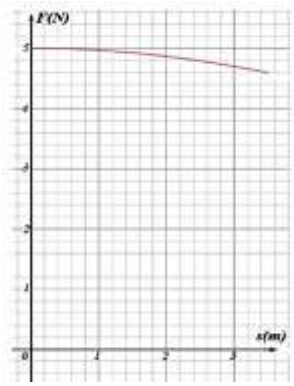


Figure 3

Stratégies possibles :

• *Stratégie* "*physique*" *(S_{Ph})* :

C'est une tâche de type *T3*. Dans le contexte de la question *a*, *F* est constante. Pour calculer le travail *A* effectué par la force *F*, les étudiants connaissent déjà la formule $A = F.s$ introduite en physique. La stratégie S_{Ph} ne marche plus dans le cas de *b* où *F* varie.

Pour la question *b1*, il s'agit de donner une valeur approximative, il est possible donc d'utiliser les deux stratégies suivantes.

• *Stratégie "approché" (S_{App})* :

Diviser *s* en *n* partie s_i $(1 \leq i \leq n)$. Sur chaque partie on peut considérer *F* comme constante, égal à F_i (déterminé sur le graphique) et peut donc trouver le travail A_i en utilisant la formule $A_i = F_i.s_i$. Le travail à trouver est la somme des A_i.

Cette stratégie peut être mobilisée par les étudiants, parce que la méthode "division *s* en partie" a été présentée par le manuel de physique (classe de 10) lors de l'étude du travail d'une force non-constante. Le fait que le graphique est mis dans un gril facilite l'usage de S_{App}.

• *Stratégie* "*aire*" S_A :

Au moment d'introduction de la méthode "division *s* en partie", le manuel précise que c'est l'aire de la surface ("en dessous" du graphique exprimant la force) qui est le travail.

Ainsi, les étudiants peuvent chercher sur la figure la valeur approchée de l'aire (en comptant les carrés ou en calculant la différence des aires de deux rectangles, grande et petite – la première déterminée par $F = 5$ et $s = 3$, la deuxième par $F = 4{,}7$ par exemple).

• *Stratégie "primitive"* S_{Pr} :

Pour la question *b2*, les étudiants peuvent relier l'aire de la surface à l'intégrale pour proposer la méthode qui utilise la formule $A = \int_0^3 F(s)ds$.

V. ANALYSE A POSTERIORI

1. Problème 1

Seulement 15,63% (5/32) d'étudiants utilisent la stratégie S_A et 9.38% (3/32) S_{Pr}.

Le reste (21/32 étudiants, correspond à 65,63%) cherche des formules en physique. Parmi eux, seulement 15/32 (46,88%) utilisent S_{Ph} et donnent la réponse exacte. Les autres ne se souviennent pas des formules et donnent des réponses erronées.

Notons que le type de tâche *T1* (étant donné la vitesse d'un point matériel en fonction du temps, trouver la distance parcourue dans un temps donné) a déjà été abordé par le manuel de mathématique de classe de 12, après l'introduction de l'intégrale. La technique introduite est "calculer l'intégrale", notée par S_{Pr}. De plus, le sens géométrique de l'intégrale (la relation entre l'intégrale et l'aire) est précisé dans l'enseignement. Or, seulement 15,63% d'étudiants utilisent S_A et 9,38% S_{Pr}.

Pour chercher à expliquer ce phénomène, nous trouvons deux raisons relevées à partir de l'analyse du rapport institutionnel.

Premièrement, il n'existe, dans l'ouvrage utilisé pour la formation des enseignants en analyse, aucun problème issu des sciences physiques : on introduit l'intégrale par la recherche de l'aire d'une surface. L'intégrale est définie par la limite de la somme de Riemann et à partir de là émerge la signification géométrique de la notion. Autrement dit, la formation en analyse n'aborde que des problèmes de mathématiques pures.

Deuxièmement, la recherche d'une fonction donnée uniquement par le graphique n'est pas un type de tâche familier dans l'enseignement des mathématiques aussi bien au niveau secondaire qu'au niveau universitaire.

2. Problème 2

Question *a* : Seulement 43,75% (14/32) utilisent l'intégrale pour chercher le changement de la vitesse. Parmi eux, 78,57% (11/14) suivent la stratégie S_{Pr} et 21,43% (3/14) S_A. Les autres essaient à réaliser des calculs en physique, mais ne réussissent pas.

Question *b* : Parmi 14 étudiants qui obtiennent la réponse exacte en calculant l'intégrale de l'accélération, il n'y a que 6 qui savent relier la relation vitesse - intégrale et celle intégrale – aire. Cela les amène à comparer deux aires. Les autres (8 étudiants) pensent que l'accélération est une fonction du second degré. Ils cherchent donc l'expression de cette fonction pour calculer l'intégrale par la primitive (stratégie S_{Pr}).

La contrainte de la question *b* est différente : l'accélération est donnée par une courbe sur laquelle il n'y a que deux points dont les cordonnées sont précisées. La stratégie S_{Pr} est donc empêchée par le choix de la variable didactique. C'est ce qui explique que 6 étudiants utilisent S_A pour la question *b*, alors qu'il n'y en a que 3 pour le cas de *a*. Or, comme nous l'avons dit, il y a quand même 8 étudiants qui essaient de chercher l'expression algébrique de l'accélération pour trouver la réponse à *b*.

3. Problème 3

Pour la question *a*, 93,75% (30/32) savent mobiliser la formule $A = F.s$ et donnent le résultat exact. Dans la question *b*, la force varie, cette formule n'est donc pas valide.

Pour *b2*, 18,75% (6/32) mobilisent la stratégie primitive S_{Pr} pour trouver la valeur exacte du travail. Or, ils ne répondent pas à la question *a*. Les autres ne donnent pas de réponse aux deux questions.

Comment explique-t-on ce phénomène ? En réalité, dans le manuel d'analyse de classe 12, est introduit explicitement le type de tâche *T3* (calculer le travail effectué par une force variable) où la force en fonction du temps est donnée par une expression. La technique est de calculer l'intégrale (stratégie S_{Pr}). Nous pouvons dire que la signification physique de l'intégrale est présentée pour le cas de *T3*. La signification géométrique de l'intégrale (l'aire de la surface en dessous) est également présentée. Pourtant, aucune activité reliant les deux significations de l'intégrale n'est proposée dans le manuel. De plus, la recherche des valeurs approchées est toujours négligée dans l'enseignement de l'analyse, aussi bien au lycée qu'à l'université pédagogique au Viêt-Nam. L'étude des fonctions données par graphique est aussi totalement absente.

VI. CONCLUSION

Notre étude montre que la plupart de nos étudiants n'arrive pas à relier les significations physique et géométrique de la notion d'intégrale, bien que, selon le programme de formation des universités pédagogiques, l'enseignement de l'analyse ait présenté :

- la définition de la dérivée au travers du problème de recherche sur la vitesse instantanée.

- la définition de l'intégrale au travers du problème de l'étude d'aire des surfaces.

- la formule Newton – Leibniz $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)dx$ qui montre le lien des deux notions. Cette formule est appelée le théorème fondamental de l'analyse.

La compréhension de ce lien est importante pour le travail de conception des situations d'enseignement du point de vue interdisciplinaire. Les trois connaissances ci-dessus sont suffisantes pour établir ce lien. Pourtant, le fait que tous les exercices proposés aux étudiants sont des problèmes de mathématique pures et les fonctions étudiées sont toujours données par une expression (jamais par son graphique) rendent ce lien complètement flou. Cette remarque a été constatée aussi par Bajracharya, R. R. (2014) dans sa recherche portant sur l'application du théorème fondamental de l'analyse dans les contextes de physique. De plus, les modules consacrés à l'étude de cinématique sont supprimés du curriculum de formation actuelle des professeurs de mathématiques. Les étudiants manquent donc les connaissances nécessaires pour pouvoir reconnaître les sens physiques des savoirs mathématiques en général, de la notion d'intégrale en particulier. Cependant, la suppression de ces modules n'est pas pour nous la raison unique de ce manque. Il s'agit que la formation en mathématiques ne prend en considération la différence entre les universités générales et pédagogiques. Les étudiants apprennent les mathématiques pour résoudre des problèmes mathématiques pures. Le rôle d'outil des mathématiques dans d'autres domaines n'est pas mis au centre de l'attention de l'enseignement. La manque des études épistémologiques des savoirs à enseigner est aussi l'un des éléments permettant d'expliquer le comportement des futurs professeurs.

Nos analyses montrent une rupture entre l'enseignement des sciences physiques et celui des mathématiques au lycée. Cette rupture est encore plus importante dans la formation en analyse des universités pédagogiques au Viêt-Nam. Combler cette rupture est donc une mission de la formation en didactique des mathématiques. Pour cela nous avons mené une recherche sur la conception d'une ingénierie didactique que nous ne n'avons pas la place de présenter dans le cadre de cette communication.

REFERENCES

Bautier E., Rochex J-Y. (1998). *L'expérience scolaire des nouveaux lycéens. Démocratisation ou massification ?* Paris. A. Colin.

Bajracharya R. R. (2014). *Student application of the fundamental theorem of calculus with graphical representations in mathematics and physics*. The University of Maine.

Đoàn Quỳnh et Nguyễn Huy Đoan (2012), *Analyse, classe 12*, Edition d'éducation du Viêt-Nam.

Lê Thi-Hoài-Châu (2004), Exploiter l'histoire des mathématiques dans l'enseignement de la notion d'intégrale. *Revue scientifique*, Université pédagogique de Hochiminh ville, N°2 (2004), pp.37-45.

Ngô Minh-Duc (2017). Recherche de la transposition didactique de la notion d'intégrale en relation à la physique dans l'enseignement en classe 12 au Viêt-Nam. In *Actes du sixième colloque international en Didactique des Mathématiques, Hochiminh vielle, Viêt-Nam, Avril 2017*, pp.103 -112.

Nguyễn Thế Khôi et Phạm Quý Tư (2012), *Physique, classe 10*, Edition d'éducation du Viêt-Nam.

SUR LA MISE EN ÉVIDENCE D'EFFETS D'UNE FORMATION COURTE SUR LES PRATIQUES D'ENSEIGNANTS AUTOUR DE LA SIMULATION EN PROBABILITÉS EN CLASSE DE TROISIÈME

MASSELIN[*] Blandine – DEROUET[**] Charlotte

Résumé – Cet article présente une étude de l'impact, sur les pratiques enseignantes, d'un extrait vidéo de classe injecté lors d'une formation continue d'enseignants de mathématiques du second degré, au travers d'un dispositif de formation de type lesson study. La trajectoire d'avatars autour d'une tâche, observée sous l'angle du modèle des Espaces de Travail Mathématique, permet de mettre en évidence certains effets sur les pratiques enseignantes autour de la simulation en probabilités en classe de troisième (élèves de 14-15 ans).

Mots-clefs : Lesson study, formation continue, pratiques enseignantes, probabilités, Espace de Travail Mathématique.

Abstract – Based on an original in-service training device (lesson study), the impact of a video extract on the trainees' practices is observed. The trajectory of avatars related to one mathematical situation is described and analyzed through the MWS model and allows us to evidence some effects of the training-course on teachers' practices on probability and simulations in grade 9 (14-15 years students).

Keywords: Lesson study, Continuous teacher training, Teacher practices, Probability, Mathematical Working Space.

INTRODUCTION

Dans cette communication, nous mettrons en évidence les influences possibles d'un dispositif de formation continue, s'appuyant sur des outils méthodologiques issus de la recherche en didactique des mathématiques, sur la pratique des enseignants. De manière plus précise, nous nous demanderons quels effets peut avoir le visionnage d'extraits vidéo de classe sur les pratiques des enseignantes formés. Nous nous limiterons par la suite à un seul extrait vidéo, sachant que plusieurs ont été visionnés lors de la formation.

Dans un premier temps, nous présenterons le dispositif spécifique de formation continue mis en place par les animateurs du groupe « Activités » de l'IREM[1] de Rouen sur le thème des probabilités, en 2016-2017. Cette formation à destination d'enseignants du second degré s'inspire, avec des adaptations, du dispositif japonais des lesson studies (Miyakawa & Winslow, 2009). Il utilise également des outils empruntés au cadre de la Double Approche Didactique et Ergonomique (Robert & Rogalski, 2002). Notre cadre théorique des Espaces de Travail Mathématiques (Kuzniak, 2011) sera ensuite détaillé, ainsi que le cadre méthodologique utilisé et développé pour mettre en évidence des effets de la formation sur la mise en place d'une séance d'enseignement. L'article illustre cette approche avec le cas d'une tâche de simulation en probabilités : le jeu du lièvre et de la tortue.

[*] LDAR, Université Paris Diderot – France – Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques – France – blandine.masselin@wanadoo.fr

[**] ESPE de Strasbourg, LISEC équipe AP2E, Université de Strasbourg – France – charlotte.derouet@espe.unistra.fr

[1] Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques.

I. DESCRIPTION DE NOTRE DISPOSITIF DE FORMATION

1. Contexte

En 2014, la recomposition du groupe « Activités » de l'IREM de Rouen a conduit ses membres à réfléchir sur les stratégies de formation. Certains d'entre eux, ayant déjà conduit des formations s'appuyant principalement sur des stratégies de formation par homologie (Houdement et Kuzniak, 1996), ont ressenti certaines limites de ce type de formation sur l'appropriation des tâches présentées par les enseignants formés (des éléments de la thèse de doctorat de la première auteure iront dans ce sens). Ceci a conduit le groupe vers la mise en place d'un nouveau dispositif de formation, inspiré des lesson studies, semblant plus adapté aux besoins des enseignants et aux contraintes temporelles de la formation continue en France. La formation s'est déroulée sur trois journées (J1, J2 et J3) et a permis de faire vivre aux formés une lesson study de façon accélérée. Le calendrier de cette formation continue, qui contient une partie à distance, est précisé en Annexe 1.

2. Une formation autour d'un problème

Le temps de la formation étant court, les formateurs-enseignants (FE) ont choisi de proposer dès J1 une tâche mathématique initiale « le jeu du lièvre et de la tortue », riche du point de vue du travail de modélisation en probabilités et fil conducteur de toute la formation, présentée ainsi :

> *Une course se passe entre un lièvre et une tortue. On dispose d'un parcours à 6 cases en ligne. On lance un dé équilibré à 6 faces. Si le 6 sort, le lièvre gagne, sinon la tortue avance d'une case. La tortue gagne quand elle arrive sur la $6^{ème}$ case.*
>
> *Qui a le plus de chances de gagner ?*

Un des intérêts de cette tâche est le travail potentiel sur le choix d'un modèle puisque deux modèles probabilistes différents peuvent émerger.

3. Les acteurs de la formation

Les personnes impliquées dans ce dispositif de formation sont de trois types : des formateurs-enseignants (FE), des chercheurs en didactique des mathématiques (CF) et les stagiaires (S). Les formateurs et chercheurs peuvent intervenir à tout moment comme « experts » dans la formation, pour apporter des compléments sur des questions didactiques ou de terrain. Les stagiaires sont divisés en deux ateliers lors de la formation.

4. Les trois boucles de notre dispositif de formation

Comme dans un dispositif de lesson study, notre dispositif s'appuie sur un enchaînement de cycles (Clerc-Georgy & Clivaz, 2016) : avec une phase d'analyse *a priori* de la tâche, de préparation d'un scénario de séance, de l'expérimentation de la séance et d'une analyse *a posteriori*. Cependant, ces cycles ne sont pas toujours pris en charge par les mêmes acteurs, ni dans le même contexte. Dans notre dispositif de formation, nous pouvons regrouper les cycles en trois boucles. La première boucle B1 correspond aux cycles ayant eu lieu préalablement au sein de l'équipe de formation (FE et CF). La deuxième boucle B2, journées J1 et J2 de formation, correspond aux cycles menés en parallèle par les deux groupes de stagiaires. Les expérimentations se font dans des classes qui ne sont pas celles des stagiaires. Enfin, la

troisième boucle B3 correspond aux cycles effectués par les stagiaires de façon individuelle dans leur propre classe, entre J2 et J3.

4.1 La boucle B1, en amont de la formation

Cette boucle, qui ne concerne que l'équipe de formation, a permis notamment de :

- stabiliser l'énoncé du problème donné en formation aux formés,

- stabiliser une grille d'analyse *a priori* de la tâche pour les stagiaires,

- relever des éléments jugés pertinents pour aider et accélérer l'analyse *a priori* de la tâche faite par les stagiaires, comme des extraits-vidéo ciblés révélant l'activité d'élèves, des brouillons d'élèves, des fichiers TICE…

- relever des difficultés ou blocages potentiels dans le travail des élèves, qui pourraient ne pas être anticipés par les stagiaires, et pour lesquels l'équipe de formation pourrait apporter un éclairage didactique.

4.2 La boucle B2, au sein de la formation

Lors de la formation, les stagiaires ont été divisés en deux ateliers pour travailler chacun indépendamment sur le problème du lièvre et de la tortue. La boucle B2 est ainsi composée de deux cycles, menés en parallèle, assez proches d'un cycle traditionnel de lesson study. Après avoir pris connaissance individuellement de la tâche, les stagiaires, travaillant en petits groupes, ont mené une analyse *a priori*, prenant appui sur une grille donnée par les formateurs. Cette grille reprend des éléments d'analyse de tâches (Robert, 1998) comme les connaissances mathématiques en jeu, les démarches possibles des élèves, les difficultés et erreurs possibles, auxquels les formateurs ont ajouté la dimension « vie quotidienne » de la situation, la place dans la progression et la dimension TICE. Dans chaque atelier, ces grilles d'analyses, une fois complétées, ont été croisées afin d'enrichir la réflexion collective autour de la tâche. La suite de J1 a été consacrée à l'élaboration d'un scénario dans chaque atelier, expérimenté par un des stagiaires en J2. Les membres de chaque atelier devaient s'accorder sur un découpage du scénario en différentes phases. Ils ont élaboré une feuille de route pour l'enseignant-expérimentateur incluant une grille d'interventions possibles, dans laquelle figurent des éléments « déclencheurs d'interventions » repérés par les stagiaires, des interventions pensées à leurs égards ainsi que les effets attendus. La liberté de choisir un artefact numérique est laissée aux stagiaires, notamment pour qu'ils questionnent leurs effets potentiels sur le déroulement de la séance.

Lors de J2, dans chaque atelier, un stagiaire mène la leçon dans une classe de troisième (grade 9), classe d'expérimentation (qui n'est pas sa propre classe), et porte ainsi le scénario collectivement conçu en J1. Les autres stagiaires observent la séance et prennent ainsi un recul sur les activités des élèves et les pratiques de l'enseignant en lien avec le scénario choisi. Deux d'entre eux observent la séance d'une manière globale, dont l'un est aussi garant du temps consacré aux différentes phases prévues en J1. Les autres stagiaires ont en charge l'observation d'un groupe de trois ou quatre d'élèves et notent les interventions de l'enseignant au sein de ce groupe.

La séance est ensuite analysée par les stagiaires à l'aide des productions des élèves et des traces écrites des observateurs. Un observateur « global » indique phase par phase ce qu'a fait et dit l'enseignant-expérimentateur et les groupes dans lesquels ce dernier est intervenu. Chaque observateur de groupe relate alors ce qu'il a observé dans son groupe. Une analyse *a*

posteriori est menée, et au regard du déroulement en classe, des choix sont rediscutés par le collectif.

Dans la boucle B2, apparaissent des éléments méthodologiques comme une analyse *a priori* du problème, un recueil de données sur la séance réalisée et observée ainsi qu'une analyse *a posteriori*. Des éléments méthodologiques empruntés au cadre de la Double Approche Didactique et Ergonomique (Robert & Rogalski, 2002) enrichissent l'analyse *a priori* de la tâche, en s'appuyant en particulier sur des extraits vidéo issus de la boucle B1 autour d'éléments clefs.

4.3 La boucle B3, en aval de la formation

Cette boucle est constituée des expérimentations portant sur ce problème et menées par les stagiaires dans leur(s) propre(s) classe(s). Cette dernière, hors formation, permet d'appréhender les premiers effets de la formation. Des témoignages oraux sont partagés ensuite lors de J3, nous permettant d'avoir des éléments sur cette boucle B3, accompagnés parfois de productions d'élèves rapportées ou du document distribué aux élèves.

III. CADRE THEORIQUE ET METHODOLOGIE DE RECHERCHE

1. Le modèle des Espaces de Travail Mathématiques

Cette stratégie de formation spécifique et riche est attenante à une question globale de recherche sur l'impact d'une formation s'appuyant sur des pratiques enseignantes. Trop vaste pour être traitée comme telle, nous avons restreint ce questionnement à l'influence d'une formation en probabilités-statistique, avec un focus sur la simulation, et en particulier sur l'utilisation d'artefacts numériques ou symboliques dans les pratiques. Pour cela, nous utilisons le modèle des Espaces de Travail Mathématique (Kuzniak, 2011) qui permet de repérer une circulation du travail sur trois dimensions : instrumentale, sémiotique et discursive.

L'analyse du travail des élèves attendu par les enseignants et l'analyse de l'implémentation d'une séance en classe s'appuient donc sur ce modèle, noté par la suite ETM. Le modèle des ETM permet de décrire et de repérer la nature et la spécificité du travail mathématique quand des enseignants et des élèves sont effectivement engagés dans la résolution d'un problème mathématique (Kuzniak, 2011). L'ETM, qui peut être vu comme une structure d'accueil du travail mathématique, repose sur l'articulation de deux plans épistémologique et cognitif. Le plan épistémologique contient trois pôles : le référentiel théorique (incluant propriétés, théorèmes et définitions), le *representamen* (les signes) et les artefacts (logiciel, instruments de dessins ou techniques de calculs). Le plan cognitif, contient également trois composantes : les processus de visualisation, de construction et de preuve.

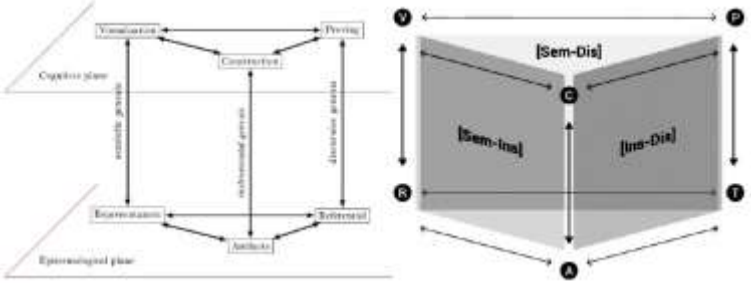


Figure 1*- Modèle des ETM (Kuzniak, 2011)*

Ce modèle permet l'étude de l'articulation entre ces deux plans épistémologique et cognitif par les trois dimensions (instrumentale, discursive et sémiotique) ainsi que l'étude des liens entre les plans verticaux ([sem-ins], [ins-dis] et [sem-dis]). Il nous semble offrir un accès aux interactions entre une tâche, un enseignant et des élèves, via les différents niveaux d'ETM : l'$ETM_{référence}$, qui est l'ETM visé par l'institution, l'ETM_{idoine} qui est l'ETM mis en place dans une classe par un enseignant dans lequel chaque élève travaille avec son $ETM_{personnel}$. L'ETM_{idoine} dépend non seulement des élèves mais aussi de l'enseignant et de la mise en œuvre de la tâche étudiée. On distinguera l'$ETM_{idoine\ choisi}$ (Derouet, 2016) qui est celui élaboré en amont par l'enseignant et l'$ETM_{idoine\ effectif}$ qui est celui mis réellement en place par ce dernier en classe. Notre étude se focalise sur ces deux ETM_{idoine}, notés ensuite ETM.

2. Méthodologie de recherche

Notre méthodologie de recherche s'appuie sur l'étude de la trajectoire d'un problème (Kuzniak *et al.*, 2013). Elle consiste à suivre une situation et les diverses transformations qu'elle a subies à travers diverses institutions. Ici, notre trajectoire incorpore des ETM de classe. Elle est, entre autres, influencée par des éléments de stratégie d'homologie, à travers des extraits vidéo et la leçon observée. Elle contient six étapes regroupées en trois boucles.

Pour cela, un outil méthodologique important est ici la notion d'avatar d'un problème. Il s'agit de l'incarnation d'un problème à un moment donné, autrement dit l'énoncé du problème ainsi que les modalités l'entourant. Aussi, pour un avatar précis, nous avons plusieurs ETM qui en dépendent, nous les dirons « associés ». La trajectoire du problème à travers ces divers avatars nous permet d'étudier les différents ETM associés. Nous considérerons par la suite des couples (avatar, ETM) produits en formation autour du problème, car ils offrent un accès à des écarts entre des éléments d'ETM_{choisi} et des $ETM_{effectif}$. L'observation de la circulation du travail autour d'une tâche dans le modèle des ETM met en lumière des blocages éventuels ou des plans privilégiés par l'enseignant. Dans B2, lors du premier jour de formation, les stagiaires sont confrontés, pendant leur analyse *a priori* de la situation, à des extraits-vidéo issus des couples (avatar, $ETM_{effectif}$) de B1 et sélectionnés en amont par les formateurs. Ces extraits présentent des circulations du travail particulières qui permettent de questionner les pratiques enseignantes et d'en prévoir des alternatives. Nous limiterons notre étude aux stagiaires d'un seul des deux ateliers.

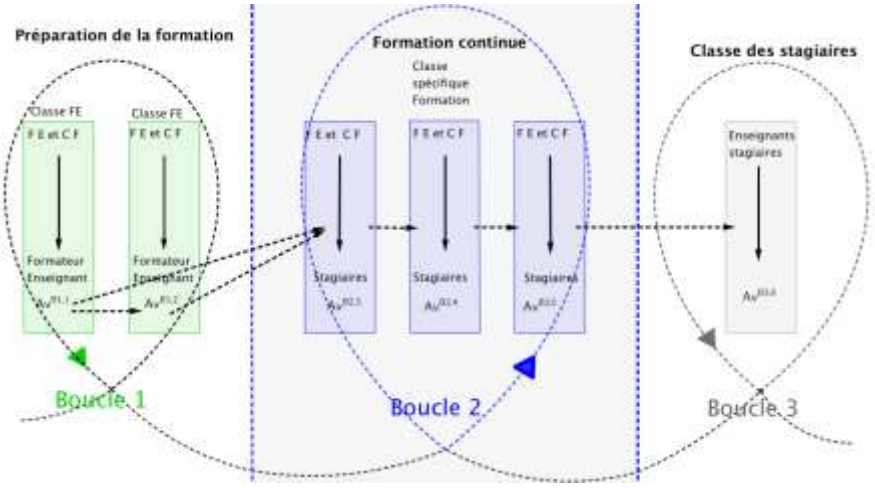


Figure 2 *–Trajectoire d'avatars dans notre dispositif de formation (Masselin, en cours)*

Le jeu du lièvre et de la tortue, plus spécifiquement étudié, peut être modélisé par différents modèles mathématiques (loi géométrique tronquée ou loi binomiale). Comme les élèves n'ont pas de connaissances spécifiques sur ces lois, il est attendu qu'une approche via la simulation soit mobilisée. Nous interrogerons la façon dont les stagiaires ont appréhendé l'approche fréquentiste dans les différents avatars successifs à travers l'usage des artefacts numériques et leur manière de considérer la dimension sémiotique.

Aussi, notre question initiale devient donc la suivante : quelles évolutions dans la succession des couples (avatar, $ETM_{associé}$) peut-on exhiber à la suite du visionnage d'un extrait vidéo en formation ? Notre focus sur un unique extrait vidéo est ici un choix de recherche pour l'analyse des expérimentations des stagiaires. Cet extrait-vidéo est un élément d'une vidéothèque réalisée par l'équipe de formation à partir de B1 et qui sert d'appui à l'analyse *a priori* de la tâche par les stagiaires. Le choix des extraits vidéo visionnés pendant la formation dépend des éléments émergeants du collectif de stagiaires et vise à compléter son analyse de la tâche. La vidéo que sur laquelle nous portons notre attention a été visionnée dans les deux groupes de stagiaires.

IV. PREMIERS RESULTATS DE RECHERCHE

1. Éléments d'analyse a priori du problème initial

D'après l'analyse *a priori* du problème du lièvre et de la tortue donnée initialement aux stagiaires, le déroulement du jeu peut être modélisé par deux lois différentes :

- la loi géométrique tronquée qui correspond à un premier lancer, et des lancers ensuite conditionnés aux résultats antérieurs (en particulier à l'obtention d'un six ou non) ;

- ou la loi binomiale, avec six lancers de dés systématiques, même si un six est déjà tombé.

Si le tableur est choisi, alors la simulation d'une loi binomiale est beaucoup plus aisée, mais c'est le modèle qui est ici le moins congruent à la situation. Il s'agit d'une source de difficulté possible pour les élèves.

2. Eléments du couple (avatar, ETM_{choisi}) élaboré par les stagiaires avant visionnage de l'extrait-vidéo

L'énoncé de l'avatar de B1 a peu été modifié par les stagiaires, simplement sur la question, pour enlever le terme "chances". Concernant l'ETM_{choisi}, les stagiaires ont décidé, très tôt de faire appel à la simulation, avec Scratch ou tableur. Avec le tableur, ils ont spontanément utilisé le modèle de la loi binomiale, une course étant pour eux constituée systématiquement de six lancers de dés. Les difficultés liées à la simulation et aux modèles sous-jacents et à la différence de modèles n'ont pas été mentionnées par les stagiaires lors de cette première ébauche d'ETM_{choisi}.

3. Contenu de l'extrait de vidéo de B1 injecté dans B2

L'équipe de formation a alors choisi de présenter aux stagiaires un extrait vidéo faisant partie d'un $ETM_{effectif}$ associé à un avatar de B1. La loi géométrique tronquée est congruente à l'énoncé des règles du jeu. Cet extrait permet de soulever la problématique de la non-unicité des modèles et des liens entre eux et la simulation. Partant d'un fichier vierge sur tableur, les élèves ont essayé de simuler des échantillons suivant la loi géométrique tronquée. Le deuxième lancer de dé, conditionné au résultat du premier lancer, a posé problème.

L'enseignant est intervenu en proposant, pour débloquer les élèves, de simuler à chaque fois six lancers de dés (modèle de la loi binomiale). L'extrait vidéo illustre le blocage des élèves qui n'arrivent pas à quitter leur modèle initial (le second étant pour eux trop éloigné des règles du jeu). Ce confinement survenu dans la circulation du travail de l'élève dans l'ETM associé à cet avatar de B1, a été exposé par les formateurs afin de soulever la problématique des modèles et de la simulation dans cette tâche et d'interroger à cet égard le rôle de l'enseignant.

4. Impacts de l'extrait vidéo sur les couples (avatar, ETMchoisi) de B2

Dans B2, le couple ($Av^{B2,3}$, ETM_{choisi}) reflète les décisions prises par les stagiaires après visionnage de l'extrait vidéo issu de l'$ETM_{effectif}$ associé à $Av^{B1,1}$ sur les points suivants :

- les élèves pourraient envisager de simuler avec un tableur ou le logiciel Scratch,

- les simulations tableur ou Scratch seraient entièrement à la charge des élèves, sans aucun guidage et sans imposer un modèle mathématique *a priori*.

Dans B2, les lois probabilistes en jeu n'ont jamais été nommées par le collectif de stagiaires.

Pendant le déroulement effectif dans la classe d'expérimentation en formation, une majorité des groupes d'élèves a choisi d'utiliser le tableur. Beaucoup d'entre eux ont seulement « lancé » un dé « numérique », et ont donc travaillé dans le plan [Sem-Ins], et se sont ensuite retrouvés bloqués. Face à ce confinement sur la dimension instrumentale, l'enseignant-expérimentateur a tenté de leur imposer la loi binomiale, opérant lui un travail dans le plan [Dis-Ins].

Voici un extrait de verbatim de ce dernier dans un groupe au regard du fichier tableur créé :

« Vous devez faire 6 jets car vous avez regardé à chaque fois la fréquence mais pour une seule partie (...). C'est intéressant ce que vous avez fait/jeter 1000 fois le dé et regarder la fréquence d'apparition de 1 2 3 4 5 ou 6, mais il ne faut pas revenir à chaque lancer (...) ».

L'enseignant veut aider les élèves en leur imposant le modèle binomial en restant dans la dimension instrumentale. Nous pouvons y voir une pratique enseignante analogue à celle de l'extrait vidéo considéré. Cela pose question sur la manière dont l'enseignant a pris en compte l'extrait vidéo et laisse penser que cet extrait vidéo n'a eu aucun impact sur sa pratique, à ce moment-là.

Certains élèves, bloqués sur le tableur, ont ensuite changé d'artefact numérique, passant du tableur à Scratch, pour tenter de réaliser des simulations. L'enseignant-expérimentateur s'est retrouvé en difficulté en particulier concernant la gestion des simulations avec différents artefacts numériques en même temps.

Suite à une analyse *a posteriori* concernant cet $ETM_{effectif}$, le collectif de stagiaires a envisagé un nouveau couple ($Av^{B2,5}$, ETM_{choisi}), avec un travail dans le plan [Sem-Ins] en fixant :

- un accès à un unique artefact numérique pendant une même séance, restant au choix de l'élève,

- une course déjà présente dans un fichier de simulation Scratch que les élèves auraient à compléter.

La pluralité des modèles probabilistes n'a pour autant pas été rediscutée pour la simulation. Il semble y avoir une volonté de l'enseignant de ne pas entrer dans la dimension discursive notamment autour de la question du choix d'un modèle.

5. Impacts de l'extrait vidéo sur les couples (avatar, ETM $_{choisi}$) de B3

Voici l'énoncé proposé par un stagiaire (S5) qui l'a modifié :

Je lance 5 fois de suite un dé à six faces. Si je n'obtiens pas de « six », alors j'ai gagné. Si j'obtiens au moins un « six », alors j'ai perdu. Ai-je plus de chances de gagner ou de perdre ?

Un extrait de verbatim de S5 sur le couple ($Av^{B3,6}$, ETM $_{effectif}$) précise ses choix :

« (...) le jeu, je l'ai complètement modifié. J'ai dit que je lance 5 fois de suite un dé de 6 faces. C'est par rapport à l'expérience qu'on avait faite en J2, en fait, j'ai trouvé que modéliser le/ le jeu comme il était proposé, c'était assez dur. Surtout que des fois, quand on lançait trois fois, si ça tombait sur 6, on n'avait pas besoin de continuer. / Et à modéliser sur le tableur, c'était plus compliqué alors du coup, là, je leur ai dit « on lance 5 fois de suite » comme ça pour qu'ils aient au tableur// »

Après avoir exhibé trois parties devant la classe (avec un dé à jouer et une caméra), S5 a obligé les élèves à manipuler des dés et a recueilli leurs résultats pour 20 parties, puis les a traités avec eux. L'heure suivante a été consacrée à l'élaboration très guidée de simulation sur tableur par les élèves. Puis, une troisième heure s'est déroulée autour d'une simulation avec Scratch avec une course déjà fournie. L'énoncé reformulé témoigne d'une volonté de l'enseignant d'imposer dès le départ un unique modèle probabiliste avant toute simulation, par la modification des règles du jeu. Le travail a été privilégié dans la dimension instrumentale avec une absence de travail dans le plan [Sem-Dis].

V. CONCLUSION

Dans un premier temps, l'extrait vidéo a eu pour effet d'ouvrir la tâche de simulation, l'enseignant laissant aux élèves une certaine latitude côté modèle et artefacts numériques dans B2. Ceci a eu pour conséquence, en fin de boucle B2 et dans B3, de réduire la part d'initiative laissée aux élèves, modifiant l'énoncé du problème et en particulier les règles du jeu pour contourner cette difficulté de choix de modèle. Si dans B2, peu de variations ont été visibles, un nouvel avatar est né dans B3 avec un $ETM_{effectif}$ et dont les transformations ont été opérées entre ces deux boucles. Si les formateurs visaient une prise de conscience de la complexité et de la richesse du problème proposé, l'extrait vidéo a eu pour double effet d'ouvrir l'avatar, puis de le refermer ensuite autour d'un modèle et d'un artefact unique ; il a opéré une rétroaction sur les couples (avatars, ETM) successifs.

Une autre boucle B2, menée en parallèle dans un autre atelier, montre un impact potentiel du même extrait vidéo. Il a eu pour effet d'éliminer le tableur dès le départ, le collectif préférant alors le logiciel Scratch, permettant de réaliser des simulations congruentes au jeu. Des fichiers préparés par le collectif ont été mis en place dans l'avatar $Av^{B2,4}$ (pendant l'expérimentation), dont un premier permettait aux élèves de lancer des simulations de courses, ceux-ci devant s'emparer d'une simulation prête à l'emploi. Le collectif de formés, conscient d'une rupture potentielle de circulation liée à un changement de modèle mathématique, a préféré en imposer un unique dans le script du fichier Scratch tout prêt. Malgré le constat d'une certaine opacité du fichier de simulation côté élèves dans $Av^{B2,4}$, ce choix a été maintenu par les formés dans $Av^{B2,5}$ (après l'expérimentation). Ils ont toutefois

exprimé la nécessité d'établir des liens entre le travail en probabilités et en algorithmique par l'enseignant. La circulation dans les divers ETM a été privilégiée dans les plans [sem-ins] et [ins-dis], laissant très peu de place à des procédures engagées dans le plan [sem-dis] avec des artefacts symboliques tels que les arbres.

Notre méthodologie de recherche a mis en évidence des effets de la formation sur les pratiques enseignantes comme une restriction de choix au fur et à mesure des avatars successifs, comme si les enseignants souhaitaient uniformiser l'ETM de la classe. Aussi, une nouvelle question se pose donc autour des limites elles-mêmes de la formation dans laquelle des choix autour d'extraits vidéo ont été opérés par les formateurs dans la boucle B1.

REFERENCES

Clerc-Georgy, A., Clivaz S, (2016) Evolution des rôles entre chercheurs et enseignants dans un processus lesson study : quel partage des savoirs?, *Le partage des savoirs dans les processus de recherche en éducation*, Raison éducative, Deboeck supérieur, 189-210

Clivaz, S., (2018), Lesson study as a fundamental situation for the knowledge of teaching, *International Journal for Lesson ans Learning Studies*, 7(3), 172-183.

Derouet, C., (2016). *La fonction de densité au carrefour entre probabilités et analyse en terminale S. Etude de la conception et de la mise en œuvre de tâches d'introduction articulant lois à densité et calcul intégral*. Thèse de doctorat. Université Paris Sorbonne Cité – Université Paris Diderot.

Houdement C., Kuzniak A. (1996), Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques., *Recherches en didactique des mathématiques*,16(3), 287-322.

Kuzniak, A. (2011), L'espace de travail mathématique et ses genèses, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, IREM de Strasbourg, vol 16, 9-24

Kuzniak, A., Parzysz B., Vivier L. (2013). Trajectory of a problem: a study in Teacher Training, *The mathematics Enthusiast*, vol 10, nos1 et 2, 407-440.

Masselin, B. (en cours), *Etude du travail de l'enseignant autour de la simulation en classes de troisième et seconde : métamorphoses d'un problème au fil d'une formation en probabilités.* Thèse de doctorat (en cours). Université Paris Sorbonne Cité – Université Paris Diderot.

Miyakawa, T. & Winslow, C. (2009). Un dispositif japonais pour le travail en équipe d'enseignants : Etude collective d'une leçon. *Education et Didactique*, 3(1),77-90.

Robert A., Rogalski J. (2002), Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche, *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, 2, n°4, 505-528.

ANNEXE 1 – CALENDRIER DE LA FORMATION

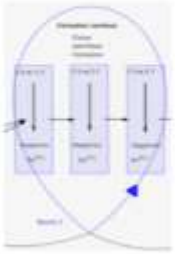
Boucle	Temporalité	Couples	Présentiel	Distanciel
B2 	**J1** (27 Janvier 2017)	**Etape 1** Initialisation de **(Av ^{B2,1,S}, ETM$_{pot\ coll}$)**	Collège	Groupe à distance sur Plateforme Académique Réséda
	Plateforme à distance accessible **après J1** (29/01/2017)	Finalisation de **(Av ^{B2,1,S}, ETM$_{pot\ coll}$)**		
	J2 (03/04/2017)	**Etape 2** Le matin : **(Av ^{B2,2,S}, ETM$_{eff}$)** **Etape 3** L'après-midi : **(Av ^{B2,3,S}, ETM$_{pot\ coll}$)**	Collège	
B3 	**Entre J2 et J3** (Du 03/04/2017 au 12/06/2017)	**Etape 1** **(Av ^{B2,1,S}, ETM$_{eff}$)**	Classes des stagiaires	
	J3 (12/06/2017)	Retour sur **(Av ^{B2,1,S}, ETM$_{eff}$)**	IREM de Rouen	

Figure 1 *– Calendrier de la formation (Masselin, en cours)*

FORMATION INITIALE DES ENSEIGNANTS DE MATHEMATIQUES A L'ÉCOLE NORMALE SUPERIEURE DE YAOUNDE 1 : DES PRATIQUES ACTUELLES AUX PERSPECTIVES FUTURES

NSEANPA[*] Casimir Jojo –TCHEUFFA NZIATCHEU[**] Jean

Résumé – Les changements survenus dans les programmes scolaires au Cameroun ces dernières années exigent un rehaussement de la formation didactique des futurs enseignants. Ce texte apporte une contribution dans la réflexion en prenant le cas de l'École Normale Supérieure (ENS) de Yaoundé à la lumière des résultats des recherches en didactique des mathématiques.

Mots-clefs : Formation initiale, enseignant, formation didactique, formation pratique, formation mathématique.

Abstract – The changes that have occurred in the curricula in Cameroon in recent years require an enhancement of didactic training for future teachers. This text contributes to the reflection by taking the case of the Higher Teacher Training College of Yaoundé in the light of the results of research in mathematics didactics.

Keywords: Initial training, teacher, didactic training, practical training, mathematical training.

I. LE CONTEXTE CAMEROUNAIS

Au Cameroun, le ministère des enseignements secondaires prend en charge l'enseignement secondaire général et technique, l'enseignement normal général ainsi que l'enseignement normal technique et leurs correspondants dans le sous – système anglophone. La durée de la formation au secondaire est la même dans les deux sous-systèmes à savoir 7 ans. Néanmoins, elle est de cinq ans pour le premier cycle et deux ans pour le second cycle du sous – système anglophone contre quatre années pour le premier cycle (12 ans – 15 ans) et trois années pour le second cycle (16 ans – 18 ans) dans le sous-système francophone. On dénombrait en 2014 selon l'institut national de la statistique environ 2 800 076 élèves inscrits dans le secondaire encadrés par 96 304 enseignants (INS, 2010). Au niveau des performances scolaires, l'Office du Baccalauréat du Cameroun a enregistré les taux de réussite suivants pour l'examen sanctionnant la fin du secondaire : 44,69% en 2013; 40,01% en 2014; 43,64% en 2015; 40,99% en 2016 contre 42,06% en 2017. Ces résultats peuvent laisser transparaitre un certain malaise dans l'enseignement secondaire au Cameroun et de nombreuses pistes s'offrent aux chercheurs en éducation pour expliquer des facteurs en cause. Parmi celles-ci, la formation qui leur donne le droit d'enseigner au secondaire. Dans ce papier, nous essayons de faire un portrait de la formation actuelle des futurs enseignants de mathématiques à l'École Normale Supérieure (en abrégé ENS) de Yaoundé et nous nous demandons de quelle manière il serait possible d'articuler la formation disciplinaire, la formation didactique et la formation pratique des enseignants de mathématiques au Cameroun. Le but visé est celui de nourrir les réflexions sur la formation initiale des enseignants de mathématiques au Cameroun.

II. ÉTAT DES LIEUX DE LA FORMATION DES ENSEIGNANTS DE MATHEMATIQUES

1. Le recrutement des enseignants

Le recrutement des futurs enseignants est influencé par le contexte socioéconomique. Selon l'Institut National de la Statistique (2010), la frange de la population la plus touchée par le chômage est celle des diplômés de l'enseignement supérieur. Ces jeunes diplômés, pour la

[*] Université de Montréal – Canada – casimir.jojo.nseanpa@umontreal.ca
[**] Université du Québec à Montréal (UQAM) – Canada – tcheuffa_nziatcheu.jean@courrier.uqam.ca

plupart, recherchent une sécurité dans l'emploi, et pour cela, se lancent à la recherche des emplois salariés dans la fonction publique, d'où l'affluence observée aux portes de la profession enseignante car c'est l'un des rares concours qui offrent aux lauréats un accès direct à la fonction publique avec une garantie de salaire et une retraite plafonnée à 60 ans (Tchamabe, 2015). La formation initiale des enseignants du secondaire est assurée par les ENS. Il existe deux cycles de formation. Les étudiants du premier cycle sont admis à condition d'être titulaire d'un baccalauréat de l'enseignement secondaire général. Leur formation dure trois ans et ils peuvent après leur licence en mathématiques, poursuivre leur formation au second cycle. L'accès des étudiants externes au second cycle se fait soit par voie de concours pour les titulaires d'une licence en mathématique ou par voie de retour sur titre : il s'agit des enseignants ayant achevé leur formation initiale du premier cycle au moins trois ans auparavant, et qui désirent compléter leur formation au second cycle. Cette formation au second cycle dure deux ans. On déplore le fait que certains candidats ne soient pas motivés par le désir de la formation des jeunes mais plutôt par un souci d'emploi (Tchamabe, 2015). Il n'est donc pas surprenant d'assister à une baisse de la compétitivité mais également à une sous qualification des produits issus de la formation à l'enseignement (Tchamabe, 2015) qui peut aussi être justifiée par la qualité de la formation initiale.

2. Structuration de la formation au regard des programmes d'enseignement

Les programmes de formation à l'ENS de Yaoundé sont constitués de deux blocs. Un bloc des contenus purement mathématiques et académiques tels que dispensés dans les facultés de sciences dans nos universités, un bloc en sciences de l'éducation qui donnent au futur enseignant des bases théoriques nécessaires pour l'enseignement des mathématiques. Le troisième volet de la formation initiale des enseignants comprend un stage d'imprégnation à l'enseignement proprement dit. Cependant, on observe dans la pratique une inadéquation entre les contenus de la formation et les problèmes qui caractérisent le vécu réel des enseignants en situation de classe (Maingari, 2004). Ce qui signifie aussi que les contenus mathématiques destinés aux futurs enseignants ne les préparent pas à l'enseignement des mathématiques au secondaire (Gonzalez-Martin, 2010). On assiste plus à une valorisation des contenus mathématiques au détriment des ressources didactiques nécessaires pour l'enseignement comme l'indique le tableau ci-dessous. En guise d'exemple, au premier cycle, 50% du volume horaire est consacré à la formation mathématique contre 6,25% à la formation didactique en mathématiques, 25% en psychopédagogie et 18,75% en formation transversale.

Niveau	Durée	Volume horaire	Formation mathématique	Formation didactique	Psychopédagogie	Formation transversale
1er Cycle	3 ans	1 536 heures	768 heures	96 heures	384 heures	288 heures
2nd Cycle	2ans	1024 heures	448 heures	160 heures	128 heures	288 heures

Tableau 1 *– Tableau élaboré à partir des programmes de formation ENS- Yaoundé 1*

La formation pratique quant à elle ne comble pas les écarts observés entre la formation mathématique et la formation didactique (Maingari, 2004). En fait, les stages d'imprégnation à l'enseignement ont une durée de deux à trois mois pour une formation initiale à l'enseignement dont la durée varie entre 3ans et 5ans. Généralement, ces stages se déroulent au deuxième trimestre de l'année scolaire, au moment où l'année tire à sa fin et les établissements sont soucieux de boucler les programmes en vue des examens officiels avec un grand nombre de contenus couverts (Tchamabe, 2015). La rareté de la formation continue ne permet pas aux enseignants de stage de prendre efficacement en charge les futurs enseignants. Pourtant, l'amélioration des apprentissages des élèves se trouve corrélée aux activités de développement professionnel efficace (Barriault, 2017). On peut donc déplorer que, du fait de

la rareté des spécialistes en didactique des mathématiques, l'on assiste à une absence de collaboration entre les formateurs universitaires et les encadreurs de stage, car en effet, une telle collaboration serait une façon de développer une coopération entre l'enseignant chercheur de l'université et le praticien (Maingari, 2004). A la lumière du cadre théorique de Shulman (1987), nous tentons d'amorcer une première réflexion sur la manière dont la formation initiale pourrait prendre en compte les avancées dans les recherches en didactique des mathématiques pour une meilleure articulation.

III. FONDEMENTS THEORIQUES DE LA FORMATION DES ENSEIGNANTS

Il est nécessaire lorsqu'on veut questionner les types de connaissances à développer pour la formation des futurs enseignants, de faire usage d'un cadre de référence pertinent (Gonzalez-Martin, 2012). Dans ce texte, nous nous situons dans cette perspective et considérons les travaux de Shulman (1987) qui a apporté une contribution importante dans la formation des enseignants en s'intéressant aux connaissances que devrait avoir un enseignant pour enseigner les mathématiques et en proposant un nouveau cadre théorique dénommé « *Pedagogical content knowledge (PCK)* » (Dijk et Kattmann, 2007). Les idées sur le PCK sont issues des travaux de Shulman (1987) qui conçoit l'enseignement comme une profession basée sur une croyance selon laquelle il y a une connaissance de base pour l'enseignement comprenant entre autres sept catégories à savoir : la connaissance du contenu, la connaissance pédagogique générale, la connaissance du curriculum, le PCK, la connaissance pour les apprenants et leur contenu, la connaissance du contexte éducatif, la connaissance des finalités éducatives, leurs valeurs et bases philosophiques et historiques (Shulman, 1987). C'est une approche qui permet d'explorer les connaissances des enseignants du secondaire, les conceptions préscientifiques des élèves, les connaissances et les croyances sur les représentations en jeu, ainsi que le sujet de l'enseignement qui est en jeu, et ce, en relation soit avec le design des environnements d'apprentissage, ou avec des séquences d'enseignement/apprentissage. Le PCK a été validé au préscolaire, primaire et à l'université comme cadre théorique pour contribuer à la compréhension et à la conceptualisation des pratiques d'enseignants (Fraser, 2016). D'autres auteurs ont analysé tout en classifiant les différentes connaissances mathématiques et la manière dont celles-ci sont introduites dans les pratiques de classe de mathématiques. Plusieurs chercheurs considèrent que les connaissances mathématiques et donc les programmes de formation des enseignants de mathématiques ne doivent pas être perçus comme des connaissances isolées, mais plutôt comme un réseau de connaissances (Ball et al., 2008) multidimensionnelles, situées et en action (Bednarz et Proulx, 2009). Cette formation doit également intégrer l'histoire des mathématiques (Fredette, 2010) et une dimension culturelle (Tcheuffa Nziatcheu, 2016; Traoré et Bednarz, 2008). Dans le même sillage, Grossmann (1990) distingue quatre domaines généraux de connaissances des enseignants interconnectés qui font émerger les connaissances professionnelles pour l'enseignement. Ces domaines concernent la connaissance générale de la pédagogie (qui se rapporte aux connaissances concernant l'apprenant et l'apprentissage, les principes généraux de l'instruction, la gestion de classe et les finalités de l'éducation); la connaissance du sujet en jeu; le PCK et la connaissance du contexte. Ce modèle est schématiquement conceptualisé par Dijk et Kattmann (2007) comme suit :

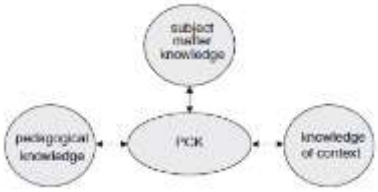


Figure 1 *– Modèle de connaissance de l'enseignant (Grossman, 1990) dans (Dijk et Kattmann, 2007, p. 889)*

Le modèle de Grossmann (1990) issu des idées de Shulman (1987) et repris par Fraser (2016) permet d'étudier les pratiques des enseignants. Ce modèle est également utilisé par plusieurs chercheurs (Sutherland et al., 2016) et aussi par (Driel et Berry, 2012) comme cadre théorique pour réaliser une étude qualitative du travail de l'enseignant, de la formation des enseignants ou du développement professionnel des enseignants. Ce cadre théorique éprouvé en recherche ainsi que la vision de (Bednarz et Proulx, 2009), l'histoire (Fredette, 2010) et la culture où le futur enseignant doit puiser dans ses richesses culturelles, le matériel local et les intégrer dans l'enseignement apprentissage afin de renforcer sa compréhension des concepts mathématiques enseignés à l'école (Tcheuffa Nziatcheu, 2016) peuvent être contextualisés dans le cadre de notre travail.

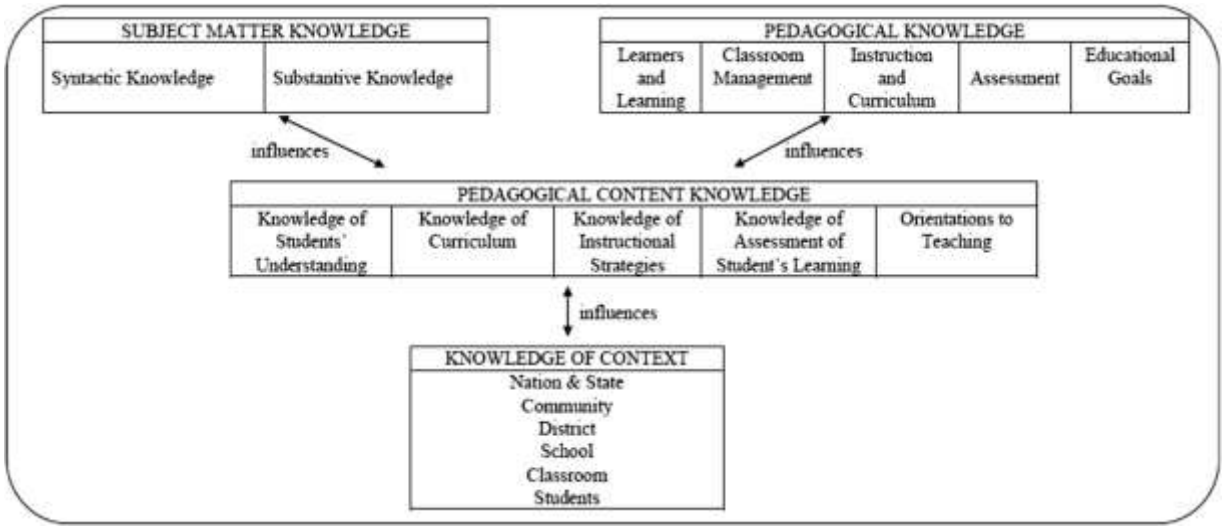


Figure 1 *– Modèle détaillé de Grossman (Grossman, 1990). Sources (Fraser, 2016, p. 143)*

IV. PERSPECTIVES FUTURES : QUELS CONTENUS DIDACTIQUES ?

Dans ce papier et compte tenu de la limitation pour le colloque, nous développons essentiellement deux composantes des connaissances de l'enseignant en formation. Comme première composante du PCK, Grossman (1990) suggère le ***« knowledge of student's understanding »*** ou encore la connaissance des compréhensions des étudiants. Il est question pour le futur enseignant de comprendre d'une part, les éléments dont a besoin l'élève pour apprendre des choses nouvelles, et d'autre part, de comprendre les différentes aires de difficultés qui peuvent entraver les apprentissages des élèves. Ces compréhensions qui se veulent multidimensionnelles, situées et en action (Bednarz et Proulx, 2009) passent entre autres par une initiation et une utilisation par le futur enseignant des données et des résultats de la recherche en didactique des mathématiques et à leur transposition en contexte d'enseignement (Diffo-Lambo et Feugueng, 2016). Cette connaissance des acquis devient un maillon de poids dans les connaissances des futurs enseignants, et leur capacité à anticiper sur les difficultés des élèves apparait ainsi à nos yeux comme des déclencheurs d'une professionnalisation réussie. Même si selon Fraser (2016), c'est avec l'expérience que

l'enseignant peut développer ces deux types de compréhension des étudiants, il n'en demeure pas moins que la formation initiale des futurs enseignants constitue le lieu où se construisent les premières conceptions et compréhensions au sujet des étudiants. Cette formation doit préparer l'enseignant à développer des stratégies spécifiques et surtout des stratégies bénéfiques à la compréhension des élèves. Les cours de didactique de mathématiques devraient pouvoir sensibiliser les futurs enseignants des difficultés spécifiques autour de certains concepts clés. En guise d'exemple, les recherches ont mis en évidence les niveaux de compréhension des fractions chez les élèves de sixième année permettant ainsi de comprendre que, la principale difficulté pour apprendre les fractions est liée à la compréhension des cinq sens des fractions (Pantziara et Philippou, 2012). Cette étude a ainsi permis d'améliorer la compréhension des enseignants sur les différentes mesures d'intervention auprès des élèves en difficulté lorsque ceux-ci devaient enseigner les fractions. En sus, nous considérons que cette compréhension des difficultés d'élèves exige une bonne compréhension de leurs processus de pensée, or, il est établi qu'il est possible d'aider les enseignants à développer leurs connaissances de la manière dont les élèves pensent lorsqu'ils font les mathématiques et que cette compréhension peut être liée à un changement positif dans leurs pratiques d'enseignement et même faciliter l'apprentissage chez les élèves (Speer et Hald, 2008).

Sur le plan pratique, une *bonne* connaissance de la manière de penser des étudiants et leurs difficultés en mathématiques, c'est de faire des évaluations un outil de diagnostic. La recherche indique par ailleurs que des enseignants n'accordent pas assez d'importance à la pratique de l'évaluation diagnostique qui aurait permis de cerner les difficultés réelles des élèves, pourtant une telle évaluation constitue un processus d'activation de l'évaluation qui régule les apprentissages (Meyer et Simonard, 1990). Dans la formation actuelle des enseignants à l'ENS, le cours sur l'évaluation prépare le futur enseignant à la notation. Nous pensons que, donner aux enseignants quelques outils théoriques pouvant leur permettre de mettre en place des grilles d'identification de caractéristiques de certaines difficultés d'apprentissage serait une piste à explorer au moment de la formation initiale et même continue des enseignants.

La connaissance du curriculum (ou ***knowledge of curricula***) des mathématiques est aussi une dimension à privilégier dans la formation des enseignants et c'est aussi une des composantes essentielles dans les connaissances didactiques développées par Grossman (1990). La formation à l'utilisation des programmes est un agencement cohérent de stratégies didactiques/pédagogiques qui se fondent sur les composantes du programme (Prégent et al., 2009; Viola et al., 2015) et qui prédisposent le futur enseignant au développement des alternatives pour enrichir son enseignement et favoriser la compréhension de ses élèves. Pour le cas de l'ENS, il n'y'a pas assez de travaux de recherche en didactique des mathématiques réalisés dans le contexte camerounais (Diffo-Lambo et Feugueng, 2016). Néanmoins, ces derniers auteurs nous suggèrent la nécessité pour le futur enseignant de pouvoir concevoir des cours modèles en se référant aux curricula et à l'adaptation de leurs contenus en fonction des élèves. Les pratiques actuelles consistent à une initiation interprétative des programmes qui s'accompagne des commentaires sous la supervision d'un enseignant de mathématiques ayant une forte expérience en enseignement des mathématiques au secondaire (Diffo-Lambo et Feugueng, 2016). Même s'il est nécessaire d'avoir une bonne connaissance des contenus mathématiques, l'on peut supposer que la manière d'interpréter les curricula est forcément influencée par le niveau de connaissances mathématiques. La maitrise des objectifs et des orientations liés à des contenus à enseigner influencent donc le choix des ressources pour l'enseignement, notamment les manuels scolaires dont la recherche a établi son importance (Sträßer, 2009). Conscient du fait que la manière d'enseigner les mathématiques pourrait être

influencée par les contenus qui sont véhiculés dans ces manuels (González-Martín, 2015), il devient donc impératif de renforcer la compréhension des futurs enseignants quant à la manière d'interpréter les curricula, mais davantage de les aider à développer un regard critique sur ces programmes et aussi sur les ressources qui les accompagnent et donc le manuel scolaire.

Les recherches en didactique des mathématiques ont également mis en évidence l'importance des ressources historiques pour l'apprentissage des mathématiques (Katz, 2000) comme processus d'humanisation des mathématiques (Fredette, 2010). Denis Guedj (1998) fait le constat que l'histoire des mathématiques est absente dans les programmes et pour lui, les théorèmes et les axiomes mathématiques semblent tomber du ciel. Or, les mathématiques sont une activité humaine, et par conséquent, elles peuvent par leur histoire, susciter de l'intérêt chez les jeunes car cela pourrait avoir un effet sur leur motivation (Guedj, 1998). La culture permet d'identifier et de répertorier les ressources mathématiques mobilisées dans des pratiques de vie quotidienne des apprenants pour constituer les bases des mathématiques scolaires (Traoré et Bednarz, 2008; Tcheuffa Nziatcheu, 2016). Ainsi, la formation initiale qui intègre ces dimensions historiques et culturelles offre aux futurs enseignants des ressources, mieux, peut changer leurs perceptions du rôle d'enseignant qui est le leur, et même des mathématiques qu'ils ont à enseigner, y compris leur façon d'entreprendre l'enseignement et même une forte compréhension de la manière de raisonner de l'élève (Poirier, 2001).

V. CONCLUSION

Dans la présente recherche, notre intention était de mener une réflexion théorique sur la manière dont la formation initiale pourrait prendre en compte les avancées des recherches en didactique des mathématiques. Notre constat laisse voir que le *knowledge of student's understanding*, le *knowledge of curricula*, les évaluations au service de la prévention et de la remédiation des difficultés d'apprentissage, la formation à l'usage critique du curriculum et des manuels scolaires ou encore l'histoire des mathématiques et la culture semblent être des connaissances indispensables pour des enseignants de mathématiques. Ces connaissances devraient faire partie d'un réseau de savoirs imbriqués les uns aux autres pour une professionnalisation réussie. Cette réflexion ouvre la voie à un éventail d'autres recherches notamment les ressources et les contenus d'enseignement utilisés par les enseignants de didactique des mathématiques. L'absence d'une expérimentation constituant une limite de ce travail.

Par ailleurs, la mise en place des reformes dans les institutions exige une mobilisation des ressources financières, humaines et logistiques. Sur le plan financier, il est vrai que l'enseignement supérieur peine à financer ses propres activités car sa principale source de financement provient du budget de l'État. Toute réforme est donc assujettie à une certaine volonté politique. Sur le plan pratique, l'ajout des cours supplémentaires nécessite le recrutement des formateurs qualifiés. Ces derniers sont rares mais les initiatives gouvernementales pour la formation des docteurs en didactique des mathématiques tant au niveau local qu'à l'international permettent d'entrevoir des lendemains meilleurs pour la formation initiale des enseignants. La formation des enseignants qui se déroule actuellement devrait prédisposer ces futurs chercheurs à la production des ressources et des contenus indispensables pour une meilleure qualification des futurs des enseignants du secondaire. Le gouvernement devrait également encourager les jeunes chercheurs en formation dans les universités occidentales à rentrer dans leur pays une fois la formation achevée et cela demande une certaine amélioration des conditions de travail des enseignants.

REFERENCES

Ball, D. L., Thames, M. H., et Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407

Barriault, L. (2017). La formation continue des enseignants : synthèse des connaissances. *Disponible sur le site http://rire.ctreq.qc.ca/2017/10/formation-continue/ consulté le 13 novembre 2017*.

Bednarz, N., et Proulx, J. (2009). Connaissance et utilisation des mathématiques dans l'enseignement: Clarifications conceptuelles et épistémologiques prenant leur source dans une analyse de la pratique des enseignants. *For the learning of mathematics, 29*(3), 11-17.

Diffo-Lambo, L., et Feugueng, D. M. (2016). Quels savoirs enseignables en didactique des mathématiques en formation d'enseignants? Le cas de l'École Normale Supérieure (ENS) de Yaoundé. *Actes du premier colloque de l'Association de Didacticiens des Mathématiques Africains. École Normale Supérieure de Yaoundé (Cameroun), 1*, 324-336.

Dijk, E. M. V., et Kattmann, U. (2007). A research model for the study of science teachers' PCK and improving teacher education. *Teaching and Teacher Education, 23(6)*, 885-897.

Driel, J. H. V., et Berry, A. (2012). Teacher Professional Development Focusing on Pedagogical Content Knowledge. *In Educational Researcher, 41 (1)*, 26–28.

Fraser, S. P. (2016). *Pedagogical Content Knowledge (PCK): Exploring its Usefulness for Science Lecturers in Higher Education*. *Research in Science Education - Springer, 46*, 141-161. doi:10.1007/s11165-014-9459-1

Fredette, I. (2010). L'histoire des mathématiques: un outil pour l'humanisation des mathématiques au secondaire. *Mémoire de maîtrise. Université du Québec à Montréal*.

Gonzalez-Martin, A. S. (2012). « Quatre points autour de la formation mathématique des enseignants de mathématiques au secondaire.». Dans Proulx, J.; Corriveau, C. & Squalli, H. *Formation mathématique pour l'enseignement des mathématiques. Pratiques, Orientations et recherches*. *Presses Universitaires du Québec*, 81-90.

González-Martín, A. S. (2015). The use of textbooks by pre-university teachers: An example with Infinite series of real numbers. In N. Vondrovà & K. Krainer (Eds.). *Proceedings of the 9th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME9)*, (pp. 2124-2130). Prague (Czech Republic).

Grossman, P. L. (1990). The making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education. *New York: Teachers College Press*.

Guedj, D. (1998). Le théorème du perroquet. *Paris, Éditions Le Seuil, coll. « Points roman », 2000 (1re éd. 1998)*, 654 pages.

INS. (2010). « 2ème Enquête sur le suivi des dépenses publiques et le niveau de satisfaction des bénéficiaires dans les secteurs de l'éducation et de la santé au Cameroun. » disponible sur le site http://www.statistics-cameroon.org /downloads /pets/2/Rapport_principal_Sante_francais.pdf.

Katz, V. (2000). Using History to teach Mathematics. An International Perspective. *ZDM 2001, 33*(ZDM 2001 Vol. 33 (5)), (5).

Maingari, D. (2004). *Formation et professionnalisation des enseignants au Cameroun*. Paris: Paris : L'Harmattan.

Meyer, G., et Simonard, M. N. (1990). « L'évaluation diagnostique à l'école ? » in Delorme C., L'évaluation en questions. *ESF édition 1990*, 93.

Pantziara, M., et Philippou, G. (2012). Levels of students' « conception » of fractions. *Educational Studies in Mathematics, 79(1)*, 61-83.

Poirier, L. (2001). Enseigner les maths au primaire. *Notes didactiques, ERPI, Québec*.

Prégent, R., Bernard, H., et Kozanitis, A. (2009). Enseigner à l'université dans une approche-programme: guide à l'intention des nouveaux professeurs et chargés de cours. *Presses inter Polytechnique*.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*, 1-22.

Speer, N. M., et Hald, O. (2008). How do mathematicians learn to teach? Implications from research on teachers and teaching for graduate student professional development. In M. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), Making the connection. *Research and teaching in undergraduate mathematics education*, (pp. 305- 317).

Sträßer, R. (2009). Instruments for learning and teaching mathematics. An attempt to theorise about the role of textbooks, computers and other artefacts to teach and learn mathematics. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & H. Sakonidis (Eds.). *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 1*, pp. 67-81. Thessaloniki, Greece: Aristotle University of Thessaloniki.

Sutherland, S., Stuhr, P. T., et Ayvazo, S. (2016). Learning to teach: pedagogical content knowledge in adventure-based learning. *Physical Education and Sport Pedagogy, 21(3)*, 233-248.

Tchamabe, M. D. (2015). La formation pratique des enseignants au Cameroun. *Chronique Internationale, 23*, 12 pages.

Tcheuffa Nziatcheu, J. (2016). Repères théoriques sur les apports de la didactique des mathématiques en contexte à travers l'utilisation des outils dans l'enseignement et l'apprentissage des figures géométriques planes et des solides. *Actes du premier colloque de l'Association de Didacticiens des Mathématiques Africains. École Normale Supérieure de Yaoundé (Cameroun)*, 187-214.

Traoré, K., et Bednarz, N. (2008). Mathématiques construites en contexte: une analyse du système de numération oral utilisé par les Siamous au Burkina Faso. *Nordic Journal of African Studies, 17*(3), 175-197.

Viola, S., Messier, G., Dumais, C., et Meunier, H. (2015). Dispositif de formation pour le développement de la compétence à l'oral de futurs enseignants dans un contexte d'approche-programme: quelles sont les pratiques déclarées efficaces? *Language and Literacy, 17*(4), 73.

L'ECART TYPE ET SON INTERPRÉTATION GRAPHIQUE

VERMETTE[*] Sylvain

Résumé – La recherche décrite dans cet article vise à explorer les connaissances professionnelles en statistique d'enseignants de mathématiques du secondaire reliées au concept d'écart type. Douze enseignants de mathématiques du secondaire du Québec ont été confrontés à des réponses et raisonnements d'élèves associés à des tâches faisant intervenir ce concept. L'analyse des réponses des enseignants permet d'explorer les compréhensions et pratiques de ces enseignants, associées au concept d'écart type, et de porter un regard sur l'enseignement de ce concept.

Mots-clefs : Connaissances des enseignants, écart type, statistique.

Abstract – In this research, we explore teachers' statistical knowledge related to the concept of standard deviation. Twelve Quebec high school mathematics teachers were asked to respond to scenarios describing students' strategies, solutions and misconceptions when faced with a task based on this concept. The teachers' responses primarily helped to analyze their comprehension and practices associated with the concept of standard deviation and also to gain insight on how to teach this concept.

Keywords: Teachers' knowledge, standard deviation, statistics.

I. CONTEXTE

Au cœur même d'une ère où la technologie prend de plus en plus de place et où les informations fusent de toutes parts, l'utilisation de données statistiques est en pleine croissance. De nos jours, un citoyen doit être à même d'avoir cette faculté d'analyse pour développer un jugement critique, une évaluation personnelle des données qui lui arrivent quotidiennement considérant que le citoyen d'aujourd'hui est continuellement confronté à des données et graphiques statistiques et qu'il est plus souvent nécessaire pour lui non pas de produire des statistiques, mais bien d'interpréter les résultats obtenus. Ainsi, les statistiques constituent une forme de langage qu'ils doivent maîtriser. La place tenue par la statistique dans la société actuelle fait donc en sorte qu'il devient fondamental de s'interroger sur l'enseignement de cette discipline dans l'intention de former ce que certains appellent le citoyen de demain. Si l'intention est de promouvoir le développement de la pensée statistique chez les élèves comme futur citoyen, il faut alors s'attarder à développer chez eux des compréhensions de base pour interpréter les données statistiques. Il convient donc de se demander quelles sont les connaissances des enseignants à ce sujet, car ces derniers accompagnent les élèves et organisent l'enseignement en offrant notamment un environnement propice aux élèves pour favoriser leurs apprentissages. On peut penser aussi que la connaissance des conceptions relatives à un concept particulier permet aux enseignants non seulement de mieux planifier leur enseignement, mais aussi de mieux organiser et gérer l'activité des élèves dans la classe de façon à ce que ceux-ci rencontrent les éléments d'un savoir mathématique visé. Dans ce qui suit, les ancrages théoriques sur le concept de dispersion qui orientent ce travail sont présentés ainsi qu'une clarification de ce qui est entendu par les connaissances professionnelles des enseignants. Après avoir considéré les aspects méthodologiques de l'étude, l'analyse offre des stratégies d'enseignants associées à une tâche faisant intervenir le concept d'écart type. L'article se termine avec une discussion des résultats sous l'optique de considérations pour la formation des enseignants.

[*] Université du Québec à Trois-Rivières – Canada – sylvain.vermette@uqtr.ca

II. ANCRAGES THÉORIQUES

1. La dispersion des données

Les données d'une distribution présentent des variations et bien que les mesures de tendance centrale nous informent sur une dimension importante d'une distribution, employées seules, elles peuvent induire une représentation incomplète de la réalité de la distribution observée, d'où l'intérêt de s'intéresser à la variabilité des valeurs d'une variable statistique. Celle-ci s'évalue principalement à l'aide des mesures de dispersion qui témoignent des variations des données présentes dans une distribution.

> Une mesure de dispersion permet de décrire un ensemble de données concernant une variable particulière, en fournissant une indication sur la variabilité des valeurs au sein de l'ensemble des données. (Dodge, 1993, p. 225)

Une mesure de dispersion très utilisée pour décrire la variabilité d'une distribution est sans aucun doute l'étendue. Son choix s'explique probablement non seulement par sa simplicité de calcul, soit faire la différence entre la plus grande valeur et la plus petite valeur de la distribution, mais aussi par la simplicité à interpréter le résultat obtenu (la longueur du plus petit intervalle qui inclut toutes les valeurs de la distribution). Employée seule, l'étendue représente cependant un moyen limité pour mesurer la variabilité compte tenu que cette mesure de dispersion ne tient pas compte de l'influence de la fréquence de chacune des valeurs de la variable statistique sur la variabilité, d'où l'intérêt pour l'écart moyen et l'écart type, des mesures qui donnent une indication de la variabilité des valeurs d'une variable statistique en prenant en considération cette fois toutes les données de la distribution et permettant de connaître la dispersion des données par rapport au centre de la distribution, soit la moyenne de la distribution. Le défi d'interprétation semble toutefois plus grand dans le cas de ces mesures.

La compréhension de l'écart type, et en l'occurrence de l'écart moyen, englobe de nombreux concepts statistiques tels que la moyenne arithmétique, les écarts par rapport à la moyenne et la densité relative des données autour de la moyenne, ce qui peut expliquer les difficultés rencontrées par les enseignants à enseigner ces concepts (Delmas et Liu, 2005). Proulx (2017) souligne d'ailleurs que concevoir la moyenne comme mesure de tendance centrale implique une relation importante avec les mesures de dispersion dans le but de faire une analyse de la dispersion des données à l'intérieur de toute la distribution pour s'assurer que la moyenne est représentative de ces données, qu'elle est une mesure pertinente de la distribution, de sa tendance centrale. En fait, la moyenne a un véritable intérêt lorsqu'elle est interprétée en fonction des données de la distribution et de leur dispersion. Dans le même sens, comme l'écart type et l'écart moyen sont des mesures statistiques liées à la moyenne, ces mesures de dispersion n'ont d'intérêt qu'au regard de la distribution et de sa tendance centrale, ce qui permet entre autres de prendre en compte les effets des valeurs aberrantes sur ces mesures statistiques. À titre d'exemple, dans le cas d'une distribution asymétrique où la moyenne n'offrirait pas un portrait juste de la tendance centrale de la distribution, c'est davantage la médiane que la moyenne qui pourrait être représentative de la distribution et de sa tendance centrale (et la médiane serait alors reliée à l'étendue interquartile, et non à l'écart type ou à l'écart moyen). Bref, la compréhension de l'écart type et de l'écart moyen nécessite une conception dynamique de la distribution qui coordonne tous ces concepts (Peters, 2014).

Face à ces défis, des travaux montrent que la compréhension de l'écart type se limite souvent à l'application de son algorithme de calculs et soulignent par le fait même les difficultés des étudiants à mesurer la variabilité en termes de proximité des données par rapport au centre de la distribution (Cooper et Shore, 2010; Dabos, 2011; delMas et Liu,

2005; Makar et Confrey, 2005; Meletiou-Mavrotheris et Lee, 2005). Les difficultés d'interprétation de l'écart type sont d'autant plus vraies à partir de représentations graphiques. Selon Garfield et Ben-Zvi (2005), être en mesure de reconnaître et de comprendre la façon dont la dispersion des données se manifeste dans différentes représentations graphiques constitue un aspect important à travailler dans le développement de ce concept compte tenu que les représentations graphiques créent des obstacles en favorisant l'apparition de conceptions erronées de par leur apport visuel et ce, particulièrement dans le cas d'histogrammes et de diagramme à bandes. Ces difficultés peuvent être accentuées par le fait que ce volet semble négligé dans l'enseignement au secondaire où trop souvent l'accent est mis sur les règles qui régissent la construction des différentes représentations graphiques (Garfield et Ben-Zvi, 2005). On peut s'intéresser à l'allure générale du graphique, au maximum et au minimum ou aux données extrêmes, sans nécessairement développer une compréhension adéquate des relations existantes entre les différents concepts statistiques, en particulier le centre de la distribution et la dispersion des données par rapport à ce centre pouvant ainsi mener à l'étude du concept d'écart type.

D'autres aspects relatifs à la variabilité des valeurs d'une variable statistique peuvent certainement être répertoriés. Toutefois, cette entrée en statistique descriptive sur la mesure de la variabilité en termes de proximité des données par rapport au centre de la distribution, à partir de l'écart type et de son interprétation graphique, constitue l'un des aspects privilégié pour la construction des tâches soumises aux enseignants. Un autre aspect, lié cette fois aux connaissances mobilisées par les enseignants dans leur pratique, a également été mis de l'avant.

2. Les connaissances professionnelles : des connaissances liées à la pratique

On reconnaît aujourd'hui que l'enseignant mobilise dans sa pratique des formes spécifiques de connaissances, différentes des formes standards apprises dans les cours de mathématiques universitaires (Ball et *al.*, 2008; Moreira et David, 2005, 2008; Margolinas et *al.*, 2005). Les récents développements sur les connaissances mathématiques des enseignants montrent que certaines connaissances prennent leur source dans la pratique d'enseignement, donc reliées aux évènements émergeant du contexte d'enseignement-apprentissage (Bednarz et Proulx, 2009; Davis et Simmt, 2006, Margolinas, 2014). Ce qui précède fait écho avec l'intention de ce travail qui s'aligne avec la conceptualisation des mathématiques professionnelles s'inspirant des travaux de Proulx et Bednarz (2011) et Moreira et David (2005), qui tracent une distinction entre les mathématiques académiques et les mathématiques scolaires en tant que champs de connaissances différents. Par exemple, lors de l'enseignement-apprentissage de concepts mathématiques, plusieurs évènements mathématiques émergent et sont pris en compte par l'enseignant: des raisonnements (adéquats ou non) permettant de donner un sens aux concepts; des conceptions, difficultés et erreurs sur les concepts travaillés et leurs compréhensions; des stratégies et approches diverses pour résoudre un problème; des représentations et symbolismes/écritures variées (standards ou non) pour exprimer une solution; des questions nouvelles et avenues à explorer, etc. Ces évènements mathématiques ne réfèrent pas uniquement aux concepts présents dans les documents curriculaires, qui établissent ce qui doit être enseigné, mais réfèrent aussi aux éléments mathématiques qui entourent l'enseignement-apprentissage des mathématiques et avec lesquels l'enseignant doit travailler en classe. Les mathématiques professionnelles de l'enseignant renvoient donc à un corpus de connaissances et de pratiques mathématiques qui sont articulées aux questions d'enseignement-apprentissage des mathématiques (Bednarz et Proulx, 2010).

Il apparait donc de cette conceptualisation des connaissances mathématiques mobilisées par l'enseignant dans sa pratique deux dimensions importantes. D'abord, ces connaissances sont situées (Lave, 1988), elles s'élaborent dans un certain contexte lié à la pratique d'enseignement. Celles-ci ne sont pas indépendantes de l'apprentissage des élèves. Ensuite, ces connaissances sont ce que Mason et Spence (1999) appellent « knowing-to act in the moment ». Ainsi, ce savoir-enseigner de l'enseignant se construit et s'adapte en temps réel à la situation, en réaction à celle-ci. On parle ici de connaissances déployées sur-le-champ, liées à l'intervention en réponse à un évènement (un script qui sort de la planification prévue, une question d'élève, une réponse inattendue, une erreur non prévue, etc.).

Cette orientation sur des mathématiques articulées à la pratique est au cœur de la recherche décrite dans ce texte. Ici, les connaissances professionnelles d'enseignants de mathématiques du secondaire sont étudiées sous deux angles à partir de tâches faisant intervenir des contenus scolaires en statistique et des raisonnements d'élèves associés à ces contenus (voir section 3). Le premier concerne la connaissance du concept d'écart type par les enseignants. Ces derniers sont-ils capables dans un premier temps de réaliser la tâche et de repérer les erreurs des élèves ? Le second concerne leur capacité à intervenir auprès des élèves pour leur donner à réfléchir à partir de leurs erreurs.

III. METHODOLOGIE

Le projet, qui fait partie d'un programme de recherche plus large axé sur des questions liées à l'enseignement de la statistique ayant comme objectif le développement et l'analyse de formations pour enrichir l'expérience statistique, est à caractère exploratoire. Pour répondre à la question de recherche, soit d'en connaitre davantage sur les connaissances professionnelles en statistique d'enseignants de mathématiques du secondaire sur l'écart type, des entrevues, organisées autour de la résolution de tâches et d'un questionnement préalablement préparé, ont été développées comme méthode de collecte de données afin d'obtenir les réponses des participants pour arriver à mieux saisir leurs capacités à enseigner ce concept. Les tâches consistaient à analyser des contenus d'enseignement ainsi qu'à réfléchir sur l'appropriation de ces contenus par l'apprenant à travers l'analyse de solutions et raisonnements d'élèves et, par le fait même, à proposer une intervention possible pour faire avancer leurs raisonnements et compréhensions mathématiques. Les entrevues ont été menées auprès de douze enseignants de mathématiques au secondaire du Québec. Les douze participants provenaient de différentes écoles et participaient à cette étude sur une base volontaire. Ils avaient tous suivi un cours de statistique dans le cadre de leur formation universitaire en enseignement des mathématiques au secondaire et avaient minimalement cinq années d'expérience dans l'enseignement des mathématiques au secondaire. Toutes ces modalités ont permis d'en connaitre davantage sur les connaissances professionnelles des enseignants, des connaissances qui sont directement reliées aux questions d'enseignement-apprentissage des mathématiques et à leurs pratiques de classe, liées au concept d'écart type.

Dans ce qui suit, une tâche est présentée à titre illustratif. Celles-ci est construite sur la base d'analyses de contenus statistiques liés au concept d'écart type (analyses didactiques, conceptuelles et épistémologiques; Brousseau, 1998) et inspirées d'analyses provenant des recherches conduites dans le domaine (Cooper et Shore, 2008 ; delMas et Liu, 2005 ; Meletiou-Mavrotheris et Lee, 2005).

1. Exemple de mise en situation[1]

Temps 1 : Résoudre le problème

Une enseignante a recueilli des statistiques tout au long de l'année sur la quantité d'eau bue mensuellement par les élèves de secondaire 4 de son école. Dans l'école, il y a trois groupes de secondaire 4 composé chacun de 27 élèves. Les statistiques qu'elle a recueillies se retrouvent dans la figure 1 qui suit. Au regard des groupes A, B et C, quelle distribution a le plus grand écart type ? Quelle distribution a le plus petit écart type ? Justifiez vos choix.

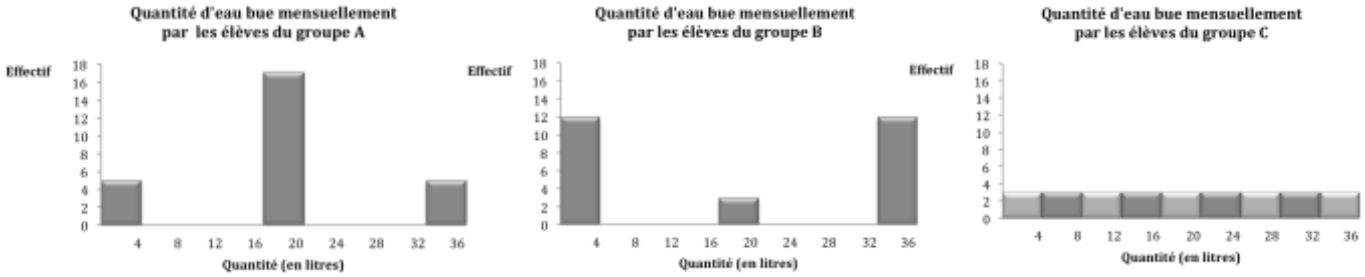


Figure 1 *– Quantité d'eau bue mensuellement par les élèves de secondaire 4*

Temps 2 : Réponse d'élèves au problème et interventions

À cette question, deux élèves en arrivent à une conclusion différente pour le groupe C. Le premier affirme que la représentation graphique du groupe C illustre la distribution avec le plus grand écart type. Ce dernier s'appuie sur le fait que la représentation graphique du groupe C est celle qui comprend le plus grand nombre de bandes. Ceci étant indicateur d'une grande variété de quantité d'eau bue mensuellement par les élèves, il conclut donc que cette distribution admet le plus grand écart type. Le second élève, quant à lui, affirme que la représentation graphique du groupe C illustre la distribution avec le plus petit écart type. Son argumentation est basée sur le fait que les bandes de la représentation graphique du groupe C ont une hauteur uniforme et par conséquent, que cette distribution admet nécessairement le plus petit écart type. Qui a raison? Comment interviendriez-vous auprès de ces élèves?

Dans cette mise en situation, le concept d'écart type intervient à travers la dispersion des données de deux distributions représentées par des histogrammes. La distribution ayant le plus petit écart type est celle du groupe A et la distribution ayant le plus grand écart type est celle du groupe B. La tâche proposée à l'enseignant découle de raisonnements fautifs d'élèves. Le choix pour les deux raisonnements d'élèves mis de l'avant dans cette question est basé notamment sur les travaux de Cooper et Shore (2008), delMas et Liu (2005) ainsi que Meletiou-Mavrotheris et Lee (2005) qui ont montré que certains étudiants étaient influencés par des aspects associés à la forme de la distribution lorsqu'ils étaient appelés à interpréter la dispersion d'une distribution à partir d'un diagramme à bandes ou d'un histogramme. Le premier élève dans sa réponse est influencé par le nombre de bandes. Le nombre de bandes n'est pas un indicatif d'un grand écart type. En associant incorrectement le groupe ayant le plus grand nombre de valeurs différentes pour l'écart à la moyenne, le groupe C, à la distribution ayant le plus grand écart type, l'élève fait abstraction de la grandeur des écarts et de l'effectif associé à chacun d'eux. Aussi, en suivant cette logique, il serait difficile d'identifier le groupe avec le plus petit écart type puisque les deux groupes restants (A et B) ont le même nombre de bandes. Le second élève quant à lui est influencé par la non-variation de la hauteur des bandes de la distribution du groupe C. Par ce raisonnement, l'élève fait

[1] Inspirée de Meletiou-Mavrotheris et Lee, 2005.

référence aux variations des effectifs et non aux variations de quantité d'eau bue mensuellement par les élèves.

Cette tâche avait pour objectif de voir si les enseignants interrogés étaient en mesure d'évaluer la dispersion des données d'une distribution en fonction de son centre et de voir de quelles façons les enseignants interrogés pouvaient intervenir sur des conceptions d'élèves liées à l'étude du concept d'écart type à partir d'histogrammes.

IV. RÉSULTATS

Seulement trois enseignants ont refusé le raisonnement des deux élèves et ont vu l'enjeu soit d'interpréter la dispersion des données de ces distributions représentées graphiquement en fonction de la moyenne. Ces derniers ont proposé une intervention dans le but de faire prendre conscience à ces élèves que la représentation graphique du groupe C illustre ni la distribution avec le plus grand écart type, ni la distribution avec le plus petit. Ceci s'est traduit pour un enseignant par des explications en référence au calcul de l'écart type.

> Dans le fond, je vais être honnête là. À part de lui montrer par calcul, je ne saurais pas comment lui montrer. [le sujet fait référence ici au calcul de l'écart type pour les trois distributions] C'est sûr qu'il y a probablement d'autres façons, mais j'aurais trop peur de le montrer d'une autre façon, après ça, dans une autre situation où est-ce que ça ne serait pas fait de cette façon-là; qu'ils essaient de le faire par raisonnement puis qu'ils se trompent. T'sais…Moi, dans cette optique-là, je suis… En tant que prof, bien souvent, j'aime mieux leur montrer les méthodes « safe » comme on dit.

Les deux autres enseignants ont plutôt proposé des explications en référence à la concentration des données se situant autour de la moyenne. Par exemple :

> Tu sais, un élève qui dit : « Moi, c'est le C qui a le plus petit écart type, parce que les barres sont toutes à la même hauteur. », je lui répondrais non, parce que quand même que tu as des extrêmes qui sont les mêmes, c'est-à-dire entre 0 et 4 puis entre 32 et 36, dans le graphique A, tu as une répartition plus juste autour de ta moyenne que dans le graphique B par exemple où tu as vraiment beaucoup de monde au début, beaucoup de monde à la fin, pratiquement personne entre les deux. Tandis que là, avec le groupe C, tu as du monde partout en même quantité.

Pour ce qui est des neuf autres enseignants qui n'ont pas été en mesure de voir l'enjeu, Il devenait difficile pour eux d'intervenir compte tenu qu'ils n'avaient pas été en mesure de résoudre le problème initialement et que plusieurs d'entre eux avaient manifesté des conceptions similaires à celles des élèves dans leur propre résolution. L'un d'eux s'est appuyé sur la concentration des données dans la classe moyenne. En comptant le nombre d'individus hors de la classe moyenne, on en vient à identifier la distribution des groupes B et C comme celles avec le plus petit écart type, puisqu'elles ont le même nombre de données se situant à l'extérieur de la classe moyenne. Cette conception ne tient pas compte de la valeur des écarts à la moyenne des données situées hors de la classe moyenne.

> Pour le grand écart type, j'ai mis B et C, parce que 24 des 27 répondants n'étaient pas dans la classe moyenne.

Un autre enseignant quant à lui a été influencé par la symétrie des distributions. Comme ces trois distributions sont symétriques, ce dernier a déduit qu'elles avaient le même écart type en pensant que les écarts positifs contrebalançaient parfaitement les écarts négatifs. Ci-dessous, le discours tenu par cet enseignant.

> Ben moi, j'ai calculé la moyenne partout. Ça m'a donné 18. Puis, après ça, j'ai dit que les distributions sont symétriques puis que l'écart type, c'est la valeur des écarts, j'ai donc affirmé que les 3 distributions avaient le même écart type. […] Même si les écarts sont plus grands, mais que c'est une moyenne des écarts, j'ai dit qu'ils auraient le même écart type. [le sujet se base sur le fait que la somme des écarts à la moyenne est nulle pour chaque distribution]

Deux enseignants ont spécifié qu'ils ne pouvaient répondre à la question, étant embêtés face à ces raisonnements. Trois autres ont préconisé le raisonnement du second élève, étant à leur tour influencés par la variation de la hauteur des bandes des histogrammes, en affirmant que l'on retrouve le plus petit écart type dans le groupe C, puisque son graphique comporte des bandes d'une hauteur uniforme, et le plus grand écart type dans le groupe A où son graphique témoigne d'une plus grande variation dans la hauteur des bandes.

> Le plus petit, c'était le 3^{ième} […] les données étaient plus homogènes [en parlant du fait que la hauteur des bandes est uniforme dans le groupe C] puis le plus grand, ce serait le premier, parce que les données sont plus dispersées…la différence, ici, entre ça puis ça [le sujet illustre les écarts entre la hauteur des bandes]. Il y a une plus grande variation dans les effectifs, 12 de différence. De 17 à 5.

Les deux derniers enseignants ont quant à eux favorisé le raisonnement du premier élève en quantifiant le nombre de possibilités (nombre de bandes) pour chacun des groupes. Pour le plus grand écart type, ce raisonnement mène à choisir le groupe C puisqu'il y a plus de possibilités dans ce groupe (plus de bandes).

> Moins de possibilités donc moins de variabilité [en parlant de la représentation graphique du groupe A]. T'sais ici, il y a combien de réponses possibles? T'en as 1-2-3. Donc ça veut dire que l'écart type est petit en comparaison avec le groupe C.

V. DISCUSSION

Comme Makar et Confrey (2005), nous remarquons que l'enseignement du concept d'écart type semble constituer un important défi conceptuel pour les enseignants. La plupart des interventions des enseignants font ressortir des conceptions alternatives déjà observées chez des élèves et chez des étudiants universitaires lorsque confrontés à un exercice d'interprétation de l'écart type à partir d'histogrammes. En effet, la plupart des enseignants étaient influencés par des aspects associés à la forme de la distribution comme la variation de la hauteur des bandes, le nombre de bandes ainsi que la symétrie de la distribution. Ces constats quant à la compréhension de ces mesures de dispersion font écho aux travaux de Dabos (2011) et souligne l'intérêt grandissant pour la formation chez les enseignants au niveau de leurs compréhensions des concepts statistiques qu'ils enseignent. Il semblerait que le concept d'écart type ne soit pas porteur de sens pour la majorité des répondants où plus de la moitié d'entre eux étaient embêtés face aux raisonnements d'élèves proposés. Ces derniers n'ont pas vu l'enjeu soit d'interpréter la dispersion des données en fonction du centre de la distribution et ont semblé avoir une connaissance de cette mesure statistique limitée à son algorithme de calcul. Rappelons l'intervention proposée par l'un des enseignants qui se résume par des explications données à l'élève en référence au calcul de l'écart type, ce dernier ne voyant pas d'autres façons d'intervenir.

Afin de permettre à leurs élèves de développer un sens approfondi des mesures statistiques, il serait non seulement important pour les enseignants du secondaire de lier les mesures de tendance centrale aux mesures de dispersion, mais aussi de porter une attention spéciale aux passages conceptuels nécessaires entre l'apprentissage de ces mesures et leur interprétation à partir de représentations graphiques compte tenu que celles-ci semblent poser problème en favorisant l'apparition de conceptions erronées. Ceci permettrait d'enrichir l'expérience d'apprentissage de la statistique offerte aux élèves. Des résultats émergent des considérations pour la formation de futurs enseignants. Étant bien conscients du défi que représente l'enseignement de l'écart type pour les enseignants, il apparaît primordial de continuer à réfléchir à des pistes pour contribuer au développement professionnel des enseignants, notamment en tentant de mieux comprendre les difficultés rencontrées par ces derniers dans ce contexte. Bien entendu, la tâche présentée constitue une amorce de pistes de réflexion qui

pourrait être exploitée en classe et servir par le fait même à la formation de futurs enseignants. Mais plus important encore est le constat que certains pouvaient réagir sur le champ aux réponses et raisonnements d'élèves en proposant des interventions pertinentes, alors que d'autres non, démontrant par le fait même des connaissances professionnelles insuffisantes relatives au concept d'écart type. Ce contexte soulève de nombreuses préoccupations et pointe vers l'intérêt d'approfondir des formations en statistique chez les enseignants et ce, afin de continuer à développer leur capacité à intervenir en classe en contexte statistique pour contribuer au développement de la pensée statistique des élèves.

RÉFÉRENCES

Ball, D.L., Thames, M.H., Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Bednarz, N., Proulx, J. (2009). Connaissance et utilisation des mathématiques dans l'enseignement: Clarifications conceptuelles et épistémologiques. *For the learning of mathematics*, *29*(3), 11-17.

Bednarz, N., Proulx, J. (2010). Processus de recherche-formation et développement professionnel des enseignants de mathématiques : Exploration de mathématiques enracinées dans leurs pratiques. *Éducation et Formation*, e-293, 21-36.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques*, La pensée sauvage.

Cooper, L., Shore, F. (2008). Students' misconceptions in interpreting center and variability of data represented via histograms and stem-and-leaf plots. *Journal of Statistics Education, 15*(2), 1-13.

Cooper, L., Shore, F. (2010). The effects of data and graph type on concepts and visualizations of variability. *Journal of statistics education*, *18*(2), 1-16.

Dabos, M. (2011). *Two-Year College Mathematics Instructors' Conceptions of Variation.* Thèse de doctorat en éducation, University of California, Santa Barbara, CA.

Davis, B., Simmt, E. (2006). Mathematics-for-teaching: An ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(3), 293-319.

Delmas, R., Liu, Y. (2005). Exploring students' conceptions of the standard deviation. *Statistics Education Research Journal*, *4*(1), 55-82.

Dodge, Y. (1993). *Statistique: dictionnaire encyclopédique*. Suisse : Université de Neuchâtel.

Garfield, J., Ben-Zvi, D. (2005). A framework for teaching and assessing reasoning about variability. *Statistics Education Research Journal*, *4*(1), 92-99.

Lave, J. (1988). Cognition in practice. Cambridge: Cambridge University Press.

Makar, K., Confrey, J. (2005). Variation-talk: Articulating meaning in statistics. *Statistics Education Research Journal*, *4*(1), 27-54.

Margolinas, C. (2014). Concepts didactiques et perspectives sociologiques? *Revue française de pédagogie*, *188*, 13-22.

Margolinas, C., Coulange, L., Bessot, A. (2005). What can the teacher learn in the classroom? *Educational Studies in Mathematics*, *59*(1-3), 205-234.

Mason, J., Spence, M. (1999). Beyond mere knowledge of mathematics: The importance of knowing-to act in the moment. Educational Studies in Mathematics, *38*(1-3), 135-161.

Meletiou-Mavrotheris, M., Lee, C. (2005). Exploring introductory statistics students' understanding of variation in histograms. *Proceedings of the 4th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Sant Feliu de Guíxols, Spain.

Moreira, P., David, M. (2005). Mathematics in teacher education versus mathematics in teaching practice. *ICMI-15 study*.

Moreira., P.C., David, M.M. (2008). Academic mathematics and mathematical knowledge needed in school teaching practice: Some conflicting elements. *Journal for Mathematics Teacher Education*, *11*(1), 23-40.

Peters, S.A. (2014). Developing understanding of statistical variation : secondary statistics teachers' perceptions and recollections of learning factors. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *17*(6), 539-582.

Proulx, J. (2017). Le calcul mental en mathématiques : Quels potentiels pour l'activité mathématique ? *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, DOI: 10.1080/14926156.2017.1378833

Proulx, J., Bednarz, N. (2011). Formation mathématique des enseignants du secondaire. Partie 2: Une entrée potentielle par les mathématiques professionnelles de l'enseignant. *Revista de Educação Matemática e Tecnologica Ibero-americana*, *1*(2).

LE THEME DES GRANDEURS ET MESURES DANS LA FORMATION DES ENSEIGNANTS DU PRIMAIRE : UNE APPROCHE INTERDISCIPLINAIRE

MAISCH[*] Clément – ABBOUD[**] Maha

Résumé – Le thème des grandeurs et mesures à l'école primaire en France est un thème partagé entre l'enseignement des mathématiques et celui des sciences expérimentales. Son importance réside dans sa participation à la construction du concept du nombre chez les jeunes élèves, et à la compréhension de la nature des sciences et de la démarche expérimentale. Dans ce texte, nous présentons une séquence de formation des futurs enseignants du primaire à travers une approche interdisciplinaire maths-sciences.

Mots-clefs : Grandeur, Mesure, Professeurs des Ecoles Stagiaires, Physique, Mathématiques.

Abstract – Teaching of quantities and measurements at primary school in France is an interdisciplinary issue shared by mathematics and physics teaching. This teaching is significant on the one hand, to build the concept of number, and on the other hand to the understanding of the nature of sciences and the scientific approach. This text presents a chain of three courses for primary student teachers conducted by both a mathematics and sciences teacher educators.

Keywords: Quantity, Measurement, Primary school student teacher, Physics, Mathematics.

I. GRANDEURS ET MESURES DANS LA LITTERATURE

La littérature de didactique des mathématiques ainsi que celle des sciences soulèvent régulièrement la question du statut des notions de grandeurs et de mesures dans l'enseignement au niveau primaire. Parallèlement, le rôle de ces notions est mis en avant dans les programmes français (MEN, 2015) surtout du point de vue de la construction du nombre dans la partie mathématique. Brousseau (2001), explique que l'étude des grandeurs à l'école primaire se justifie de nombreuses manières. Chesnais et Munier (2015) avancent de leur côté que les questions des aspects matériels et des incertitudes semblent être souvent ignorées en mathématiques. Ces aspects sont ainsi repoussés dans les programmes, au cycle 4 (collège), où ils sont majoritairement pris en charge par l'enseignement des sciences expérimentales. La variété de traitement du rapport au réel entre mathématique et physique illustre un écart qui semble se reproduire dans l'enseignement au primaire. Nous nous interrogeons donc sur la manière dont des professeurs des écoles stagiaires (PES) s'emparent de ces notions. Plus exactement, nous supposons que mettre ces PES en contact avec la réalité des objets liés aux grandeurs et aux mesures leur permettra de donner plus de sens à ces notions. Nous nous demandons aussi si un travail spécifique sur l'acte de mesurage via une approche inter-disciplinaire, peut permettre à ces étudiants de dépasser leurs difficultés relatives au caractère à la fois empirique et idéal de la mesure.

II. UNE SEQUENCE DE FORMATION

Nous avons conçu une progression de trois séances de formation menées avec une classe d'une trentaine de PES de l'ESPE de Versailles, présentées dans la figure 1 ci-dessous. Ces trois séances, de trois heures chacune, ont été menées entre les mois de mai et juin 2017.

*LDAR, Université de Cergy-Pontoise, UA, UPEC, UPD, UR – France- clement.maisch@u-cergy.fr
** LDAR, Université de Cergy-Pontoise, UA, UPEC, UPD, UR – France – maha.abboud-blanchard@u-cergy.fr

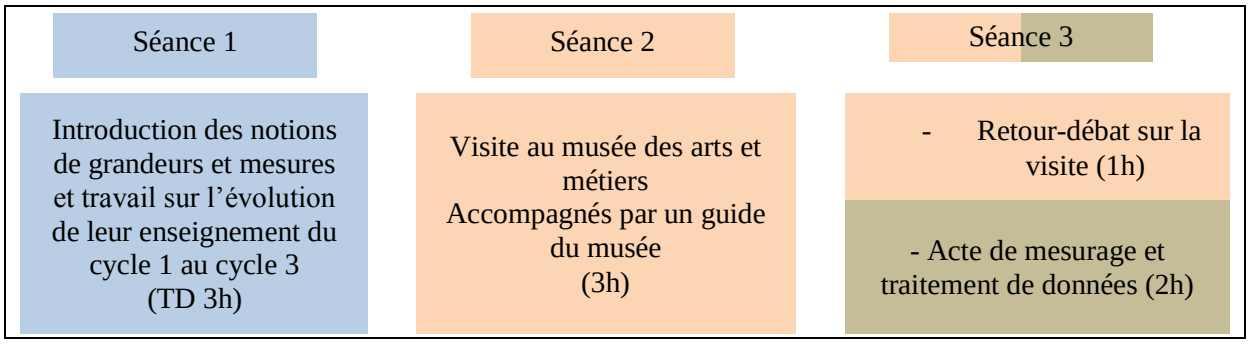


Figure 1 *– Les trois séances de formation*

La première séance qui alternait intervention collective et travail de groupes visait à introduire le thème et la progressivité de son enseignement tout au long des cycles de l'école primaire. La deuxième séance a pris la forme d'une visite au CNAM (Conservatoire National des Arts et Métiers) avait pour objectif de faire découvrir des objets liés à des grandeurs telles que la longueur, la durée ou la masse. Les étudiants devaient classer les objets observés en fonction de leur statut supposé : unité, étalon, outils de mesure. La première heure de la troisième séance avait pour objectif de discuter de ces différents classements. Dans une seconde partie de cette séance, les étudiants avaient à effectuer un acte de mesurage. Cette activité de mesurage reprend une situation courante en formation des enseignants : la mesure de la longueur d'un objet assez long à l'aide d'une bandelette de papier ce qui amènerait une certaine prise de conscience de l'acte de mesurage avec un étalon. Ainsi, il était demandé aux PES de mesurer par groupe la longueur de trois couloirs, supposés de même longueur, à l'aide d'une bandelette de carton de taille inconnue, fournie par le formateur. La conception de cette activité avait comme objectif de conduire les PES à concevoir des stratégies de mesurage différentes. Les résultats ainsi obtenus devaient être différents, ce qui impliquerait une discussion portant sur les sources d'erreurs et sur la manière de traiter les données afin de prendre une décision commune sur la longueur d'un même objet (couloir). Les phases de mises en commun avaient pour rôle de guider le cheminement de la réflexion des PES et leur faire prendre conscience de la dialectique entre le caractère empirique et celui idéal de la mesure.

Notre analyse dans ce papier se concentre sur la séance 3. Les données analysées ont été obtenues à l'aide d'enregistrement audio du débat sur la visite ainsi que pendant la phase bilan, en plus des résultats obtenus par les PES lors de leurs mesures.

III. RESULTATS

Notre recherche-action étant à caractère exploratoire, nous avançons ici quelques résultats qui ne sont que des supports de pistes de développement. Tout d'abord, nous avons défini a priori des indicateurs des connaissances des PES correspondant aux concepts liés aux grandeurs et de mesure (voir tableau 1).

Notion	**Exemple d'indicateurs**
Grandeur	- Identifie les grandeurs en jeu sans hésitation - Confond temps et durée
Unité	- Connait les différentes unités du Système International et leurs symboles - Ajoute toujours l'unité à la valeur du résultat
Multiples et sous-multiples	- Maitrise le système décimal - Effectue des conversions des multiples et sous-multiples d'une même unité

Valeur mesurée	- Enonce un résultat spécifié par une valeur et une unité - Utilise soit des nombres entiers ou soit des nombres décimaux
Acte de mesurage	- Définit un protocole de mesurage - Tient compte des erreurs de mesurage - Choisit des instruments de mesure appropriés
Traitement des données	- Utilise des outils statistiques - Exclut les valeurs non-homogènes de l'ensemble

Tableau 1 *– Indicateurs de connaissances des PES*

Nous avons recherché ces indicateurs dans les échanges relatifs au retour sur la visite du CNAM menés par les formateurs et entre étudiants. La présence de certains indicateurs autour de thèmes-clés (Grandeur, unité, multiples et sous-multiples, acte de mesurage) nous a permis d'observer un travail de défrichage et d'éclaircissement autour des notions visées. Malheureusement, cette situation ne nous a permis d'atteindre toutes nos attentes. En effet, les discours des étudiants participants à ce débat étaient souvent flous vis-à-vis des concepts visés :

> E25/ *Alors, enfin, moi ce que j'ai trouvé un peu surprenant pendant la visite c'est qu'on a vu d'abord effectivement le temps, avec les cadrans solaires, les astrolabes et effectivement les cadrans solaires, etc. Après on est passé à des longueurs, des capacités, on est revenu sur les pendules après et des horloges et on repassait d'une unité à l'autre, en fait.*

D'autre part, ces discours portaient aussi sur des aspects pragmatiques de la visite ou en dehors des concepts de grandeurs et mesures (enseignements pluridisciplinaires, liens avec les compétences visées par le programme officiel)

Concernant l'acte de mesurage, les PES ont utilisé deux types de raisonnements. Tout d'abord certains étudiants ont défini une unité de transfert (pas, pied, autre…) reportée puis mesurée avec la bandelette fournie. Mais l'ensemble des PES utilisent ensuite une stratégie de report de la bandelette elle-même. Certains groupes définissent un sous-multiple de la bandelette pour ajuster leur mesure en la pliant. Lors du traitement des données (regroupement des différentes valeurs obtenues et comparaison pour décider d'un résultat sur la longueur du couloir), l'ensemble des groupes d'étudiants utilise la moyenne pour traiter ces données. Certains étudiants émettent comme limite que cet outil mathématique n'est pas forcément le meilleur, mais qu'il est le seul outil statistique à leur disposition. Des indicateurs sur les thèmes-clés suivant sont trouvés dans leurs discours et leurs travaux : unités (référence à une unité pour mesurer une grandeur, recourt à une unité de transfert, bandelette comme étalon), multiples et sous-multiples (définition d'un sous-multiple de l'unité), acte de mesurage (protocole de mesurage, modification du protocole par rapport à une estimation des erreurs). L'estimation des erreurs est présente dans leurs pratiques mais se manifeste peu dans leurs discours. Lors du traitement des données, les PES montrent des difficultés à effectuer un retour sur le réel pour estimer la validité de leur réponse.

IV. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Les résultats de cette étude exploratoire nous ont permis d'identifier trois points :

1° La situation de débat après une visite au musée ne permet pas de mobiliser d'une façon précise les notions acquises. Elle reste à un niveau de généralité lié essentiellement à l'interdisciplinarité des thèmes abordés et aux instruments de mesure et leur évolution au cours de l'histoire.

2° La situation de mesurage permet au formateur de mathématiques de travailler sur les concepts d'unité, d'étalon mais aussi la notion de fraction (de l'unité) ;

3° Le formateur de sciences a la possibilité à travers cette situation de travailler sur l'acte de mesurage, la notion de précision et de traitements des données.

Dans une perspective de prolongation de ce travail plusieurs points nous semblent intéressants à approfondir. Ainsi, la visite du CNAM nécessite de faire travailler les PES autour d'une tâche particulière ; les prises de notes, même préalablement cadrées, ne semblent pas suffisantes pour un réinvestissement dans la suite du cours. Ensuite, lors de la seconde partie de la séance 3, les actions des PES, leurs explications des stratégies de mesurage ainsi que leurs méthodes d'analyse des données, nous ont permis de nous rendre compte de leur capacité à mettre en place de manière spontanée des stratégies et à les faire évoluer sans pour autant se rendre compte systématiquement de leurs limites ; restant ainsi à un niveau empirique d'engagement dans la tâche. Entre autres, les PES semblent avoir des difficultés à mettre en lien leurs actions et les savoirs travaillés dans les séances précédentes. Il serait intéressant de savoir si les PES ont déjà vécu ce type de situation de travail lors de leur formation (en M1 par exemple) et ce qu'ils en ont retenu. Enfin, le travail conjoint des formateurs, relevant de deux disciplines différentes avec clairement des approches qui leur sont propres, a révélé aux PES la complexité du thème « grandeur et mesure » ainsi que son potentiel comme levier pour établir des liens entre des notions relevant de plusieurs disciplines mais aussi des concepts du quotidien.

Nous pensons également que l'utilisation d'un questionnaire spécifique aux définitions des grandeurs et mesures (en lien avec celui utilisé par Passelaigue et Munier (2015)) permettrait de mieux identifier les connaissances a priori des étudiants avant une telle séquence. Ce travail a été mené à la fin de l'année scolaire 2017-2018 et vient renforcer les résultats obtenus par Passelaigue et Munier à savoir que les PES lient le concept de grandeur avec quelque chose de flou et le concept de mesure avec quelque chose de précis. Aussi, il nous semble important d'introduire la notion d'estimation de manière à observer de quelle manière les étudiants la différencie de celle de l'acte de mesurage.

Enfin, deux autres directions de travail nous semblent importantes à explorer pour identifier de manière plus approfondie les difficultés de nos étudiants. Une étude des pratiques enseignantes que ce soit au travers des ressources existantes (manuel, guides du maître, documents institutionnels…) et/ou par des entretiens avec des enseignants experts et des enseignants stagiaires (cf travail mené par Passelaigue dans sa thèse (2011)). Un autre axe de recherche pourrait porter sur une étude comparative des pratiques des formateurs ESPE en mathématique ainsi qu'en sciences.

REFERENCES

Brousseau G. (2001). *Les grandeurs dans la scolarité obligatoire*. Corps (France) : La pensée sauvage éditions, 331-348, 2002.

Chesnais A. & Munier V. (2015). Mesure, mesurage et incertitudes : une problématique interdidactique mathématique/physique. *Actes du séminaire national de l'Association de Recherche en Didactique des Mathématiques 2015*, 212-237.

Ministère de l'Education Nationale (2015). *Programmes d'enseignement du cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2), du cycle de consolidation (cycle 3) et du cycle des approfondissements (cycle 4).* Bulletin officiel spécial n°11 du 26 novembre 2015.

Passelaigue D. & Munier V. (2015). Schoolteacher Trainee's Difficulties about the Concepts of Attribute and Measurement. *Educational Studies in Mathematics*, 89, 307-336.

Passelaigue D. (2011). *Grandeurs et mesures à l'école élémentaire*. Thèse de doctorat, Université de Montpellier 2.

Groupe de travail 2 (GT2)
Les différentes pensées mathématiques

BILAN DU GROUPE DE TRAVAIL N°2

LES DIFFERENTES PENSEES MATHEMATIQUES

Responsables

JEANNOTTE[·] Doris–DEMONTY[¨] Isabelle–OURAHAY[¨¨], Mustapha

Correspondant-e CS

SABY[¨¨¨] Nicolas

I. INTRODUCTION

Ce groupe de travail fait suite aux Groupes de travail no 3 « Les différentes pensées mathématiques et leur développement dans le curriculum » des colloque EMF 2015 et 2012 ainsi qu'au groupe de travail no 10 « La pensée mathématique, son développement et son enseignement » du colloque EMF 2009. Il s'inscrit donc dans la continuité de ces groupes en abordant le concept de pensée mathématique selon trois aspects principaux.

Premièrement, les questions épistémologiques et historiques en lien avec différents modes de pensées mathématiques visaient à mettre en lumière certaines convergences et divergences entre différents champs des mathématiques d'une part, mais aussi de la didactique d'autre part, pour mieux comprendre ce qu'est la pensée mathématique.

Deuxièmement, l'étude des approches pédagogiques et de l'activité des élèves visait à mieux comprendre comment se déploie et se développe la pensée mathématique tout en favorisant une meilleure compréhension de ce qu'on entend par pensée mathématique.

Troisièmement, l'étude de la prise en compte de différentes pensées mathématiques dans les différents curriculums concernait la prise en compte ou non des différentes pensées mathématiques dans les curriculums des pays de l'espace mathématique francophone. Par exemple, leur place dans les programmes, les manuels, les ressources pour les enseignants et dans les pratiques effectives des enseignants en regard des apprentissages des élèves peut être éclairée par la recherche.

Dix-sept personnes ont participé aux activités du GT3 dont quatre canadiens, une belge, huit français, trois marocains et une ukrainienne. En tout, sept textes ont donné lieu à des présentations. Ces textes concernaient différents ordres d'enseignements du primaire jusqu'au Lycée et la formation des maitres. Quoique les textes puissent s'inscrire dans plus d'un aspect, deux textes portaient plus spécifiquement dans le premier, trois dans le second et deux dans le dernier.

Dans ce rapport, vous trouverez un résumé de chacun des textes présentés écrits à la lumière des échanges lors du travail du groupe. Nous proposons ensuite une synthèse de nos discussions ainsi que des pistes pour les congrès EMF à venir.

[·] UQAM – Canada – doris.jeannotte@uqam.ca
[¨] Université de Liège – Belgique – isabelle.demonty@ulg.ac.be
[¨¨] Université de – Maroc - mu.ourahay@uca.ac.ma
[¨¨¨] Université Montpellier – France - nicolas.saby@umontpellier.fr

II. RESUMES DES CONTRIBUTIONS

Miranda Rioux s'est intéressée au concept de pensée intuitive tel que développé dans la théorie des'Dual-Process' (Evans & Frankish, 2009) pour comprendre l'activité mathématique des élèves et éclairer le statut des erreurs intuitives dans cette activité. Cette théorie postule qu'il existerait deux modes de pensée, un rapide et intuitif, l'autre lent et délibératif. Les erreurs rencontrées par les élèves sont alors vue comme la réponse à une question complexe à l'aide de la pensée intuitive par la substitution de la question par une question plus simple. Deux interventions sont proposées pour aider les élèves à activité leur pensée 'analytique'.

Pascale Boulais, Robert Brouzet, Vivianne Durand-Guerrier, Maha Majaj, David Marino, Françoise Monnoyeur et Martine Vergnac ont présenté une étude philosophique, épistémologique et didactiques des différences et relations entre l'infini potentiel et actuel. L'étude historique du concept d'infini a permis de mettre de l'avant l'émergence, le rejet et le retour du concept d'infini actuel. Ce retour a nécessité le développement d'une nouvelle façon d'envisager l'infini mathématique. Trois situations permettant de favoriser la compréhension de ces deux infinis ont été développées et testées en classe.

Patrick Gibel a présenté une analyse d'une situation d'enseignement-apprentissage visant à sensibiliser les élèves de première S au concept de limite d'une suite. Cette analyse a été conduite à partir d'un modèle de raisonnement qui s'appuie sur la TSD et la sémiotique de Pierce et qui permet d'analyser les raisonnements des élèves et des enseignants autant en situation de formulation, d'action que de validation. L'analyse à priori et à postériori a permis de mettre en lumière la richesse de la situation en termes d'apprentissage du concept de limite d'une suite.

Doris Jeannotte et Claudia Corriveau ont présenté une étude des raisonnements mathématiques déployés des élèves de première année du primaire lors de la réalisation d'une activité nécessitant l'utilisation du matériel de manipulation. Le but était de mieux comprendre l'articulation entre les pratiques d'utilisation du matériel et les raisonnements mathématiques actualisés par les élèves. À partir d'un modèle de raisonnement mathématique qui se fonde sur la commognition (Jeannotte, 2015), l'analyse a permis de montrer comment les raisonnements des élèves se développe à partir des différentes actions posées sur le matériel ainsi que du travail d'équipes.

Isabelle Demonty s'est intéressé aux liens entre les démarches des élèves et les connaissances des enseignants pour le développement de la pensée algébrique entre 10 et 14 ans. L'étude de ses liens a permis de développer un modèle pour éclairer le problème de la transition primaire/secondaire pour le développement de la pensée algébrique. Radford (2014) caractérise la pensée algébrique selon trois aspects : l'indétermination, la dénotation et l'analyticité. Des aménagements du curriculum en termes de dénotation et de l'étude des opérations et du signe égal sont alors proposés afin de favoriser le passage à l'apprentissage de l'algèbre au secondaire.

Alain Bronner et Mirène Larguier on présenté une méthodologie d'analyse du curriculum officiel à propos de la pensée algébrique et sa mise en application pour l'analyse des curriculums français. Cette méthodologie s'appuie sur les outils de la TAD et permet de mettre au jour différentes niches potentiellement riches pour favoriser le développement de la pensée algébrique ainsi que l'introduction à l'algèbre. Cette méthodologie se fait en trois phases : 0) développer un modèle épistémologique de références (MER); 1) repérer les instances et textes officiels, délimiter le moment, la durée et l'étendue de l'entrée dans l'algèbre dans le cursus scolaire ; 2) analyser les éléments relatifs à l'organisation

mathématique et didactique. Le MER développé s'articule autour de trois grandes catégories d'activités : 1) l'étude des structures numériques ; 2) modélisation de situations intra ou extra-mathématiques par des équations ; 3) modélisation de situations intra ou extra-mathématiques par des fonctions.

Virginie Robert et Hassane Squalli ont présenté les résultats d'une analyse praxéologique de manuel quant au potentiel de développement de la pensée fonctionnelle dans les manuels scolaires québécois du 3e cycle du primaire. Cette analyse s'appuie sur un modèle de la pensée fonctionnelle développé par Robert (2018) dans son mémoire de maitrise. Ce modèle se divise en trois catégories d'activités : 1) de modélisation fonctionnelle; 2) de généralisation fonctionnelle; 3) d'étude d'une relation fonctionnelle. L'analyse du manuel a permis de mettre au jour un potentiel de développement de la pensée fonctionnelle dès le primaire dans le cursus québécois.

III. SYNTHESE

1. Bilan

Le bilan se centrera autour des trois questions suivantes :

1. La pensée, la pensée mathématique ou les pensées mathématiques : Comment différents courants (approches socio-culturelles, psychologie cognitive, TAD, TSD, etc.) permettent-ils d'éclairer notre compréhension de ces trois concepts ?
2. En quoi la conceptualisation de « nouveaux » objets mathématiques modifie, développe ce qu'on entend par pensée(s) mathématique(s), que ce soit culturellement, historiquement, ou encore, en classe de mathématiques.
3. Quels liens entretiennent, les curriculums, les pratiques de classe (activités des élèves et des enseignants) et les pensées mathématiques ?

Premièrement, dans le groupe, plusieurs théories ont été convoquées pour appréhender la (les) pensée mathématique. Le modèle de raisonnement développé par Gibel (année) et utilisé pour analyser une situation d'apprentissage s'appuie sur la TSD et la sémiotique de Pierce. Le modèle de raisonnement mathématique développé par Jeannotte (2015) se fonde plutôt sur la commognition, approche socioculturelle. La TAD est convoqué pour l'étude des curriculums et des manuels et caractérise les pensées en termes de type de tâches. La théorie cognitive des 'dual process' a été amené par Miranda Rioux pour apporter un éclairage différent sur l'erreur en mathématique. Le croisement des différentes approches théoriques lesquels l'étude de la pensée mathématique ou des pensées mathématiques est approché favorise l'enrichissement de notre compréhension de ce qu'est la pensée. Toutefois, il est alors important d'expliciter les fondements sur lesquels se basent les différentes théories afin de pouvoir bien comprendre les nuances apportées par chacune d'entre elles et favoriser la communication entre chercheure.

Deuxièmement, l'étude des différentes pensées permet de mettre de l'avant les invariants et différences, ce qui de nouveau, tend à clarifier ce qu'est (sont) la (les) pensée(s) mathématique(s). C'est aussi par l'analyse des curriculums à la lumière de différents types de pensée mathématiques que cette clarification se fait. La relation inverse est aussi à réfléchir, en quoi les différentes pensées contribuent à la conceptualisation des objets mathématiques.

Troisièmement, l'étude des curriculums tout comme des manuels et documents officiels montre la potentialité que les objets déjà présents dans les programmes présentent en termes des différentes pensées mathématiques, qui elles, sont rarement explicité. Toutefois, le

développement de ces pensées n'est pas le fruit uniquement des objets mathématiques en jeu. Les différentes pensées sont sous-tendues par différentes manières de faire, tendance de l'esprit. En particulier, la créativité et la flexibilité semblent faire consensus quant à leur nécessité pour favoriser le développement des pensées mathématiques. De même, l'exploitation de ces potentialités pose la question de la formation des maitres. En effet, comme le mentionne Mason(2018), le rôle de l'enseignant est très important dans l'actualisation de ces potentialités.

Plusieurs autres questions ont aussi été soulevées. Par exemple, le développement du contrôle mathématique au sens de Saboya (2010) est un élément à développer chez les élèves. Or, comment développer ce contrôle de sa propre activité mathématique, ce que certains associé à l'autonomie de l'élève face à son apprentissage ? Ensuite, comme certains modes de pensée deviennent invalides, ou à tout le moins obsolètes, lorsqu'on change de paradigme, comment penser les transitions scolaires ?

2. Recommandation

À la suite de cette semaine de travail, les participants ont unanimement souhaité le maintien du groupe. La sollicitation de propositions qui traitent de différents modes de pensées en liens avec différents domaines et concepts, tel algorithmiques, statistiques, probabilistes, créatrice (en particulier mais pas seulement) favorisera la conceptualisation de ce que sont les pensées mathématiques. Le travail épistémologique du groupe devrait encore constituer le cœur des discussions étant donné la nature même de la pensée. La question des curriculums à travers l'Espace Mathématique Francophone reste encore à explorer tout comme l'activité des élèves et des pratiques enseignantes pour éclairer et faire évoluer notre compréhension de ce qu'est la pensée mathématique au travers cette diversité.

REFERENCES

Evans, J. S. B., & Frankish, K. E. (2009). *In two minds: Dual processes and beyond.* New-York: Oxford University Press.

Jeannotte, D. (2015). Raisonnement mathématique : proposition d'un modèle conceptuel pour l'enseignement et l'apprentissage au primaire et au secondaire. (Thèse non publiée). UQAM.

Mason, J. (2018). How Early Is Too Early for Thinking Algebraically? Dans C. Kieran (dir.) *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds: The Global Evolution of an Emerging Field*, Chapitre 14, Suisse: Springer International Publishing, p. 329-350.

Robert, V. (2018). Le développement de la pensée fonctionnelle dans les manuels scolaires du 3e cycle du primaire québécois : une analyse praxéologique. (Mémoire non publiée). Université de Sherbrooke.

ANNEXE

LISTE DES TEXTES DU GT2 PAR ORDRE ALPHABETIQUE DU PREMIER AUTEUR

BOULAIS, P., BROUZET, R., DURAND-GUERRIER, V., MAJAJ, M. MARINO D., MONNOYEUR, F. & VERGNAC M.

Enseignement et apprentissage de l'infini aspects philosophiques, épistémologiques et didactiques

DEMONTY, ISABELLE

Entre démarches des élèves et connaissances des enseignants : quelle progression de la pensée algébrique entre 10 et 14 ans ?

GIBEL, PATRICK

Analyse d'une situation d'enseignement-apprentissage visant à sensibiliser les élèves de première S au concept de limite d'une suite

JEANNOTTE, D. & CORRIVEAU, C.

Étude des raisonnements mathématiques d'élèves de première année lors de la réalisation d'une activité nécessitant l'utilisation de matériel de manipulation

LARGUIER, M. & BRONNER, A.

Une méthodologie d'analyse du curriculum officiel à propos de la pensée algébrique

RIOUX, M.

Pensée intuitive en classe de mathématiques

ROBERT, V., SQUALLI, H. & BRONNER, A.

Le potentiel du développement de la pensée fonctionnelle dans les manuels scolaires québécois du 3e cycle du primaire : une analyse praxéologique

ELEMENTS D'ANALYSE DU CURRICULUM OFFICIEL A PROPOS DE LA PENSEE ALGEBRIQUE

BRONNER[*] Alain – LARGUIER[**] Mirène

Résumé – En utilisant les outils de la TAD (théorie anthropologique du didactique), nous proposons une méthodologie pour mettre au jour les choix de chaque pays au niveau du savoir à enseigner à propos de l'entrée dans l'algèbre et du développement de la pensée algébrique. Nous mettons à l'épreuve notre méthodologie sur les programmes français en nous centrant sur *le potentiel d'éléments pertinents pour développer la pensée algébrique* à l'école primaire et au début de l'enseignement secondaire en France.

Mots-clefs : pensée algébrique, curriculum officiel, école primaire, début du secondaire

Abstract – Using the tools of the ATD (Anthropological Theory of the Didactic), we propose a methodology to reveal the knowledge to be taught chose by each country about the entry into algebra and the development of the algebraic thinking. We test our methodology on French programs focusing on *the potential of relevant elements to develop algebraic thinking* in primary school and beginning of secondary education in France.

Keywords: algebraic thinking, official curriculum, primary school, early secondary school

I. INTRODUCTION

Cet article se situe dans le cadre du développement du réseau OIPA (Observatoire International de la Pensée Algébrique), initié par Alain Bronner en France et Hassane Squalli au Québec. Il s'appuie sur de nombreux résultats de la recherche relatifs à un *problème de la profession*, au sens de Chevallard (2006), celui de l'entrée dans l'algèbre avant même l'enseignement des outils conceptuels et sémiotiques de l'algèbre formel. En France, plusieurs travaux de recherche ont souligné les difficultés de l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre comme le rapport de la commission présidée par Kahane (2002) ou encore le numéro spécial de la revue Recherches en Didactique des Mathématiques, dirigé par Coulange et Drouhard (2012). Au Québec, les recherches menées dans cette perspective, notamment par Squalli, Mary et Marchand (2011), mettent l'accent sur ce qu'ils appellent le développement de *la pensée algébrique* dès le primaire sans usage du langage littéral de l'algèbre. Un courant plus général, *Early algebra*, centré sur les questions de développement de la pensée algébrique, est apparu depuis plusieurs années dans les recherches anglo-saxonnes et a diffusé jusqu'aux curricula de certains états du canada (comme le Nouveau Brunswick) ou de certains pays comme le Brésil. Notre projet dans le cadre du réseau OIPA est de construire une méthodologie d'analyse et de comparaison des curricula officiels des différents pays relativement au développement de la pensée algébrique. Dans le cadre du colloque EMF 2018, nous nous limiterons à présenter les étapes de notre méthodologie d'analyse, à la mettre à l'épreuve sur le curriculum officiel en France et à dégager *le potentiel d'éléments pertinents pour développer la pensée algébrique* en fin de l'école primaire et début de l'enseignement secondaire (cycle 3).

II. LES QUESTIONS DE L'ETUDE DU CURRICULUM OFFICIEL ET LES DONNEES POUR REALISER L'ETUDE

Il s'agit d'analyser le curriculum officiel relatif à tous les éléments de ce qui doit être enseigné et qui contribue ou peut contribuer au développement de la pensée algébrique (PA

[*] Université de Montpellier – France – alain.bronner@umontpellier.fr
[**] Université de Montpellier – France – miren.larguier@gmail.com

par la suite). Nous nous appuierons sur les différents textes émanant du ministère de l'éducation nationale en France qui définissent, décrivent, complètent ou commentent le curriculum officiel : textes intitulés respectivement socle, programme et ressources :

> La direction générale de l'enseignement scolaire a publié, en partenariat avec l'inspection générale de l'éducation nationale, un ensemble de ressources pédagogiques pour accompagner la mise en œuvre de ces nouveaux programmes du cycle 2 au cycle 4. (MEN, 2015)

L'objectif de l'étude rapportée dans cet article est de préciser notre méthodologie d'analyse et d'identifier dans les textes *le potentiel d'éléments pertinents pour développer la PA* dans le cadre du curriculum officiel français en lien avec les questions : où se trouvent dans le curriculum les types de tâches et les situations qui favorisent le développement de la PA ? Ces éléments potentiellement intéressants pour développer la PA sont-ils explicitement voulus par les auteurs ou sont-ils implicites et reconnus pertinents par le chercheur ?

III. METHODOLOGIE POUR ANALYSER LE CURRICULUM OFFICIEL

Notre méthodologie d'analyse du curriculum officiel s'inscrit dans la *théorie anthropologique du didactique* (TAD), introduite par Chevallard (1999a), que nous considérons comme pertinente pour étudier et comparer le développement de la pensée algébrique dans divers contextes géographiques, sociaux et politiques. Il s'agit de pouvoir comparer les choix curriculaires de différents pays et de dégager identifier dans les textes *le potentiel d'éléments pertinents pour développer la PA*.

Un préalable à l'analyse de ce potentiel est l'élaboration d'un modèle épistémologique de référence (MER) au sens de Chevallard (2006) pour favoriser l'entrée dans l'algèbre et le développement de la pensée algébrique. Nous y reviendrons dans la section suivante en donnant les éléments essentiels du MER identifiés dans différents travaux de l'OIPA.

Les étapes de la méthodologie d'analyse du curriculum sont les suivantes :

Phase 0 : Développer un MER de l'objet étudié (ici le développement de la PA).

Phase 1 : Repérer les instances et textes officiels, délimiter le moment, la durée et l'étendue de l'entrée dans l'algèbre dans le cursus scolaire. Ces données permettent une étude écologique en lien avec l'échelle de codétermination didactique de Chevallard (1999b). On pourra notamment se référer aux notions d'*habitat* et de *niche*.

Phase 3 : Analyser les éléments relatifs à l'organisation mathématique et didactique en étudiant les questions suivantes :

- Quelles sont les praxéologies (au sens de la TAD) complètes ou non et quelles sont les situations potentiellement pertinentes pour développer la PA en précisant s'il s'agit d'éléments explicites ou non ?
- Quelles sont les raisons d'être (épistémologiques et/ou didactiques) des types de tâches ou des situations repérées précédemment ? Autrement dit qu'est-ce qui les motive ?
- Des éléments de l'organisation didactique apparaissent-elles et lesquels ?

IV. VERS UN MER DE LA PENSEE ALGEBRIQUE

L'émergence d'un modèle épistémologique de référence (MER) pour les études en didactique s'est imposé en TAD : « Étant donné un processus didactique sur un thème mathématique déterminé, la première étape de notre technique d'analyse suppose l'adoption de ce que nous appelons un modèle épistémologique de référence sur le contenu mathématique en jeu. Dans le cadre de la TAD, ce modèle se formule en termes d'organisations ou praxéologies mathématiques. » (Bolea, et al., 2005). Les raisons d'être d'un MER en TAD le font

apparaître comme une référence relativement au thème étudié ou à faire construire aux élèves permettant d'analyser et de mettre en perspective autant l'organisation mathématiques (en abrégée OM) savante ou les OM à enseigner, enseignée ou apprise (Bosch et Gascón, 2005).

1. *Les travaux en lien avec l'algèbre en vue de la construction du MER*

Pour l'instant peu de recherches en France se placent dans le cadre du développement de la pensée algébrique, notamment au niveau de la fin de l'école primaire et du début du collège (cycle 2 et 3). La plupart présentent des modèles globaux d'algèbre quasi-finalisée. On peut notamment citer la recherche de Pilet (2012) qui propose un MER vue comme une OM globale du domaine algébrique, organisée en trois secteurs (niveau d'OM régionales) relatives aux thèmes suivants : les expressions algébriques, les équations et les formules. Ces OM se structurent autour d'OM plus locales où on peut retrouver les types de tâches formelles classiques : simplifier des expressions algébriques, développer des expressions algébriques, factoriser des expressions algébriques, résoudre des équations, étudier une fonction …. Ce sont ainsi les technologies formelles de l'algèbre qui structurent à un haut niveau le MER proposé qui est particulièrement utile au niveau du cycle 4 du collège et au lycée.

Une autre proposition correspond à un processus d'algébrisation successives : « L'algèbre élémentaire y est interprétée comme un *processus d'algébrisation* de praxéologies mathématiques déjà disponibles ou de praxéologies non-mathématiques facilement mathématisables en termes d'opérations sur des grandeurs numériques ou géométriques. » (Ruiz-Munzon et al, 2012)

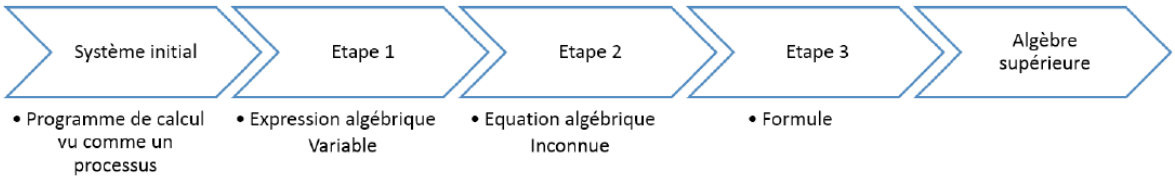


Figure 1 *: processus d'algébrisation de Ruiz-Munzon et al (2012)*

Il s'agit d'un processus dynamique basé sur un système initial relatif à un questionnement sur les programmes de calcul en deux (ibid, 2012) :

Etape 1 : Deux programmes de calcul sont-ils équivalents ?

Etape 2 : Deux programmes de calcul étant donnés, quelle(s) valeur(s) entrer dans chaque programme pour qu'ils renvoient le même résultat ?

2. *Un MER pour la pensée algébrique organisé par l'entrée par les types de tâches*

Un questionnement méthodologique pour définir un MPR de l'entrée dans l'algèbre s'est posé à nous en s'appuyant à la fois sur les travaux québécois et anglo-saxons sur la pensée algébrique et sur le modèle des praxéologies. De quel niveau praxéologique faut-il partir : définir les types ou genres de tâches ou définir la technologie, voire la théorie ? Nos travaux se situent ainsi dans l'articulation avec le MER proposé par Pilet et Ruiz-Monzon à partir de la question principale : Quels types de tâches pour l'entrée dans l'algèbre et, plus généralement, pour le développement de la pensée algébrique ?

Nous avons identifié de nombreuses situations ou types de tâches favorisant l'entrée dans l'algèbre en nous appuyant sur de nombreux travaux de recherche, comme le travail sur les programmes de calcul sur lequel s'appuie le travail de Ruiz-Monzon *et al* (2012), et que l'on retrouve aussi dans les travaux de Chevallard et Bosch (2012).

D'autres recherches (Vlassis et Demonty, 2002 ; Krysinska, Mercier et Schneider, 2009 ; Radford, 2006) mettent en lumière l'intérêt de problèmes de généralisation pour développer la pensée algébrique. Nous avions présenté au colloque EMF 2015 à Alger une analyse d'une séquence basée sur ce type de problèmes et montré la grande potentialité pour développer la pensée algébrique dès la fin de l'école primaire ou début du collège (Bronner, 2015). Dans cette séquence, le professeur commence par une première situation basée sur des chaînes carrées (figure 2) en demandant d'examiner tout d'abord les premiers cas pour un, deux, trois, cinq, ... La situation initiale concerne ainsi le type de tâches : « Calculer le nombre de constituants élémentaires (tiges) d'une chaîne à mailles carrées connaissant le nombre de mailles ».

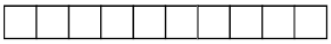


Figure 2*. Première situation « la maille carrée ».*

Enfin le professeur demande aux élèves de généraliser le travail à n'importe quel nombre de mailles, puis dans à quelle forme de mailles. Nous avons repéré dans le travail des élèves notamment deux types de procédures allant vers une pensée algébrique :

- *Les techniques basées sur des technologies de généralisation explicite :*

Après avoir examiné le cas d'un petit nombre de mailles, la généralisation porte sur une procédure de dénombrement mettant en relation la quantité cherchée avec la variable du problème, autrement-dit le nombre de mailles, en se basant sur une réorganisation spatiale. Cela conduit à des expressions fonctionnelles conformes à M1 = 2n+(n+1) ou 3n + 1 ou d'autres expressions équivalentes. Mais, un élève de fin de l'école primaire ne produit pas en général une telle expression dans le registre du langage algébrique (Duval, 1993), mais donnent des réponses dans un langage mixte qui associe langage mathématique et langage naturel. Une autre forme de présentation peut être attendue en exposant cette méthode générale sur un exemple générique au sens de Balacheff (1982). Par exemple, pour 144 mailles, il faut 3 fois 144 tiges et une tige de plus ce qui fait en tout : 433 tiges.)

- *Les techniques basées sur des technologies de généralisation implicite :*

Dans ces techniques, l'élève repère une méthode générale pour passer d'une quantité de mailles à la suivante selon un principe de récurrence. Par exemple pour la maille carrée, la généralisation est traduite par un opérateur : quand on ajoute une maille, on ajoute une tige en largeur et 2 tiges en longueur, on ajoute donc 3 tiges. Ici aussi un langage mixte est en général utilisé dans ce type de procédure. L'invariant se focalise sur le passage de la quantité de mailles à celle augmentée d'une unité (de mailles) : Pour trouver le nombre de tiges pour n + 1 mailles, on ajoute 3 au nombre de tiges pour n mailles. Cette généralisation demande de calculer la quantité de tiges au fur et à mesure.

Un autre type de problèmes favorisant l'entrée dans l'algèbre, que nous souhaitons prendre en compte dans le MER et développé dans les recherches, concerne les problèmes de partage inéquitable (ou de comparaison) dans le cas de problèmes dit déconnectés, c'est-à-dire, contrairement aux problèmes se résolvant par des procédures arithmétiques, *aucun pont ne peut être établi directement entre les données connues* (Bednarz et Janvier, 1996). Ces travaux (Bednarz et Dufour-Janvier,1992) ont montré une grande potentialité dans le développement de la pensée algébrique avec l'hypothèse qu'ils conduisent l'élève à sortir d'une démarche arithmétique simple de résolution, les poussent à imaginer des raisonnements sophistiqués les faisant entrer dans les raisonnements analytiques (Radford, 2014 et 2015). D'autres études ont confirmé ces potentialités, notamment les enquêtes et analyses élaborées par Marchand et Bednarz (1999 et 2000), Oliveira et Rhéaume (2014), Adihou et al (2015), et

montrent que de nombreux élèves sont en mesure de résoudre différents types de problèmes de structure algébrique avant tout enseignement formel de l'algèbre, bien que d'autres ont des difficultés à sortir d'une procédure arithmétique.

Dans le cadre d'une étude ICMI 13 à Hambourg en 2016, Kieran et al (2016) proposent une synthèse du développement de la pensée algébrique dans les premières années de l'école. Ils mettent l'accent sur le changement significatif d'un enseignement traditionnel centré sur le contenu de l'algèbre vers les processus de raisonnement et les représentations mathématiques appropriés pour les jeunes élèves (ibid, p. 4). Ils précisent la nature des premières activités d'algèbre qui favorisent le développement de ces processus et représentations :

> In particular, the main focal themes during the years leading up to the early 2000s included: (i) generalizing related to patterning activity, (ii) generalizing related to properties of operations and numerical structure, (iii) representing relationships among quantities, and (iv) introducing alphanumeric notation. (ibid p. 5)

Nous retrouvons ici mises en avant les situations de généralisation liées aux activités de patterns numériques et géométriques : *By far, generalizing from numerical and geometric patterns witnessed the largest amount of development and research interest* (ibid, p. 6). La deuxième classe d'activités rejoint des travaux que nous avons développés dans le cadre de l'articulation du numérique et de l'algébrique (Chevallard, 1985 ; Bronner, 1997). L'étude des propriétés des opérations ou la justification d'égalités numériques poussent les élèves à entrer dans une pensée algébrique et non à une validation numérique. Ils citent notamment Fujii[1] qui avance que ces justifications d'égalités permettent aux enseignants de construire un pont entre les problèmes arithmétiques et des raisonnements algébriques sans avoir à se fier à la connaissance préalable des expressions littérales. Les deux dernières classes d'activités mettent en avant les représentations des nombres, des mesures et des grandeurs en lien avec la comparaison de quantité ou la résolution de problèmes. Nous ne les retiendrons pas comme des types de tâches, nous considérons que ces connaissances sur les représentations sont essentielles mais qu'elles apparaitront comme éléments de techniques et technologiques au sens de Chevallard (1999a) dans notre modèle praxéologique.

3. Le contour du MER de la pensée algébrique

Ces différentes recherches et nos travaux dans le cadre du réseau OIPA nous amènent à proposer un MER de l'entrée dans l'algèbre organisé autour d'une classification des activités de résolution de problèmes en lien avec l'articulation entre le numérique et l'algébrique, structurée en trois grandes catégories, chacune d'entre elles se décomposant en des genres ou types de tâches spécifiques (la liste n'étant pas exhaustive) :

A. Etude des structures numériques :
   - Réaliser un calcul numérique réfléchi (mental ou en ligne) ou demandant la mise en œuvre d'une règle de calcul (fractions, radicaux, ...) ;
   - Montrer l'égalité de nombres ou d'expressions numériques ;
   - Etudier la structure de certains types de nombres ;
   - Étudier des propriétés arithmétiques (exemple de la somme de 3 entiers consécutifs).

B. Modélisation de situations intra ou extra-mathématiques par des équations
   - Problèmes de composition de mesures (réunion, complémentation, produit cartésien, …) ;
   - Problème de transformation, Problèmes de comparaison ;
   - Problèmes complexes avec comparaison et réunion ;

[1] Fujii, T. (2003). Probing students' understanding of variables through cognitive conflict problems: Is the concept of variable so difficult for students to understand? In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. T. Zilliox (Eds.), Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 1, pp. 49–65). Honolulu, HI: PME.

- Problèmes déconnectés de partages inéquitables ;

C. Modélisation de situations intra ou extra-mathématiques par des fonctions (et non par des équations)

- Problèmes de généralisation ;
- Etudes des programmes de calculs.

Nous n'avons pas la place pour développer ici l'élaboration du MER sur le plan des techniques relatives aux différents genres ou types de tâches du point de vue de la pensée algébrique. Les techniques relatives à ces types de tâches doivent être compatibles, voire produites, par une (des) technologie(s) idoine(s) à la pensée algébrique. Ces dernières s'amalgament dans une théorie (au sens de Chevallard, 1999a) de la pensée algébrique. Hassane Squalli, (2015) précise que sur le plan opératoire, la pensée algébrique se déploie au moyen de trois types de composantes : un ensemble de raisonnements particuliers, des manières d'approcher des concepts en jeu dans les activités algébriques, un langage pour communiquer, représenter et opérer sur les représentations … dans le cadre d'activités algébriques spécifiques. Enfin, les éléments techniques et technologiques doivent aussi être conformes à la caractérisation de la pensée algébrique élémentaire selon Radford (2014, 2015)

(1) présence d'indéterminés : la situation mathématique considérée contient de nombres non-connus (inconnues, variables, paramètres, etc.)

(2) dénotation au sens suivant : les nombres indéterminés impliqués dans la situation doivent être nommés ou signifiés d'une certaine manière.

(3) analyticité : les nombres indéterminés sont traités comme s'ils étaient des nombres connus. C'est-à-dire, bien qu'ils ne soient pas connus, les nombres indéterminés sont traités de la même manière que les nombres connus : on les additionne, les soustrait, les multiplie, les divise, etc.

Ce travail est à poursuivre et fait l'objet de débats riches et constructifs entre les diverses communautés de chercheurs dans le réseau OIPA comme on l'a vu au colloque EMF 2015 et au colloque OIPA en mai 2018 à Montréal.

V. QUELQUES RESULTATS DE L'ETUDE DU CURRICULUM

Nous présenterons ici quelques résultats sous forme de tableaux pour le cycle 2 et 3 de l'école élémentaire et du début du collège (classe de 6^{e}) en France. Tout d'abord au niveau de la discipline et des niveaux inférieurs selon l'échelle de codétermination didactique de Yves Chevallard (1999b) nous relevons les habitats au cycle 2 (figure 2) au primaire en France :

D	Secteur	Thème	Sujets
Domaine : nombres et calcul	S1 : Comprendre et utiliser des nombres entiers pour dénombrer, ordonner, repérer, comparer	Comparer, ranger, encadrer, intercaler des nombres entiers, en utilisant les symboles =, ≠,>,<.	Egalité traduisant l'équivalence de deux désignations du même nombre. Sens des symboles =, ≠, <, >.
	S2 : Résoudre des problèmes en utilisant	Résoudre des problèmes […] conduisant à utiliser les quatre opérations	Sens des opérations ; Problèmes relevant des structures additives (addition/soustraction) ; Problèmes relevant des structures multiplicatives, de partages ou de groupements (multiplication/division).

	des nombres entiers et le calcul	Modéliser ces problèmes à l'aide d'écritures mathématiques	Sens des symboles +, −, ×, :
	S3 : Calculer avec des nombres entiers	Elaborer ou choisir des stratégies de calcul à l'oral et à l'écrit.	Propriétés implicites des opérations : 2+9, c'est pareil que 9+2 3 x 5, c'est pareil que 5 x 3 3×5×2, c'est pareil que 3×10.
		Calcul en ligne	Calculer en utilisant des écritures en ligne additives, soustractives, multiplicatives, mixtes.
		Mémoriser des faits numériques et des procédures.	Décompositions additives et multiplicatives

***Figure 2** : les habitats au cycle 2*

Au cycle 3, les habitats de la pensée algébrique apparaissent dans deux domaines « nombres et calcul » et « grandeurs et mesures » :

D	Secteur	Thème	Sujets
Domaine 1 : nombres et calcul	S1 : Utiliser et représenter les grands nombres entiers, des fractions simples, les nombres décimaux	Connaître et utiliser quelques fractions simples	Connaître des égalités entre des fractions simples
	S2 : Calculer avec des nombres entiers et des nombres décimaux	Connaître des propriétés de l'addition, de la soustraction et de la multiplication	Propriétés des opérations : *- 27,9 + 1,2+ 0,8 = 27,9 + 2* *- 3,2 × 25 × 4 = 3,2 × 100* *- 45 × 21 = 45 × 20 + 45* *- 23 × 7 + 23 × 3 = 23 × 10.*
	S3 : Résoudre des problèmes en utilisant des fractions simples, les nombres décimaux et le calcul	Résoudre des problèmes mettant en jeu les quatre opérations	Sens des opérations. Problèmes à une ou plusieurs étapes relevant des structures additive et/ou multiplicative.

***Figure 3** : les habitats au cycle 3 dans le domaine « nombres et calcul »*

D	Secteur	Thème	Sujets
Domaine 2 : Grandeurs et mesures	S1 : Comparer, estimer, mesurer des grandeurs géométriques avec des nombres entiers et des nombres décimaux : longueur (périmètre), aire, volume, angle Utiliser le lexique, les unités, les instruments de mesures spécifiques de ces grandeurs	Calculer le périmètre d'un carré et d'un rectangle, la longueur d'un cercle, en utilisant une formule	Formule du périmètre d'un carré, d'un rectangle. Formule de la longueur d'un cercle.
		Déterminer la mesure de l'aire d'une surface à partir d'un pavage simple ou en utilisant une formule	Formules de l'aire d'un carré, d'un rectangle, d'un triangle, d'un disque.
		Déterminer le volume d'un pavé droit en se rapportant à un dénombrement d'unités (cubes de taille adaptée) ou en utilisant une formule	Formules du volume d'un cube, d'un pavé droit.
	S2 : Résoudre des problèmes impliquant des grandeurs (géométriques, physiques, économiques) en utilisant des nombres	Calculer des périmètres, des aires ou des volumes, en mobilisant ou non, selon les cas, des formules.	Formules donnant : - le périmètre d'un carré, d'un rectangle, la longueur d'un cercle ; - l'aire d'un carré, d'un rectangle,

	entiers et des nombres décimaux		d'un triangle, d'un disque ; - le volume d'un cube, d'un pavé droit.

Figure 4 : les habitats au cycle 3 dans le domaine « grandeurs et mesures »

Nous retrouvons ainsi des potentialités déjà repérés dans les travaux de l'Early algebra (Kieran et al, 2016) et conformes aux types de tâches de notre MER. Par exemple, nous relevons dans le secteur « résoudre des problèmes en utilisant des nombres entiers et le calcul » qu'une grande place est donnée à « l'étude des différentes désignations orales et/ou écrites »,
en particulier aux « écritures en ligne additives/soustractives, multiplicatives, mixtes, en unités de numération, etc. » (MEN, 2015, p. 74). On relève aussi l'explicitation d'exemples de stratégies de calcul en ligne (tableau du cycle 2). Il s'agit d'activités potentiellement intéressantes pour développer le concept d'égalité en tant qu'équivalence, ce qui est explicitement préconisé dans le nouveau programme de 2015, la dénotation des écritures arithmétiques, et le « sens des symboles =, ≠ » (MEN, 2015, p. 75). Ainsi, le types de tâches « calculer en ligne » est mis en avant avec un document ressource (MEN, 2016) :

> « Comme le calcul mental, le calcul en ligne permet à l'élève d'utiliser la richesse de ses connaissances sur le nombre et sur les propriétés des opérations. L'élève est ainsi amené à « faire parler » les nombres, c'est à dire à en envisager diverses écritures, des décompositions additives, multiplicatives ou utilisant les unités de numération. » (Ibid, p. 1)
>
> « Il [le calcul en ligne] participe […] à la compréhension progressive de la signification du signe « = », à concevoir comme équivalence entre le membre écrit à gauche et le membre écrit à droite, et pas seulement pour donner le résultat d'un calcul. » (Ibid, p. 3)

Par contre, nous pouvons constater que les problèmes de généralisation ne sont pas particulièrement présents, bien qu'une ancienne ressource du collège développe cet aspect, il s'agit pour nous d'un vide didactique (Bronner, 2007).

VI. CONCLUSION

L'analyse du *savoir à enseigner* relative à certains objets d'enseignement ne peut avoir d'intérêt pour un chercheur que si elle peut être mise en parallèle avec un MER, *modèle épistémologique de référence*, qui donne à voir du point de vue du chercheur les éléments essentiels de l'enseignement d'un domaine donné au regard des résultats des recherches. C'est donc la première tâche de l'analyse du curriculum officiel. Mais l'élaboration de ce MER est une tâche complexe sur laquelle plusieurs équipes travaillent. Par ailleurs nos recherches sur les curricula auront des conséquences sur l'élaboration du MER, les deux types de recherches se réaliseront en parallèle. L'analyse curriculaire fait ainsi apparaître les fondements et les raisons d'être des choix d'enseignement, qu'ils soient explicites, ou bien qu'ils soient implicitement convoqués. Enfin l'ambition de ce travail d'élaboration d'une méthodologie est de permettre la comparaison des choix curriculaires de différents pays concernant le développement de la pensée algébrique. Cette méthodologie et le MER issus de la TAD permettront ainsi d'analyser et de mettre en perspective les organisations mathématiques à favoriser pour ce développement, de faire émerger de nouvelles questions ou des types de tâches potentiellement intéressants, et de repérer des vides didactiques (Bronner, 2007) et des besoins d'apprentissages ignorés, mais aussi des potentialités.

REFERENCES

Adihou A., Squalli H., Saboya M., Tremblay M., Lapointe A. (2015) Analyse des raisonnements d'élèves à travers des résolutions de problèmes de comparaison. In Theis L. (Ed.) Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage – Actes du colloque EMF2015 – GT3, pp. 206-219.

Balacheff, N. (1982). Preuve et démonstration en mathématiques au collège. *Recherches en didactique des mathématiques*, 3(3), 261-304.

Bednarz, N., et Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: continuities and discontinuities with arithmetic. Dans N. Bednarz, C. Kieran, et L. Lee (Éd.), *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching* (pp. 115-136). Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Bednarz N. et Dufour-Janvier B. (1992) L'enseignement de l'algèbre au secondaire : une caractérisation du scénario actuel et des problèmes qu'il pose aux élèves. Actes du colloque international du 20 au 22 mai 1992 : didactique des mathématiques, formation normale des enseignants. École normale supérieur Marrakech. p. 21-40.

Bolea P., Bosch M., García F. J., Gascón J., Ruiz-Higueras L., Sierra T. A. (2005) Analyse de « La mesure en CM1 » d'après la Théorie Anthropologique du Didactique, dans M.H. Salin, P. Clanché et B. Sarrazy (eds.), Sur la Théorie des Situations Didactiques (Hommage à Guy Broussseau). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Bosch, M. et Gascon, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. *In* Mercier A. & Margolinas C. (Eds) *Balises pour la didactique des mathématiques* (p. 197-122). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Bronner, A. (2007). *La question du numérique : Le numérique en question*, Habilitation à Diriger les Recherches, Université Montpellier 2.

Bronner A., (2015). Développement de la pensée algébrique avant la lettre - Apport des problèmes de généralisation et d'une analyse praxéologique. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT3, pp. 247-264.

Chevallard, Y. (1985) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Première partie. L'évolution de la transposition didactique. *Petit x, 5*, 51-94.

Chevallard, Y. (1999a). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. Recherches en didactique des mathématiques, 19(2), 221-266.

Chevallard, Y. (1999b). Organiser l'étude. Cours 3. Écologie & régulation, Actes de la Xème École de didactique des mathématiques, Corps, La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (2006). Former des professeurs, construire la profession. Journées scientifiques sur la formation des enseignants du secondaire. Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation 17 mai 2006 http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Former_des_professeurs_construire_la_profession.pdf

Chevallard, Y. et Bosch, M. (2012). L'algèbre entre effacement et réaffirmation. Aspects critiques de l'offre scolaire d'algèbre. *In* L. Coulange, J.-P. Drouhard, J.-L. Dorier, A. Robert (coord.) *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives*. *Recherches en Didactique des Mathématiques* (numéro spécial) (pp. 19-39). Grenoble : La Pensée sauvage.

Coulange L., Drouhard J-P. et al. (2012). Enseignement de l'algèbre élémentaire, bilan et perspectives. Recherches en didactique des mathématiques, numéro spécial hors-série. La pensée sauvage.

Duval, R. (1993), Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de didactiques et de sciences cognitives*, Vol. 5, ULP, IREM de Strasbourg.

Kahane, J.P., (2002). L'enseignement des sciences mathématiques. Paris : Odile Jacob

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D., Ng, S. F. (2016). *Early Algebra. Research into its Nature, its Learning, its Teaching*. SpringerOpen.

Krysinska M., Mercier A., Schneider M. (2009). Problèmes de dénombrement et émergence de premiers modèles fonctionnels. Recherches en Didactique des Mathématiques, n° 29 (3), 247 – 304.

Marchand, P., et Bednarz, N. (1999). L'enseignement de l'algèbre au secondaire: une analyse des problèmes présentés aux élèves. *Bulletin AMQ*, *39*(4), 30‑42.

Marchand, P., et Bednarz, N. (2000). Développement de l'algèbre dans un contexte de résolution de problèmes. *Bulletin AMQ*, *40*(4), 15‑25.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE (2015) Programmes d'enseignement du cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2), du cycle de consolidation (cycle 3) et du cycle des approfondissements (cycle 4). (BO SPÉCIAL N°11 DU 26 NOVEMBRE 2015).

Ministère de l'Éducation Nationale (2016) Le calcul en ligne au cycle 3, Ressource Eduscol
http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/87/9/RA16_C2_MATHS_calcul_en_ligne_587879.pdf

Oliveira, I., et Rhéaume, S. (2014). Comment s'y prennent-ils? La résolution de problèmes de partage inéquitable par des élèves avant enseignement formel de l'algèbre. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *14*(4), 404‑423.

Pilet, J. (2012). Parcours d'enseignement différencié appuyés sur un diagnostic en algèbre élémentaire à la fin de la scolarité obligatoire : modélisation, implémentation dans une plateforme en ligne et évaluation. Thèse de doctorat, Université Paris-Diderot.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. Dans S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz, A. Méndez (Eds.), Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter, Mérida: Universidad Pedagógica Nacional, November 9 – 12, Vol. 1, pp. 2-21.

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, 26(2), 257-277.

Radford, L. (2015). La pensée mathématique du point de vue de la théorie de l'objectivation. *Actes du congrès Espace Mathématique Francophone (EMF)*. Alger, octobre 2015.

Ruiz-Munzón, N., Matheron, Y., Bosch, M. et Gascón, J. (2012). Autour de l'algèbre : les entiers relatifs et la modélisation algébrico-fonctionnelle. *In* L. Coulange, J.-P. Drouhard, J.-L. Dorier, A. Robert (coord.) *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives. Recherches en Didactique des Mathématiques* (numéro spécial) (pp. 81-101). Grenoble : la Pensée sauvage.

Squalli, H. (2015). La généralisation algébrique comme abstraction d'invariants essentiels. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT3, pp. 346-356.

Squalli, H., Mary, C. & Marchand, P. (2011). Orientations curriculaires dans l'introduction de l'algèbre : cas du Québec et de l'Ontario. Dans Lebeaume, J., Hasni, A. et Isabelle Harlé, I. (eds). Recherches et curriculums : le cas de l'enseignement des mathématiques, sciences et technologie. Bruxelles : De Boeck. pp. 65-78

Vlassis J. & Demonty, I. (2002). L'algèbre par des situations-problèmes : au début du secondaire. Bruxelles : De Boeck.

ENSEIGNEMENT ET APPRENTISSAGE DE L'INFINI ASPECTS PHILOSOPHIQUES, ÉPISTEMOLOGIQUES ET DIDACTIQUES

BOULAIS Pascale[*], BROUZET Robert[**] DURAND-GUERRIER Viviane[***] – MAJAJ Maha[****] MARINO David[*****], MONNOYEUR Françoise[******], VERGNAC Martine[*******]

Résumé – Nous nous intéressons à l'enseignement et l'apprentissage de l'infini en classe de mathématiques en considérant les différences et les relations entre *infini potentiel* et *infini actuel*. Nous présentons les principaux éléments de notre étude philosophique, épistémologique et didactique, ainsi que trois situations visant à conduire un travail explicite avec les élèves sur ces questions en début de lycée.

Mots-clefs : Didactique, philosophie, épistémologie, infini potentiel, infini actuel

Abstract – We are interested in the teaching and learning of infinite in mathematics class, taking into account the relations between potential infinite and actual infinite. We report the main elements of our current philosophical, epistemological and didactical study; we also present three mathematical situations that we consider relevant for this purpose and to be explored with 10 and 11 grade students.

Keywords: Didactic, philosophy, epistemology, potential infinite, actual infinite

I. INTRODUCTION

La question de l'infini se pose dans de nombreux domaines de la connaissance humaine et a été depuis l'antiquité un objet d'étude des philosophes et des mathématiciens, suscitant de nombreux débats sur la nature de ce concept et sur la possibilité ou non de le définir. Elle est au cœur de nombreux aspects des mathématiques, et ceci depuis les mathématiques élémentaires jusqu'aux mathématiques les plus avancées, ainsi que dans de nombreux aspects de l'informatique, et de ce fait intervient dans un certain nombre de pensées identifiées dans l'appel à communication de ce groupe de travail. Dans cette communication, nous présenterons les premières étapes d'un projet de recherche en cours financé par l'ESPE (Ecole Supérieure du Professorat et de l'Education) Languedoc-Roussillon intitulé « Enseignement et apprentissage de l'infini en mathématiques et informatique » porté par V. Durand-Guerrier (Didactique des Mathématiques) et F. Monnoyeur (Philosophie) et associant chercheurs et enseignants du secondaire et du supérieur. Dans une première partie nous présentons brièvement les analyses philosophiques, épistémologiques et didactiques qui fondent notre projet de recherche. Nous présentons ensuite trois situations que nous avons mises en œuvre en 2018 dans nos enseignements, en lien avec un travail conduit dans le groupe IREM de Perpignan. Certains des premiers résultats expérimentaux sont présentés dans la partie II.

II. CONCEPTUALISATION DE L'INFINI

Dans cette partie nous présentons les principaux éléments d'une étude philosophique qui nous conduit à prendre en considération la distinction entre *infini potentiel* et *infini actuel* et à identifier précisément l'obstacle épistémologique que constitue l'introduction de l'infini actuel. Nous donnerons ensuite, en prenant appui sur une étude écologique en cours, les principaux arguments qui nous conduisent à soutenir que 1/ il est nécessaire de sensibiliser les

[*] Lycée Arago, Perpignan – France - pascale.boulais@free.fr
[**] LAMPS, Université Perpignan Via Domitia – France- robert.brouzet@univ-perp.fr
[***] IMAG, Univ Montpellier, CNRS, Montpellier, France – viviane.durand-guerrier@umontpellier.fr
[****] Université Perpignan Via Domitia – France – mahamajaj@hotmail.com
[*****] Lycée Jules Fil, Carcassonne – France – marino.david81@gmail.com
[******] Centre Jean Pépin, CNRS – France – monnoyf@gmail.com
[*******] Lycée Jean Lurçat, Perpignan – France – martine.vergnac@orange.fr

enseignants du primaire et du secondaire aux différentes formes et difficultés de l'infini mathématique 2/ l'infini potentiel peut être identifié comme tel dès l'école primaire, puis tout au long du curriculum, et en particulier dans le cadre de la construction du nombre; 3/ l'infini actuel est introduit dans l'enseignement dès la fin du collège ou le début du lycée sans être généralement explicitement identifié dans les activités de classe.

1. Aperçu du questionnement philosophique

La question de l'infini mathématique pose de nombreuses questions historiques et philosophiques (Belna 2009, Bolzano 1993, Dubinsky & al. 2005, Mancosu 2015, Monnoyeur 1992, 2013, Serfati 1989). Aristote a établi une distinction entre un infini potentiel et un infini actuel et montré comment selon lui, seul un infini potentiel fait sens en mathématiques; la distinction et position aristotélicienne va s'imposer jusqu'au XIXe siècle, moment où Bernard Bolzano introduit l'idée que l'infini actuel existe en mathématiques sous forme de paradoxe sans pour autant en donner une définition opératoire. Ceci représente néanmoins une étape majeure car l'infini actuel était considéré jusqu'alors seulement comme attribut de la divinité et avait été rejeté comme absurde par les mathématiciens (Couturat, 1903). Bolzano, en imaginant des correspondances bijectives entre des ensembles infinis telles que la bijection entre un ensemble et une partie de lui-même, inaugure un nouveau type d'infini mathématique, un infini actuel qui se comprend comme une totalité et non plus comme une succession. Cet ensemble infini actuel est paradoxal puisqu'il contredit l'axiome euclidien selon lequel « le tout est plus grand que la partie »[1]. Cantor (1845-1918) supprime le paradoxe en stipulant que l'axiome euclidien ne vaut que pour les ensembles finis et non pour les ensembles infinis; à la même époque, Dedekind (1831-1916) pose par définition qu'un ensemble est infini s'il est équipotent à l'une des ses parties propres (Dedekind, 2008, p.173) et fait ainsi de la négation de l'axiome euclidien : « Il est possible que certaines parties d'un ensemble soient aussi grandes que le tout », le fondement de sa définition des ensembles infinis. Avec les travaux de Cantor et de Dedekind, la mathématique de l'*infini actuel* prend corps en s'appliquant aux ensembles de nombres. La négation de l'axiome du tout et de la partie a, dans ce cas, des conséquences contre-intuitives comme le fait que l'on puisse mettre en bijection l'ensemble des entiers naturels avec l'ensemble des nombres rationnels ou avec l'ensemble des nombres décimaux, ou encore le fait que deux segments de longueurs différentes contiennent « le même nombre (infini) de points » (Fischbein 2001).

Nous avons conduit un travail épistémologique à la lumière des questions didactiques permettant de mettre en évidence la pertinence d'une clarification des différences et des relations entre les deux types d'infini en jeu dans de nombreux aspects des mathématiques enseignées du primaire à l'université. Par exemple, le changement conceptuel consistant à considérer qu'on peut se donner un ensemble contenant la totalité des nombres entiers naturels fait basculer de l'infini potentiel (on peut toujours considérer le successeur d'un nombre entier) à l'infini actuel qui est souvent passé sous silence en classe. Il est remarquable que pour définir la notion d'ensemble infini, Dedekind choisisse explicitement de violer un axiome euclidien qui pouvait sembler évident, mais qui est mis en défaut dès lors que l'on accepte de considérer un ensemble comme une totalité infinie ou un infini actuel. L'affirmation de cette position théorique permet de dépasser le paradoxe apparent et de travailler sereinement avec les ensembles infinis. De nombreux auteurs s'accordent sur le fait que de considérer l'infini comme objet ou totalité est essentiel à la compréhension des ensembles infinis et à la notion de limite (Sierpinska 1985, Tirosh 1999) tandis que d'autres auteurs mettent en évidence le fait que notre compréhension de l'infini relève naturellement de l'infini potentiel, et ceci même à un niveau avancé (Monaghan 2001, Monnoyeur 2011).

[1] Dans le livre I des Eléments d'Euclide, cet énoncé correspond à la 5ème notion commune.

Ceci montre qu'il est nécessaire de conduire un travail spécifique avec les élèves et les étudiants pour permettre une appropriation adéquate de la notion d'infini actuel qui est à l'œuvre par exemple dans la construction des nombres réels et dans la notion de limite, et au-delà dans la définition des séries. L'étude de l'émergence historique de l'infini actuel en mathématiques nous montre que ce concept s'est construit envers le rejet qu'il suscitait pour apparaître ensuite aux cotés de l'infini potentiel dans des situations spécifiques. Il n'est ainsi pas étonnant que ces différentes facettes de l'infini soient difficiles à identifier par les professeurs, élèves et étudiants ; le concept d'*infini actuel* implique une nouvelle manière d'envisager notre rapport à l'infini mathématique ; nous avons vu plus haut que les mathématiciens ont dû prendre des décisions pour résoudre les paradoxes et en faire un outil du travail mathématique. On voit, par là même, qu'en mathématique, il ne suffit pas simplement de se laisser porter par la logique de la non-contradiction mais qu'il est besoin parfois d'identifier les paradoxes et d'opérer des changements fondamentaux pour les surmonter. L'exemple des deux infinis permet de montrer qu'en mathématiques, on peut dépasser des obstacles conceptuels majeurs en procédant à des choix théoriques. Ce qui précède nous conduit à mettre à l'étude les trois questions de recherche ci-dessous :

1. Quels sont les obstacles épistémologiques et didactiques à une prise en compte explicite de la différence entre *infini potentiel* et *infini actuel* dans l'activité mathématique en classe ?
2. Peut-on envisager des situations didactiques en accord avec le curriculum du secondaire permettant de mieux identifier les obstacles rencontrés par les élèves et les étudiants et de conduire en classe un travail permettant de les surmonter ?
3. Quelles sont les niches et les habitats (au sens de Artaud, 1997) permettant d'envisager un travail sur l'infini tout au long du curriculum français actuel en mathématiques et informatique de la fin de l'école primaire à l'université ?

Pour étudier ces questions, nous nous concentrons dans cette proposition de communication sur la construction des nombres tout au long du curriculum, en prenant en compte les relations entre nombres et grandeurs, et les possibilités ouvertes par l'introduction de l'algorithmique et de l'informatique dans les programmes français.

2. L'infini dans la construction du nombre, éléments d'une approche écologique

Les travaux de recherche en didactique des mathématiques sur la conceptualisation du nombre mettent en évidence un jeu entre l'*infini potentiel* et l'*infini actuel*. Nous faisons l'hypothèse que la confusion entre infini potentiel et infini actuel est un obstacle à l'appropriation du concept de nombre réel et à la distinction entre le discret, le dense et le continu. Les recherches que deux des auteures ont conduites à la transition lycée-université ont mis en évidence la fragilité des connaissances des élèves de lycée et des étudiants en début d'université sur les différents types de nombres (Vergnac et Durand-Guerrier 2014), venant confirmer les travaux de Bronner (1997). Pourtant les nombres sont travaillés tout au long du curriculum (nombres entiers, nombres entiers relatifs, nombres décimaux, nombres rationnels, nombres irrationnels, nombres réels, nombres complexes) et sont au cœur de l'activité mathématique et des applications des mathématiques dans de nombreux domaines.

Nous nous intéressons dans ce projet à l'identification des niches et habitats possibles pour un travail sur le concept d'infini dans la construction des nombres dans le curriculum actuel, en appui sur l'étude épistémologique et sur les travaux antérieurs en didactique. La notion intuitive d'*infini potentiel* apparaît très tôt lorsque l'enfant commence à comprendre que la liste des nombres entiers ne s'arrête pas. La mise en œuvre de la division décimale de nombres tels que 2/3 met à nouveau en évidence cette possibilité d'un processus qui ne s'arrête pas, dans la mesure où l'on trouve à chaque étape une décimale égale à 6 et un reste égal à 2. On écrira par exemple 2/3 = 0,666…, que l'on peut interpréter de deux manières

différentes : 1/ cette écriture rend compte d'un processus itératif indéfini (infini potentiel) ; 2/ on peut considérer une écriture du nombre 2/3 sous la forme d'une expansion décimale illimitée (une totalité achevée, infini actuel), ce que l'on écrit aussi parfois 2/3 = 0,$\underline{6}$. Le saut conceptuel consistant ici à passer de la première interprétation, relativement intuitive qui met en jeu le processus à la deuxième interprétation qui consiste à considérer l'objet obtenu par achèvement du processus est le plus souvent passé sous silence par les enseignants lors de la première rencontre et n'est en général pas repris plus tard dans le secondaire. La construction des nombres décimaux met à nouveau en jeu les deux infinis : on commence par considérer l'ensemble formé de tous les nombres décimaux (infini actuel) ; dans ce nouvel ensemble, entre deux décimaux distincts, on peut toujours placer un décimal différent des deux premiers (propriété de densité de l'ensemble des décimaux en lui-même, infini potentiel). Ceci est en lien avec une difficulté persistante en début d'université à prendre en compte le fait que l'ensemble des nombres décimaux et l'ensemble des nombres rationnels ne sont ni discrets, comme l'est l'ensemble des entiers naturels (où tout entier a un successeur), ni continus comme l'est l'ensemble des nombres réels; cette difficulté est renforcée par le fait que nous ne disposons pas d'une représentation graphique adéquate de la droite numérique décimale (Durand-Guerrier 2016). Bronner (1997) a introduit le terme d'idécimalité pour caractériser les nombres n'ayant pas un développement décimal fini et a mis en évidence un vide didactique concernant cette notion. Vingt ans plus tard, le phénomène est toujours présent, et on observe en outre un vide didactique pour la notion d'irrationalité (Vergnac et Durand-Guerrier 2014) qui met également en jeu les interactions entre *infini potentiel* et *infini actuel*. Depuis l'antiquité Grecque, la question de l'irrationalité est étroitement liée à la question de l'incommensurabilité de certains couples de grandeurs qui mettent en jeu des questions liées à l'infini potentiel (par exemple l'algorithme d'Euclide qui ne s'arrête pas) et suscitent la méfiance des anciens grecs. Ces deux notions et leurs liens constituent donc *a priori* une niche pour travailler ces questions au collège ou au début du lycée. L'interaction entre *infini potentiel* et *infini actuel* est également présente au cœur de la notion de limite de suite, qui met en jeu l'*infini potentiel* puisque l'on travaille au voisinage de l'infini et l'*infini actuel* lorsque la suite considérée admet une limite finie. Cette interaction se retrouve également lorsque l'on s'intéresse aux limites de fonctions, en particulier lorsqu'on approche les limites par des suites, ou lorsque l'on recherche des points fixes pour des fonctions données. Les méthodes classiques mettent en jeu des algorithmes pour lesquels la question de l'infini se pose encore de manière différente.

En considérant l'importance des algorithmes dans la construction des nombres, nous faisons l'hypothèse que l'introduction de l'algorithmique dans les programmes et l'utilisation d'outils informatiques (ne pouvant traiter que des représentations finies des objets mathématiques) ouvrent sur de nouvelles questions de représentations des nombres à l'interface entre mathématiques et informatique et fournit ainsi *a priori* des nouvelles niches pour penser des situations d'apprentissage adéquates. Ceci motive une reprise de l'étude des enjeux épistémologiques et didactiques de l'appropriation du concept mathématique d'infini pour l'apprentissage du nombre et des principaux concepts de l'analyse et de notions à l'interface des mathématiques et de l'informatique (en mathématiques discrètes notamment). Dans ce qui suit, nous présentons trois situations visant à conduire un travail explicite sur l'infini mathématique en début de lycée.

III. DES SITUATIONS POUR TRAITER LA QUESTION DE L'INFINI EN CLASSE

Dans cette partie, nous présentons trois exemples de situations ayant un potentiel pour travailler la question de l'infini avec des élèves de seconde en France (élèves 15-16 ans) qui ont été expérimentées au second semestre de l'année scolaire 2017-2018 en mettant l'accent

sur les questions liées à l'infini. Nous donnons également des éléments des analyses *a priori et a posteriori* de la situation *La maison de Ramanujan* que nous avons présentés pendant le colloque. Les situations proposées visent à permettre un travail explicite sur l'infini en cohérence avec les éléments présentés dans la partie précédente. Nous faisons l'hypothèse que la question qui se pose dans l'enseignement n'est pas seulement celle du dépassement de l'obstacle de l'infini actuel mais également celle de l'articulation entre *infini potentiel* et *infini actuel* dans un certain nombre d'activités en mathématiques et en informatique

1. *La duplication du carré – approche de l'idécimalité*

Cette situation est classiquement utilisée en classe pour introduire la nécessité de considérer des irrationnels et pour l'introduction de la racine carrée. Cette situation est également pertinente pour établir l'idécimalité (au sens de Bronner) de la racine carrée de 2 (Tardy & Durand-Guerrier 2010). Nous nous intéressons à la question de l'idécimalité qui met en jeu explicitement la question de l'infini potentiel. Il s'agit dans un premier temps de faire construire par les élèves un carré. On donne aux élèves deux feuilles carrées dont la mesure des côtés en cm est un nombre entier et on leur demande de créer un grand carré en utilisant entièrement ces deux carrés et en réalisant un minimum de coups de ciseaux. Une fois le grand carré obtenu matériellement, on leur demande de prouver que la figure créée est bien un carré, puis de déterminer la mesure du côté en cm de ce nouveau carré. Le travail se déroule en groupe avec production d'une narration de recherche. En classe de seconde en France, les élèves ont déjà rencontré la racine carrée en troisième, en particulier lors de l'étude du théorème de Pythagore. Nous donnons ci-dessous des éléments d'analyse *a posteriori* des expérimentations réalisées précédemment par deux des auteures de ce texte. En seconde, les constructions classiques apparaissent rapidement :



4 triangles isocèles rectangles à l'extérieur d'un des deux carrés initiaux.



4 demi-carrés de sommet commun

Nous nous intéressons ici aux résultats obtenus en ce qui concerne la question de la mesure du côté du carré réalisé. Une méthode régulièrement mises en œuvre par les élèves consiste à calculer la longueur de diagonale du carré initial (qui est isométrique au côté du grand carré) en utilisant le théorème de Pythagore. Dans le cas où la mesure du côté du carré initial est 7, les élèves proposent dans ce cas comme mesure du côté du grand carré $\sqrt{98}$ ou $7\sqrt{2}$. D'autres élèves mesurent le côté du carré obtenu et donnent comme réponse 10 cm ou 9,9 cm. D'autre enfin utilisent leur calculatrice et produisent comme mesure le nombre décimal affiché par la calculatrice, comme par exemple 9,89949437. La considération de l'aire totale du grand carré permet d'exclure les trois réponses décimales et d'établir que les deux autres réponses sont valides. Le débat est relancé par le professeur avec la question suivante : « pourrait-on écrire cette réponse avec une écriture décimale ? », elle correspond à la préoccupation forte des élèves qui refusent que les deux réponses validées soient les réponses définitives. La réponse qui émerge alors s'exprime ainsi « oui, mais la calculatrice n'a pas mis toutes les décimales » « oui, mais ce serait trop long » « non, ça ne tombe pas juste ». Les élèves sont invités à réfléchir à la possibilité d'écrire le nombre avec 20 décimales dont la vingtième n'est pas nulle, ce qui les conduit à exprimer le fait que le nombre obtenu aurait alors 40 décimales, dont la $40^{\text{ième}}$ ne serait pas nulle. On peut alors envisager le passage à un nombre n quelconque de décimales et à l'institutionnalisation de ce que $\sqrt{98}$ et $\sqrt{2}$ ne peuvent pas s'écrire avec un nombre fini de décimales non nulles. On montre ensuite que ceci vaut pour tout entier et permet d'établir le résultat suivant : étant donné un entier naturel *n*, soit c'est un carré parfait et sa racine carrée est un entier, soit ce n'est pas un carré parfait et sa racine carrée n'est pas un nombre décimal (c'est un nombre idécimal au sens de Bronner). Au cours

de ce travail, commence à émerger l'idée que l'on peut s'approcher de $\sqrt{98}$ en augmentant le nombre de décimales. A un niveau plus avancé, on peut prolonger ce travail pour aller vers l'idée que l'on peut construire une suite illimitée de nombres décimaux permettant d'approcher pour n'importe quelle valeur de n le nombre $\sqrt{98}$ à 10^{-n} près par défaut. On demande aux élèves de proposer des encadrements successifs de $\sqrt{2}$ entre deux décimaux ayant exactement 1, 2, 3, 4 ou 5 décimales avec des amplitudes respectives égales à 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5} ; on leur propose ensuite une valeur approchée à 10^{-20} près par défaut et on leur demande d'en déduire une valeur approchée à 10^{-21} par défaut. Ceci permet d'introduire l'idée d'un processus permettant de produire pour une valeur approchée à 10^{-n} près par défaut une valeur approchée à 10^{-n-1} près par défaut, et donc un processus itératif potentiellement infini.

2. Le dialogue de Galilée sur la possibilité des comparer des infinis

Cette deuxième situation vise à travailler explicitement l'obstacle de l'infini actuel que nous avons identifié dans la deuxième partie de ce texte. L'objectif principal est de faire formuler l'argument qui fait obstacle à la notion d'infini actuel : « dans un ensemble donné le tout est plus grand que la partie », et de montrer que la construction de ℕ nécessite de réfuter cet argument. Selon le déroulement de l'activité, on peut envisager une première approche de la définition axiomatique des ensembles infinis proposée par Dedekind et Cantor comme ceux qui peuvent être mis en correspondance biunivoque avec une partie propre. Le travail s'articulera autour d'un extrait du *Dialogue sur deux sciences nouvelles* de Galilée qui met en scène Simplicio et Salviati (Galilée 1966, pp.255-256). La question de Simplicio et l'argumentaire de Salviati portent sur la possibilité de comparer les infinis. Cette situation a été expérimentée en classe de seconde. Le scénario retenu est le suivant : une première phase de situation du texte dans l'œuvre de Galilée, suivie de la lecture silencieuse et individuelle de l'extrait. Une deuxième phase de travail en groupe pour répondre à trois questions. La première porte sur la compréhension du problème soulevé par Simplicio ; la seconde sur l'analyse de l'argumentation de Salviati. Dans la troisième question, on demande aux élèves de se positionner sur la question travaillée dans le texte en argumentant cette position. Le travail se déroule en groupes de 3 ou 4 élèves ; les élèves doivent produire une synthèse collective écrite de leurs réponses aux questions ci-dessus. Chaque groupe fait ensuite une présentation orale avec relevé de ses réponses écrites au tableau pour alimenter le débat sur la dernière question. L'objectif est d'aboutir à l'issue du débat à l'institutionnalisation du résultat suivant : « En considérant un ensemble qui contient tous les nombres entiers possibles, appelé ensemble des nombres entiers naturels, on peut mettre en relation cet ensemble infini et le sous ensemble formé des carrés parfaits des éléments de cet ensemble de telle façon qu'à chaque nombre entier naturel on peut associer de manière unique son carré et qu'à chaque carré parfait on peut associer de manière unique un nombre entier naturel ». Pour prolonger l'activité, les élèves peuvent être invités à explorer la question complémentaire : « Peut-on trouver d'autres parties de l'ensemble ℕ des entiers naturels qui peuvent être mises en correspondance avec lui-même ? Si oui, lesquelles ? Argumentez vos réponses. ».

3. La maison de Ramanujan - fractions continues

La situation « *La maison de Ramanujan* » est inspirée et adaptée d'une vidéo en ligne[2]. L'énoncé classique est le suivant : Dans une rue, les maisons sont numérotées de 1 à n sur un seul côté de la rue. Le numéro de la maison de Ramanujan vérifie la propriété suivante : *la somme des numéros des maisons à gauche est égale à la somme des numéros des maisons à droite.* Les expérimentations en classe de 1ère scientifique (16-17 ans) ont été réalisées au

[2] https://www.youtube.com/watch?v=T89yGlF-9ro&t=430s

printemps 2018. Cette situation permet de mettre en place un travail d'approximation d'un nombre irrationnel par des suites de rationnels en utilisant les ressources de l'algorithmique. Le scénario envisagé comporte une première phase exploratoire consistant à déterminer à la main toutes les maisons de Ramanujan pour n entier naturel compris entre 1 et 15 ; il y a une seule solution pour $n = 8$ et $m = 6$. La deuxième étape consiste à modéliser le problème par des suites, ce qui conduit à la relation $\left(\frac{2n+1}{m}\right)^2 = 8 + \frac{1}{m^2}$. . (La preuve est donnée en annexe 1). Une fois cette relation établie, on demande aux élèves d'étudier les suites qui interviennent dans le problème, à savoir la suite w de terme général $w_m = 8 + \frac{1}{m^2}$; la suite v définie par récurrence par $v_1 = \frac{1}{6}$ et pour tout entier naturel $n \geq 1$ $v_{n+1} = \frac{1}{6-v_n}$; la suite de terme général $(u_n)^2$ avec $u_n = 3 - v_n$.

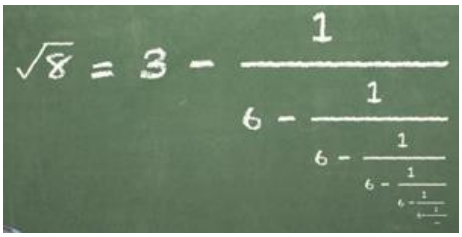


Figure 1 : extrait de la vidéo mis en débat

L'étape suivante consiste à discuter un tableau extrait de la vidéo[3] pour mettre en débat la distinction entre valeur approchée et valeur exacte, en lien avec un processus potentiellement infini (le développement en fractions continues de $\sqrt{8}$). Ici le signe égal relie valeur exacte et valeur approchée. On demande ensuite aux élèves d'écrire un algorithme de seuil. Les suites arithmétiques ont été étudiées préalablement et notamment la somme des n premiers entiers.

La situation permet une première rencontre avec une conjecture de limite de suite numérique, avec usage du tableur pour calculer les premiers termes. Le tableur fournit une représentation sémiotique de la notion de suite, en donnant une liste des valeurs de la suite et le processus de génération qui peut être recopié plus bas permet de percevoir que cette liste est infinie. Il y a dans ce cas, en acte, une perception de l'infini potentiel de la suite. Mais ce n'est pas la seule conjecture possible. On peut trouver par exemple, selon l'affichage obtenu sur le tableur : la suite u tend vers √8 ; la suite u^2 est stationnaire égale à 8 à partir du rang 6 ; la suite u tend vers 2,82842712. On note que le travail sur tableur conduit à travailler avec des approximations décimales, qui sont pertinentes pour établir les conjectures sur le comportement de ces suites. L'observation des valeurs de la suite $(u_n)^2$ semble indiquer que la suite est stationnaire à partir d'un certain rang. On prévoit de laisser les élèves traduire librement leurs observations : la suite est égale à 8 à partir de …, la suite stagne, la suite est constante. En jouant sur le nombre de décimales affichées on peut faire percevoir que, à un rang donné, la valeur 8 est probablement une valeur approchée. Nous faisons l'hypothèse que la tâche « écrire un algorithme simple de recherche un seuil » favorise la construction en acte de la définition de la convergence d'une suite numérique. Ceci motive la demande d'écriture d'un algorithme de seuil permettant de déterminer pour quelle valeur de n on obtient un écart entre u_n et √8 inférieur à 10^{-k} pour k entier naturel choisi par l'utilisateur.

Nous donnons ci-dessous quelques-uns des moments forts de la mise en œuvre de cette situation en classe de Première Scientifique française au printemps 2018. Lors du travail avec le tableur les conjectures attendues sont apparues. Le débat a permis de reconnaître que

[3] Il s'agit d'une capture d'écran issue de la vidéo mentionnée dans la note 1.

2,82842712 est une valeur décimale approchée de $\sqrt{8}$ avec deux arguments : 1/la référence à l'écriture décimale illimitée de ce nombre ; 2/le fait que le carré de ce nombre est un nombre décimal non entier dont le chiffre de droite est égal à 4. Le travail à partir du tableau issu de la vidéo sur lequel l'égalité entre $\sqrt{8}$ et la suite illimitée des fractions continues (travail individuel suivi d'un débat) nous a permis de faire des hypothèses sur la notion d'infini mobilisée par les élèves (cf. annexe). Certains élèves considèrent que l'usage du signe « = » est abusive ; leurs réponses permettent de faire l'hypothèse qu'ils font référence au processus itératif infini, mobilisant de ce fait l'infini potentiel. D'autres élèves semblent envisager l'infini actuel mais ne le reconnaissent pas dans l'écriture proposée. Quelques élèves néanmoins semblent mobiliser l'infini actuel. Suite au débat, le professeur a institutionnalisé le résultat suivant : « $\sqrt{8}$ est un nombre irrationnel. On peut l'approcher d'aussi près que l'on veut par une fraction rationnelle. L'écriture avec le signe $=$ est abusive. Si ce processus s'achevait (ce qui n'est pas possible puisqu'il est infini) on atteindrait $\sqrt{8}$. On traduit ceci en disant que la suite u_n tend vers $\sqrt{8}$, ce que l'on note $\lim_{n\to\infty} u_n = \sqrt{8}$.[4] La limite d'une suite de nombres rationnels peut être un nombre irrationnel.

Cette situation a donc permis 1/ d'introduire l'approximation du nombre $\sqrt{8}$ par la suite des réduites de sa fraction continue, qui fournit un exemple de processus itératif produisant une suite illimitée de fractions rationnelles permettant d'approcher pour tout entier naturel k le nombre $\sqrt{8}$ à 10^{-k} près par défaut ; 2/ d'utiliser ce résultat mettant en jeu l'*infini potentiel* pour déterminer des solutions entières à un problème posé dans le domaine de la théorie élémentaire des nombres. A l'issue de cette étude, on voit émerger des questions et des réflexions de nature épistémologique qui permettent (cf. annexe 3) aux élèves de prendre conscience de certains aspects de la pensée scientifique : « l'intuition mathématique » se construit sur des connaissances familières, ici notamment sur la grande familiarité de Ramanujan avec les équations de Pell-Fermat ; les changements de cadres sont des pratiques ordinaires dans la résolution de problèmes mathématiques.

IV. CONCLUSION

Dans cette communication, nous avons présenté un argumentaire soutenant l'intérêt de travailler explicitement les notions d'*infini potentiel* et d'*infini actuel* en classe de mathématiques. Notre thèse est que l'infini actuel ne constitue pas un dépassement de l'infini potentiel, mais plutôt que les deux types d'infinis et leurs relations vivent dans la classe de mathématiques. Elle s'appuie sur l'étude philosophique, épistémologique et didactique présentée dans ce texte. Les trois situations proposées dans la deuxième partie sont des exemples de ce que l'on peut envisager dans le cadre des programmes actuels de lycée français. L'analyse *a posteriori* de la mise en œuvre de la situation « La maison de Ramanujan » montre la pertinence de ce type de situation pour conduire un travail explicite sur l'infini dans les études secondaires. Ce thème touche à plusieurs des thèmes de l'appel du groupe de travail sur les pensées mathématiques (intuitif *versus* conceptuel ou formel ; théorique *versus* empirique ; algorithmique *versus* analytique). Ce qui est présenté ici est une première étape d'un projet de recherche en cours qui concernera d'autres domaines mathématiques et d'autres niveaux de classe ainsi que les interactions mathématiques – informatique.

[4] Rappelons que cette égalité n'est pas une égalité entre deux nombres mais une abréviation de la phrase « La suite u_n converge vers le nombre $\sqrt{8}$. »

RÉFÉRENCES

Artaud M. (1997). La problématique écologique -un style d'approche du didactique, Actes de l'école d'été de didactique des mathématiques, Houlgate, 19-27 août 97, 101-139.

Belna, J.P. (2009). Histoire de la théorie des ensembles, Paris : Ellipse.

Bolzano B (1993). Les paradoxes de l'infini. Traduction et notes par H. Sinaceur. Paris : Seuil.

Bronner, A. (1997). *Étude didactique des nombres réels, idécimalité et racine carrée*. Thèse de l'Université Grenoble 1 (France).

Couturat, M. (1903). *Opuscules et fragments inédits de Leibniz*. Paris : F. Alcan Editeur.

Dedekind, R. (2008). *La création des nombres*, traduction et notes par H. Sinaceur. Paris : Vrin, coll. « Mathesis ».

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, A., Brown, A. (2005). Some Historical Issues and Paradoxes Regarding the Concept of Infinity: An APOS-based analysis: Part 2. *Educational Studies in Mathematics*, 58/3, 335-359.

Durand-Guerrier, V. (2016). Conceptualization of the continuumn an educational challenge for undergraduate students, *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 2, 338–361.

Fischbein E. (2001). Tacit models and Infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 309-329.

Galilée, G. (1966). *Dialogues. Lettres choisies.* Traduction de P-H Michel. Paris : Hermann.

Mancosu, P. (2015). *Infini, logique, géométrie*. Paris : Vrin.

Monaghan, J. (2001). Young peoples' ideas of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 239-257.

Monnoyeur, F. (1992, 1995, 2011, 2014). *Infini des mathématiciens, infini des philosophes.* Paris: Belin.

Monnoyeur, F. (2011) The indefinite within Descartes' mathematical Physics. Vol 19, *Eidos*.

Monnoyeur, F. (2013) Nicholas of Cusa's methodology of the Infinite. Conference paper : *History & Philosophy of Infinity*. At University of Cambridge, Cambridge, UK.

Serfati, M (1989). Autour de l'axiome du choix. In *La Démonstration mathématique dans l'Histoire, Actes du colloque Inter-IREM Epistemolologie et Histoire des mathématiques*, Besancon, pp. 377-386.

Sierpinka, A. (1985). 0bstacles épistemologiques relatif à la notion de limite. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, volume 6.1.

Tardy, C., Durand-Guerrier, V. (2010). Introduction of an historical and anthropological perspective in mathematics: an example in secondary school in France. Durand-Guerrier V. et al. (eds). *Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Jan 2009, LYON, France*. ENS Lyon, pp.2791-2800.

Tirosh, D. (1999). Finite and infinite sets: Definitions and intuitions. *International Journal of Mathematical Education in Science & Technology*. 30(3), 341-349.

Vergnac, M., & Durand-Guerrier, V. (2014). Le concept de nombre réel au lycée et en début d'université: un objet problématique. *Petit x*, 96, 7–28.

ANNEXES

ANNEXE 1 : La solution de Ramanujan

Pour une rue comportant n maisons, la somme des numéros des maisons situées à gauche de la maison dont le numéro est m est la somme des entiers de 1 à $m-1$, soit $\frac{m(m-1)}{2}$; la somme des numéros des maisons situées à droite de la maison dont le numéro est m est la somme des entiers de $m+1$ à n qui est égale à $\left[\frac{n(n+1)}{2}-\frac{m(m+1)}{2}\right]$, soit $\frac{(m+n+1)(n-m)}{2}$. L'égalité des deux sommes conduit à la relation $\left(\frac{2n+1}{m}\right)^2 = 8+\frac{1}{m^2}$[5]. La piste imaginée par Ramanujan pour déterminer les couples d'entiers naturels (m,n) qui satisfont cette relation est de considérer une suite de valeur approchée de $\sqrt{8}$ par les nombres rationnels correspondant aux réduites de la fraction continue associée[6]. La première réduite est $(3-\frac{1}{6})$ soit $\frac{17}{6}$. Ceci correspond au premier couple de solutions : 8 maisons dans la rue, la maison de Ramanujan est la maison numéro 6. De la même manière, chacune des réduites de la fraction continue fournit un couple *(2n+1, m)* ou *n* est le nombre de maison dans la rue, et *m* le numéro de la maison de Ramanujan. C'est cette méthode qui est décrite dans la vidéo mentionnée ci-dessus.

ANNEXE 2 : Quelques réponses d'élèves illustrant les diverses formes d'infini mobilisées

Commentant l'extrait de la vidéo de la figure 1, certains élèves considèrent que l'usage du signe « = » est abusive ; leurs réponses permettent de faire l'hypothèse qu'ils font référence au processus itératif infini, mobilisant de ce fait l'infini potentiel.

E1 : je pense que c'est étrange de l'utiliser car on dit que la limite tend vers $\sqrt{8}$. Donc l'équation qui s'étend à l'infini est approximative. Il vaudrait mieux $\approx$.

E2 : cet égal devrait être remplacé par $\approx$ car c'est une équation approximative qui est à l'infini. Puisqu'elle n'est pas marquée dans son ensemble (présence de …) on ne peut pas dire que c'est une écriture exacte.

D'autres élèves semblent envisager l'infini actuel mais ne le reconnaissent pas dans l'écriture proposée.

E3 : Il démontre le résultat de $\sqrt{8}$. Le signe $=$ permet de prouver que $\sqrt{8}$ équivaut à une infinité de fractions (nombres). Il ne devrait pas mettre de $=$ car $\sqrt{8}$ n'a pas de valeurs exactes. Il devrait utiliser le signe pour désigner une valeur approchée ($\approx$). Le calcul est à l'infini.

Quelques élèves néanmoins semblent mobiliser l'infini actuel, comme dans la réponse ci-dessous.

E4 : Le signe $=$ est utilisé ici car c'est une suite infinie qui se rapprochera de plus en plus de $\sqrt{8}$. A un nombre $+\infty$ la suite sera égale à $\sqrt{8}$. Cependant, si on s'arrête avant l'infini, on sera obligé de mettre $\approx$ car même s'il s'approche de $\sqrt{8}$ à une très grande décimale, elle ne sera jamais égale.

ANNEXE 3 - Deux exemples de questions d'élèves à l'issue de l'étude

Comment est-il possible que Ramanujan ait eu une telle intuition ?
C'est surprenant de passer par des suites infinies pour résoudre le problème des maisons.

[5] Cette relation montre que les couples $(2n+1, m)$ sont les solutions de l'équation diophantienne quadratique de Pell : $x^2-8y^2=1$

[6] Les réduites de cette fraction continue fournissent les meilleures approximations rationnelles de $\sqrt{8}$.

ENTRE DÉMARCHES DES ÉLÈVES ET CONNAISSANCES DES ENSEIGNANTS : QUELLE PROGRESSION DE LA PENSÉE ALGÉBRIQUE ENTRE 10 ET 14 ANS ?

DEMONTY* Isabelle

Résumé – Sur la base de définitions des caractéristiques de la pensée algébrique entre 10 et 14 ans et de recherches empiriques menées auprès des élèves et des enseignants, ce texte propose un modèle visant à éclairer la progression à réaliser dans ce domaine à la transition entre l'école primaire et secondaire.

Mots-clefs : pensée algébrique, transition primaire et secondaire, développement, démarches des élèves, connaissances des enseignants

Abstract – Based on definitions of the characteristics of the algebraic thinking between 10 and 14 years, and on empirical researches with students and their teachers, this article proposes a model that lights the progress to be realized in this domain during the transition from primary to secondary school.

Keywords : Algebraic thinking, transition from primary to secondary school, development, students'reasoning, teachers'knowledge.

L'objectif de cet article consiste à développer une réflexion sur le développement de la pensée algébrique [PA], lors de l'articulation entre l'école primaire et secondaire. Il est structuré en trois parties. La première établit, sur la base de définitions de la PA, un premier modèle de développement de cette pensée. La deuxième partie présente des travaux de recherche menés auprès d'élèves et d'enseignants à la fin de l'école primaire et au début de l'école secondaire en Belgique francophone et au Grand-Duché du Luxembourg : ils permettent d'analyser la manière dont la PA semble se développer entre 10 et 14 ans, dans les environnements habituels de classe. Enfin, la troisième partie approfondit le modèle de développement de la PA afin de mettre plus clairement en évidence les éléments clés qui doivent être davantage travaillés dans les classes pour permettre aux élèves au terme du collège, une meilleure maitrise de la PA.

I. PREMIERE PARTIE – L'EVOLUTION DE LA PA ENTRE 10 ET 14 ANS

La question de définir en quoi consiste la pensée algébrique [dénommée PA dans la suite du texte] a fait l'objet de nombreux débats ces dernières années : si les premières définitions ont émergé dans les années 90, au moment où l'algèbre était envisagée au travers des notations formelles, l'introduction du courant « Early algebra » a proposé d'autres éclairages permettant de mettre en évidence les caractéristiques d'une forme algébrique de pensée observable dès l'école primaire, avant toute introduction de ce symbolisme formel.

1. Indétermination, analycité et dénotation : trois caractéristiques de la PA avant l'introduction de l'algèbre formelle

Radford (2014) propose une définition de la PA qui n'est pas liée aux notations formelles. Envisager de la sorte la PA est éclairant pour cibler ses caractéristiques à l'école primaire, avant tout apprentissage de l'algèbre formelle. Selon lui, la PA présente trois caractéristiques.

- L'indétermination : le problème posé à l'élève doit impliquer des nombres indéterminés (inconnues, variables, paramètres…).

* Université de Liège – Belgique – isabelle.demonty@uliege.be

- La dénotation : ces nombres indéterminés doivent être pleinement reconnus par la personne qui résout le problème. Cette reconnaissance peut passer par une écriture à l'aide de nombres ou de signes conventionnels (tels que des lettres) ou non conventionnels (par exemple, un point d'interrogation ou un mot). Ces nombres indéterminés peuvent également s'exprimer oralement ou même par des gestes.
- L'analyticité : elle se réfère à une manière particulière de raisonner en intégrant pleinement ces nombres indéterminés dans le raisonnement. Bien que certaines quantités du problème ne soient pas connues, la personne qui résout le problème parvient à réaliser des opérations (addition, soustraction, multiplication ou division) sur ces quantités, exactement de la même façon que si elles étaient connues, en vue d'aboutir au terme du raisonnement à identifier ces quantités indéterminées.

Différents types d'activités peuvent développer ce raisonnement basé sur des quantités indéterminées à l'école primaire.

Les problèmes de partages inégaux constituent un premier environnement porteur pour développer un tel raisonnement. La figure 1 présente un tel problème accompagné d'une démarche mise en place par un élève de 6e primaire, avant toute introduction de l'algèbre (Oliveira & Réhaume, 2014, p. 417).

Martha, Raphaël et Anne ont ensemble 270 porte-clés. Raphaël a le double du nombre de porte-clés de Martha et Anne a le triple du nombre de porte-clés de Raphaël. Combien de porte-clés chacun a-t-il ?

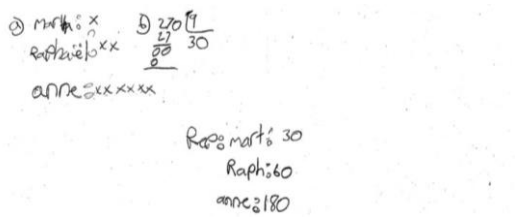


Figure 1 *– Un exemple de problème de type « Partages inégaux » résolu par un élève*

Lorsque l'élève cherche un calcul permettant de résoudre un tel problème, il doit établir des liens entre des quantités de l'énoncé :

- certaines sont connues : le nombre total de porte-clés (270) et les rapports entre le nombre de porte-clés de chaque enfant (Raphaël a deux fois plus de porte-clés que Martha et Anne en a trois fois plus que Raphaël) ;
- et d'autres sont inconnues (ici, il s'agit du nombre de porte-clés qu'a chaque enfant (représentés par des croix dans la production de l'élève).

Pour résoudre ce problème, l'élève aurait pu procéder par essais-erreur, en fixant d'emblée une valeur au nombre de porte-clés de Martha puis en cherchant ce qu'auraient les deux autres enfants et en vérifiant que le total de 270 était respecté. Ce n'est pas cette démarche que cet élève a choisi. En divisant 270 par 9, il a compris que prendre une fois un nombre, puis encore 2 fois ce nombre et enfin 6 fois ce nombre, cela revient au même que prendre 9 fois le nombre. Il a donc élaboré un raisonnement impliquant une quantité indéterminée pour trouver le calcul 270 : 9. Ce raisonnement est de nature algébrique.

Les activités de généralisation basées sur des suites numériques constituent un autre contexte favorable. Dans celles-ci, les élèves sont amenés à dégager une règle permettant de retrouver n'importe quel terme d'une suite de nombres en fonction de son rang :

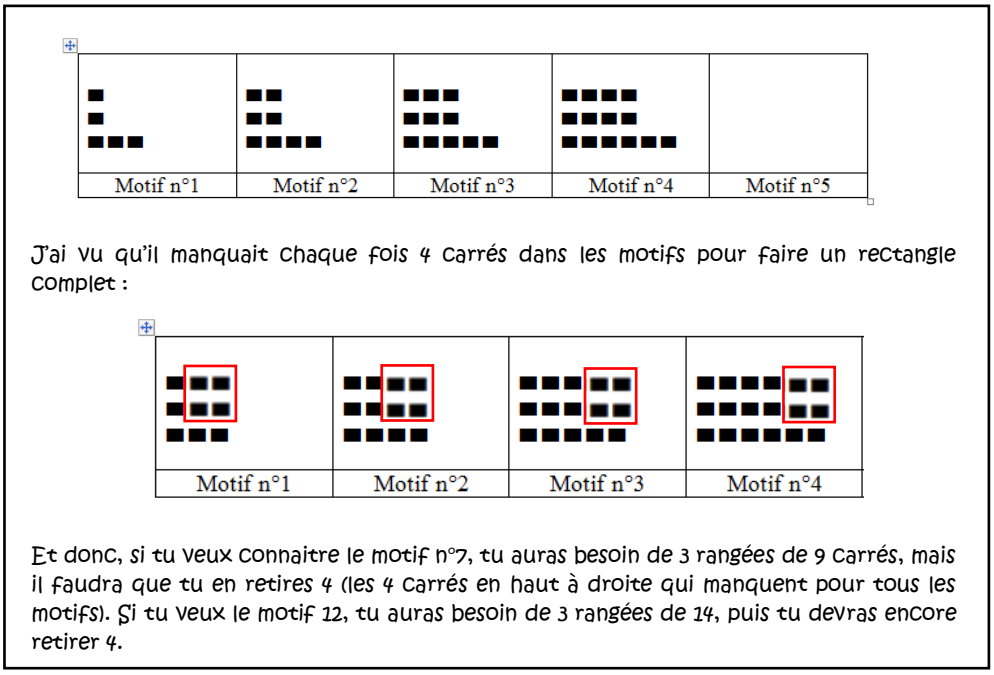


Figure 2 – *Un exemple d'activité de généralisation résolue par un élève*

Lorsque l'élève établit une règle dans ces activités de généralisation, il est amené à réaliser des opérations impliquant une quantité indéterminée (Radford, 2014), car cette règle doit convenir quel que soit le motif choisi. Dans l'exemple présenté ci-dessus, l'élève parvient à généraliser une règle : au travers des deux exemples, il montre qu'il a bien compris le lien entre le numéro du motif (7 ou 12) et les opérations à effectuer.

2. *Analycité, conversion et traitement : trois caractéristiques de la PA après l'introduction de l'algèbre formelle*

Bednarz et Janvier (1993) ont analysé finement les démarches mises en œuvre par les élèves pour résoudre des problèmes pouvant se modéliser sous la forme d'une équation. Selon ces auteurs, lorsqu'ils résolvent le problème par l'algèbre, les élèves développent un raisonnement analytique dans la mesure où il s'agit de mobiliser dès le départ, des quantités dont certaines sont connues et d'autres ne le sont pas. C'est donc une approche globale du problème qui est ici attendue pour modéliser le problème avant de chercher directement le calcul permettant de le résoudre (Oliveira & Réhaume, 2014). Cette approche globale est représentée par une équation (Bednarz et Janvier, 1993). Par la suite, le contexte du problème n'est plus pris en compte : des opérations algébriques formelles, dont la pertinence se justifie en référence à des propriétés mathématiques, sont effectuées en vue de résoudre l'équation. Duval (2002) approfondit cette idée de de prise de distance vis-à-vis du contexte qu'il est nécessaire de réaliser dans le cadre d'une résolution algébrique d'un problème, lorsque le langage algébrique formel a été appris. Selon lui, deux étapes sont impliquées dans une telle résolution : la conversion des données de l'énoncé à travers l'écriture d'une équation et le traitement, c'est-à-dire la résolution proprement dite de l'équation. Dans la phase de conversion, l'énoncé est central : les élèves sont notamment amenés à identifier les quantités indéterminées du problème et, dans le cas où il y en a plusieurs, à désigner toutes ces quantités indéterminées à l'aide d'une seule d'entre elles, dans le but de produire une équation. Par la suite, dans la phase de traitement, l'élève doit prendre de la distance par

rapport à l'énoncé ; il va manipuler les expressions algébriques impliquées dans cette équation en fonction de propriétés des opérations et de l'égalité.

Radford (2008) a envisagé les caractéristiques de la PA face aux activités de généralisation, une fois l'algèbre formelle introduite. En fonction de leur niveau dans les apprentissages, les élèves peuvent symboliser les moyens de généralisation produits de différentes manières (Radford, 2008).

- La variable est symbolisée par un nombre.
- La variable est symbolisée par un substitut symbolique.
- Une expression algébrique formelle

3. *Premier modèle présentant le développement de la PA entre 10 et 14 ans*

	Caractéristiques de la pensée algébrique	
	A l'école primaire	Au premier degré de l'enseignement secondaire
Indétermination	Problèmes impliquant des nombres indéterminés	
Analycité	Première facette Importance du contexte de l'activité Penser globalement le problème en réalisant des opérations impliquant des données dont certaines sont connues et d'autres pas	Première facette Importance du contexte de l'activité Penser globalement le problème en réalisant des opérations impliquant des données dont certaines sont connues et d'autres pas (phase de conversion) Deuxième facette Distanciation par rapport au contexte de l'activité Effectuer des opérations algébriques basées sur les propriétés des opérations et de l'égalité (phase de traitement)
Dénotation	Symbolisations informelles	Symbolisations formelles

Figure 3 *- Modèle présentant les caractéristiques de la PA*

Même si, comme le souligne Radford (2014), des tendances communes apparaissent en matière de PA à la fin de l'école primaire et au début de l'enseignement secondaire, l'intégration du langage algébrique formel et des techniques algébriques qui lui sont associées va ouvrir de nouvelles perspectives en matière de résolution de problèmes ou de généralisation au secondaire (Bednarz & Janvier, 1993 ; Duval, 2002 ; Radford, 2008), en autorisant un détachement complet du contexte même évoqué dans l'énoncé. Ce détachement ne va pas être sans conséquence sur la manière de réaliser l'analycité. En effet, tant en primaire qu'en secondaire, l'analycité va intervenir une première fois, lors de l'approche globale de la situation représentée en primaire à l'aide de symbolisations informelles et en secondaire, sous la forme d'une équation ou d'une expression algébrique. En secondaire, cette analycité sera également impliquée une seconde fois pour résoudre l'équation ou pour réduire l'expression algébrique dégagée de l'activité de généralisation car l'élève va à ce moment également être amené à réaliser des opérations sur des expressions algébriques qui, par définition, impliquent des nombres indéterminés. Le modèle précédent synthétise la manière dont la PA entre 10 et 14 ans devrait évoluer entre 10 et 14 ans.

II. DEUXIEME PARTIE : RECHERCHES EMPIRIQUES SUR LE DEVELOPPEMENT DE LA PA ENTRE 10 ET 14 ANS.

Cette seconde partie vise à mettre en perspective les résultats de recherche que nous avons menés concernant à la fois les raisonnements des élèves en matière de PA et les connaissances dont disposent les enseignants pour soutenir une telle pensée. Cette mise en perspective vise à

analyser comment les besoins d'apprentissage des élèves sont actuellement pris en charge par les enseignants.

Pour porter un tel regard, nous avons mené trois recherches en Belgique francophone et au Grand-Duché du Luxembourg. La première s'intéresse à l'évaluation des acquis des élèves de 15 ans, en matière de résolution de problèmes pouvant se modéliser sous la forme d'une équation du premier degré à une inconnue. Dans cette recherche, nous avons eu l'occasion d'interroger plus spécifiquement la question de la capacité des élèves à intégrer les techniques algébriques dans le cadre de la résolution d'un problème (Demonty, Fagnant & Dupont, 2015). La deuxième recherche s'intéresse au développement de l'abstraction lors de la transition entre l'enseignement primaire et secondaire. Dans le cadre de cette recherche, nous avons pu recueillir des informations relatives aux élèves et aux enseignants face à une situation particulièrement propice au développement de la PA : l'analyse d'une suite de nombres présentée de manière picturale (Demonty, Fagnant & Vlassis, 2015 ; Demonty, Fagnant & Vlassis, 2018). La troisième recherche s'intéresse aux connaissances des enseignants des trois premières années de l'enseignement secondaire pour enseigner l'algèbre, dans le but de concevoir et d'implanter un programme de développement professionnel. Cette recherche nous a amenée à approfondir la question de la mobilisation des connaissances pour enseigner dans le cadre de l'ensemble des activités à mener à ce niveau de la scolarité (Demonty & Vlassis, 2016 & 2017).

Ce regard croisé sur les démarches des élèves et les connaissances des enseignants aborde deux thématiques. La première thématique - analycité, symbolisations formelles et informelles - s'intéresse aux activités de généralisation d'une suite de nombres présentées de manière picturale. La seconde thématique - Analycité, symbolisation formelles et techniques algébriques - approfondit la réflexion auprès des apprentissages et des enseignements algébriques formels du secondaire.

1. Analycité, symbolisations informelles et formelles

En matière d'analycité, il apparait que les acquis des élèves de 10-12 ans sont importants mais qu'ils évoluent finalement peu entre 10 et 14 ans (Demonty, Fagnant & Vlassis, 2015). De plus, les élèves de 14 ans éprouvent des difficultés considérables pour symboliser, par l'algèbre, leurs raisonnements (Demonty, Fagnant & Dupont, 2015). Par ailleurs, un nombre important d'enseignants ne proposent pas d'aides dans ces domaines spécifiques (Demonty, Fagnant & Vlassis, 2018). En effet, nos résultats montrent que de nombreux instituteurs ne parviennent pas à reconnaitre comme telles des démarches algébriques correctes s'éloignant de la leur, risquant ainsi d'inhiber un nombre non négligeable de démarches pourtant tout à fait porteuses en matière de PA. Si les enseignants du secondaire semblent mieux armés pour reconnaitre le caractère correct de telles démarches, plus de la moitié d'entre eux ont simplement tendance à les tolérer, sans les considérer comme autant d'opportunités pour travailler la symbolisation algébrique, la vision structurale des expressions algébriques ou les liens possibles avec les techniques algébriques. Ces multiples bénéfices sont pourtant largement reconnus dans la littérature de recherche ayant étudié les environnements d'apprentissage porteurs en matière de PA (Imre & Akkoc, 2012 ; Lannin, 2005).

2. Analycité, symbolisations formelles et techniques algébriques

Si plus de 60% des enseignants du secondaire sont conscients des difficultés des élèves à donner du sens à la lettre dans les techniques algébriques, la moitié d'entre eux proposent, en cas d'erreur dans l'application de ces techniques (une réduction de termes non semblables), un soutien tel que « en mathématique, on n'additionne pas des pommes et des poires ». Ce

type d'« aide » dénature non seulement le sens de la lettre (en l'associant à un objet), mais compromet en plus l'analycité (il ne focalise absolument pas l'attention sur le fait que c'est parce qu'on opère sur des quantités indéterminées qu'on ne peut réduire des termes non semblables). De telles aides limitent les opportunités offertes aux élèves pour comprendre en profondeur le sens de la lettre en algèbre. Ce constat peut être mis en parallèle avec quelques résultats marquants obtenus auprès des élèves : effectivement, à 15 ans, même les élèves qui disposent d'un bagage important de techniques algébriques ne parviennent pas à le mobiliser en résolution de problèmes (Demonty, Fagnant & Dupont, 2015). Une des explications de ce phénomène relève de la difficulté, pour ces élèves, de symboliser algébriquement leur raisonnement impliquant pourtant une quantité indéterminée : en proposant des aides qui ont tendance tantôt à clarifier le sens de la lettre, tantôt à le galvauder au profit sans doute d'autres priorités, les enseignants ne traitent pas en profondeur ces difficultés éprouvées par les élèves lors de la mobilisation des techniques algébriques dans des situations variées.

Promouvoir davantage de cohérence au niveau de l'enseignement actuel de l'algèbre est également un point de vue défendu par Grugeon et ses collègues. Dans leurs écrits, elles critiquent la façon dont les acquis algébriques des élèves sont en général évalués. Selon ces auteurs, dans la plupart des évaluations dont disposent les enseignants, « l'enjeu est principalement l'étude locale de conceptions erronées en vue de les déstabiliser. L'enjeu n'est pas d'étudier de façon globale des cohérences de fonctionnement des élèves dans un domaine donné » (Grugeon, Pilet, Chenevot-Quentin & Delozanne, 2012, p.5). Cette vision globale de l'activité algébrique des élèves est pourtant cruciale étant donné la complexité des connaissances à acquérir par les élèves dans un domaine comme l'algèbre. Une telle vision est en effet essentielle pour envisager les types d'aides particulièrement utiles pour répondre pleinement aux besoins d'apprentissage des élèves.

III. TROISIEME PARTIE : MODELE DE PROGRESSION DE LA PA ENTRE 10 ET 14 ANS.

Suite au regard croisé que nous avons porté sur la PA, nous pensons qu'il serait utile d'affiner encore la progression nécessaire dans le développement de cette pensée. Si celle-ci peut s'amorcer dès l'école primaire au travers d'activités d'indétermination, la prise de distance qu'impose une pleine utilisation de cette pensée au terme des deux premières années de l'école secondaire doit se préparer progressivement dès le primaire. Deux éléments devraient, à notre sens, être clarifiés pour atteindre cet objectif.

Tout d'abord, des aménagements doivent être apportés à la dénotation : en référence aux nombreux problèmes qu'implique l'introduction des symbolisations formelles en début d'enseignement secondaire, nous pensons qu'une progression en matière de symbolisation devrait être plus clairement exprimée, en vue de préparer les élèves du primaire à appréhender les symbolisations formelles lorsqu'elles seront introduites dans leurs apprentissages du secondaire. Ensuite, il nous semble que devrait être davantage mis en évidence l'importance des activités visant à travailler le sens des opérations et de l'égalité dans le soutien qu'elles peuvent apporter à l'intégration, à l'école secondaire, des techniques algébriques dans la mise en œuvre de la PA. Cette prise de recul nécessaire par rapport au contexte même de la situation ne pourrait-elle pas être déjà amorcée par les élèves dans le cadre d'activités numériques à l'école primaire, dévolues notamment aux techniques de calculs mentaux ? Cette nécessité que ressentent les enseignants du secondaire, parfois même ceux qui ont un bagage de connaissances pour enseigner très approfondi, à « rendre l'algèbre concrète » aux yeux des élèves en associant les lettres à des pommes et des poires nous questionne. S'il nous semble indispensable de sensibiliser les dangers de telles aides auprès des enseignants du

secondaire, nous pensons également que la démarche de validation des techniques de calculs en référence aux propriétés des opérations gagnerait à être travaillée dès l'école primaire, en ancrant la réflexion dans le calcul numérique.

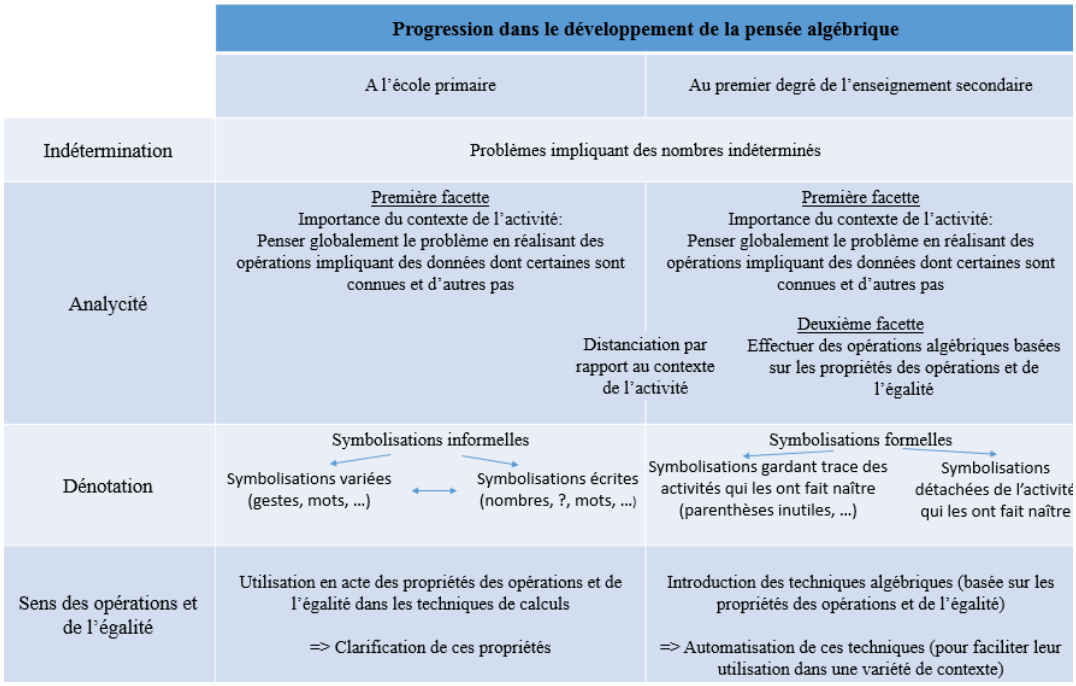


Figure 4 *- Modèle de progression dans le développement de la PA entre 10 et 15 ans*

1. *La dénotation : l'évolution des symbolisations informelles vers les symbolisations formelles dans le cadre de l'exploitation d'activités impliquant l'indétermination*

Le concept de dénotation aide à comprendre que la symbolisation s'ancre dans la situation d'indétermination et peut dès lors se présenter sous des formes très variées, qu'elles soient conventionnelles ou non (Radford, 2014). Du point de vue des élèves, il y a cependant tout un traitement des informations présentées dans l'énoncé pour pouvoir passer d'une symbolisation bien ancrée dans le contexte de la situation (qui pourra se présenter sous des formes variées, écrites ou non) à une symbolisation formelle qui permettra de prendre de la distance par rapport à cette situation. Plusieurs recherches mettent en évidence à quel point cette prise de distance par rapport au contexte du problème est complexe pour les élèves débutant en algèbre (Duval, 2002 ; Nathan & Koedinger, 2000 ; Radford, 2002 & 2008 ; Demonty, Vlassis & Fagnant, 2015). Or la difficulté de produire une telle symbolisation est sous-estimée par les enseignants (Nathan & Koedinger, 2000 ; Demonty & Vlassis, 2018), et ils ne fournissent que peu d'aides aux élèves dans ce domaine. Ces réflexions nous amènent à considérer que la nécessaire prise de distance par rapport au problème posé, à travers des symbolisations de plus en plus formelles, doit se développer progressivement du primaire vers le secondaire, notamment pour faciliter l'intégration, dans la démarche, des techniques algébriques. Plusieurs recherches menées dans le courant de l' « early algebra » confirment que cette prise de distance peut s'amorcer dès l'école primaire (Britt & Irwin, 2011 ; Radford & Puig, 2007) : des liens entre les gestes, les explications orales et les symbolisations qui se détachent progressivement des contextes qui les ont fait naître sont essentiels pour atteindre cet objectif.

2. Le développement du sens des opérations et de l'égalité dans le cadre des autres activités numériques et algébriques

En référence aux difficultés des élèves du début de l'enseignement secondaire dans l'application des techniques algébriques et aux problèmes qui se posent aux enseignants pour leur proposer une aide qui ne dénature pas le sens de la lettre, les autres activités numériques, c'est-à-dire celles qui n'impliquent pas nécessairement l'indétermination, peuvent contribuer à aider les élèves à mieux comprendre ces techniques algébriques, et ce, dès l'école primaire. En effet, les procédures de calculs mentaux, tout comme les règles de transformations algébriques, s'appuient sur les propriétés des opérations et de l'égalité. Une étude menée en Nouvelle-Zélande auprès d'élèves de 12 à 14 ans (Britt & Irwin, 2011) a montré que ceux qui ont développé, dès l'école primaire, des stratégies raisonnées en matière de calculs mentaux (c'est-à-dire ceux qui ont été entrainés à expliquer, au départ d'une réflexion bien ancrée dans le numérique, le bien-fondé mathématique de ces stratégies) parviennent beaucoup mieux que les autres, à comprendre les transformations algébriques lorsque l'algèbre formelle est introduite au début de l'enseignement secondaire. Par ailleurs, Britt et Irwin (2011) ont constaté que ces élèves continuent à progresser au fur et à mesure des deux premières années de l'enseignement secondaire, y compris dans la mobilisation de ces techniques dans des activités contextualisées.

IV. CONCLUSION : UN MODELE DE LA PA AU SERVICE DU DEVELOPPEMENT PROFESSIONNEL DES ENSEIGNANTS

Cet article avait pour but de développer une réflexion sur la progression de l'enseignement et l'apprentissage de la PA entre 10 et 14 ans. Du point de vue de la recherche, si l'intégration du courant de l'« early algebra » est essentielle pour mettre en évidence le potentiel des élèves de l'école primaire en matière de PA, les constats émis dans les recherches antérieures concernant plus spécifiquement les difficultés des élèves débutant en algèbre formelle restent bien d'actualité. Même s'il doit sans aucun doute encore s'affiner, notamment au travers de recherches empiriques, le modèle de développement de la PA que nous proposons met en évidence les complémentarités entre ces deux courants de recherche en vue, in fine, d'améliorer la maitrise qu'ont les élèves de 15 ans en algèbre. Pour cela, le développement professionnel des enseignants est essentiel et dans ce domaine, deux éléments nous paraissent prioritaires.

Bon nombre d'instituteurs ne reconnaissent pas le potentiel de certaines activités numériques pour développer la PA : ils ne parviennent que difficilement à interpréter la variété des démarches des élèves et les aides qu'ils proposent en cas de difficulté ne sont que peu souvent propices au développement de la PA. Les instituteurs gagneraient à mieux percevoir le rôle déterminant qu'ils ont à jouer dans les premiers contacts de l'élève avec la PA (Carraher & Schliemman, 2007 ; Cai & Knuth, 2011 ; Radford, 2014).

Dans ce même type d'activités suscitant spécifiquement la PA, une majorité des enseignants du secondaire pourraient améliorer encore les réponses qu'ils apportent aux besoins des élèves, surtout en matière de symbolisation progressive de cette pensée. D'autres analyses, envisageant de manière plus globale les enseignements algébriques de l'école secondaire, mettent en évidence le problème de la variabilité dans l'utilisation des connaissances, selon les contextes dans lesquelles elles sont sollicitées. Prendre du recul par rapport à une maitrise approfondie de l'algèbre, réduire la complexité pour rendre l'algèbre accessible aux élèves ou faire des ponts avec des connaissances dont disposent les élèves contribue à amener les enseignants à prendre, dans certaines situations, des décisions qui

risquent d'amplifier des problèmes de compréhension des élèves. Ce manque de soutien apporté à leur activité algébrique doit faire l'objet d'une attention particulière.

REFERENCES

Bednarz, N., & Janvier, B. (1993).The arithmetic-algebra transition in problem solving: continuities and discontinuities. In J.R. Becker & B.J. Pence (Eds.), *Proceedings of the Fifteenth Annual Meeting of International Group for the Psychology of Mathematics Education North American chapter*. Vol. II, (pp. 19-25). California : Asilomar.

Britt, M. S., & Irwin, K. C. (2011). Algebraic thinking with and without algebraic representation: A pathway for learning. In *Early Algebraization. A dialogue for multiple perspective.* (pp. 277-301). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg

Cai, J., & Knuth, E. (2011). *Early algebraization. A dialogue for multiple perspective*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, *2*, 669-705.

Demonty, I., Fagnant, A., & Dupont, V. (2015). Analyse d'un outil d'évaluation en mathématiques: entre une logique de compétences et une logique de contenu. Mesure et évaluation en éducation, 38(2), 1-29.

Demonty, I., Fagnant, A., & Vlassis, J. (2015). Le développement de la pensée algébrique: quelles différences entre les raisonnements mis en place par les élèves avant et après l'introduction de l'algèbre?. Actes du congrès EMF 2015. Pluralités culturelles et universalité des mathématiques: enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage.

Demonty, I., Fagnant, A., & Vlassis, J. (2018). Algebraic thinking, pattern activities and knowledge for teaching at the transition between primary and secondary school. Educational Studies in Mathematics. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9820-9

Demonty, I., & Vlassis, J. (2016). Developing a tool for assessing elementary algebraic knowledge for teaching: a twofold perspective for understanding teachers' decision-making. Actes du colloque ICME. Hambourg.

Demonty, I., & Vlassis, J. (2017). Evaluer les connaissances pour enseigner l'algèbre élémentaire: élaboration d'un outil diagnostique. e-JIREF, 2(2), 45-62.

Demonty, I., & Vlassis, J. (2018). Développer l'articulation arithmétique-algèbre entre le primaire et le secondaire. Van in : Bruxelles.

Duval, R. (2002). L'apprentissage de l'algèbre et le problème cognitif de la désignation des objets. *Actes du séminaire Franco-italien sur l'enseignement de l'algèbre*. Irem de Nice.

Grugeon, B., Pilet, J., Chenevotot-Quentin, F., & Delozanne, E. (2012). Diagnostic et parcours différenciés d'enseignement en algèbre élémentaire. *Recherches en didactique de mathématiques, Enseignement de l'algèbre, bilan et perspectives, hors série,* 137-162

İmre, S. Y., & Akkoç, H. (2012). Investigating the development of prospective mathematics teachers' pedagogical content knowledge of generalizing number patterns through school practicum. *Journal of Mathematics Teacher Education, 15(3)*, 207-226.

Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and learning, 7(3)*, 231-258.

Nathan, M. J., & Koedinger, K. R. (2000). An investigation of teachers' beliefs of students' algebra development. *Cognition and Instruction, 18* (2), 209-237.

Oliveira, I., & Rhéaume, S. (2014) Comment s'y prennent-ils? La résolution de problèmes de partage inéquitable par des élèves avant enseignement formel de l'algèbre, Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 14:4, 404-423.

Radford, L. (2002). On heroes and the collapse of narratives: a contribution to the study of symbolic thinking. Proceedings of the 16th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, PME 26, Anne D. Cockburn and Elena Nardi (eds.), Vol. 4, pp. 81-88.

Radford, L. (2008). Iconicity and Contraction: A Semiotic Investigation of Forms of Algebraic Generalizations of Patterns In Different Contexts. ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 40, 83-96.

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. Mathematics Education Research Journal, 26, 257-277.

Radford, L., & Puig, L. (2007). Syntax and meaning as sensuous, visual, historical forms of algebraic thinking. Educational Studies in Mathematics, 66(2), 145-164.

ÉTUDE DES RAISONNEMENTS MATHÉMATIQUES D'ÉLÈVES DE PREMIÈRE ANNÉE LORS DE LA RÉALISATION D'UNE ACTIVITÉ NÉCESSITANT L'UTILISATION DE MATÉRIEL DE MANIPULATION

JEANNOTTE[*] Doris –CORRIVEAU[**] Claudia

Résumé – Dans cette proposition, nous présentons différents moments potentiellement riches en termes de raisonnement mathématiques dans une classe de 1e année du primaire (6-7 ans). Les données ont été recueillies dans le cadre du projet MathéRéaliser, projet qui vise l'étude des pratiques d'utilisation du matériel de manipulation en lien avec les raisonnements mathématiques déployés par les élèves. À partir de l'analyse de d'activité mathématique de deux dyades, on observe les élèves identifier et justifier une régularité, deux processus de raisonnement mathématique. La manière dont le matériel de manipulation est utilisé par les élèves joue alors un rôle clé dans le déploiement de ces deux processus.

Mots-clefs : raisonnement mathématique, matériel de manipulation, primaire, régularité, commognition

Abstract – In this paper, we are presenting different potentially rich moments in term of mathematical reasoning in a grade 1 class (6-7 year's old). The data were collected in the project MathéRéaliser, which goal is to study the uses of manipulative in link with mathematical reasoning of pupils. The analysis of the pupils' mathematical activities helped us identify two processes of mathematical reasoning: identifying and justifying a regularity. The different ways pupils used the manipulatives played a key role in the development of those two processes.

Keywords: mathematical reasoning, manipulatives, elementary level, patterns, commognition

I. RAISONNEMENTS MATHÉMATIQUES ET MATÉRIEL DE MANIPULATION

Au primaire, un allant de soi est que l'utilisation du matériel de manipulation favorisent l'apprentissage en mathématiques (Poirier, 1999; Corriveau et Jeannotte, 2015). Or, quoique certaines recherches montrent un lien entre réussite en mathématique et manipulation (Gürbüz, 2010; Sherman et Bisanz, 2009; Ojose et Sexton, 2009), d'autres apportent un portrait plus nuancé de la situation (ex. Puchner, Taylor, O'Donnell, et Fick, 2008; Carbonneau, Marley et Selig, 2013). Un aspect qui semble très peu étudié est les liens entre le développement de processus de raisonnement mathématique et l'utilisation de matériel (Carbonneau, Marley et Selig, 2013). En effet, comment se caractérisent les raisonnements mathématiques lorsque les élèves utilisent du matériel de manipulation? Le but de cette proposition est d'illustrer comment la réalisation d'une tâche où le matériel est utilisé met en valeur un potentiel riche en termes de raisonnement mathématiques et ce, dès la première année du primaire. Dans ce qui suit, nous exposons d'abord les assises théoriques à propos du raisonnement mathématique. Nous présentons ensuite une activité nécessitant l'utilisation du matériel qui a été réalisée par des élèves de première année et l'analyse du travail des élèves en termes de raisonnement mathématique.

II. FONDEMENTS THÉORIQUES DU CONCEPT DE RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE

Nous présentons d'abord la perspective théorique supportant le modèle de raisonnement décrit dans un deuxième temps.

[*] UQAM – Canada – doris.jeannotte@uqam.ca
[**] Université Laval – Canada – claudia.corriveau@fse.ulaval.ca

1. Perspective commognitive

Adoptant une perspective commognitive, cette étude s'appuie sur la définition de pensée mathématique suivante : la pensée mathématique est une activité de communication avec d'autres ou soi-même. Sfard (2008) définit la communication comme « a collectively performed patterned activity in which action A of an individual is followed by action B of another individual so that… » (p.87).

Sfard envisage les mathématiques comme activité discursive. Le discours mathématique possède son propre vocabulaire, ses propres médiateurs visuels, ses routines distinctes, ses énoncés généralement acceptés par la communauté mathématique. Le terme discours ne fait pas référence ici qu'aux textes écrits ou parlés, ni aux interactions langagières. Il s'agit de tout acte de communication incluant aussi le langage corporel, les indices contextuels et l'histoire des interlocuteurs. C'est donc dans un mouvement d'individualisation-(re)communication[1], que le discours évolue par des changements de vocabulaire, de routines, de médiateurs visuels et ainsi donc, d'énoncés acceptés.

Les concepts commognitifs de routines et de médiateurs visuels développés par Sfard s'avèrent particulièrement porteur pour notre analyse. Elle définit "routine" (2008, 2012) comme un ensemble de règles métadiscursive qui décrit un pattern d'actions discursives. Ces règles peuvent référer à la manière dont se circonscrit le pattern (**comment** il se circonscrit), et aussi au moment de le mettre en place (**quand** il se met en place). Par exemple, dénombrer des objets se fait via une routine qui peut être parfois décrite par le recours à la comptine en coordonnant le geste au mot-nombre (comment) pour déterminer le cardinal d'une collection et donc répondre à la question « combien y a-t-il de cubes ? » (quand). Selon Sfard, il y a trois types de routines : les actes, les rituels et les explorations. Les actes visent à changer les objets (mathématiques) sans rationnel mathématique. Pour faire un algorithme, un acte peut se révéler lorsque l'élève écrit les nombres dans une même colonne, un en dessous de l'autre. Le rituel est une routine davantage liée à la subjectivité de l'acteur en ce sens qu'elle vise à obtenir l'approbation social. Par exemple, un élève pourrait utiliser un algorithme appris en classe au lieu de celui qu'il préfère car il sait que son enseignant sera content. Enfin, les routines exploratoires (constructives, justificatives ou de rappel) ont pour but de créer de nouveaux énoncés (mathématiques) et se persuader. Lorsque l'élève développe son propre algorithme, il est dans un processus de création d'un nouvel énoncé mathématique qui pourra s'intégrer au discours de la classe.

2. Un modèle de raisonnement mathématique (RM)

Jeannotte (2015), adoptant les fondements commognitifs, définit le RM comme une activité commognitive qui permet d'inférer des énoncés mathématiques à partir d'autres énoncés mathématiques. Ainsi, le RM est un type de routine exploratoire. Organisé en une certaine structure, il est contingenté par des règles discursives et porteur d'une valeur épistémique. Il peut être caractérisé selon deux aspects, l'aspect structurel et l'aspect processuel.

L'aspect structurel réfère à l'agencement d'éléments discursifs en un système ordonné qui décrit à la fois les éléments et les relations qui les unies. Les pas élémentaires (déductif, inductif et abductif) infèrent chacun une conclusion de nature différente.

[1] Selon la théorie commognitive, l'apprentissage débute avec l'individualisation de formes de discours qui proviennent d'une communauté à laquelle on s'identifie (ou qu'on cotoie) puis qui sont (re)communiquées à cette dernière.

L'aspect processuel fait davantage référence à la temporalité du RM, c'est-à-dire au déroulement des actions dans le temps. Jeannotte (2015) définit cinq processus de recherche de similitudes et de différences (généraliser, conjecturer, identifier une régularité, comparer, classer) et trois processus de recherche de validation (justifier, prouver, démontrer). Enfin, un dernier processus vient supporter l'un ou l'autres de ces processus de RM, exemplifier. L'encadré 1 présente deux des définitions qui seront utiles lors de l'analyse.

Identifier **une régularité** : identifier une régularité, en tant que processus de RM, infère un énoncé à propos d'une relation récursive entre différents objets ou relations mathématiques, par la recherche de similitudes et de différences entre ces objets ou relations mathématiques.

Justifier : justifier est un processus de RM qui, par la recherche de données, de permis d'inférer et de fondement mathématique permet de modifier la valeur épistémique d'un énoncé. (Jeannotte, 2015, p. 280-281)

***Figure 1** : deux processus de RM selon Jeannotte (2015)*

III. QUELQUES REPÈRES MÉTHODOLOGIQUES

Cette proposition s'appuie sur les données collectées dans le cadre d'une recherche d'inspiration collaborative (Bednarz, 2013; Desgagné, 2001) avec des enseignants du primaire. Afin de réfléchir aux pratiques d'utilisation de matériel en classe de mathématiques, des *rencontres réflexives* ont été organisées avec des enseignants de chacun des cycles du primaire. Dans ces rencontres, des tâches impliquant du matériel de manipulation ont été proposés aux enseignants afin de discuter de leur mise en œuvre en classe, des modifications nécessaires pour l'adapter au niveau de la classe, du rôle du matériel et d'interventions possibles. Ces activités ont ensuite été expérimenté en classe.

Dans le cas particulier qui nous intéresse, une rencontre de planification avec des enseignants du premier cycle du primaire[2] a permis de réfléchir à la mise en œuvre de trois activités dont celle de la fabrique de colliers.

1. La fabrique de collier

La fabrique de colliers est une tâche inspirée de Fosnot et Dolk (2010). Dans cette tâche, les enfants sont amenés à produire un modèle de colliers afin de commander les perles nécessaires à la fabrication d'un collier en respectant certaines contraintes : les colliers doivent être composés de deux couleurs de perles, les perles doivent disposer en alternant des groupes de 5, de la même couleur. L'activité se partitionne en trois phases : 1) la réalisation du modèle à l'aide de centicubes (voir figure 2 p. 5); 2) la complétion d'un bon de commande de façon à demander le nombre exact de perles nécessaire à la fabrication du modèle proposé; 3) un retour en grand groupe sur la réalisation des bons de commandes et leur validité.

Le choix de faire faire le collier à l'aide de centicubes n'est pas anodin. Premièrement, les centicubes sont souvent utilisés au premier cycle du primaire pour dénombrer ou encore pour aborder des mesures de longueurs. Lorsqu'emboités, on peut les assembler soit de façon linéaire soit en une forme rectangulaire qui ne peut être fermée. Impossible donc, de réaliser un « vrai » collier. Il y a donc ici un enjeu important, soit la représentation du collier à l'aide d'un modèle linéaire ou rectangulaire.

[2] Au Québec, le premier cycle fait référence aux deux premières années du primaire (6-8 ans).

Un deuxième choix concerne l'alternance des couleurs. Si l'enfant opte pour le modèle linéaire, il devra dégager que le modèle ne peut commencer et se terminer par une série de cinq perles de la même couleur.

Finalement, le choix de faire faire un modèle plutôt que le collier directement est important dans cette activité. En effet, les élèves devront développer des façons de s'organiser pour dénombrer les centicubes et remplir le bon de commande. L'élève pourrait faire appel à la comptine par bond de cinq, au tableau de nombres, à la droite numérique ou à la coordination du geste au nombre pour mener à bien la tâche. Ici, l'enfant qui a opté pour un modèle rectangulaire devra trouver une façon de garder son point de départ pour dénombrer. La validation du bon de commande fait appel à deux autres régularités à savoir que le nombre de perles de chaque couleur doit être un multiple de cinq (donc se terminer par 0 ou 5) et qu'il doit nécessairement y avoir le même nombre de perles de chacune des couleurs.

Spécifions qu'il est aussi nécessaire de tenir compte des autres contextes où les élèves fabriquent des colliers et des routines types associés à cette fabrication. Par exemple, la symétrie est souvent associée à la beauté d'un collier. Or, dans le contexte mathématique de cette tâche, l'élève ne peut directement utiliser les routines développées dans d'autres contextes. Une prise en compte de ces routines dans les interventions des enseignants peut aider les élèves à les dépasser.

2. La réalisation de l'activité en classe

Une classe de dix-huit élèves de première année du primaire (6 et 7 ans) a réalisé l'activité. Les trois phases de l'activité ont été faites à l'intérieur d'une période d'à peu près une heure. L'activité a été présenté aux élèves (environ 15 minutes en incluant l'accueil des élèves). Ensuite, en équipe de 2, les élèves ont fabriqué un modèle de colliers et compléter le bon de commande associé (environ 25 minutes). Pour ce faire, les élèves avaient accès à des centicubes de deux couleurs, à un bon de commandes et à toutes les ressources affichées dans la classe (par exemple, tableau de nombres, droite numérique). Durant cette phase, il a été convenu que l'enseignant et la chercheure circulent pour questionner les élèves quant aux différentes contraintes du problèmes. Il y a ensuite eu un retour en grand groupe (environ 15 minutes) dans lequel l'enseignant a mené une discussion à partir d'un bon de commande non valide. L'idée était d'amener les élèves à identifier des régularités et à valider à l'aide d'arguments mathématiques les bons de commandes produits par les enfants de la classe. Durant cette phase, les élèves n'avaient plus accès au matériel. Il a été remplacé par un matériel virtuel accessible via le tableau blanc interactif.

IV. ANALYSE ET RÉSULTATS : LE TRAVAIL EN ÉQUIPE AVEC LE MATÉRIEL

L'analyse présentée ici provient de l'observation de deux équipes. La première (équipe 1) est composée d'Évelyne et Martine alors que la deuxième (équipe 2) est composée de Renaud et Isabelle. Mentionnons d'emblée que les deux équipes ont opté pour un modèle linéaire et que l'alternance des couleurs et la formation de groupes de cinq perles ont été réalisés à l'aide d'actes routiniers dans les deux équipes. De même, le dénombrement des groupes de cinq s'est réalisé en coordonnant le geste au mot-nombre sans aucune difficulté lors de la formation de ces groupes. On pouvait s'y attendre étant donné qu'on était en 1^{e} année au mois de février.

Ensuite, si on regarde le travail en équipe, les deux équipes ont organisé leur travail différemment. Dans l'équipe 1, Evelyne et Martine ont chacune confectionné une partie du collier pour ensuite les raccorder. Dans l'équipe 2, Isabelle et Renaud étaient plutôt chacun

responsable d'une couleur. Ils construisaient donc le collier ensemble. Ces deux routines, que les enfants mettent en œuvre, offrent des potentiels différents en termes de RM. En effet, dans l'équipe 1, le fait que chacune travaille sur une partie de collier donne l'occasion d'identifier la couleur nécessaire pour chacun des extrémités du collier puisqu'elles doivent « connecter » leurs deux parties. En se consacrant à une seule couleur, la seconde équipe doit gérer cette contrainte autrement. En effet, en étant responsable chacun de leur couleur, ils doivent s'assurer que leur partenaire a posé leurs cinq centicubes avant de poser les leurs. Or, ceci ne dit rien sur les extrémités, mais peut mener à réfléchir sur la quantité de blocs nécessaires de chacune des couleurs lorsque l'alternance est respectée.

Dans ce qui suit, nous revenons sur trois moments clés qui ont émergé lors du travail en dyade : lien entre l'alternance des couleurs et les extrémités du modèle de collier, le dénombrement des perles à commander et la validation du bon de commande.

1. *Moment 1 : lien entre l'alternance des couleurs et les extrémités du modèle de collier*

Dans l'équipe 1, Martine et Evelyne n'ont pas la même façon de gérer les extrémités du modèle de collier qu'elles construisent chacune de leur côté. De son côté, Martine tente de voir apparaitre des couleurs différentes pour les extrémités de son collier, alors que Evelyne cherche plutôt à faire en sorte que le collier débute et termine par la même couleur. Lorsque Martine cherche à connecter son collier à celui d'Evelyne, la contrainte d'alternance des couleurs est respectée : le collier commence avec cinq cubes roses (du côté de Martine) et se termine par cinq cube blancs (du côté d'Evelyne). Or, lors de cet événement, Evelyne s'exclame: « *Attends, Il manque un petit [bout] rose* » et ajoute donc cinq roses à son extrémité. Martine réagit à l'action d'Evelyne en ajoutant, simultanément, cinq blancs de son côté : « *Ha!! Je vais faire les blancs de l'autre côté* ». Toutefois, Evelyne réagit en remettant cinq nouveaux cubes blancs à son extrémité. En terme commognitif, l'action de Martine (ajouter 5 roses) s'appuie sur ce qu'elle a fait avant en cherchant à garder les deux extrémités de couleur différente. Or la réaction d'Evelyne est guidée par l'opposé, garder les extrémités pareilles.

La chercheuse intervient pour faire valider la construction du collier par cette équipe :

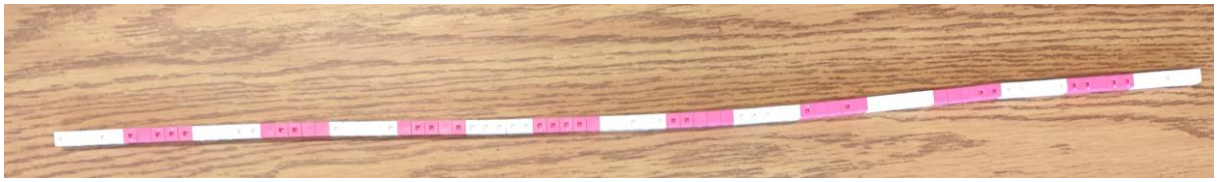


Figure 2 *: Modèle linéaire du collier de Martine et Evelyne*

26. Chercheuse :… Ok. J'ai une question pour vous. Mettons qu'on s'imaginait qu'on fermait le collier (fait le geste avec les mains). Est-ce qu'il y aurait encore juste cinq billes de la même couleur qui se suivent ? Si on le ferme ce collier-là (pointe les deux extrémités, Martine répond oui) ... Qu'est-ce qui va se passer avec les deux bouts (elle tape les doigts sur la table en continuant à pointer les extrémités).
27. Martine : Ben... AHH! Nooonnn.
28. Chercheuse : Donc, qu'est-ce qu'il faudrait faire au collier pour que ça fonctionne ?
29. Martine : Il faudrait enlever [inaudible] blocs (commence à enlever des cubes à une extrémité)
30. Chercheuse Ah, ok, on pourrait faire ça

31. Martine : Comme enlever ça (enlève les cinq cubes blancs à une extrémité)
32. Chercheuse : Est-ce que tu es d'accord (s'adresse à Evelyne qui hoche de la tête sans trop d'assurance, **en rattachant les cubes blancs enlevé par Martine**)
33. Martine : (se dirigeant vers l'autre extrémité) ou en ajouter là (ajoute cinq cubes roses de l'autre côté).
34. Martine : Pour que ça marche (fait des gestes avec les bras pour fermer le collier) ça se ferme comme ça, on amène ça.
35. Chercheuse : Et là est-ce ça va être encore toujours blanc; rose; (fait un tempo lent avec une main en disant la couleur); blanc, rose, blanc, rose. Donc, si ça commence par blanc, ça doit se terminer par quelle couleur?
36. Martine : Rose
37. Chercheuse : Rose. Ok, faites ça, puis ensuite je vais amener votre bon de commande. (Pendant ce temps, Evelyne ajoute cinq rose à son extrémité et le collier débute et se termine donc encore par la même couleur).

La chercheuse revient et intervient plus spécifiquement auprès d'Evelyne qui, comme on le voit dans le passage précédent, remet toujours les mêmes couleurs.

44. Chercheuse : Qu'est-ce qui va se passer Evelyne si je prends les deux bouts. On s'imagine que je prends le collier de perles et je fais une boucle au cou, avec les deux bouts (elle pointe les extrémités avec ses index) ? Si c'est rose et rose au bout, qu'est-ce qui va se passer ?
45. Evelyne : Ça ne sera plus blanc, rose, blanc, rose, blanc, rose, blanc, rose (elle pointe les groupes de cinq perles en suivant un tempo).

On peut penser ici que Martine a mis en place une *exploration* dès le début de l'intervention. Avec l'intervention de la chercheuse, elle est en mesure de dégager des données (deux couleurs et fermeture du collier) et un permis d'inférer (pour respecter l'alternance des couleurs, les extrémités ne peuvent être de la même couleur pour justifier que le collier ne débute pas par la même couleur qu'il se termine. Toutefois, elle n'entre pas en discussion avec Evelyne, qui elle met en place une routine associée à la fabrication d'un collier dans la vie de tous les jours en utilisant la symétrie qui pourrait être qualifié d'*acte* puisqu'une contrainte du problème n'est pas tenue en compte. On peut aussi se questionner à savoir si Evelyne est en *exploration* ou en *rituel* lorsqu'elle accepte que le collier débute par rose et se termine par blanc. En effet, elle justifie son accord en se référant à la contrainte d'alternance (permis d'inférer). Par ailleurs, Evelyne a pu chercher l'approbation à la suite des multiples interventions en lien avec les extrémités du collier et de l'accord entre la chercheure et Martine.

Pour équipe 2, lorsque l'enseignant vient observer leur travail, le collier débute et se termine par des couleurs différentes. Or, on peut observer que c'est suite à une intervention auprès d'une autre équipe que Renaud et Isabelle se sont assurés que la contrainte était suivie. Après que l'enseignant leur ait demandé si ça fonctionne lorsqu'on ferme le collier, Isabelle répond « Parce qu'il est assez long ». Toutefois, lorsque l'enseignant lui repose la question, elle répond « Parce que ici il y a un vert (pointe une extrémités) et ici il y a un blanc (pointe l'autre) » *fait des gestes avec les bras comme pour fermer un collier*.

On note ici le passage à un processus *justifier* en lien avec le problème supporté par le matériel et les gestes après une intervention de l'enseignant. La reformulation de la question a mené à une routine exploratoire par rapport au problème et non uniquement à un rituel au sens

où la longueur du collier est davantage une question de gout qu'une question mathématique (dans ce cas particulier). En effet, Isabelle est en mesure d'avancer une raison mathématiquement valable pour appuyer le fait que le collier n'a pas les extrémités de la même couleur.

2. Moment 2 : dénombrement des perles pour remplir le bon de commande

Les deux autres moments sont en lien avec la complétion du bon de commande. Pour être en mesure de remplir le bon de commande, il est nécessaire de dénombrer les centicubes de chaque couleur. Or, les colliers sont parfois très longs et vont au-delà de 60 centicubes. Pour l'équipe de Martine et Evelyne, le collier final est composé de 40 centicubes de chacune des couleurs. Ici, l'acte routinier prend le dessus sur le RM. Avant même de recevoir le bon de commande, Martine dénombre les cubes un à un sans égard à la couleur. Elle change rapidement de stratégie pour opter pour la comptine par bonds de cinq, toujours sans égard à la couleur. Toutefois, elle éprouve des difficultés avec la comptine au-delà de 65. Ceci la ramène à sa première stratégie. Cet acte routinier (tout compter sans égard à la couleur) ne sera pas utile pour remplir le bon de commande.

Pour l'équipe d'Isabelle et Renaud, le collier ne fait que 50 centicubes. Ils n'ont aucun problème à dénombrer les 25 cubes verts. La première stratégie est le dénombrement un à un. Contrairement à Martine, c'est l'intervention de l'enseignant qui les amènera à utiliser la comptine par bonds de cinq, comptine qui fait partie de la culture de la classe. Alors que la mise en place de cet acte routinier est justifiée par l'enseignant en termes d'efficacité, du point de vue des élèves, il s'agit peut-être d'un rituel qui vise à répondre à la demande de l'enseignant.

3. Moment 3 : validation du bon de commande

Enfin, un élément permettant de valider le bon de commande et qui prendra de l'importance dans la discussion de groupe est de réaliser qu'il doit nécessairement y avoir le même nombre de centicubes des deux couleurs. Dans le premier groupe, après avoir dénombrer chacune des deux couleurs, Martine le réalise : « C'est la même affaire! On a découvert que quand on met, cinq avec cinq, avec cinq avec cinq, ça fait quarante les deux. Quarante plus quarante... ». Il y a identification d'une régularité, mais l'équipe n'entre pas plus loin dans les routines d'exploration pour se rendre à justifier cette régularité.

Chez Isabelle et Renaud c'est différent. Après qu'Isabelle ait compté les verts sous le regard attentif de Renaud, Isabelle commence à dénombrer les blancs « Cinq, dix, v... » mais est rapidement arrêter par Renaud qui dit 25 verts. On ne sait pas à ce moment s'il a dénombré rapidement ou s'il a remarqué la régularité. Or, un peu plus tard, Renaud est en mesure de justifier cette régularité.

25. Chercheuse : Ok, et là, vous savez que vous en avez 25 blancs, comment vous savez que vous en avez 25 verts ?
26. Renaud : Parce que, ici (pointe une extrémité) ça termine avec cinq verts et ici ça termine avec cinq blancs alors ça fait égalité.

V. CONCLUSION

On observe dans cette classe, que les élèves mettent en place certaines routines tels des actes ou des rituels qui ont été développées antérieurement comme la comptine par un ou par cinq. Le matériel permet aussi la mise en place de processus de raisonnement mathématique liés à

des explorations, en particulier identifier des régularités et justifier. Lorsqu'on analyse ce qui s'est passé dans les deux équipes, il est possible de mettre en évidence deux différences majeures en termes de raisonnement mathématique et du rôle du matériel joué dans ce dernier. Premièrement, en ce qui a trait à la contrainte d'alternance, Martine (équipe 1) comme Isabelle (équipe 2) se servent du matériel pour justifier que l'alternance est bien respectée (elles pointent les extrémités, elles font le geste de ramener les extrémités ensembles, etc.). Deuxièmement, en ce qui concerne la régularité quant au nombre de cubes de chaque couleur, on observe une différence entre les processus de raisonnement mis en place par Martine (équipe 1) et ceux mis en place par Renaud (équipe 2). Martine identifie la régularité lorsqu'elle remplit le bon de commande. C'est donc à partir du nombre écrit en chiffre qu'elle réalise que les deux quantités sont égales. Du côté de Renaud, il comprend, avant même d'avoir dénombré, que les quantités seront égales. Contrairement à Martine qui ne justifie pas cette régularité, Renaud se sert du matériel, qui lui a permis d'observer la régularité, pour la justifier. En ce sens, le matériel a joué un rôle plus important dans les raisonnements de Renaud.

Par ailleurs, utiliser des perles directement n'aurait pas eu le même potentiel en termes de raisonnement mathématique pour ce qui est de la couleur des extrémités. Le matériel choisi nécessitait de la part de l'élève une objectivation de la contrainte (d'alternance) dans le contexte de ce problème, c'est-à-dire que les élèves devaient s'assurer que les extrémités du collier étaient de différentes couleurs (reformulation de la contrainte d'alternance). En ayant donné accès à un matériel dûment réfléchi, nous avons pu observer des RM riches mis en place à l'aide de celui-ci.

REFERENCES

Bednarz, N. (2013). Recherche collaborative et pratiques enseignantes, regarder ensemble autrement. Paris : L'Harmattan.

Carbonneau, K. J., Marley, S. C. et Selig, J. P. (2013). A meta-analysis of the efficacy of teaching mathematics with concrete manipulatives. *Journal of Educational Psychology*, *105*(2), 380–400.

Corriveau, C. et Jeannotte D. (2015) Quelques apports du matériel de manipulation sur l'activité mathématique au primaire. Bulletin AMQ

Desgagné, S. (2001). La recherche collaborative : une nouvelle dynamique de recherche en éducation. Dans M. Anadón (Dir.), *Nouvelles dynamiques de recherche en éducation* (pp. 51-76). Québec : Les presses de l'université Laval.

Fosnot, C. T. et Dolk, M. (2001). *Young Mathematicians at Work: Constructing Number Sense, Addition, and Subtraction*. Heinemann, Westport, USA.

Gürbüz, R. (2010). The effect of activity-based instruction on conceptual development of seventh grade students in probability. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 41(6), 743–767

Jeannotte, D. (2015). Raisonnement mathématique : proposition d'un modèle conceptuel pour l'enseignement et l'apprentissage au primaire et au secondaire. (Thèse non publiée). UQAM.

Ojose, B. et Sexton, L. (2009). The effect of manipulative materials on mathematics achievement of first grade students. The Mathematics Educator. 12(1), 3-14.

Poirier, L. (1999). Réflexion autour du matériel de manipulation. *Instantanés mathématiques*, 36(no. 1) septembre: 4–12

Puchner, Taylor, O'donnell et Fick (2008). Teacher learning and mathematics manipulatives : A collective study about teacher use of manipulatives in elementary and middle scool mathematics lessons. School Science and Mathematics. 108(7), 315-325.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: human development, the growth of discourses, and mathematizing*. New York: Cambridge University Press.

Sfard, A. (2012). Introduction: Developing mathematical discourse - some insights from communicational research. *International Journal of Educational Research, 51-52*, 1–9.

Sherman, J. et Bisanz, J. (2009). Equivalence in symbolic and nonsym- bolic contexts: Benefits of solving problems with manipulatives. Journal of Educational Psychology, 101(1), 88–100

PENSÉE INTUITIVE EN CLASSE DE MATHEMATIQUES

RIOUX* Miranda

Résumé

Selon les Dual-Process Theories (DPT), l'être humain possèderait deux systèmes de pensée, le premier (S1) servant d'assise à l'émission d'un jugement intuitif, le second (S2) rendant possible l'émission d'un jugement plus analytique (voir Evans & Frankish, 2009). Dans cet article, nous expliquons comment les DPT éclairent notre compréhension de l'activité mathématique de l'élève et permettent de reconsidérer le statut accordé aux erreurs intuitives.

Mots-clefs

Dual-Process Theories, Pensée intuitive, Heuristiques de jugement, Résolution de problèmes, Mathématiques

Abstract

According to the Dual-Process Theories (DPT), humans possess two systems of thought. The first (S1) is linked to intuitive judgment, whereas the second (S2) is linked to a more analytical judgment (see Evans and Frankish, 2009). In this article, we explain how DPT inform our understanding of the student's mathematical activity and help reconsider the status given to intuitive errors.

Keywords

Dual-Process Theories, Intuitive thinking, Judgmental heuristics, Problems solving, Mathematics

I. INTRODUCTION

Dans la foulée des recherches effectuées par Tversky et Kahneman sur la prise de décision et les heuristiques de jugement (Kahneman & Tversky, 1979; Tversky & Kahneman, 1974, 1975), de nombreux travaux ont été menés en psychologie du jugement intuitif (voir les travaux colligés, en 2007, par Gilovich, Griffin, & Kahneman). La plupart d'entre eux s'appuient sur les *Dual-Process Theories* (DPT), théories selon lesquelles l'être humain possèderait deux systèmes de pensée (Evans & Frankish, 2009). Malgré la popularité croissante des DPT, jusqu'à la fin des années '90, exception faite des travaux menés par Fischbein et ses collègues (Fischbein, 1987, 1999; Fischbein & Schnarch, 1997), la littérature en didactique se faisait peu loquace quant au rôle joué par l'intuition dans l'apprentissage des mathématiques (Burton, 1999). Si la situation perdure encore de nos jours dans l'espace francophone, il en va autrement dans l'espace anglophone. Les travaux menés par Gillard, Van Dooren, Schaeken et Verschaffel (2009) ainsi que par Leron et Hazzan (2006) en témoignent et jettent un pont entre la didactique des mathématiques et les DPT. Cet article a notamment pour ambition d'apporter la réflexion menée par ces chercheurs dans l'espace mathématique francophone. Nous tenterons d'expliquer comment les DPT éclairent notre compréhension de l'activité mathématique de l'élève et permettent de reconsidérer le statut accordé aux erreurs intuitives.

* Université du Québec à Rimouski – Canada – miranda_rioux@uqar.ca

II. LES DUAL-PROCESS THEORIES (DPT)

Selon Evans et Stanovich (2013), l'idée suivant laquelle il existerait deux formes de pensée, l'une rapide et intuitive, l'autre lente et délibérative, est ancienne et largement répandue dans la littérature scientifique en philosophie et en psychologie. Or si l'idée est ancienne, elle n'en demeure pas moins actuelle et aujourd'hui, les théories qui mettent en scène ces deux formes de pensée sont appelées *Dual-Process Theories* (DPT)[1].

Selon les DPT (Frankish & Evans, 2009; Gilovich, et al., 2007; Kahneman & Frederick, 2002; Stanovich, 2009; Stanovich & West, 2000), deux systèmes cognitifs permettraient aux individus d'émettre des jugements : le système 1 (S1) et le système 2 (S2). S1 servirait d'assise à l'émission de jugements intuitifs tandis que S2 commanderait une pensée qui est beaucoup plus analytique. Le tableau 1 résume les propriétés généralement associées à chaque système cognitif.

Système 1	**Système 2**
Ancien dans l'évolution	Récent dans l'évolution
Inconscient, préconscient	Conscient
Partagé avec les animaux	Propre aux humains
Connaissance implicite	Connaissance explicite
Automatique	Contrôlé
Rapide	Lent
Parallèle	Séquentiel
Grande capacité	Faible capacité
Intuitif	Réflexif
Contextualisé	Abstrait
Pragmatique	Logique
Associatif	Basé sur des règles
Indépendant de l'intelligence générale	Lié à l'intelligence générale

***Tableau 1** − Propriétés attribuées par divers théoriciens aux deux systèmes cognitifs (trad. libre de Frankish & Evans, 2009, p. 15)*

Sans être définitoires, les propriétés listées dans le tableau 1 sont couramment utilisées par les DPT pour distinguer S1 de S2 et permettent de se faire une image mentale de chaque système. Dans le cadre de cet article, nous décrirons ce qui se passe lorsque S1 émet une réponse heuristique à une question complexe et illustrerons notre propos à l'aide d'exemples tirés de la recherche en didactique des mathématiques.

1. Les heuristiques de jugement: un processus de substitution d'attributs

Les travaux de Tversky et Kahneman sur les heuristiques de jugement ont démontré la faillibilité de S1 qui, par une logique associative, répond parfois à des questions plus faciles que celles qui étaient posées au départ. Kahneman et Clarinard expliquent:

[1] Bien que les DPT diffèrent les unes des autres (Evans & Stanovich, 2013), notons que «[…] les différences sont peu significatives pour une première application en didactique des mathématiques […]» (trad. libre de Leron & Hazzan, 2006, p. 108).

> Quand on ne trouve pas rapidement une réponse satisfaisante à une question complexe, le Système 1 va trouver une question proche qui sera plus facile et y répondra. J'appelle substitution cette opération qui consiste à répondre à une question à la place d'une autre (2016, p. 152).

Ainsi, les intuitions émanant de S1 découlent bien souvent d'un processus de substitution d'attributs, processus que l'on associe à l'activation d'une heuristique de jugement: «On dit d'un jugement qu'il est médiatisé par une heuristique lorsqu'un individu évalue l'attribut-cible donné d'un objet de jugement en lui substituant un attribut heuristique qui vient plus facilement à l'esprit» (trad. libre de Kahneman & Frederick, 2002, p. 53). Pour bien comprendre ce processus, voici un exemple tiré de notre thèse doctorale:

> […] pour évaluer la distance qui sépare une personne d'un objet, une personne pourrait examiner la netteté de l'objet qu'elle perçoit. Elle jugera ainsi qu'un objet est distant si son image est floue et proche si son image est nette. Cette manière de juger donnera, la plupart du temps, de bons résultats. Cela dit, des facteurs environnementaux tels que la neige ou le brouillard pourraient affecter l'image de cet objet et un objet qui semble distant pourrait ainsi se révéler être plus proche qu'il n'y paraît (Rioux, 2012, p. 65).

Dans cet exemple précis, la visibilité de l'objet est l'attribut heuristique qui se substitue à l'évaluation de la distance, qui est pour sa part l'attribut-cible du jugement. Ce processus de substitution d'attributs est courant et les réponses découlant de l'application d'une heuristique peuvent être endossées, corrigées ou remplacées par S2, qui contrôle normalement les réponses émanant de S1 (Kahneman & Frederick, 2002). Voyons maintenant comment ce processus se manifeste dans le contexte particulier de la résolution de problèmes mathématiques.

2. La substitution d'attributs et la résolution de problèmes en mathématiques

Les erreurs commises par un sujet lors de la résolution d'un problème mathématique peuvent avoir différentes origines. Dans cet article, nous présentons des erreurs qui, à notre avis, sont le fruit d'un processus de substitution d'attributs. L'idée n'est pas de supplanter les taxonomies existantes, mais bien de souligner la possibilité que certaines erreurs soient liées, du moins en partie, au fonctionnement des processus cognitifs dépeints par les DPT. Les exemples qui suivent permettent d'illustrer notre propos.

Premier exemple. Considérons ce problème que nous avons emprunté à Fischbein et Schnarch (1997):

> Selon vous, quel événement est le plus probable : l'événement «lancer 3 pièces de monnaie et obtenir au moins 2 faces» ou l'événement «lancer 300 pièces de monnaie et obtenir au moins 200 faces» ?

Ici, le jugement doit porter sur les probabilités de réalisation des deux événements (attributs-cibles). Au lieu de les évaluer en s'appuyant sur la loi des grands nombres, les sujets qui perçoivent l'équivalence des rapports exprimés sont susceptibles de les utiliser comme attributs heuristiques et de conclure, à tort, que les probabilités de réalisation des deux événements sont équivalentes. En effet, selon Lecoutre et Fischbein (1998), qui ont présenté ce problème à des étudiants français en psychologie (n=385), 72% des étudiants ont émis une réponse basée sur l'évaluation des attributs heuristiques.

Deuxième exemple. Stavy et Tirosh (2000) ont présenté le rectangle et le polygone de la figure 1 à des élèves des niveaux 2 à 9. Bien que les périmètres de ces deux figures soient identiques, plus de 70% des élèves de chaque niveau ont répondu que le périmètre du rectangle était supérieur au périmètre du polygone parce qu'il était "plus large" ou parce que son "aire" était plus grande.

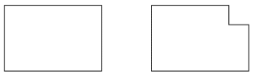


Figure 1 *− Figures présentées par Stavy et Tirosh (2000) lors d'une tâche de comparaison du périmètre*

Les élèves ont donc basé leur jugement sur l'évaluation d'attributs heuristiques (la largeur et l'aire de chaque figure), et ce, au détriment des attributs-cibles (le périmètre de chaque figure).

Troisième exemple. Leron et Hazzan (2006) rapportent ce problème rudimentaire d'algèbre, lequel fut initialement proposé par Clement, Lockhead et Monk (1981) à 150 étudiants en ingénierie:

> Écris une équation pour l'affirmation suivante: «Il y a six fois plus d'élèves que de professeurs». Utilise E pour le nombre d'élèves et P pour le nombre de professeurs (Clement, et al., 1981, p. 288).

Clement et ses collègues signalent un taux d'échec de 37 % et précisent que les deux tiers des erreurs produites prenaient la forme suivante: $6E = P$ (p. 288). Selon Leron et Hazzan (2006), qui ont interprété ces erreurs à la lumière des DPT, «En raison de l'expression "6 élèves", le symbole *6E* vient immédiatement à l'esprit et la réponse *6E=P* est automatiquement et rapidement invoquée par S1» (p. 117). En fait, tout se passe comme si les étudiants avaient utilisé des symboles mathématiques pour abréger l'énoncé du problème, et ce, au lieu de les utiliser pour modéliser la structure relationnelle du problème. Leur jugement porterait ainsi sur la structure de l'énoncé (attribut heuristique) et non sur la structure de la situation algébrique (attribut-cible).

Quatrième exemple. Considérons un instant le problème bien connu du bâton et de la balle (Frederick, 2005; Kahneman & Frederick, 2002):

> Un bâton et une balle coûtent 1,10$. Le bâton coûte 1,00$ de plus que la balle. Combien coûte la balle?

Le lecteur qui rencontre ce problème pour la première fois aura tendance à se fier à son intuition première et à répondre que la balle vaut 0,10$. En effet, selon Kahneman, «Presque tout le monde rapporte une tendance initiale à répondre "10 cents" […]» (trad. libre de Kahneman, 2002, p. 451). De Neys, Rossi et Houdé (2013) expliquent:

> […] les gens substituent l'expression relationnelle "plus que" par une expression absolue plus simple. En effet, "le bâton coûte 1$ de plus que la balle" est lu "le bâton coûte 1$". Par conséquent, au lieu de travailler sur une somme, les gens divisent naturellement 1,10$ en 1$ et 10 cents, ce qui est plus facile à faire. En d'autres mots, en raison de la substitution, les gens donnent une réponse correcte à une question incorrecte (trad. libre de De Neys, et al., 2013, p. 269).

Selon Van Dooren et Inglis (2015), une solution correcte à ce problème ne sera émise que si la réponse intuitive est inhibée. Dans une étude menée auprès de 272 étudiants

universitaires, Rioux et Couture (2014) ont toutefois noté que dans certains cas, même le recours à une démarche algébrique ne suffisait pas à provoquer cette inhibition.

Dans ce problème comme dans ceux que nous avons précédemment décrits, les erreurs commises par les sujets ont été présentées comme des réponses intuitives émanant du système 1. Or S1 n'est pas le seul coupable à blâmer, S2 ayant en effet endossé les réponses émises par S1 et les ayant jugées acceptables. Pour reprendre l'expression de Kahneman, nous dirons de S2 qu'il est un "contrôleur paresseux" (Kahneman & Clarinard, 2016, p. 62) et que la question qui se pose désormais est celle de l'inhibition et du remplacement, par S2, des réponses émises par S1 (Van Dooren & Inglis, 2015).

III. SOLLICITER S2 POUR CONTROLER LES REPONSES INTUITIVES DE S1

Jusqu'ici, nous avons décrit certaines erreurs commises par des sujets engagés dans une démarche de résolution de problèmes mathématiques et les avons interprétées comme étant le fruit d'un processus de substitution d'attributs. Dans cette perspective, la réussite de ces problèmes pourrait dépendre de la capacité des élèves à utiliser le système 2 pour court-circuiter ce processus. Selon Stanovich et Toplak (2012)[2], cela implique qu'il y ait 1) interruption du processus, 2) suppression de la réponse intuitive et 3) remplacement de cette dernière par une meilleure réponse. Or les réponses émises par le système 1 s'accompagnent bien souvent d'un sentiment de justesse et lorsque ce sentiment est prégnant, les réponses émises en première instance sont peu susceptibles de changer (Thompson, et al., 2011, p. 134). Il convient donc de se questionner sur les leviers à actionner pour que les élèves engagés dans la résolution d'un problème mathématique remettent en question et éventuellement modifient leur jugement initial.

1. Solliciter le système 2 en avertissant les sujets

Babai, Shalev et Stavy (2015) ont proposé des tâches de comparaison de périmètres à 84 élèves de sixième année. En tout, 16 couples de figures leur ont été présentés. Les conditions des tâches proposées étaient parfois congruentes, parfois non congruentes. Quand les conditions étaient congruentes, la figure ayant le plus grand périmètre était également la figure ayant la plus grande aire (voir figure 2). Dans ces conditions, l'évaluation de l'aire des figures (attribut heuristique) était peu susceptible d'interférer avec l'évaluation de leur périmètre (attribut-cible). Quand les conditions étaient non congruentes, deux cas se présentaient: soit la figure ayant le plus grand périmètre était la figure ayant la plus petite aire (conditions non congruentes inversées), soit les périmètres des deux figures étaient identiques, et ce, malgré des aires différentes (conditions non congruentes égales). Dans ces conditions, l'évaluation de l'aire des figures (attribut heuristique) était d'avantage susceptible d'interférer avec l'évaluation de leur périmètre (attribut-cible).

[2] Il est à noter que dans leur article, Stanovich et Toplak ont délaissé les expressions "Système 1" et "Système 2", et ce, au profit des expressions "processus de Type 1" et "processus de Type 2". Ils souhaitent ainsi traduire l'idée suivant laquelle une Dual-Process Theory n'est pas nécessairement une théorie impliquant deux systèmes cognitifs singuliers, lesquels correspondraient à deux régions distinctes du cerveau. Pour une discussion plus approfondie, le lecteur aura avantage à lire Evans (2009).

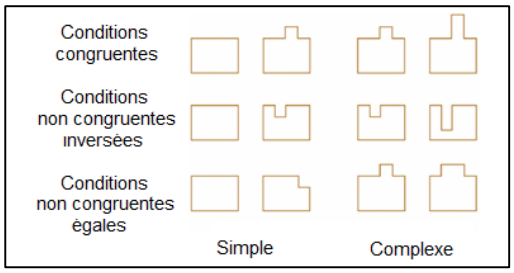


Figure 2 *- Conditions congruentes et non congruentes des tâches proposées (trad. libre de Babai, et al., 2015, p. 738)*

Les élèves étaient scindés en deux groupes: un groupe expérimental de 44 élèves et un groupe témoin de 40 élèves. Avant de présenter les tâches aux élèves du groupe expérimental, les chercheurs leur ont servi l'avertissement qui suit:

> Soyez attentifs: on vous demande de comparer les périmètres et non les aires des deux figures. Il y a une tendance à comparer les aires des figures au lieu de leurs périmètres. Cette tendance peut mener à des erreurs. Tentez de surmonter cette tendance (trad. libre de Babai, et al., 2015, p. 740).

Cet avertissement n'a pas été servi aux élèves du groupe témoin. Babai, Shalev et Stavy ont ensuite comparé les taux de réussite ainsi que les pourcentages de réponses intuitives dans chaque groupe, et ce, pour chaque type de tâches. Leurs résultats sont sans équivoque: cet avertissement a amélioré de façon significative l'exactitude des réponses émises lorsque les conditions des tâches étaient non congruentes. Selon ces chercheurs, «Cela suggère que l'avertissement a bel et bien activé les mécanismes du contrôle inhibiteur et que cela a aidé les élèves à surmonter les interférences intuitives» (trad. libre de Babai, et al., 2015, p. 741). Il convient toutefois de noter que cet avertissement était spécifique à la tâche présentée et que Dewolf et ses collègues (2014) ont démontré l'inefficacité d'un avertissement d'ordre plus général.

2. Solliciter le système 2 avec une tâche préalable complexe

Attridge et Inglis (2015) ont mené une étude auprès de 61 étudiants universitaires, lesquels étaient inscrits à un cours de premier cycle en ingénierie. Deux tâches leur ont été soumises. La première d'entre elles est le *Raven's Advanced Progressive Matrices* (RAPM), une tâche complexe de complétion de matrices qui n'induit généralement pas des réponses intuitives chez les sujets (Raven, Raven, & Court, 1998). La seconde est le *Cognitive Reflection Test* (CRT), un test comportant trois problèmes mathématiques relativement simples, lesquels sont toutefois reconnus pour induire, chez les sujets, des réponses intuitives incorrectes (Frederick, 2005). Ils souhaitaient vérifier si la réalisation de la première tâche (RAPM) pouvait favoriser l'inhibition des réponses intuitives lors de la réalisation de la seconde tâche (CRT). Les étudiants ont donc été scindés en deux groupes: un groupe expérimental de 29 étudiants et un groupe témoin de 32 étudiants. Les étudiants du groupe expérimental ont complété le RAPM avant de compléter le CRT alors que les étudiants du groupe témoin ont complété le CRT avant le RAPM. Leurs résultats indiquent que les étudiants du groupe expérimental ont mieux réussi le CRT que les étudiants du groupe témoin.

IV. CONCLUSION

Dans ce texte, nous avons utilisé les DPT pour éclairer les réponses formulées par les élèves lors de la résolution de certains problèmes mathématiques, lesquelles étaient considérées comme des réponses adéquates à des questions proches, mais différentes de celles qui leur étaient initialement posées. En optant pour cet éclairage, nous avons toutefois laissé dans l'ombre les interprétations plus classiques des erreurs commises par les élèves. Par exemple, en ce qui a trait au problème du bâton et de la balle, il a été porté à notre attention que la tendance à vouloir répondre 0,10 $ pourrait s'expliquer par une centration des sujets sur un seul aspect du problème. De notre point de vue, cette interprétation n'exclue cependant pas le recours à l'intuition, dans la mesure où cette dernière est associée à un processus de substitution d'attribut. En effet, il serait possible de soutenir qu'en se centrant sur un seul aspect du problème, les sujets utilisent cet aspect comme attribut heuristique et répondent à une question plus simple que celle qui leur avait été initialement posée. Si plusieurs interprétations peuvent coexister sans nécessairement être incompatibles, au terme de notre présentation, les commentaires formulés par les membres de notre groupe de travail nous ont toutefois amenée à réfléchir sur la nature des réponses émises aux problèmes présentés. Étaient-elles réellement le fruit d'un jugement intuitif ? Pour répondre à cette question, il aurait fallu s'entendre sur ce qu'est l'intuition, consensus que nous avons failli à atteindre au terme de notre présentation, et ce, malgré la proposition de définition que nous en avions faite.

Nous avons également présenté deux interventions susceptibles de forcer S2 à contrôler les réponses intuitives de S1, soit avertir les élèves avant la complétion d'une tâche et leur présenter une tâche préalable complexe. Bien que ces interventions aient favorisé la réussite des problèmes soumis, elles n'en demeurent pas moins difficilement transposables dans un cadre didactique. Par exemple, la première intervention modifie la tâche en donnant aux sujets des indices quant aux ressources à mobiliser pour la traiter. Or la mobilisation et l'utilisation efficace des concepts et des processus mathématiques appropriés à une situation est une étape importante dans l'exercice du raisonnement mathématique ; il n'y a donc pas de gain véritable au niveau des apprentissages réalisés. Bref, en discutant de ces interventions avec les membres de notre groupe de travail, nous avons réalisé que ces dernières visaient la réussite des tâches par des sujets et non la compréhension des concepts et des processus mathématiques sous-jacents. Ce constat n'est pas anodin et explique probablement pourquoi la plupart des recherches menées en didactique des mathématiques n'intègrent pas, dans leur réflexion, les résultats obtenus par les DPT. Cela dit, doit-on, pour autant, ignorer le rôle joué par l'intuition dans la résolution de certains problèmes mathématiques ? Nous croyons que non. À notre humble avis, il faudra toujours une part d'intuition pour s'attaquer à un problème mathématique. L'idée n'est donc pas de l'ignorer, mais plutôt de l'étudier, de comprendre son fonctionnement et d'apprendre aux élèves à traiter avec vigilance les fruits de la pensée intuitive.

RÉFÉRENCES

Attridge, N., & Inglis, M. (2015). Increasing cognitive inhibition with a difficult prior task: implications for mathematical thinking. *ZDM, 47*(5), 723-734.

Babai, R., Shalev, E., & Stavy, R. (2015). A warning intervention improves students' ability to overcome intuitive interference. *ZDM, 47*(5), 735-745.

Burton, L. (1999). Why is intuition so important to mathematicians but missing from mathematics education? *For the Learning of mathematics, 19*(3), 27-32.

Clement, J., Lockhead, J., & Monk, G. (1981). Translation difficulties in learning mathematics. *American Mathematical Monthly, 88*, 286-290.

De Neys, W., Rossi, S., & Houdé, O. (2013). Bats, balls, and substitution sensitivity: Cognitive misers are no happy fools. *Psychonomic Bulletin & Review, 20*(2), 269-273.

Dewolf, T., Van Dooren, W., Ev Cimen, E., & Verschaffel, L. (2014). The impact of illustrations and warnings on solving mathematical word problems realistically. *The Journal of Experimental Education, 82*(1), 103-120.

Evans, J. S. B. (2009). How many dual-process theories do we need? One, two, or many? Dans J. S. B. Evans & K. Frankish (Éds.), *In two minds: Dual processes and beyond* (pp. 33-54). New-York: Oxford University Press.

Evans, J. S. B., & Frankish, K. E. (2009). *In two minds: Dual processes and beyond*. New-York: Oxford University Press.

Evans, J. S. B., & Stanovich, K. E. (2013). Dual-process theories of higher cognition: Advancing the debate. *Perspectives on psychological science, 8*(3), 223-241.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach* (Vol. 5): Springer Science & Business Media.

Fischbein, E. (1999). Intuitions and Schemata in Mathematical Reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 38*(1-3), 11-50.

Fischbein, E., & Schnarch, D. (1997). The Evolution with Age of Probabilistic, Intuitively Based Misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(1), 96-105.

Frankish, K., & Evans, J. (2009). The duality of mind: An historical perspective. *In two minds: Dual processes and beyond*, 1-29.

Frederick, S. (2005). Cognitive reflection and decision making. *The Journal of Economic Perspectives, 19*(4), 25-42.

Gillard, E., Van Dooren, W., Schaeken, W., & Verschaffel, L. (2009). Dual processes in the psychology of mathematics education and cognitive psychology. *Human Development, 52*(2), 95-108.

Gilovich, T., Griffin, D. W., & Kahneman, D. (2007). *Heuristics and biases : the psychology of intuitive judgment* (Reprinted with corrections. éd.). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Kahneman, D. (2002). Maps of bounded rationality: A perspective on intuitive judgment and choice. *Nobel prize lecture, 8 décembre 2002*, 449-489.

Kahneman, D., & Clarinard, R. (2016). *Système 1 / Système 2. Les deux vitesses de la pensée*: Flammarion.

Kahneman, D., & Frederick, S. (2002). Representativeness revisited: attribute substitution in intuitive judgment. Dans T. Gilovich, D. W. Griffin & D. Kahneman

(Éds.), *Heuristics and biases: The psychology of intuitive judgment* (Vol. 49-81). New-York: Cambridge University Press.

Kahneman, D., & Tversky, A. (1979). Prospect theory: An analysis of decision under risk. *Econometrica: Journal of the econometric society*, 263-291.

Lecoutre, M. P., & Fischbein, E. (1998). Évolution avec l'âge de «misconceptions» dans les intuitions probabilistes en France et en Israël. *Recherches en didactique des mathématiques, 18*(3), 311-332.

Leron, U., & Hazzan, O. (2006). The rationality debate: application of cognitive psychology to mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 2006*(62), 105-126.

Raven, J., Raven, J., & Court, J. H. (1998). *Manual for Raven's progressive matrices and vocabulary scales*. San Antonio: Pearson.

Rioux, M. (2012). *Évolution des projets de formation de futurs enseignants au primaire au contact de situations probabilistes.* Université de Montreal (Canada), Montréal.

Rioux, M., & Couture, A. (2014). Dual-process theory et résolution de problèmes additifs de comparaison par des étudiants universitaires. *Éducation et francophonie, 42*(2), 120-137.

Stanovich, K. E. (2009). *What intelligence tests miss: The psychology of rational thought*: Yale University Press.

Stanovich, K. E., & Toplak, M. E. (2012). Defining features versus incidental correlates of Type 1 and Type 2 processing. *Mind & Society, 11*(1), 3-13.

Stanovich, K. E., & West, R. F. (2000). Individual differences in reasoning: Implications for the rationality debate? *Behavioral and Brain Sciences, 23*(5), 645-665.

Stavy, R., & Tirosh, D. (2000). *How students (mis-) understand science and mathematics: Intuitive rules*: Teachers College Press.

Thompson, V. A., Turner, J. A. P., & Pennycook, G. (2011). Intuition, reason, and metacognition. *Cognitive Psychology, 63*(3), 107-140.

Tversky, A., & Kahneman, D. (1974). Judgment under uncertainty: heuristics and biases. Biases in judgments reveal some heuristics of thinking under uncertainty. *Science, 185* (4157), 1124-1131.

Tversky, A., & Kahneman, D. (1975). Judgment under uncertainty: Heuristics and biases *Utility, probability, and human decision making* (pp. 141-162): Springer.

Van Dooren, W., & Inglis, M. (2015). Inhibitory control in mathematical thinking, learning and problem solving: a survey. *ZDM, 47*(5), 713-721.

LA PENSEE FONCTIONNELLE : UNE ANALYSE PRAXEOLOGIQUE DU POTENTIEL DE SON DEVELOPPEMENT PRECOCE

ROBERT[*] Virginie — SQUALLI[**] Hassane — BRONNER[***] Alain

Résumé – La pensée fonctionnelle, en tant que forme de la pensée mathématique, a fait l'objet de peu d'étude en didactique des mathématiques. Or, il ne semble pas encore exister de consensus chez ces chercheurs sur ce que recouvre la pensée fonctionnelle. Dans cet article, nous présentons une caractérisation de cette dernière en plus de l'exploiter dans notre projet de maîtrise pour analyser le potentiel des manuels scolaires québécois du 3e cycle du primaire pour le développement précoce de la pensée fonctionnelle.

Mots-clefs : Pensée fonctionnelle, pensée mathématique, fonctions, activités fonctionnelles.

Abstract – Functional thinking, as a form of mathematical thinking, hasn't been the object of many studies in mathematics education. There seems to be no consensus among researchers on what functional thinking entails. We therefore provide a characterization of the latter in addition to using it in our master's project to analyze the potential of Québec's elementary school textbooks for the early development of functional thinking.

Keywords: Functional thinking, mathematical thinking, functions, functional activities.

I. INTRODUCTION

1. La pensée mathématique

En didactique des mathématiques, l'intérêt porté à la pensée mathématique et à ses diverses formes prend de plus en plus d'ampleur et se constate notamment par les différents groupes de recherche nationaux et internationaux qui se penchent sur leur développement et leur importance. Porté par plusieurs chercheurs, un mouvement international visant le développement de la pensée algébrique avant l'introduction formelle de l'algèbre a vu le jour : Early Algebra. Ce dernier, qui réfère à la fois à un domaine de recherche, à une approche curriculaire et à un domaine de formation des enseignants (Squalli, 2015) a initié des changements dans les programmes qui bonifient maintenant leurs contenus pour favoriser le développement d'une pensée algébrique sur tout le curriculum primaire et secondaire. Parmi les recherches d'Early Algebra, certaines mettent en lumière l'importance d'une autre forme de la pensée mathématique : la pensée fonctionnelle. Bien que cette dernière soit plus souvent utilisée pour le développement des compétences algébriques dans les recherches, c'est à la pensée fonctionnelle en elle-même que nous portons notre intérêt de recherche. Pour nous, la pensée fonctionnelle se caractérise par une manière de penser dans des activités faisant intervenir le concept de fonction (activités fonctionnelles) de manière explicite ou implicite à travers les différents sens de la fonction. Dans cet article, nous présentons trois résultats de recherche importants réalisés dans le cadre de notre maîtrise. Notre première contribution est une caractérisation de ce qu'est, pour nous, la pensée fonctionnelle. Ensuite, une seconde contribution est la construction de praxéologies de références relatives à chacune des activités, que nous appelons fonctionnelles, qui nous permettent de procéder à l'analyse de ressources didactique comme les manuels scolaires. Finalement, notre dernière contribution concerne les résultats d'analyse des manuels scolaires québécois qui révèlent le potentiel de ces derniers pour le développement précoce de la pensée fonctionnelle chez les élèves québécois.

[*] Université de Sherbrooke – Canada – Virginie.Robert2@usherbrooke.ca
[**] Université de Sherbrooke – Canada – Hassane.Squalli@usherbrooke.ca
[***]Université de Montpellier 2 – France – alain.bronner@fde.univ-montp2.fr

2. La pensée fonctionnelle

Notre intérêt de recherche prend donc sa place dans la pensée fonctionnelle. Cette dernière, ne reposant non pas sur un domaine de contenu, mais bien sur le concept de fonction qui unifie et transcende tous les domaines de la mathématique (Denbel, 2015), est indispensable pour la formation de la pensée mathématique. En effet, pour Freudenthal (2002), la modélisation fonctionnelle nous permet de comprendre et de décrire notre monde saturé de changements. Stölting (2008) avance pour sa part que « la capacité de gérer des situations fonctionnelles et de prendre des décisions fondées est une condition nécessaire pour être un citoyen constructif, impliqué et réfléchi » (p. 7). De grands concepts mathématiques comme la variation, la dépendance, la covariation et la correspondance prennent tout leur sens par l'apprentissage des fonctions. Or, bien qu'il soit important, le concept de fonction est complexe et apporte son lot de difficultés (Sierpinska, 1992) autant au secondaire que pour les études supérieures. Pour Warren et Cooper (2005), en se faisant de manière graduelle et sur une longue période de temps, le développement de la pensée fonctionnelle pourrait favoriser une transition fluide vers le concept de fonction. Pour nous, la pensée fonctionnelle pourrait notamment permettre d'approfondir les raisonnements fonctionnels, d'établir un meilleur rapport aux concepts fonctionnels et améliorer la manière de communiquer et de représenter les fonctions. Ainsi, pour favoriser l'apprentissage et viser une compréhension approfondie du concept de fonction, il importe de s'intéresser au développement précoce d'une pensée fonctionnelle.

Il peut sembler ambitieux de vouloir développer la pensée fonctionnelle dès le primaire puisque le concept de fonction ne fait son apparition qu'en 3^{e} année du secondaire dans le programme québécois. Pourtant, certaines recherches d'Early Algebra ont vérifié la capacité des élèves à étudier et à comprendre des relations fonctionnelles dès les premières années du primaire (voir notamment Blanton et Kaput (2004 ; 2011) et Blanton *et al*., 2015). L'une des conclusions de ces recherches est qu'il faut remettre en question la croyance selon laquelle les élèves ne peuvent commencer à étudier les relations fonctionnelles dès les premières années de leur parcours sans avoir longuement étudié les suites et leur régularité (Blanton, Brizuela, Gardiner, Sawrey et Newman-Owens, 2015).

Au Québec, la pensée fonctionnelle n'est pas mentionnée de manière explicite et le programme de formation ne promeut pas une trajectoire d'apprentissage qui viserait implicitement son développement comme le font le programme ontarien de 2005 et les propositions curriculaires du NCTM de 2000. Malgré tout, ceci ne veut pas dire que les élèves ne développent pas certains aspects de leur pensée fonctionnelle pendant leur parcours scolaire. En effet, pour nous, la pensée fonctionnelle se déploie lors d'activités faisant intervenir le concept de fonction de manière implicite ou explicite. Conséquemment, dans leur quotidien, les élèves sont possiblement confrontés à des activités mathématiques qui favorisent le développement de leur pensée fonctionnelle, et ce, à leur insu.

Pour accéder à ce quotidien des classes québécoises, l'étude des manuels scolaires s'avère intéressante. En effet, ces derniers nous offrent une vitrine privilégiée et facile d'accès sur les activités que les enseignants proposent. Approuvés par le Ministère de l'Éducation, les manuels sont des ressources qui donnent une interprétation du programme de formation en plus de proposer des pratiques possibles d'enseignement (Tavignot, 1995). Ils se retrouvent donc à la jonction du curriculum réel et du curriculum formel (Lebrun et Niclot, 2009) ; entre les contenus prescrits et les contenus réellement enseignés. Toutefois, avant de pouvoir formuler un cadre d'analyse des activités, nous commencerons par bien cerner ce que nous entendons par pensée fonctionnelle.

II. CADRE DE RÉFÉRENCE

Définir la pensée fonctionnelle n'est pas chose simple. À notre connaissance, très peu de chercheurs ont tenté l'exercice. Pour faire notre caractérisation de la pensée fonctionnelle, nous nous sommes appuyés sur quatre facteurs importants : sur la manière d'approcher la pensée invoquée dans les textes de Radford de 2011, 2013 et 2015 ; sur l'opérationnalisons de la pensée fonctionnelle à partir du modèle épistémologique de référence de la pensée algébrique proposé par certains membres de l'Observatoire International de la Pensée Algébrique (OIPA) ; sur les quelques définitions proposées par les recherches d'Early Algebra et sur les fondements conceptuels de la notion de fonction.

1. Une proposition de modèle épistémologique de référence de la pensée fonctionnelle

D'abord, tout comme Radford (2011), nous optons pour une conception non mentaliste de la pensée. Celle-ci ne constitue pas un processus exclusivement intracérébral, puisque le cerveau humain dépend des ressources culturelles pour son activité. Chercher à comprendre la pensée revient donc à considérer à la fois la pensée du sujet pensant (la pensée subjective) et la pensée historico-culturelle. Dans le cadre de cette recherche, nous nous intéressons à la pensée historico-culturelle puisque « c'est au cours de l'acquisition des formes culturelles de réflexion que l'élève parvient à donner du sens aux objets matériels et conceptuels qu'il rencontre dans sa culture » (Radford, 2011, p. 64). Ainsi, la pensée mathématique, tout comme la pensée fonctionnelle, ne peut se réduire à un individu : elle le transcende. De plus, les activités servent de médiation entre les connaissances et le fait de connaître (Radford, 2011). Elles sont donc indispensables et indissociables de la pensée.

Sans être exhaustifs, nous considérons que les **activités fonctionnelles essentielles** sont 1) la modélisation fonctionnelle, 2) la généralisation fonctionnelle et 3) l'étude de relations fonctionnelles. Dans le cadre de notre recherche, nous considérons la modélisation fonctionnelle comme un processus à travers lequel une situation réelle est étudiée afin d'établir le modèle fonctionnel le plus approprié possible qui traduit la relation fonctionnelle en jeu. Ce modèle fonctionnel offre une représentation simplifiée d'une relation fonctionnelle complexe du monde réel. Pour sa part, la généralisation fonctionnelle est conçue comme un processus à travers lequel une régularité entre quelques instanciations (des couples) des variables est pressentie, une hypothèse est formulée puis vérifiée sur des valeurs d'un certain domaine. Elle se termine par la justification de la relation fonctionnelle généralisée. Finalement, l'étude d'une relation fonctionnelle est une activité pour laquelle la relation fonctionnelle est déjà connue. Elle sert notamment à mieux comprendre une fonction, qui est ici considérée comme un objet mathématique en soi, par l'étude de ses différentes facettes.

2. Notre caractérisation de la pensée fonctionnelle

La pensée fonctionnelle est une manière de penser dans des activités faisant intervenir la notion de fonction (activités fonctionnelles ci-haut mentionnées) de manière explicite ou implicite à travers les différents sens de la fonction. Sur le plan opératoire, elle se concrétise par :

1. Un ensemble de raisonnements particuliers dans ce type d'activité ;
2. Un rapport particulier aux concepts en jeu dans ces activités ;
3. Une manière de communiquer et de représenter.

3. L'opérationnalisation de la pensée fonctionnelle

Dans cette section, nous examinerons rapidement chacune des composantes de la pensée fonctionnelle sans toutefois chercher à être exhaustifs.

Premièrement, la pensée fonctionnelle se concrétise en partie par les différents raisonnements particuliers qu'elle mobilise. Pour nous, quatre raisonnements sont essentiels pour la pensée fonctionnelle et permettent de caractériser cette manière de penser.

1. Modéliser fonctionnellement ;
2. Généraliser fonctionnellement ;
3. S'intéresser à la covariation entre deux quantités variables ;
4. S'intéresser à la relation de correspondance entre deux quantités variables.

La pensée fonctionnelle s'opérationnalise aussi par un rapport particulier aux concepts qu'elle englobe : la variable, la dépendance, les relations fonctionnelles, la relation d'équivalence, la covariation et la correspondance. Ces concepts seront appelés des concepts fonctionnels. Pour Dreyfus et Eisenberg (1982), la fonction ne peut être un concept en soi que si tous ses sous-concepts fondamentaux sont pris en considération. Cet aspect est donc indispensable pour le développement de la pensée fonctionnelle et se concrétise notamment ainsi :

1. Concevoir une ou plusieurs valeurs spécifiques comme une instanciation d'une variable ;
2. Percevoir la dépendance entre deux quantités et tenter de bien comprendre ce lien ;
3. Concevoir une expression algébrique prioritairement comme une relation fonctionnelle ;
4. Voir une équation comme une relation d'équivalence entre deux règles fonctionnelles ;
5. Percevoir la covariation entre deux variables et déterminer le sens de la variation ;
6. Percevoir la relation de correspondance entre deux quantités.

Finalement, la dernière composante indispensable de la pensée fonctionnelle est la manière de communiquer et de représenter les fonctions. Selon Duval (1993), un objet mathématique n'est pas et ne doit pas être associé uniquement à l'une de ses représentations. Il doit être reconnaissable en chacune d'elles. Le concept de fonction doit donc passer par toutes ses représentations sémiotiques pour favoriser une compréhension approfondie. Pour Duval (1993), les représentations sémiotiques sont « des productions constituées par l'emploi de signes appartenant à un système de représentation qui a ses contraintes propres de signifiance et de fonctionnement » (p. 39). Dans le cadre de notre recherche, nous nous intéressons plus particulièrement aux élèves du primaire. Or, pour ceux-ci, les registres de représentations accessibles sont notamment la table de valeurs, la représentation graphique, le langage oral et le dessin. Lorsqu'un individu déploie sa pensée fonctionnelle, il :

1. Articule et recours à divers registres de représentation pour représenter et opérer sur les variables et les relations fonctionnelles.

En résumé, nous caractérisons la pensée fonctionnelle comme une manière de penser dans des activités fonctionnelles. Elle s'observe à travers différentes composantes, dont un ensemble de raisonnements fonctionnels particuliers, un rapport particulier aux concepts fonctionnels et une manière de communiquer. Pour nous, ces composantes n'ont pas à toutes être convoquées dans une activité fonctionnelle. Elles devraient être construites tout au long de l'apprentissage.

Dans le cadre de cette recherche, nous considérons que la pensée ne se déploie pas dans le vide, mais bien à travers l'activité. Pour décortiquer l'activité mathématique et en dégager le potentiel pour le développement de la pensée fonctionnelle, c'est à la théorie anthropologique du didactique développée par Chevallard que nous ferons d'abord référence.

4. Éléments de la théorie anthropologique du didactique (TAD)

Le lecteur sait déjà que nos travaux de recherche se situent dans le domaine de la didactique des mathématiques. Or, pour étudier et analyser les pratiques sociales, les rapports aux savoirs et les savoirs, une notion clé apparaît dans la TAD : la praxéologie (Chevallard, 1998). Une praxéologique consiste en un modèle unique qui permet de décrire et d'analyser toute activité humaine régulièrement accomplie. L'activité mathématique peut alors être décomposée par le modèle général praxéologique proposé par la TAD, représenté par le quadruplet [t, τ, θ, Θ]. Selon ce modèle, les pratiques institutionnelles peuvent être analysées par un découpage en un système de tâches (t) appartenant à des types de tâches (T) (Bosch et Chevallard, 1999). Toute tâche t est accomplie au moyen d'une technique τ : une manière de faire. Chaque technique est justifiée à son tour par une technologie θ. Celle-ci correspond à un discours rationnel qui permet d'expliquer la technique. Finalement, toute technologie repose elle-même sur les fondements d'une théorie Θ (Chevallard, 1998). Cette décomposition en praxéologies permet ainsi de modéliser l'activité mathématique pour en favoriser l'analyse. Dans le cadre de notre recherche, elle permet de décomposer les activités proposées par les manuels scolaires québécois et d'en dégager le potentiel pour le développement précoce d'une pensée fonctionnelle.

5. Analyse a priori : nos praxéologies de références

Pour étudier les praxéologies mathématiques relatives au développement précoce de la pensée fonctionnelle se retrouvant dans les manuels scolaires, il importait d'expliciter notre modèle épistémologique de référence puisque celui-ci nous a servi de grille de lecture pour interpréter nos observations (Wozniak, 2012). Or, c'est à travers une analyse *a priori* que se dévoile davantage ce modèle puisque dans celle-ci, nous avons construit les praxéologies de références à partir desquelles les manuels scolaires ont été étudiés. Dans cette analyse *a priori*, nous avons émis des hypothèses quant aux genres de tâches, aux types de tâches, aux techniques et aux discours technologico-théoriques qui favorisent le développement de la pensée fonctionnelle précoce à l'intérieur de chaque activité fonctionnelle (modélisation fonctionnelle, généralisation fonctionnelle et étude d'une relation fonctionnelle). Comme nous nous intéressons au développement précoce de la pensée fonctionnelle, les types de tâches évoqués sont adaptés à des niveaux d'étude équivalents à la fin du primaire et au début du secondaire.

Brièvement, voici les genres de tâches ainsi qu'un exemple de type de tâches (écrit entre parenthèses) de nos praxéologies de références pour nos différentes activités fonctionnelles. D'abord, pour la modélisation fonctionnelle, nous avons relevé six genres de tâches :

- T_I *:* Identifier les différentes données de la situation réelle (identifier les variables en jeu dans la situation) ;
- T_G : Générer des données (générer des données à partir d'une expérimentation) ;
- T_O : Organiser les données (organiser les données dans le registre tabulaire) ;
- T_D : Déterminer la relation fonctionnelle (modèle fonctionnel) entre les quantités variables (déterminer la relation de covariation entre les quantités variables) ;

- T_R : Représenter la relation fonctionnelle (représenter les données dans le registre graphique) ;
- T_P : Prédire des données à partir du modèle fonctionnel établi ou le comportement du modèle (prédire le comportement du modèle fonctionnel en fonction de la situation réelle).

En ce qui concerne la généralisation fonctionnelle, nous avons identifié quatre genres de tâches :

- T_I *:* Identifier la relation fonctionnelle (identifier une régularité à partir de dessins) ;
- T_F : Formuler la relation fonctionnelle généralisée (formuler la relation fonctionnelle généralisée à l'aide d'un langage symbolique) ;
- T_R : Rechercher un autre couple de valeurs (rechercher un couple de valeurs éloigné) ;
- T_J : Justifier la relation fonctionnelle établie (justifier la relation fonctionnelle généralisée à l'aide d'un exemple générique).

Finalement, pour la praxéologie de référence relative à l'étude d'une relation fonctionnelle, nous avons également relevé quatre genres de tâches :

- $T_{DÉT}$ *:* Déterminer différentes composantes de la relation fonctionnelle (déterminer les caractéristiques de la relation fonctionnelle) ;
- $T_{DÉC}$: Décrire le lien de covariation ou de correspondance entre les quantités variables (décrire la relation de covariation entre les quantités variables) ;
- T_R : Représenter la relation fonctionnelle dans divers registres de représentation (représenter la relation fonctionnelle donnée sous sa forme graphique ou tabulaire dans le registre algébrique) ;
- T_O : Opérer sur les relations fonctionnelles (opérer sur les fonctions par l'addition de fonctions).

Pour chaque type de tâche identifié, nous avons détaillé une technique générique ainsi qu'un bloc technologico-théorique permettant de justifier la technique de résolution proposée. Par exemple, pour la modélisation fonctionnelle, une technique générique pour le type de tâches $T_{D\text{-}COV}$ *: Déterminer la relation de covariation entre les quantités variables*, une technique générique (appelée τ_{TD-COV}) est la suivante : (1) faire varier la valeur de la variable indépendante et observer l'effet de cette variation sur la variation de la variable dépendante ; (2) vérifier si cet effet est le même pour différentes valeurs ; (3) convoquer des symboles (des lettres, des mots, etc.) pour généraliser cette relation de covariation. Cette technique repose sur le processus associé à la modélisation et sur les divers fondements relatifs au concept de covariation de la théorie des fonctions analytiques. Pour l'entièreté de nos praxéologies de référence, se référer à notre mémoire (Robert, 2018).

La construction de notre caractérisation de la pensée fonctionnelle et de nos praxéologies de références nous a fourni les outils pour répondre à l'objectif spécifique de notre maîtrise qui était de dégager le potentiel des situations d'apprentissage proposées par les manuels scolaires du 3e cycle du primaire pour le développement précoce de la pensée fonctionnelle. Dans la section suivante, nous proposons donc la méthodologie relative à l'analyse de situations d'apprentissage.

III. RÉSULTATS DE NOS TRAVAUX DE MAÎTRISE

L'objectif premier de notre recherche de maîtrise était d'identifier et de décrire le potentiel des situations d'apprentissage pour le développement d'une pensée fonctionnelle. Nous avons

donc opté pour une recherche exploratoire et qualitative à partir de laquelle nous avons étudié le manuel scolaire *Défi mathématique* (Lyons et Lyons, 2005) du 3e cycle du primaire.

1. Éléments du protocole de recherche

Pour procéder à l'analyse des situations d'apprentissage et des tâches, nous avons d'abord établi un protocole d'analyse qui repose à la fois sur le modèle épistémologique de référence de la pensée fonctionnelle proposé ainsi que sur l'analyse praxéologique de Chevallard. Pour tous les détails concernant le protocole de recherche et l'analyse réalisée, se référer directement à notre mémoire (Robert, 2018).

Après avoir fait une lecture attentive de chacune des 803 situations d'apprentissage du manuel scolaire, nous avons d'abord distingué 80 situations d'apprentissage qui ont été identifiées comme étant potentiellement fonctionnelles. Parmi celles-ci, nous avons ensuite identifié les 64 situations d'apprentissage comportant des tâches fonctionnelles qui ont été analysées à l'aide de l'analyse praxéologique afin notamment d'identifier les **situations d'apprentissage fonctionnelles**. Pour nous, ces dernières sont définies comme comportant tous les ingrédients gagnants pour favoriser le développement de la pensée fonctionnelle : leur contexte réfère à une activité fonctionnelle, leurs tâches sont fonctionnelles et les techniques proposées pour leur résolution font appel au concept de fonction de manière directe ou indirecte.

Il est important de préciser que dans le cadre de notre recherche, nous avons étudié à la fois le manuel scolaire et le guide de l'enseignant pour analyser les techniques suggérées par les auteurs. Nous tenons également pour acquis que les enseignants se fient sur les indications du guide de l'enseignant pour guider leur pratique.

2. Exemple d'analyse partielle d'une situation d'apprentissage

Pour exemplifier les différentes étapes d'une partie de l'analyse réalisée, regardons l'exemple de la situation d'apprentissage 1-170-B5-1.

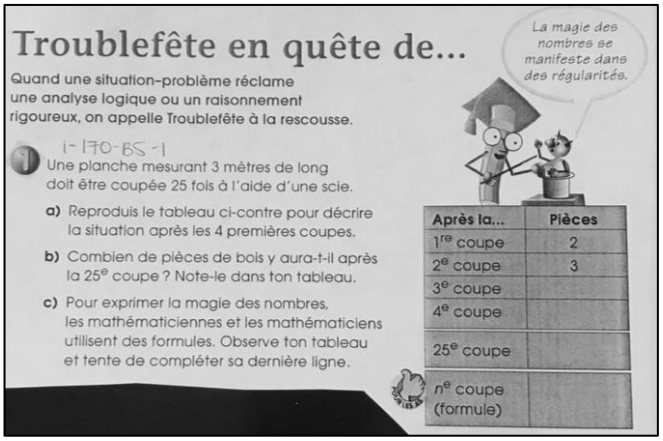


***Figure 1** : Situation d'apprentissage 1-170-B5-1*

La situation d'apprentissage et son contexte font appel à une activité de généralisation fonctionnelle. Quatre tâches fonctionnelles ont été identifiées dans cette activité : rechercher le nombre de pièces de bois après 3 coupes, rechercher le nombre de pièces de bois après 4 coupes, rechercher le nombre de pièces de bois après 25 coupes et rechercher une formule pour le nombre de pièces de bois après *n* coupes. Pour la réalisation de ces différentes tâches, la technique fournie par le guide de l'enseignant s'appuie sur les indications suivantes : (1)

invitez les élèves à compléter le tableau de données pour les 3e et 4e coupes ; (2) demandez aux élèves de chercher la régularité ; (3) aidez les élèves à rédiger une formule qui permet de prédire tous les cas possibles. Pour le choix des variables, nous suggérons d'utiliser la première lettre des mots ; (4) invitez les élèves à compléter la donnée pour la 25e coupe. Cette technique est fonctionnelle et elle suit la technique générique que nous avions proposée dans notre analyse *a priori*. L'élève pressent d'abord une régularité puis il tente de la formuler avec l'aide de l'enseignant. La technique offre même un conseil pour le choix des variables à utiliser. Dans le cadre de notre recherche, cette situation d'apprentissage a donc été identifiée comme favorisant le développement précoce de la pensée fonctionnelle.

IV. PRESENTATION ET DISCUSSION DU POTENTIEL DU MANUEL SCOLAIRE POUR LE DEVELOPPEMENT PRECOCE DE LA PENSEE FONCTIONNELLE

L'analyse des 64 situations d'apprentissage potentiellement fonctionnelle a révélé que 29 d'entre elles n'étaient accompagnées d'aucune technique suggérée. Pour nous, ces situations restent toutefois potentiellement fonctionnelles puisque l'enseignant pourrait choisir de les exploiter à l'aide du concept de fonction.

Selon les auteurs du manuel, sur les 35 situations d'apprentissage restantes, près de la moitié (17/35) devraient être réalisées à partir de techniques non-fonctionnelles. En effet, pour 17 situations d'apprentissage, les techniques suggérées reposent sur des concepts et des raisonnements ne faisant pas appel au concept de fonction. Par exemple, pour 9 situations relatives à une activité d'étude de relation fonctionnelle, les techniques suggérées réfèrent à des stratégies de calcul et visent ainsi le développement de compétences de calcul efficace. Ce ne sont donc que 18 situations d'apprentissage qui sont accompagnées de techniques fonctionnelles. Or, bien que ces 18 situations d'apprentissage ne représentent que 2,2% de toutes les situations du manuel scolaire, nous considérons qu'elles ont un potentiel pour le développement de la pensée fonctionnelle qui est non négligeable. En effet, il faut se rappeler que les fonctions et les concepts fonctionnels ne sont pas des prescriptions ministérielles pour le programme du primaire. Ainsi, en utilisant des concepts fonctionnels plutôt que de privilégier des approches axées sur l'arithmétique, ces techniques ouvrent la porte au développement précoce de la pensée fonctionnelle.

En menant nos analyses, nous avons pu constater que les activités fonctionnelles fournissent des contextes riches pour donner du sens aux apprentissages de plusieurs domaines de la mathématique et qu'elles ont une place significative dans le manuel scolaire étudié. En effet, les situations d'apprentissage de ce dernier mettent de l'avant à la fois la modélisation fonctionnelle, la généralisation fonctionnelle et l'étude de relation fonctionnelle, ce qui enrichit potentiellement la portée du développement de la pensée fonctionnelle. Toutefois, dans les activités fonctionnelles, les techniques fonctionnelles établies dans nos praxéologies de références sont peu exploitées par la modélisation fonctionnelle (4/18) et par l'étude d'une relation fonctionnelle (2/18). Toutefois, elles représentent plus de 50% des techniques suggérées pour la généralisation fonctionnelle. Cette dernière est donc l'activité fonctionnelle la plus exploitée par son aspect fonctionnel par les auteurs du manuel scolaire qui mettent en valeur des techniques qui insistent sur la relation de dépendance fonctionnelle entre les quantités variables ainsi que sur la recherche de la régularité par l'étude de la covariation ou de la correspondance. Ces activités initient également les élèves à observer une table de valeurs de diverses manières afin de découvrir des régularités.

V. CONCLUSION

Bien que l'importance du développement des différentes formes de la pensée mathématique ne soit plus à revendiquer, la pensée fonctionnelle reste peu étudiée. Cet article nous a permis de mettre de l'avant un modèle épistémologique de référence de la pensée fonctionnelle basé à la fois sur l'importance de l'activité mathématique et sur l'importance des raisonnements fonctionnels et des concepts fonctionnels. Nous avons également discuté du potentiel du manuel que nous avons étudié pour le développement précoce de la pensée fonctionnelle. À l'aide de notre modèle épistémologique de référence, nous croyons qu'il serait notamment possible d'identifier des balises pour la création de situations d'apprentissage fonctionnelles ou pour la création d'une trajectoire d'apprentissages qui favoriserait le développement précoce de la pensée fonctionnelle pour différents niveaux scolaires.

RÉFÉRENCES

Blanton, M. et Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. Dans *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, p. 135–142). Bergen : Norway.

Blanton, M., et Kaput, J. (2011). Functional Thinking as a Route Into Algebra in the Elementary Grades. Dans J. Cai et E. Knuth (dir.), *Early Algebraization : A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (p. 5‑23). Verlag Berlin Heidelberg: Springer.

Blanton, M., Brizuela, B. M., Gardiner, A., Sawrey, K. et Newman-Owens, A. (2015). A Learning Trajectory in 6-Year-Olds' Thinking About Generalizing Functional Relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(5), 511‑558.

Bosch, M. et Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques, 19* (1), 77-124.

Chevallard, Y. (1998). *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : L'approche anthropologique*. Actes de l'université d'été de la rochelle, juillet 1998 (p. 1-29).

Denbel, D. G. (2015). Functions in the Secondary School Mathematics Curriculum. Journal of Education and Practice, 6(1), 77‑81.

Dreyfus, T. et Eisenberg, T. (1982). Intuitive Functional Concepts : A Baseline Study on Intuitions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *13*(5), 360‑80.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, (5), 37‑65.

Freudenthal, H. (2002). Functions. Dans *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures* (p. 491–578).

Gouvernement de l'Ontario. (2005). *Le curriculum de l'Ontario de la 1er à la 8e année : Mathématiques*. Toronto : ON : Imprimeur de la Reine pour l'Ontario.

Gouvernement du Québec (2016). Programme de formation québécoise : mathématique 2e Freudenthal, H. (2002). Functions. Dans Didactical Phenomenology of Mathematical Structures (p. 491–578).

Lebrun, J. et Niclot, D. (2009). Les manuels scolaires : réformes curriculaires, développement professionnel et apprentissages des élèves. *Revue des sciences de l'éducation*, *35* (2), 7‑14.

Lyons, M. et Lyons, R. (2005). *Défi Mathématique : 3e cycle, 1, manuel de l'élève*. Québec : Les éditions de la Chenelière inc.

National Council of Teachers of Mathematics (dir.). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.

Radford, L. (2015). La pensée mathématique du point de vue de la théorie de l'objectivation. Dans les actes du colloque *Espace Mathématique Francophone (EMF) sur les différentes pensées mathématiques et leur développement dans le curriculum*. Alger.

Radford, L. (2013). Three Key Concepts of the Theory of Objectification : Knowledge, Knowing, and Learning. *Journal or Reasearch in Mathematics Education, 2*(1), 7-44.

Radford, L. (2011). *Vers une théorie socioculturelle de l'enseignement-apprentissage : la théorie de l'objectivation.* Toulouse : Institut de recherche pour l'enseignement des mathématiques de Toulouse.

Robert, V. (2018). *Le développement de la pensée fonctionnelle dans les manuels scolaires du 3e cycle du primaire québécois: une analyse praxéologique*. Mémoire de maîtrise, Université de Sherbrooke, Québec.

Sierpinska, A. (1992). On Understanding The Notion of Function. Dans Harel, G. et Dubinsky, E. (dir.). The Concept of Function : Aspects of Epistemology and Pedagogy (p. 25‑58). Washington, DC : MAA Notes.

Squalli, H. (2015). La généralisation algébrique comme abstraction d'invariants essentiels. Dans les actes du colloque *Espace Mathématique Francophone (EMF) sur les différentes pensées mathématiques et leur développement dans le curriculum*. Alger.

Stölting, P. (2008). La pensée fonctionnelle des élèves de 10 à 16 ans — Analyse comparative et études empiriques de son enseignement en France et en Allemagne. Thèse de doctorat, Université Denis Diderot et Universität Regenseburg.

Tavignot, P. (1995). À propos de la transposition didactique en didactique des mathématiques. *Spirale–Revue de Recherches en Éducation, 15,* 31–60.

Warren, E. et Cooper, T. (2005). Introducing Functional Thinking in Year 2: a case study of early algebra teaching. *Contemporary Issues in Early Childhood, 6*(2), 150‑162.

Wozniak, F. (2012). Analyse didactique des praxéologies de modélisation mathématique à l'école : une étude de cas. *Éducation et didactique, 6*(2), 65 88.

ANALYSE D'UNE SITUATION D'ENSEIGNEMENT-APPRENTISSAGE VISANT A SENSIBILISER LES ÉLÈVES DE PREMIÈRE SCIENTIFIQUE AU CONCEPT DE LIMITE D'UNE SUITE NUMÉRIQUE

GIBEL* Patrick

Résumé – Cet article vise à établir la pertinence d'un modèle d'analyse des raisonnements produits par les élèves et par l'enseignant dans des situations didactiques comportant une dimension recherche. Le modèle, élaboré à partir de la Théorie des Situations Didactiques et de la Sémiotique de C.S. Pierce, offre la possibilité d'analyser les raisonnements produits par les élèves et par l'enseignant dans des situations d'action, de formulation mais aussi en situation de validation. Nous l'utiliserons dans le cadre de l'étude d'une séquence, visant à sensibiliser les élèves de Première scientifique au concept de limite.

Mots-clefs : Raisonnement, suite, Analyse, limite, TICE.

Abstract – This article aims at establishing the relevance of a model of analysis of the reasoning processes produced by pupils and by the teacher in didactic situations including a situation of investigation. The model, developed from the Theory of Didactical Situations and the Semiotics of CS Pierce, offers the possibility of analyzing reasoning processes produced by pupils and by teacher in situations of action, situation of formulation but also in situation of validation. We will use it as part of the study of a sequence, aimed at sensitizing the students to the concept of limit.

Keywords: Reasoning process, calculus, limit, proof, TICE.

I. INTRODUCTION

La première partie de l'article a pour objet de présenter les caractéristiques du modèle d'analyse des raisonnements élaboré précédemment par Bloch et Gibel (2011), Gibel (2015), Gibel (2018). Nous commençons par définir ce que nous appelons *raisonnement* dans le cadre de notre recherche en didactique des mathématiques, puis nous explicitons les principales caractéristiques de notre modèle. Ce dernier permet d'effectuer une analyse *a priori* et une analyse a *posteriori* détaillée des raisonnements apparaissant dans une situation adidactique (Brousseau, 1998) ou à dimension adidactique (Mercier 1995 ; Bloch 1999).

Dans la deuxième partie, nous présentons la situation « La suite de carrés » mise en œuvre dans une classe de Première scientifique[1]. Nous expliciterons les enjeux et les spécificités de cette ingénierie et nous proposerons une analyse *a priori* de cette séquence en définissant les différents niveaux de milieux liés aux situations d'action, de formulation et de validation. Nous illustrerons ensuite la mise en œuvre de notre modèle en analysant les raisonnements produits par les élèves lors de deux épisodes extraits de la situation de validation

II. PRESENTATION DU MODELE D'ANALYSE DES RAISONNEMENTS

1. Caractérisation du raisonnement

Les raisonnements que nous étudierons dans le cadre de l'apprentissage des mathématiques sont essentiellement modélisables par des inférences. Mais cette caractérisation doit être

---

* Université de Bordeaux-ESPE d'Aquitaine, laboratoire Lab-E3D, Patrick.Gibel@u-bordeaux.fr

[1] Les élèves sont âgés de 16 à 17 ans.

complétée car nous voulons pouvoir distinguer les raisonnements effectifs des citations et intégrer des raisonnements qui se manifestent par des activités non verbales aussi bien que par des assertions, ce qui nous amène à formuler la définition suivante (Gibel, 2008) :

Un *raisonnement* est donc une relation R entre deux éléments A et B telle que :

- A désigne une condition ou un fait observé, contingent ;
- B est une conséquence ou une décision ou un fait prévu ;
- R est une relation, une règle, plus généralement une connaissance empruntée à un répertoire considéré comme connu, accepté. La relation R conduit l'actant, dans la circonstance A, à prendre la décision B ou à prévoir le fait B ou à énoncer que le fait B est vrai.

Un *raisonnement effectif* comprend de plus un agent E, élève ou professeur, qui utilise la relation R ainsi qu'un projet déterminé par une situation dont la réalisation exige l'usage de cette relation.

Un postulat de notre travail est que la Théorie des Situations Didactiques fournit un cadre privilégié pour cette étude, et notamment que l'analyse des fonctions du raisonnement dans les niveaux de milieux permet une catégorisation des raisonnements. Ce cadre doit cependant être nécessairement complété par des outils d'analyse locale, et par une analyse des fonctions des raisonnements (Gibel, 2004) et des signes, formels et langagiers, qui le soutiennent. Pour cette dernière fonction nous utilisons les outils d'analyse issus de la sémiotique peircienne (Duval, 2006 ; Evraert-Desmedt, 1990 ; Pierce, 1995 ; Bloch & Gibel, 2011 ; Bloch, 2006 ; Gibel, 2008).

2. Le modèle d'analyse des raisonnements

Une fréquente justification de la construction de situations d'enseignement, issues de situations fondamentales d'un savoir dans la Théorie des Situations Didactiques a été donnée par le bénéfice de ce type de situations sur les possibilités d'amener les élèves à entrer dans une démarche de preuve (Legrand, 1997). L'élaboration et l'analyse *a priori* de ces situations se basent sur l'étude des niveaux de milieux organisés ; l'analyse *a posteriori* permet au chercheur de déterminer s'il y a ou non une concordance du déroulement effectif avec la situation anticipée.

M0:M-Apprentissage	**E0: Elève**	**P0: Professeur**	***S0: Situation didactique***
M-1:M-Référence	E-1:E-Apprenant	P-1: P-Observateur	*S-1: Situation d'apprentissage*
➢ M-2: M- Objectif	E-2: E-Agissant	P-2 : P Dévolueur observateur	*S-2: Situation de référence*
➢ M-3: M- Matériel	E-3: E-Objectif		*S-3: Situation objective*

Tableau 1 *– La structuration du milieu de M0 à M-3 (Bloch, 2006)*

Le tableau 1 résume les niveaux de milieux – de M1 à M-3 – correspondants à la situation *expérimentale*. Les niveaux associés aux indices strictement négatifs sont ceux qui nous intéressent tout particulièrement dans la configuration que nous étudions i.e. l'apparition d'un processus de preuve dans la mise en œuvre d'une situation à dimension adidactique (Bloch, 1999). En effet c'est au niveau de l'articulation entre le milieu objectif et le milieu de référence que nous nous attendons à voir apparaître et se développer les raisonnements attendus.

Dans la structure précédente, nous savons que des étapes de la situation peuvent être à l'origine de raisonnements mathématiques : la confrontation à un milieu heuristique (milieu objectif) pour leur élaboration ; le passage à un milieu de référence pour établir la généricité des méthodes et le caractère de nécessité des propriétés trouvées.

Dans Bloch et Gibel (2011), nous avons été amenés à retenir trois axes principaux qui orientent et structurent notre analyse des raisonnements dans chacune des situations décrites précédemment.

Le premier axe est lié au milieu de la situation : dans une situation comportant une dimension adidactique, les élèves donnent à voir des raisonnements qui dépendent fortement du niveau de milieu où ils se situent. Le deuxième axe est l'analyse des fonctions du raisonnement, pointée ci-dessus comme nécessaire. Nous nous attacherons à montrer comment les fonctions du raisonnement sont liées à des niveaux de milieux et comment ces fonctions *manifestent* aussi ces niveaux de milieux, de sorte qu'ils peuvent servir au repérage de la position des élèves dans chacun de ces niveaux. Le troisième axe est celui des signes et des représentations observables. Ces observables se donnent à voir dans des formes différentes qui affectent le déroulement de la situation. La nature des signes et le statut logique du raisonnement sont à prendre en compte pour l'efficacité, l'idonéité aux attendus et le rôle dans la situation. L'analyse des signes est réalisée au regard du répertoire de représentation mobilisé par l'auteur du raisonnement. Il s'agit de prendre pour objet d'étude l'usage du répertoire didactique et de son niveau d'actualisation.

Ces trois axes apparaissent nécessaires et complémentaires pour effectuer une analyse très précise des différentes formes de raisonnements qui sont susceptibles d'être produits en regard de leur(s) fonctions et des conditions de leur production par les élèves (et/ou par l'enseignant au niveau M0). Ils constituent les dimensions de notre modèle d'analyse des raisonnements.

Nous compléterons notre analyse des raisonnements en ajoutant une dimension d'analyse supplémentaire relative à la forme des raisonnements : raisonnement abductif, inductif ou déductif.

III. II. ETUDE DE LA SITUATION « LA SUITE DE CARRES

1. La situation : Présentation et enjeux didactiques de la séquence

La situation « La suite de carrés » a été proposée à des élèves d'une classe de Première scientifique[2]. On construit une « suite » de carrés juxtaposés de la manière suivante : le côté du premier carré est de longueur 1 (en référence à une unité choisie), puis chaque carré a pour mesure de côté $\frac{3}{4}$ de la mesure du côté du carré précédent.

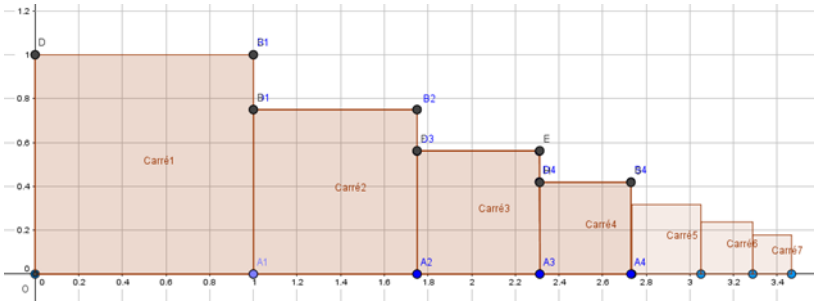


Figure 1. *La suite des sept premiers carrés*

Dans cette situation, il s'agit pour les élèves de déterminer s'il est possible de construire un énième carré, dont l'abscisse du point A_n, noté a_n correspondant à la mesure OA_n, (où O désigne l'origine du repère), est strictement supérieure à 4. L'objectif de la séquence est de sensibiliser les élèves à la notion de limite finie d'une suite. Cette situation d'apprentissage est une situation à dimension adidactique visant à confronter les élèves à la notion de limite. Cette dernière est obtenue ici comme le résultat du processus de construction des carrés itéré à l'infini.

D'un point de vue mathématique, nous cherchons à déterminer dans un premier temps si la suite (a_n) est majorée et ensuite si elle admet une limite. L'enjeu didactique de la situation est que les élèves puissent avoir l'idée « intuitive » du résultat de ce processus de calcul itéré « à l'infini »..

La situation prévoit l'introduction de la notion de limite, à partir de conjectures sur des grandeurs relatives à des objets géométriques : ainsi les élèves disposent d'une entrée dans un milieu matériel qui leur permet de s'appuyer sur des représentations initiales d'ordre figural. Cette « entrée » permet de faciliter la dévolution du problème. Les éléments de preuve devront cependant être fournis, en partie, par le professeur dans un épisode didactique, car les élèves n'ont, à ce stade, pas d'outils de définition et de preuve de ce qu'est une limite finie (dans le cadre de l'étude d'une suite). En ce sens il s'agit d'une situation à dimension adidactique (Mercier 1995 ; Bloch 1999).

2. Eléments d'analyse a priori

L'objectif de la séquence est ici relativement ambitieux : les divers moyens d'investigation doivent permettre de conjecturer que : quel que soit le nombre n de carrés construits, la longueur ne peut excéder une certaine valeur numérique (4). Il s'agira ensuite de mettre les élèves en situation de prouver, grâce notamment aux outils de géométrie analytique nouvellement acquis (vecteurs) ou précédemment acquis (équations de droites, coefficient directeur d'une droite) que la suite est nécessairement majorée par la valeur (4). L'objectif est de sensibiliser les élèves à la notion de limite.

La problématique dévolue aux élèves est formulée ainsi : En répétant le processus de construction des carrés un nombre n de fois suffisant, peut-on créer un carré dont l'abscisse du sommet A_n dépasse 4 ?

3. Analyse ascendante des différents niveaux de milieu

Nous allons à présent expliciter succinctement les différents niveaux de milieu tels que nous les avons définis dans le Tableau 1.

La situation objective (élève objectif et le milieu matériel) : Le milieu matériel est constitué des cinq premiers carrés qui ont été construits par les élèves. L'enseignant a construit sur le papier millimétré le premier carré et leur a communiqué le processus de construction.

La situation de référence (élève agissant et milieu objectif) : Le milieu objectif est constitué des n premiers carrés (n quelconque) résultant de la construction des carrés. Ces figures fonctionnent ici comme un indice de la figure « finale ». Les actions du sujet agissant ont pour objet de conjecturer et prouver l'alignement des sommets (B_i, $1 \leq i \leq N$) et ensuite de calculer l'abscisse a_n du point A_n pour n quelconque.

La situation d'apprentissage (élève apprenant et milieu de référence) : Le milieu de référence est constitué des conjectures sur la limite de la suite (an). Les élèves vont produire des calculs et des raisonnements assimilables à des éléments de preuve. Les élèves vont être

amenés à débattre de la validité des raisonnements produits pour répondre à la problématique. Il s'agit ici d'une situation de validation.

Si le caractère borné de la suite, de même que le fait qu'elle soit (strictement) croissante sont accessibles aux élèves de Première scientifique, ils ne disposent pas du résultat théorique leur permettant de déduire que la suite est convergente. Ils seront donc conduits à étudier la convergence de la suite en utilisant les TICE.

4. Déroulement envisagé

Séance 1 : Après l'exposé de la situation initiale, l'appropriation de la situation se fera par le calcul et le tracé individuel des cinq premiers carrés sur le papier quadrillé fourni. Une première conjecture sera émise, en binôme, à propos des points B_1, B_2 et B_3, les élèves devront prouver par la méthode de leur choix (de nature scalaire ou de nature vectorielle) l'alignement des points. La séance se poursuivra par la formulation d'une conjecture (générale), à propos des points B_1, $B_{2,..,}B_N$, où N désigne un entier quelconque fixé, que les élèves devront ensuite prouver.

La dernière phase de cette première séance vise à amener les élèves à produire des éléments de réponse à la problématique (existence d'une valeur « limite » de la suite (a_n)). Les élèves pourront choisir de s'appuyer sur l'alignement des sommets B_n afin de montrer que la suite $(a_{n,})$ est majorée. Ils pourront aussi exprimer a_n soit directement en fonction de n (suite de somme partielle associée à une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$), soit en fonction de a_{n-1} et a_{n-2} (suite récurrente); ils pourront étudier cette suite en mettant en œuvre des outils numériques.

Séance 2 : En début de séance 2 les élèves poursuivront en binôme leur recherche en mettant en œuvre les outils numériques : tableur et/ou programmation d'algorithme afin de de déterminer le comportement de la suite. La valeur limite apparaîtra, et sera aussi l'occasion de souligner les « limitations » liées à l'usage des outils numériques. En effet, la convergence étant rapide, Excel comme Algobox ou les calculatrices arrondissent rapidement le résultat à 4, d'où la nécessité pour l'enseignant d'effectuer une distinction empirique/théorique.

La phase suivante vise à mettre en débat les éléments de réponse à la problématique. Il faudra alors revenir au tracé initial des carrés, et à l'alignement des sommets afin d'en déduire l'existence et la valeur de la limite. En Annexe 1, nous proposons le déroulement détaillé de la séquence.

5. Les raisonnements susceptibles d'être produits

Les raisonnements susceptibles d'apparaitre au cours de la séquence « La suite des carrés » sont explicités dans le tableau ci-dessus. Nous indiquons pour chaque niveau de milieu : les fonctions des raisonnements attendus, les niveaux d'utilisation des symboles, Les niveaux d'actualisation du répertoire ainsi que les formes de raisonnements (inductif, déductif, abductif).

Dans le tableau ci-dessous, SEM désigne un raisonnement de nature sémantique et SYNT désigne un raisonnement de nature syntaxique.

	Milieu M_{-2}	Milieu M_{-1}	Milieu M_0
Fonctions des raisonnements	R1.1 SEM - Intuition sur un dessin - Décision de calcul - Moyen heuristique - Exhibition d'un exemple ou d'un contre-exemple	R1.2 SYNT/SEM - Calculs génériques - Formulation de conjectures étayées - Décision sur un objet math.	R1.3 SYNT - Formalisation des preuves dans la théorie mathématique requise (avec aide du P éventuellement)
Niveaux d'utilisation des symboles	R2.1 SEM Icônes ou indices dépendant du contexte (schémas, intuitions…)	R2.2 SYNT/SEM Arguments 'locaux' ou plus génériques : indices, calculs	R2.3 SYNT Arguments formels spécifiques
Niveau d'actualisation du répertoire	R3.1 SYNT/SEM - Utilisation ponctuelle de connaissances anciennes - Enrichissement au niveau heuristique : calculs, conjectures ponctuelles	R3.2 SYNT/SEM Enrichissement au niveau argumentaire : - des énoncés - du système organisateur	R3.3 SYNT - Formalisation des preuves - Introduction d'ostensifs organisés - Intégration des éléments théoriques du domaine math.
Formes de raisonnements	R4.1 abductif, inductif, déductif	R4.2 inductif, déductif	R4.3 déductif

Tableau 2*. Modèle d'analyse des raisonnements*

Nous allons analyser à l'aide de notre modèle les raisonnements produits par les élèves en situation de validation, au cours de la phase 9 de la séance 2 (ANNEXE 1).

IV. III ANALYSE D'UN EPISODE DE LA SEANCE 2 (ANALYSE A POSTERIORI)

Nous allons analyser à l'aide de notre modèle les raisonnements produits par les élèves en situation de validation, au cours de la phase 9 de la séance 2 (ANNEXE 1). Au cours de la séance 2, l'élève 1 au tableau (Hugues) note au tableau le calcul qu'il a effectué afin de déterminer quel est le point d'intersection de la droite (d) passant par les sommets B_n (dont l'alignement été démontré séance 1).

Il a effectué un calcul basé sur la connaissance du coefficient directeur de la droite (d) calculé précédemment, il a noté initialement X(0, x) le point d'intersection de la droite (d) avec l'axe des abscisses. Il effectue une dénotation des calculs rédigés au tableau (présenté en ANNEXE 2) en vue de déterminer l'abscisse du point X.

Nous allons présenter le script de ces épisodes.

> Professeur : Bien ! Alors c'est très bien ce que tu fais. Je pense que ça nécessite quelques explications sur une partie de la classe au moins sur l'idée, en fait que tu utilises. L'idée est vraiment intéressante, très originale et je pense que ça nécessite quelques explications.

L'enseignant juge que la procédure de calculs est inhabituelle, aussi il demande à l'élève de fournir à ses camarades des explications visant à justifier le choix de sa procédure et à éclairer l'interprétation du calcul.

> Elève 1 (Hugues) : En fait, on a une partie des coordonnées vu que X est sur l'axe de x, son ordonnée c'est forcément 0 ; et on recherche son autre coordonnée, enfin son abscisse. On a

déjà les coordonnées de B_1 et donc en gros, ici (en montrant) on connaît tout sauf x donc ça donne juste une équation à résoudre.

Elément d'analyse : Nous nous situons ici au niveau (M-2), en effet l'élève fournit une explication quant à la procédure de calculs utilisée basée sur la mise en œuvre de connaissances antérieures (R3.1). Il indique les raisons qui l'ont guidées dans sa décision de calculer (R1.1 c'est une fonction du raisonnement) de deux manières différentes le coefficient directeur de la droite et produit également un éclairage de la conduite de son calcul.

Professeur : Oui. Est-ce que c'est clair pour tout le monde ça ? Ce qui est assez malin là, c'est qu'ici on détourne la formule du calcul du coefficient directeur ; d'habitude on l'utilise nous pour avoir le coefficient directeur. Sauf qu'ici le coefficient directeur on le connaît et on utilise cette formule entre guillemets à l'envers pour obtenir une des coordonnées que l'on cherche ; sur les 4 on en connaît déjà 3, donc il y en a qu'une seule qu'on ne connaît pas et du coup on peut utiliser cette formule entre guillemets à l'envers pour obtenir la coordonnée cherchée. Au final tu trouves du coup que cette droite coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées (4;0). Quelle est ta conclusion ?

Elève 1 : (en regardant sa feuille) Bah, le … la … du coup l'abscisse des points B_n et A_n ça ne dépassera jamais 4 ; ça sera au plus grand 4.

Elément d'analyse : On est ici au niveau (M-2), car l'élève 1 rend compte du résultat du calcul et de la lecture-interprétation du schéma mais la conclusion qu'il tire de son calcul et de son schéma « ça ne dépassera jamais 4 ; ça sera au plus grand 4 » ne repose pas sur une justification « consistante », dans le sens où il n'avance pas les raisons pour lesquelles le majorant de la suite (a_n) est 4.

Episode 2 Débat relatif à la majoration de la suite (a_n)

Professeur : Oui… au mieux 4, oui ? (le professeur *s'adressant à un autre élève qui lève la main*)

Elève 2 (Gatien) : Il manque que …du fait que … en fait ça peut dépasser 4, mais si ça dépassait 4 on aurait une abscisse négative étant donné que l'abscisse on dit que c'était 0,75 fois celui d'avant, c'est une multiplication de nombres positifs donc l'abscisse ne pourra pas être négatif, donc ça s'arrêtera à 4.

Analyse des raisonnements : On se situe ici au niveau (M-1) en effet l'argument avancé par Gatien est valide et consistant (R2.2), c'est un argument « générique » qui permet d'effectuer le lien entre le « syntaxique » et le « sémantique ». En effet il articule le résultat du calcul précédent et son interprétation au regard du schéma de construction de la suite des carrés. Il permet d'établir que la suite (a_n) est majorée par 4, puisque les ordonnées des sommets B_n sont nécessairement positives. On note ici qu'il s'agit d'un raisonnement par l'absurde.

Professeur : Oui, c'est vrai qu'il faut... (S'adressant à l'élève E1 toujours au tableau) Tu pourrais nous faire un petit schéma avec les droites, qu'on ait une image sous les yeux. Alors dessine nous la droite d, c'est pas évident sur le dessin.



Figure 2. *Dessin réalisé au tableau par l'élève 1*

> Professeur : Donc on sent bien que finalement ce nombre « 4 » va jouer un rôle dans le graphe... On sent bien que le nombre « 4 » joue une sorte de rôle de barrière, qu'on n'a pas le droit de dépasser. En faisant ça finalement, tu viens de répondre à la problématique : est-ce qu'on peut dépasser 4 et la réponse est non. Alors et si on allait un peu plus loin : quelle est la question qui suit ? On sait qu'on ne peut pas dépasser 4 ; quelle autre question je me suis posée ? Gatien ?

Analyse : La construction demandée par l'enseignant est destinée à faciliter la compréhension de l'argument établi par l'élève 2 (Gatien), en effet le schéma illustre le comportement de la suite de points constitués par les sommets (B_N). L'enseignant en reconnaissant la pertinence de la réponse, institutionnalise le fait que « 4 » soit un majorant de la suite (a_n). On est ici au niveau (M0).

> Elève 2 : Est-ce qu'on va atteindre 4 ?
>
> Professeur : Voilà, est-ce qu'on va atteindre 4 ? Alors est-ce que vous avez un avis ? (S'adressant à l'élève E1 toujours au tableau) Merci beaucoup Hugues, très bien. Alors *je laisse à chacun le temps de se faire sa propre opinion*. D'après vous, est-ce que la limite 4, cette barrière qu'on ne peut pas dépasser, est-ce qu'on peut l'atteindre ? …Est-ce qu'on va s'arrêter avant ou finalement on va aller jusqu'à 4. Alors maintenant tout le monde a eu le temps de réfléchir à ça… Oui Gatien.
>
> Elève 2 : On va l'atteindre mais pas à une étape donnée, à la fin de …, quand on aura fini de faire tous les carrés. (…)
>
> Professeur : Donc... A une étape donnée, on ne sera pas à 4 mais...
>
> Elève 2 : A la fin on sera à 4.
>
> Professeur : A la fin on sera à 4. Est-ce que tu as des ... une preuve ?
>
> Elève 2 : Ben … y aura toujours … On pourra toujours continuer à faire des doubles de carrés donc à la fin on va finir pour y arriver jusqu'à à arriver jusqu'à 4.
>
> Professeur : Je suis d'accord mais est-ce que tu as quelque chose de quantifiable ?
>
> Elève 2 : Ben non justement … C'est l'infini … Quand on aura fini l'infini

Analyse des raisonnements : L'enseignant fait dévolution aux élèves d'une nouvelle tâche, déterminer si la valeur « 4 » va être ou non « atteinte ». L'élève au tableau effectue un raisonnement qui s'apparente à une conjecture. Afin de déterminer la validité de cette dernière, l'enseignant invite les élèves à exprimer (a_n) pour une valeur n.

V. CONCLUSION

L'analyse *a priori* de la séquence, produite conjointement avec l'enseignant dans le cadre d'une recherche collaborative, nous a permis non seulement de formuler les raisons pour lesquelles nous avons élaboré cette situation d'apprentissage, mais encore d'expliciter les formes de raisonnements susceptibles d'apparaitre lors des différentes phases de la séquence. Cette analyse *a priori* a ainsi facilité la tâche de l'enseignant en le préparant à envisager un traitement adéquat des raisonnements des élèves produits au cours de chacune des situations (situation d'action, de formulation et de validation).

Notre modèle d'analyse des raisonnements semble donc être un outil pertinent pour élaborer une analyse des formes de raisonnements susceptibles d'être produits au cours de chacune des phases et également pour produire une analyse *a postériori* détaillée du déroulement de la séquence, mettant en lumière les connaissances et les savoirs mobilisés par les élèves. Cette étude nous a permis de rendre compte de la pertinence et de l'adéquation de

cette situation d'apprentissage pour permettre une sensibilisation des élèves à la notion de limite, qui sera étudiée de façon détaillée l'année suivante en classe de Terminale.

REFERENCES

Bloch, I. (1999) L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en Première scientifique. Recherches en Didactique des Mathématiques, 19(2), 135-193.

Bloch, I. (2006) Quelques apports de la théorie des situations à la didactique des mathématiques dans l'enseignement secondaire et supérieur. Note de synthèse HDR de l'Université Paris 7, Paris.

Bloch, I., & Gibel, P. (2011) Un modèle d'analyse des raisonnements dans les situations didactiques : étude des niveaux de preuves dans une situation d'enseignement de la notion de limite. Recherches en Didactique des Mathématiques, 31(2), 191-228.

Brousseau, G. (1998) La théorie des situations didactiques. Grenoble : La Pensée Sauvage Editions.

Brousseau, G., & Gibel, P. (2005) Didactical Handling of Students' Reasoning Processes in Problem Solving Situations. Educational Studies in Mathematics, 59(3), 13-58

Duval, R. (2006) Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques ? Relime, Numéro spécial, 45-81.

Evraert-Desmedt, N. (1990) Le processus interprétatif : introduction à la sémiotique de CS Peirce. Liège : Pierre Mardaga.

Gibel, P. (2008) Analyse en théorie des situations d'une séquence destinée à développer les pratiques du raisonnement en classe de mathématiques. Annales de didactique et de sciences cognitives, 13, 5-39.

Gibel P. (2015) Mise en œuvre d'un modèle d'analyse des raisonnements en classe de mathématiques à l'école primaire, Éducation et Didactique, 9-2, 51-72, Presses Universitaires de Rennes.

Gibel P. (2018) Elaboration et usages d'un modèle multidimensionnel d'analyse des raisonnements. Note de synthèse de l'Habilitation à diriger les recherches soutenue à l'Université de Pau et des Pays de l'Adour.

Legrand, M. (1997) La problématique des situations fondamentales. Recherches en Didactique des Mathématiques, 16 (2), 221-279.

Mercier, A. (1995) Les effets de l"intervention enseignante dans le milieu des situations adidactiques. In Margolinas C (Ed.), Les débats de didactique de mathématiques (pp.157-168), Grenoble : La Pensée Sauvage Editions.

Peirce C. S. (1995) *Le raisonnement et la logique des choses* (Trad. par Chauviré C., Thibaud P., Tiercelin C. de l'édition anglaise commentée de Ketner K.L. et Putnam H.). Paris : Éditions du Cerf, 1995. (Edition originale - Cahiers de Cambridge, 1878)

ANNEXE 1

Déroulement détaillé de la séquence.

La séquence est constituée de 2 séances

Séance 1 (en demi-groupe)

Phase 1 : Présentation de la situation- Consigne relative à la construction des 5 premiers carrés.

Phase 2 : Construction sur papier millimétré des 5 premiers carrés

Phase 3 : Consigne relative à l'émission de conjecture(s) relatives à B_1,B_2,B_3.

Phase 4 : Mise en commun des conjectures-Communication des preuves

Phase 5 : Consigne relative à l'émission de conjecture(s) B_1, B_2, …B_N.

Phase 6 : Mise en commun des conjectures-Communication des preuves.

Phase 7 : Formulation de la problématique

Phase 8 : Recherche Utilisation des TICE (Tableur, Algobox, calculatrices, etc.

Séance 2 (en groupe-classe)

Phase 9 : Recherche Utilisation des TICE (Tableur, Algobox, calculatrices, etc.

Phase 10 : Recueil des résultats

Phase 11 : Majoration de la suite Situation de formulation des expressions de (a_n)

Phase 11 : Situation de validation

Phase 12 : Situation de rédaction individuelle d'une procédure de résolution

Phase 13 : Situation d'institutionnalisation

ANNEXE 2

Au tableau l'élève 1 a noté :

On note X(x;0) le point d'intersection entre (0_x) l'axe des abscisses et d (droite passant par les sommets B_n). r est le coefficient directeur de la droite passant par B_1 et B_2.

$r=\frac{-1}{3}$; $B_1(1;1)\in d$;

$r=\frac{y_X-y_{B1}}{x_X-x_{B1}}=\frac{0-1}{x-1}$

$\frac{-1}{x-1}=\frac{-1}{3}$

$-1=\frac{-1}{3}(x-1)$

$-1=\frac{-1}{3}x+\frac{1}{3}$

$\frac{-4}{3}=\frac{-1}{3}x$

$x=\frac{\frac{-4}{3}\times 3}{-1}$

$x=4$

Groupe de travail 3 (GT3)
Dimensions historiques dans l'enseignement des mathématiques

BILAN DU GROUPE DE TRAVAIL N°3

DIMENSIONS HISTORIQUES DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

Responsables

CHORLAY[*] Renaud –GOSZTONYI[**] Katalin – ABDELJAOUAD[***] Mahdi

Correspondant CS

DJEBBAR[****] Ahmed

La recherche en histoire des mathématiques contribue d'une manière fondamentale au projet Espace Mathématique Francophone en permettant de mieux comprendre la constitution et les circulations des savoirs et pratiques mathématiques. Cet accent sur les circulations permet de mettre en perspective historique aussi bien les circulations entre aires culturelles – en particulier via la francophonie – que les circulations entre disciplines – thème d'EMF 2018.

Depuis les débuts d'EMF, le groupe de travail *Dimensions historiques dans l'enseignement des mathématiques* vise à promouvoir les échanges scientifiques entre historiens et didacticiens des mathématiques autour de thèmes communs : épistémologie des mathématiques (historicité, rapport à l'argumentation, lien avec les autres branches du savoir), épistémologie de notions mathématiques particulières, variété des pratiques mathématiques, inscription de ces pratiques dans des institutions sociales scolaires et non scolaires. La nature et les conditions de possibilité d'échanges scientifiques fructueux font l'objet d'une réflexion collective qui reste à approfondir ((Fried 2001), (Chorlay & de Hosson 2016)).

Le groupe de travail permet aussi la présentation et la discussion de travaux empiriques, de comptes rendus d'innovations pédagogiques et de contributions aux questions « vives » de l'enseignement des mathématiques. Deux familles de questions classiques demeurent ici centrales : questions relatives à l'introduction d'une perspective historique dans l'enseignement ou à l'usage en classe de sources primaires (Chorlay 2016) ; questions relatives aux ressources pour l'enseignement et à la transposition des acquis de la recherche. Depuis plusieurs années, ces questions ont été complétées par celles relatives à la formation des enseignants et aux pratiques enseignantes.

Le groupe de travail n°3 accueillait les contributions sur les thèmes suivants :

1. Interactions entre les mathématiques et les autres disciplines : éclairages historiques et épistémologiques. Le terme « discipline » peut être entendu au sens strict de discipline scolaire, ou plus large de domaine d'activité engageant des productions et des usages de savoirs mathématiques.

[*] LDAR (EA 4434, UPEC – Université d'Artois – UCP – Université de Rouen – Université Paris Diderot) –France – Renaud.chorlay@espe-paris.fr

[**] Université Eötvös Loránd de Budapest – Hongrie – katalin.gosztonyi@gmail.com

[***] Université de Tunis – Tunisie – mahdi.abdeljaouad@gmail.com

[****] Université de Lille (émérite) – France – ahmed.djebbar@wanadoo.fr

2. Usages d'éléments historiques dans l'enseignement des mathématiques (à tous niveaux) et dans la formation des enseignants : comptes rendus d'expérience ; études de cas ; questions de méthode.
3. Histoire de l'enseignement des mathématiques ; histoire des théories didactiques.
4. Poursuite de la réflexion sur les liens entre les deux domaines de recherche que sont la didactique des mathématiques et l'histoire des mathématiques.

L'édition 2018 n'a accueilli que 6 contributions, qui reflètent cependant assez bien la diversité des approches possibles. Cette diversité est aussi reflétée par celle des parcours et positions professionnelles des intervenants : historiens ayant un intérêt de longue date pour les questions d'enseignements ; chercheurs ayant acquis une double culture de recherche en histoire et en didactique des mathématiques ; didacticiens souhaitant nourrir leur réflexion en s'appuyant sur l'histoire des mathématiques ; enseignants du primaire ou du secondaire travaillant sur l'usage en classe de documents historiques.

C'est le thème 2 qui a été le plus représenté. Les deux contributions du groupe de recherche formé par R. Chorlay, A. Gautreau et D. Heguiaphal ont porté sur des expérimentations en classe en fin d'école primaire et début du secondaire. Ce travail s'inscrit largement dans la tradition de la commission inter-IREM *histoire et épistémologie des mathématiques*, qui a récemment choisi d'étendre son champ d'action vers l'école primaire. A cet égard, nous sommes fiers de signaler que le dernier ouvrage produit dans ce cadre, *Passerelles : enseigner les mathématiques par leur histoire au cycle 3* (Moyon et Tournès, 2018) a reçu en 2019 le prix du livre de l'enseignement scientifique attribué par l'Académie des sciences. Ces deux contributions partagent aussi une même dimension « expérimentale », au sens où elles ne visent pas à établir la robustesse d'une séance ou d'une séquence d'enseignement supposée largement diffusable. On y cherche plutôt à concevoir des scénarios s'appuyant – explicitement ou implicitement – sur des éléments issus de l'histoire des mathématiques pour mieux cerner les conditions de possibilité de la dévolution aux élèves de tâches complexes (Chorlay 2016), en particulier *justifier* et *reformuler*.

La recherche d'outils théoriques permettant de concevoir et d'analyser ce type de séances traverse plusieurs des contributions. Ici encore c'est la diversité qui frappe : recherche d'une hybridation entre des outils de didactique des mathématiques et de didactique du français – plus précisément de la compréhension de texte – chez Gautreau et Heguiaphal ; usage d'outils relatifs à l'argumentation, et de travaux récents sur la connaissance du système positionnel décimal en fin d'école primaire chez Chorlay et de Vittori. La réflexion théorique est au cœur de cette dernière contribution, qui cherche à utiliser de manière précise la notion de conception – au sens de N. Balacheff – pour mener une étude comparative ; étude à la fois nuancée dans ses affirmations, et générale dans son ambition.

C'est aussi dans le thème 2, mais à l'autre extrémité du système éducatif, que s'inscrit la contribution de J. Lemmes, puisqu'elle porte sur l'impact d'un enseignement d'histoire des mathématiques en formation initiale d'enseignants de mathématiques. Ce travail mobilise les outils devenus classiques en didactique du développement professionnel des enseignants et reflète un intérêt croissant pour cet étage du système éducatif. Cet intérêt est aussi très apparent dans les contributions au groupe de travail n°12 du colloque CERME 2019 (actes à paraître).

Le thème 3 a été représenté par la contribution de K. Gosztonyi, dont le travail noue de manière originale des problématiques proprement historiques – relatives à l'histoire récente de l'enseignement des mathématiques – et des questions théoriques internes au champ

didactique. L'analyse comparative permet ici un double dépaysement : entre un passé récent et notre présent, d'une part ; entre deux cadres théoriques, celui de Brousseau et celui de Varga, d'autre part.

La contribution d'Emmanuel Hategekimana Luanda participe d'une autre approche, elle aussi classique en didactique, visant à identifier dans l'histoire des sciences des outils ou des terrains pour l'analyse des savoirs à enseigner. L'ambition est grande, puisqu'il s'agit de s'appuyer sur une connaissance générale de l'histoire de ce que l'on nomme aujourd'hui l'analyse mathématique, pour identifier des « niveaux d'enseignements » inspirés des paradigmes de Houdement et Kuzniak, sur la base desquels proposer un cursus d'enseignement. Soulignons cependant que cette manière de s'appuyer sur une histoire simplifiée et reconstruite suscite les plus grandes réserves chez les historiens. Ces aspects méthodologiques ont en particulier été détaillés dans (Chorlay et de Hosson, 2016).

Ce dernier point fournit l'occasion de rappeler l'importance de rencontres telles que celles permises par les colloques EMF, où les chercheurs – débutants et confirmés – peuvent se confronter à des questionnements, des traditions de recherche et des niveaux d'expertise qui se retrouvent rarement à l'échelle locale d'une équipe de recherche, voire d'une communauté nationale.

REFERENCES

Chorlay R. (2016). Historical sources in the classroom and their educational effects. In L. Radford, F. Furinghetti & T. Hausberger (Eds.), *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between History and Pedagogy of Mathematics* (HPM 2016, 18-22 July 2016) (pp. 5-23). Montpellier, France: IREM de Montpellier.

Chorlay R., de Hosson C. (2016) History of Science, Epistemology and Mathematics Education Research. In B. Hodgson, A. Kuzniak, J.-B. Lagrange *The Didactics of Mathematics: Approaches and Issues. A Homage to Michèle Artigue* (pp. 155-189). Springer International Publishing Switzerland, 2016..

Fried M. (2001). Can Mathematics Education and History of Mathematics Coexist? Science and Education 10, 391-408.

Moyon M., Tournès, D. (2018) (Eds.) *Passerelles : Enseigner les mathématiques par leur histoire au cycle 3*. Paris : ARPEME.

ANNEXE

LISTE DES TEXTES DU GT 3 PAR ORDRE ALPHABETIQUE DU PREMIER AUTEUR

CHORLAY, R.

Justifier une technique opératoire au cycle 3 : le cas de la division par deux.

DE VITTORI, T.

Histoire des mathématiques en classe : une analyse au niveau des conceptions des élèves.

GAUTREAU, A. ET HEGUIAPHAL, D.

La duplication du carré avec Platon en CM2 et en 6ème.

GOSZTONYI, K.

Ressources et pratiques d'enseignements de la réforme des mathématiques modernes en Hongrie et en France.

HATEGEKIMANA LUANDA, E.

La détransposition des savoirs de l'analyse mathématique au secondaire.

LEMES, A.-J.

Potentialités de l'histoire des mathématiques dans la formation des enseignants de mathématiques.

JUSTIFIER UNE TECHNIQUE OPERATOIRE EN CYCLE 3 : LE CAS DE LA DIVISION PAR DEUX

CHORLAY[*] Renaud

Résumé – Nous présentons les premiers éléments d'un projet de recherche visant à étudier les capacités d'argumentation des élèves de CM2-6ème (années 5 et 6) dans un contexte numérique impliquant des nombres entiers ou décimaux. Ce projet – mis en œuvre en 2017-2018 – trouve son objet et son point de départ dans une technique opératoire de division par deux présente dans le *Livre du calcul indien* d'Al-Khwārizmī.

Mots-clefs : argumentation, algorithme, principe positionnel, division, histoire des mathématiques.

Abstract – We present the outline of a research project which aims to study the argumentative capacity of year-5 and year-6 students, in a numerical context involving natural and decimal numbers. This project – to be implemented in 2017-2018 – centers on a technique for dividing by two which appears in Al-Khwārizmī's *Kitāb al-ḥisāb al-Hind.*

Keywords: argumentation, algorithm, place value, division, history of mathematics.

I. ORIGINE ET MOTIVATION DU PROJET

1. Point de départ dans un texte historique

Ce projet trouve son origine dans la lecture – au détour d'un autre projet – du *calcul indien* d'Al- Khwārizmī, dans l'édition proposée par André Allard de ses plus anciens manuscrits latins (Al- Khwārizmī 1992). Si le nom de ce mathématicien de langue arabe, actif à Bagdad au début du 9e siècle, est souvent associé à l'algèbre, à la notion d'équation et aux techniques de résolutions d'équations du second degré, le traité d'algèbre (Al- Khwārizmī 2007) n'est pas le seul ouvrage qu'il ait rédigé. On connaît aussi un *livre du calcul indien* (*Kitāb al-ḥisāb al-Hind*) et le *Livre sur l'addition et la soustraction*, dont les originaux arabes sont jusqu'ici introuvables. Comme l'indique le titre, Al-Khwarizmi y introduit dans le monde savant de langue arabe le procédé d'écriture positionnel décimal des entiers et des techniques opératoires chiffre-à-chiffre s'appuyant sur ce codage. Quoiqu'il les trouve chez les « indiens », on notera que ces procédés étaient aussi bien chinois.

Le traité d'algèbre et celui du calcul indien connaissent des traductions latines dans la même période des 12-13e siècles, souvent du fait de savants actifs en Andalousie, parfois dans un contexte de traduction de traités d'astronomie. Ces traducteurs introduisent donc dans l'Occident latin les méthodes de calcul basées sur les 9 chiffres et le zéro, dont la diffusion va concurrencer le calcul sur abaques et le calcul digital sans cependant les supplanter. Aux techniques écrites sur un support où les chiffres s'effacent en cours de calcul (table à poussière), certains comme Fibonacci dans son *Liber Abaci* (1202) préfèrent des techniques où les chiffres s'inscrivent de façon durable. Il semble toutefois que les techniques avec effacement soient les plus diffusées. De ces traités dérive le terme « algorithme » : les *algorismes* ou *argorismes* désignent alors dans le monde latin les techniques opératoires reposant sur l'écriture positionnelle, c'est-à-dire les calculs *à la manière* d'Al-Khwārizmī. Les traités latins anciens traduits par Allard sont le *Dixit Algorizmi* (désigné par ses premiers mots : « Al-Khwārizmī a dit (…) »), le *Liber Alchorismi*, et le *Liber Ysagogarum Algorismi*. Il est possible qu'ils dérivent tous d'une première traduction latine perdue. Ces trois ouvrages

[*] LDAR (Universités de Paris, Artois, Cergy-Pontoise, Paris-Est Créteil, Rouen) –France– Renaud.chorlay@espe-paris.fr

seront d'ailleurs beaucoup moins diffusés que les traités du 13e siècle, tels ceux de Fibonacci, de Jean de Murs, de Jordanus de Némore ; ou ceux, assez médiocres, d'Alexandre de Villedieu (*Carmen de algorismo*) ou de Jean de Sacrobosco (*Algorismus Vulgaris)*.

Dans les trois traités anciens le plan est à peu de choses près le même. Après avoir montré comment le système indien permet d'écrire tous les nombres entiers au moyen de neuf « lettres » ou « figures » et d'un petit rond (*circulo*), les auteurs présentent des techniques opératoires portant sur les écritures chiffrées, en supposant que l'on peut effacer en cours de calcul (comme sur une ardoise). Sont présentées des techniques pour l'addition, la soustraction, la médiation (ou division par 2), la duplication (ou multiplication par 2), la multiplication, la division et l'extraction de racine carrée. Pour la division ou l'extraction de racine carrée, l'algorithme ne se termine pas toujours sur un entier (la division euclidienne peut avoir un reste non nul, le nombre peut n'être pas un carré d'entier). Les auteurs expriment alors les parties non entières (exactes ou approchées) par des fractions, souvent converties ensuite en système sexagésimal, comme il était d'usage dans les traités d'astronomie. Les techniques opératoires sont alors étendues aux nombres non-entiers dont le développement sexagésimal est fini, ce qui illustre la puissance unificatrice des systèmes positionnels – même si le choix de la base 10 pour la partie entière et de la base 60 pour la partie dite fractionnaire introduit une complication. L'auteur du *Liber Alchorismi* a aussi régulièrement recours aux fractions décimales, comme le faisait aussi as-Samaw'al (Al-Khwārizmī 1992, xxxiii).

On pourra s'étonner du rôle spécifique accordé à la division par 2 (médiation ou démidiation) et à la multiplication par 2 (duplication). Cela se justifie par le fait que ces algorithmes sont plus simples que les algorithmes généraux de multiplication et de division, et surtout par le fait qu'ils seront des étapes élémentaires dans l'algorithme de calcul de racine carrée (Al-Khwārizmī 1992, 182 et suiv.), de même que les additions et les soustractions interviennent dans les calculs de produits et dans les divisions euclidiennes (respectivement). Nous justifierons plus bas notre choix de proposer en cycle 3 un travail sur la médiation.

2. Enjeux d'enseignement

Nous nous inscrivons dans le mouvement général de réflexion sur les finalités de l'enseignement des techniques opératoires à l'école primaire. Ainsi, en 2003, la commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques (dite commission Kahane) soulignait :

> (…) dans la période récente, le développement des technologies informatiques a profondément modifié les pratiques associées au calcul, tant les pratiques quotidiennes et sociales que les pratiques scientifiques. La plupart des algorithmes de calcul dont l'apprentissage occupait un temps important de la scolarité, notamment dans l'enseignement obligatoire, sont aujourd'hui implantés dans les calculatrices les plus simples. En revanche, le calcul pose des questions nouvelles liées notamment à la représentation informatique des objets mathématiques sur lesquels il porte (par exemple la représentation informatique des nombres), à la performance des algorithmes utilisés au-delà de leur seule effectivité…, des questions qui n'étaient pas des enjeux de l'enseignement jusqu'ici. La puissance de calcul des nouveaux outils modifie aussi profondément l'économie du calcul et pose, dans des termes renouvelés, celle de la gestion des rapports entre calcul et raisonnement, en favorisant explorations, simulations, expérimentations. (cité dans (Charnay 2007, 204)).

Peu après, Roland Charnay (2007) prolongeait cette réflexion en identifiant comme principal intérêt du travail sur le calcul posé le fait qu'il fournit :

> (…) une occasion de travailler les propriétés des nombres et des opérations en axant une partie importante de l'apprentissage sur un effort de compréhension et de justification des étapes de ces algorithmes. (…) Cela suppose de ne pas se limiter à un apprentissage techniciste (le comment), mais de chercher à justifier les différentes étapes du calcul et leur articulation (le pourquoi), c'est-à-dire à faire des mathématiques ! (Charnay 2007, 206).

Au-delà des intentions, la question des modalités et des conditions de possibilité de la dévolution de questions portant sur le « pourquoi » du mécanisme des algorithmes et favorisant « exploration, simulation, expérimentation » semble avoir fait l'objet de peu des travaux empiriques.

Les difficultés d'une telle dévolution semblent nombreuses et assez évidentes ; mentionnons-en deux, corrélées mais de nature sensiblement différentes. La première semble tomber sous le sens – quoiqu'elle mériterait sans doute des études empiriques sur la réception par les élèves des séances d'introduction des techniques opératoires – et tient à l'écart entre, d'une part, la maturité mathématique des élèves (en particulier les capacités de décontextualisation et d'argumentation) et, d'autre part, la programmation institutionnelle de l'enseignement du calcul posé. Ainsi, dans les programmes français de 2016, les techniques opératoires sont à introduire en CP (année 1 de l'enseignement élémentaire français) pour l'addition sans ou avec retenue, en CE1 (année 2) pour la soustraction, en CE2 (année 3) pour la multiplication, et en CM1 (année 4) pour la division euclidienne ; en CM1-CM2 (années 4-5), la plupart des techniques opératoires sont à étendre aux nombres décimaux. Une deuxième difficulté – sinon pour la conception du moins pour la généralisation – d'un enseignement *réflexif* sur les techniques opératoires tient à la difficulté de nombreux enseignants du premier degré à concevoir un enseignement intégrant des éléments de justification dans les contextes numériques, en partie du fait d'une insuffisance des connaissances mathématiques spécifiques sous jacentes à cette démarche (Clivaz 2016) (Constantin 2017).

Le travail dont nous présentons ici le projet s'inscrit dans le cadre théorique général esquissé dans (Chorlay 2016), et prolonge une première expérimentation en classe, menée en CM1-CM2 en 2015-2016 (Chorlay, Masselin & Mailloux, 2017). Nous faisions alors travailler les élèves sur la technique de multiplication *per gelosia*, dont Guy Brousseau a depuis longtemps proposé une analyse mathématique et ergonomique approfondie (Brousseau 2010). Notre objectif n'était pas d'enseigner aux élèves une nouvelle technique de multiplication posée, mais de tester la dévoluabilité aux élèves de cet âge de questions *méta* au sens où elles portent *sur* la technique opératoire : conjecture de la fonction qu'elle réalise ; demande de formulation écrite d'un texte d'algorithme intégrant une contrainte de généralité (dépasser l'exemple ou la liste d'exemples) ; demande de comparaison entre deux techniques opératoires de la multiplication, sur des critères qu'il revenait aux élèves eux-mêmes de déterminer. L'analyse *a postériori* a porté principalement sur les ressources sémiotiques et argumentatives mobilisées par les élèves, et a montré, en particulier, une bonne capacité à formuler de manière décontextualisée – à partir de l'expérience vécue du calculateur – les critères de comparaisons.

Lors de ce premier travail, cependant, l'analyse *a priori* nous avait dissuadé de chercher à dévoluer la tâche de justification de l'algorithme. Les tâches réflexives confiées alors aux élèves n'ont donc pas – ou marginalement – nécessité de s'appuyer sur des connaissances relatives au système positionnel décimal. C'est au contraire la capacité à comprendre et à justifier une technique opératoire en mobilisant les deux principes fondamentaux de notre numération chiffrée – la valeur positionnelle des chiffres, l'échange $1 \leftrightarrow 10$ entre deux rangs successifs – que nous cherchons à explorer dans le présent projet.

II. ÉLÉMENTS D'ANALYSE *A PRIORI*

1. Le texte historique

Les trois textes édités par André Allard donnent des versions plus ou moins laconiques du même algorithme de médiation des entiers. Le plus laconique est le *Liber Ysagogarum Alchorismi* :

> **La médiation des entiers**. Quand on doit diviser par deux, on commence par la première position. Si le nombre est impair, on divise par deux son contenu pair et au lieu de l'unité on pose sous la même position 30 tirés de 60. Dans la seconde et les autres positions, on divise par deux les nombres pairs et au lieu de l'unité restante on reporte 5 dans la position précédente. (Allard 1992, 33)

Le *Liber algorismi* est un peu plus disert :

> Lorsque tu veux diviser un nombre quelconque par deux, commence par la première position et divise-la par deux. S'il s'y trouve un nombre impair, divise par deux les pairs, et il restera un que tu diviseras par deux, c'est-à-dire que tu diviseras en deux moitiés, et tu établiras une moitié qui est fraction trente de soixante qui font un, et pose 30 sous la même position. Ensuite, tu diviseras par deux la position suivante, si son nombre est pair. S'il est impair, prends une moitié du pair et pose-la à sa place ; établis cinq comme moitié du un restant et pose-les dans la position qui est avant celle-ci. S'il n'y a que un dans la position que tu veux diviser par deux, pose à sa place un zéro, et pose cinq dans la position qui est avant celle-ci. Opère de même dans toutes les positions. (Allard 1992, 9).

Le *Liber Alchorismi* propose en outre un exemple. Les auteurs des trois textes semblent considérer la justification de l'algorithme comme allant de soi et ne l'explicitent pas, alors qu'ils donnent des éléments de justification pour la plupart des autres.

Suivons l'algorithme explicité dans le *Liber algorismi* en montrant comment les caractéristiques du nombre traité permettent d'en éprouver les ressorts. Nous nous autoriseront l'abus de langage consistant à parler de chiffre pair ou impair.

2. Analyse a priori : variables mathématiques

Si l'on part d'un nombre dont tous les chiffres sont pairs, disons 682, on divise chacun par deux. Commencer de la droite ou de la gauche n'a pas d'influence sur le résultat final. On peut représenter les états successifs de l'ardoise (le texte parle bien de poser « à la place ») ; nous codons ici par des encadrés les états de l'ardoise, et par des crochets les traitements algorithmiques « dans la tête » :

en partant de la droite $\boxed{682}$ $[2 \to 1]$ $\boxed{381}$ $[8 \to 4]$ $\boxed{641}$ $[6 \to 3]$ $\boxed{341}$

ou

en partant de la gauche $\boxed{682}$ $[6 \to 3]$ $\boxed{382}$ $[8 \to 4]$ $\boxed{342}$ $[3 \to 1]$ $\boxed{341}$

La validité de la procédure repose, en dernier ressort, sur la distributivité[1] de la multiplication (par ½) ou de la division (par 2) sur l'addition, et sur la décomposition canonique des entiers. Une telle formulation de la justification ne peut pas être attendue

[1] À strictement parler, c'est le caractère linéaire de l'opérateur de « médiation » qui justifie la technique. Si nous notions m cet opérateur, alors, en l'appliquant au nombre 682 :

$m(682) = m(600 + 80 + 2) = m(600) + m(80) + m(2)$ par linéarité additive de m (i.e. distributivité de $\times$ sur +)
$= m(6\times100)+m(8\times10)+m(2)$
$= m(6) \times 100 + m(8) \times 10 + m(2)$ par linéarité multiplicative de m
$= 3 \times 100 + 4 \times 10 + 1 = 341.$

Il est vrai que, les facteurs 10, 100 etc. étant entiers, la linéarité multiplicative découle directement de la linéarité additive, la multiplication par un entier pouvant être vue comme une addition itérée.

d'élèves du CM2 ou de 6ème, en particulier parce que la propriété de distributivité de × sur + n'est institutionnalisée qu'en classe de 5ème. Un niveau bien plus superficiel de justification semble, lui, accessible : vérifier, sur plusieurs cas particuliers traités, que la sortie est bien la moitié de l'entrée. Cela peut se faire soit en effectuant par un autre moyen – division euclidienne posée ou calculatrice – la division par deux de l'entrée, soit en effectuant – par calcul posé ou à la calculatrice – la multiplication par 2 de la sortie. Entre ces deux niveaux de justification, l'un savant et décontextualisé, l'autre pragmatique et reposant sur le contrôle sur une petite série d'exemples, nous indiquerons plus bas une piste pour chercher à promouvoir une explicitation par les élèves de la distributivité de la médiation sur l'addition.

Si l'on part d'un nombre entier pair dont tous les chiffres ne sont pas pairs, par exemple 92, de nouveaux aspects de l'algorithme se dévoilent. Ainsi, en partant de la droite, apparaît la nécessité de décomposer 9 en 8+1 (8 étant le plus – dans le texte – grand pair « contenu » dans 9 ; il pourrait aussi être vu comme 10-1, ou comme le prédécesseur de 10) ; pour ensuite démidier 8, et ajouter 5 de retenue à droite :

92 [2 → 1] 91 [9 = 8+1→ 4 et 5 de retenue] 41 [1 et 5 de retenue → 6] 46

Outre la distributivité de la médiation sur l'addition, le principe de groupement et d'échange à pas de 10 justifie ici la règle sur la retenue : la moitié de 1 dizaine c'est bien la moitié de 10 unités, c'est-à-dire 5 unités ; de même, la moitié de 1 centaine c'est la moitié de 10 dizaines, donc 5 dizaines etc. C'est là, à nos yeux, l'un des intérêts de cet algorithme pour l'étude de la capacité des élèves de CM2 ou 6ème à mobiliser des connaissances sur le système positionnel pour rendre compte – au moyen de ressources sémiotiques qui restent à préciser – de la validité de la technique. Ici, le principe positionnel est utilisé de manière élémentaire : le niveau de complexité nous semble ici semblable à celui de l'addition avec retenue ou de la soustraction « par emprunt » et bien inférieur à ce qu'il dans les techniques de multiplication[2] et de division. Avec sa retenue de « 5 vers la droite », la technique diffère sensiblement des cas familiers des élèves : la retenue de « 1 vers la gauche » dans l'addition ; la retenue, vers la gauche, du chiffre des dizaines, dans la multiplication. Nous gageons que le caractère inhabituel de la retenue « 5 vers la droite » va déstabiliser les élèves, et susciter un questionnement auquel il ne peut pas être répondu par un simple appel infra-mathématique à la mémoire scolaire (le « c'est comme d'habitude », « c'est comme dans l'addition »).

Sous ces conditions – nombre entier pair dont tous les chiffres ne sont pas pairs – le nombre total de chiffre et le nombre de chiffres impairs n'a pas d'impact sur la validité de l'algorithme. Ainsi obtient-on (en partant de la droite), pour 346 et 6752 :

346 343 323 123 173

6752 6751 6721 6726 6326 6376 3376

Cependant, dès que l'un des chiffres est impair, la technique est invalide si l'on part de la gauche :

[2] L'article de Céline Constantin (2017) analyse en détail les nombreux écueils à la justification de calculs reposant sur la distributivité de × sur + par des étudiants de M1 MEEF premier degré disposant d'une maturité générale supérieure à celle d'élèves de cycle 3 et maîtrisant raisonnablement l'usage de la distributivité dans un cadre littéral ; et ce aussi bien dans la technique opératoire de la multiplication, qu'en calcul réfléchi (mental ou écrit). Une difficulté fondamentale résulte de la dualité entre le registre de la technique posée – dans lequel les produits par des puissances de 10 sont implicites, codés par des positions et des « décalages » – et le registre du calcul en ligne ; ou, pour le dire autrement, entre d'une part des algorithmes portant sur des suites de chiffres *pouvant* être lues comme des nombres, et, d'autre part, des égalités entre expressions de calcul portant sur des nombres. La plupart de ces difficultés spécifiques ne se rencontre pas dans la technique de médiation, en particulier de fait de l'unicité de l'entrée de l'algorithme.

92 [9 = 8+1 → 4 et 5 de retenue] 42 [2 et les 5 de retenue → 7] 47

[7 = 6+1 → 3 et 5 de retenue] 43 43,5

L'erreur vient de ce que le 7 de 47 était composé des 2 unités du nombre initial (qu'on veut diviser par deux) et de 5 unités résultant déjà de la division par 2 d'une dizaine du nombre initial. En redivisant par deux ces 5 unités, on divise par 4 l'une des 9 dizaines initiales.

Nous n'avons jusqu'ici travaillé que sur des entiers pairs. Dans le cas impair, les textes réservent un traitement particulier à la médiation du chiffre des unités, décomposant – par exemple – 5 en 4+1, dont la moitié est désignée par « 2 et un demi », ou « 2 et 30 soixantièmes », ou « 2 et 30/60 ». Aujourd'hui, les élèves de CM2 et de 6ème disposent en outre de systèmes de notations positionnels décimaux pour représenter ce nombre, soit dans l'écriture à virgule « 2,5 », soit en disposant les chiffres dans un tableau de numération avec, à droite de la colonne des unités, la colonne des dixièmes. Dans ces systèmes de notations adaptés aux décimaux, la technique exposée sur les entiers s'applique sans adaptation particulière :

7,543 7,541 7,5415 7,5215 7,2215 7,2715 3,2715 3,7715

La justification de la technique ne demande ici pas d'élément fondamentalement nouveau. Encore faut-il pouvoir adapter les formulations valables dans les entiers – telle « 1 dizaine c'est 10 unités, donc la moitié de 1 dizaine c'est 5 unités » – aux décimaux : « 1 dixième c'est 10 centièmes, donc la moitié de 1 dixième c'est 5 centièmes ».

En bilan de cette première phase d'analyse *a priori*, rappelons que nous avons étudié le rôle de deux variables didactiques :

- La nature arithmétique de l'entrée de l'algorithme : nombre entier ou nombre décimal non entier ; entier dont tous les chiffres sont pairs ; entier pair dont au moins un chiffre est impair ; entier impair. Par contre, la mise en œuvre de l'algorithme est indifférente à la longueur de l'écriture décimale du nombre.
- Le sens de traitement des chiffres de l'entrée, de gauche à droite ou de droite à gauche. Seul le traitement partant de la droite (des unités) est correct pour toute entrée. C'est d'ailleurs le sens prescrit dans les textes anciens, la « première position » étant celle des unités.

Les propriétés mathématiques justifiant la validité de cet algorithme chiffre-à-chiffre sont :

- La linéarité de l'opérateur de médiation, qu'on peut déduire de la distributivité de la multiplication (par un entier) sur l'addition.
- Les propriétés fondamentales du système d'écriture positionnel décimal des entiers et, plus généralement, des décimaux. En particulier les échanges « vers le bas » : 1 centaine c'est 10 dizaines, 1 dizaine c'est 10 unités, 1 unité c'est 10 dixièmes etc.

Pour ce qui est de la linéarité de l'opérateur, nous ne chercherons pas à la faire expliciter par les élèves, nous appuyant soit sur des théorèmes en acte, soit sur une justification s'appuyant sur un raisonnement générique dans le registre des collections (voir plus bas le matériel dit « multibase »). En revanche, notre objectif est de voir si – et comment – les connaissances sur le système de numération peuvent être mobilisées pour rendre compte de la technique opératoire. Trois aspects de la technique invitent à mobiliser ces connaissances : le report d'une retenue « 5 vers la droite », l'invalidité de la technique appliquée de gauche à droite, et la sortie du domaine des entiers occasionnée par le traitement d'une entrée entière impaire.

Cette exploration des capacités des élèves dans les contextes numériques au cycle 3 est, en un sens complémentaire de celle des travaux de C. Allard, C. Chambris et F. Tempier (2017) sur

la numération. Dans tous les cas (hors certains travaux sur les fractions) il s'agit d'étudier les productions des élèves face à des tâches légèrement inhabituelles (recompositions « non canoniques » au sens de Tempier, technique opératoire inédite ici), dans des cas où la technique est entièrement justifiable par les principes fondamentaux de notre système d'écriture chiffré. Dans les deux cas, le niveau de difficulté est contrôlé par des paramètres différents : F. Tempier (2016) ne demande pas aux élèves de produire un discours technologique relatif à une technique, alors que ce discours est au centre de notre projet ; en revanche, il déstabilise les élèves en utilisant des décompositions non-canoniques ou des conversions demandant de parcourir plusieurs ordres en une seule étape (par exemple : 23 millions = … milliers), ce qui ne se présente jamais dans la division par 2.

3. Analyse a priori : ressources sémiotiques

Les ressources mises à disposition des élèves pour représenter les nombres n'offrent pas toutes les mêmes possibilités d'action ; elles suggèrent plus ou moins certains éléments de justification ; elles rendent parfois nécessaires des justifications qui ne le sont pas dans d'autres contextes. Nous nous pouvons ici – faute de place – indiquer que quelques éléments.

Ainsi, un travail s'appuyant entre autre sur du matériel multibase (à pas de 10) suggère-t-il le principe de groupement et invite à expliciter la valeur positionnelle des chiffres.

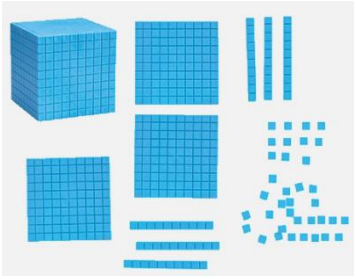


Figure 1 *– Matériel multibase, ici utilisé avec un pas de 10*

Son utilisation permet en outre de justifier – sur des exemples acquérant une valeur générique – la linéarité additive de l'opérateur de médiation : le partage en deux parts égales d'une collection formée de 4 plaques, 2 barres et 8 cubes donne bien deux collections de 2 plaques, 1 barre et 4 cubes chacune. Le passage par ce matériel, ou par son évocation graphique, peut aussi suggérer les conversions « vers la bas » (1 centaine → 10 dizaines, 1 dizaine → 10 unités) et permettre à certains élèves de ne pas rester bloqués devant un chiffre des dizaines impair (« on ne peut pas diviser 5 par 2 ») ou devant des « restes » dont on ne saurait que faire (« 5 divisé par 2, ça fait 2, reste 1 … »).

L'usage de ce matériel ou de ses représentations graphiques ne supprime complètement la diversité des procédures, et ne rend pas la tâche de recherche de l'écriture chiffrée du résultat entièrement transparente. Ainsi, pour la médiation de 34 peut-on imaginer deux procédures ; seule celle de droite est directement congrue à la technique opératoire historique :

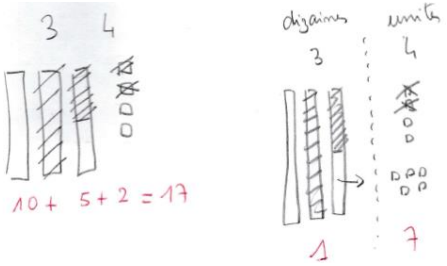


Figure 2 *– Deux variantes dans la division par 2 de 34.*

Même en n'utilisant que des représentations chiffrées, on peut travailler dans des dispositions avec ou sans effacement. Par exemple, on peut opter pour une disposition sans aucun effacement des calculs intermédiaires (à gauche : état initial ; à droite : état final) :

	c	d	u				c	d	u
Retenues					Retenue			5	5
Entrée	3	1	2		Entrée		3	1	2
							1	0	1
Sortie					Sortie		1	5	6

Figure 3 *– Disposition sans effacement, dans un tableau de numération.*

Dans cette disposition, il est même indifférent de mettre en œuvre l'algorithme en partant de la droite ou de la gauche, alors que la deuxième solution peut conduire à des résultats erronés si l'on travaille sur l'ardoise.

Sur la base de ces réflexions, le projet sera affiné et mis en œuvre en 2017-2018 dans aux moins deux classes, l'une de CM2, l'autre de 6ème.

REFERENCES

Allard C., Chambris C., & Tempier F. (2017). Un regard sur les nombres à la transition école-collège. *Repères IREM* 108, 63-91.

Al-Khwārizmī (1992). *Le calcul indien (algorismus)*. Edition critique, traduction et commentaires de André Allard. Paris : Librairie A. Blanchard, et Namur : Société des Etudes Classiques.

Al-Khwārizmī (2007). *Al-Khwarizmi : le commencement de l'algèbre.* Texte établi, traduit et commenté par Roshdi Rashed. Paris : Librairie A. Blanchard.

Brousseau G. (2010). Le calcul humain des multiplications et des divisions de nombres naturels. *Grand N* 85, 13-41.

Charnay R. (2007). La division, le plus tôt possible ? La division, le mieux possible ! *Bulletin de l'APMEP* 469, 202-212.

Chorlay (2016). *Historical sources in the classroom and their educational effects*. In L. Radford, F. Furinghetti & T. Hausberger (Eds.), *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between History and Pedagogy of Mathematics* (HPM 2016, 18-22 July 2016). Montpellier, France: IREM de Montpellier, 5-23.

Chorlay R., Masselin B., & Mailloux F. (2017). Tâches algorithmiques en cycle 3 : trois séances sur la multiplication par jalousie. *Grand N* 100, 33-57.

Clivaz S. (2016). Connaissance mathématique des enseignants et enseignement de l'algorithme de la multiplication. *Recherche en didactique des mathématiques* 36/2, 231-261.

Constantin C. (2017). La distributivité : quelles connaissances pour enseigner la multiplication à l'école primaire ? *Grand N* 100, 105-130.

Tempier (2016). Composer et décomposer : un révélateur de la compréhension de la numération chez les élèves. *Grand N* 98, 67-90.

HISTOIRE DES MATHEMATIQUES EN CLASSE : POUR UNE ANALYSE AU NIVEAU DES CONCEPTIONS DES ELEVES

DE VITTORI[*] Thomas*

Résumé – Après une rapide présentation du modèle cK¢ du didacticien des mathématiques Nicolas Balacheff, cet article se propose d'en montrer l'intérêt pour l'analyse de certaines tâches données aux élèves lors de l'utilisation de l'histoire des mathématiques en classe.

Mots-clefs : histoire des mathématiques, didactique, épistémologie, modèle cK¢

Abstract – After a short presentation of Balacheff's works, his cK¢ model is applied on an example in order to show how a study at the students' conceptions level enlightens the way historical elements interact with mathematical tasks.

Keywords: history of mathematics, didactics, epistemology, cK¢ model

I. DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES ET ETUDES EMPIRIQUES SUR L'UTILISATION DE L'HISTOIRE DES MATHEMATIQUES EN CLASSE

1. Rappel sur le contexte à l'échelle internationale

Depuis une trentaine d'années, la pertinence de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement des mathématiques a toujours été réaffirmée par de nombreux enseignants et chercheurs presque partout dans le monde. Mais dans le même temps, ce qui rend intéressante une telle approche pédagogique reste obscur surtout quand on s'intéresse aux apprentissages des élèves. Face à cette situation paradoxale, depuis le début du 21^{e} siècle, la communauté internationale réclame des recherches empiriques qui pourraient éclairer le rôle des éléments historiques dans l'enseignement des mathématiques. Très récemment, Fried, Guillemette & Jahnke (2016) ont tenté de résumer cette quête de cadres théoriques adaptés mais à l'exception de quelques résultats dans les travaux de Jankvist (2009), Guillemette (2017), Jahnke (2014) et Fried lui-même (2008, 2014a, 2014b), leur conclusion principale fut que cette question demeure encore aujourd'hui à l'état de question. Pour Fried et al., un point important soulevé dans cette recherche réside dans le fait que les études sur l'utilisation pédagogique de l'histoire ne doivent pas manquer les spécificités du savoir historique. Ainsi, Fried et al. rejettent l'idée d'un cadre théorique uniquement porté par une histoire pensée comme *outil* et selon eux un bon cadre théorique devrait être guidé par des questions centrées sur le caractère historique des mathématiques (Fried et al., 2016). Un bon exemple d'utilisation de l'histoire des mathématiques en classe qui tienne compte de ces mises en garde est certainement l'approche herméneutique de Jahnke dont les principaux points ont été rappelés par son auteur lui-même dans un texte récent (Fried et al., 2016). Selon Jahnke, l'approche herméneutique est l'une des approches les plus sophistiquées pour l'histoire des mathématiques en classe. Cette procédure pédagogique peut être résumée en six principes (Fried et al., 2016). (1) Les élèves étudient une source historique après avoir acquis une bonne compréhension du sujet mathématique respectif dans sa forme et sa perspective moderne. (2) Les élèves étudient le contexte et la biographie de l'auteur. (3) La particularité historique de la source est conservée autant que possible. (4) Les élèves sont encouragés à produire librement des associations d'idées. (5) L'enseignant insiste sur l'importance des arguments rationnels sans chercher une interprétation unique. (6) La compréhension historique d'un concept

[*] Laboratoire de Mathématiques de Lens – Université d'Artois – ESPE Lille Nord de France – France – thomas.devittori@espe-lnf.fr

s'oppose à la vision moderne, c'est-à-dire que la source historique encourage les processus de réflexion. Ainsi résumée, l'approche herméneutique peut être conçue comme un processus dont l'aboutissement réside dans une confrontation entre une compréhension moderne et historique des objets mathématiques (point 6). Néanmoins, l'idée proposée par Jahnke de fusion de l'horizon du lecteur et de l'horizon du texte consiste avant tout en une perspective globale dont les différents aspects peuvent et doivent être analysés en profondeur (c'est-à-dire en ayant en vue les apprentissages mathématiques des élèves) *a priori* et *a posteriori*. De même, le rôle des contenus historiques dans l'acte pédagogique reste à étudier. Jahnke en fait un élément central *a priori* alors que Chorlay (2016) lui préfère une approche plus centrée sur les tâches des élèves (c'est-à-dire sans inviter à faire, en classe, de l'histoire des mathématiques pour elle-même). L'étude proposée dans cet article s'inscrit elle aussi dans ce type de questionnement et se situe dans la suite de travaux précédents portant sur des analyses de pratiques (Barrier, Mathé & de Vittori, 2012, de Vittori web, 2015, 2016, 2017). L'approche se veut toutefois plus théorique et je me concentrerai ici uniquement sur la manière dont certains outils tirés de la didactique des mathématiques peuvent être adaptés à l'analyse de l'activité des élèves dans des situations de classe mêlant histoire et mathématiques. Ainsi, dans une première partie, je présenterai rapidement le modèle cK¢ de Balacheff choisi pour cette étude et dans un second temps, j'utiliserai ce modèle sur un exemple pour souligner quelques spécificités dans l'utilisation de l'histoire dans l'enseignement des mathématiques.

2. Le modèle cK¢ de Nicolas Balacheff

Nicolas Balacheff est un didacticien français dont les travaux portent principalement sur l'apprentissage assisté par ordinateur et sur la démonstration. Dès les années quatre-vingts, son intérêt pour l'enseignement des mathématiques l'amène à élaborer un modèle dont la visée est l'analyse de l'apprentissage des mathématiques lorsque les exercices sont implémentés sur ordinateur. Le cadre théorique dans lequel Balacheff travaille est la Théorie des Situations Didactiques (TSD) de Brousseau avec pour projet le rapprochement de l'intelligence artificielle et de la didactique des mathématiques afin d'améliorer la conception des environnements d'apprentissage informatisés (Balacheff, 2013, p.2). L'intérêt d'un tel modèle pour notre étude sur l'histoire dans l'enseignement des mathématiques réside dans le fait que la réflexion de Balacheff s'ancre profondément à un niveau épistémologique. Comme nous le verrons plus tard, cette spécificité est l'un des principaux aspects qui fait de ce cadre un outil précieux pour une analyse de l'utilisation de l'histoire des mathématiques en classe.

Cherchant à étendre les apports de Vergnaud sur les champs conceptuels, l'idée principale de Balacheff est un nouveau travail sur les *conceptions* qu'il définit comme un «état d'équilibre dynamique d'une boucle action / rétroaction du système» (Balacheff, 2005, p.6). Le couple actions / rétroactions est un élément clé de la théorie Brousseau qui est, rappelons-le, le cadre théorique principal de Balacheff. Les actions sont ce que l'apprenant fait (ou peut faire) et les rétroactions soulignent la manière dont tout ce avec quoi l'apprenant est en contact (contenus matériels mais aussi les relations avec les autres étudiants) lui donne une information en retour. Dans ce contexte, la conception doit être comprise comme une connaissance locale d'un apprenant dans une situation spécifique. Balacheff la définit comme un «équilibre dynamique» car elle est construite sur des boucles d'actions et de rétroactions qui pourraient, à chaque moment, déstabiliser les connaissances de l'apprenant. Par exemple, faire des multiplications avec des entiers tend à donner à cette opération certaines propriétés (comme, par exemple, multiplier deux nombres donne un résultat supérieur à chacun d'eux) qui peuvent être mise en défaut avec des nombres décimaux (0,2 fois 5 donne 1 qui n'est pas supérieur à 5). Jusqu'ici, tout ce qui vient d'être présenté est déjà, d'une certaine manière,

dans la TSD de Brousseau. Ce qui est nouveau chez Balacheff apparaît lorsqu'il fait de la *conception* une notion opérationnelle (pour l'apprentissage par ordinateur par exemple). Voici la caractérisation qu'il propose :

> « Une « conception » est caractérisée par un quadruplet (P, R, L, Σ) composé de :
>
> P : un ensemble de problèmes
>
> R : un ensemble d'opérateurs
>
> L : un système de représentation
>
> Σ : une structure de contrôle. » (Balacheff, 2005, p.6)

P, l'ensemble des problèmes, est directement inspiré par le contexte épistémologique de la TSD. Selon Brousseau, et donc pour Balacheff, une connaissance mathématique est élaborée comme une réponse à un problème ou une catégorie de problèmes, une partie du travail du mathématicien résidant dans l'identification des problèmes qui peuvent être résolus de la même manière, c'est-à-dire avec les mêmes outils conceptuels. Ainsi, un «ensemble de problèmes» est ce qui donne à une conception son sens et son utilité. Balacheff donne l'exemple de la notion de tangente qui, selon les situations, peut être pensée de différentes manières, c'est-à-dire, selon différentes conceptions. R, l'ensemble des opérateurs, vise à rendre compte de toutes les techniques qui permettent la transformation du problème. En effet, lors de la résolution d'un problème, il convient généralement de modifier la situation initiale, étape par étape, pour la rendre finalement compatible avec un théorème connu ou une procédure de calcul. Dans l'analyse d'une conception, l'ensemble des opérateurs contient donc toutes les procédures mathématiques disponibles pour l'apprenant. Le troisième item du quadruplet, le système de représentation L, est peut-être le plus simple des quatre car il fait référence à la façon dont un problème est présenté. L'algèbre moderne en est un exemple, mais comme nous le verrons plus loin, d'anciens systèmes de représentation tels que des nœuds sur des cordes sont également possibles. Le dernier point est Σ, la structure de contrôle. Comme l'explique Balacheff (2013, p.6), c'est quelque chose qu'il introduit afin de rendre visible ce qui est en jeu lorsque l'apprenant identifie à quel point il est proche de la solution. En d'autres termes, chaque fois que quelqu'un résout un problème mathématique, consciemment ou non, il utilise des éléments qui l'aident à contrôler ce qui est fait. Par exemple, lorsque les élèves multiplient 456 par 123, ils utilisent un algorithme dans lequel chaque étape donne un moyen de contrôler l'avancement du calcul. Pour Balacheff, ce quatrième élément de sa définition de la conception est incontournable pour l'apprentissage assisté par ordinateur car il permet une analyse avant l'action de ce qui peut être fait par l'étudiant.

Avec ce modèle, les relations dans un ensemble de problèmes peuvent être anticipées afin d'analyser comment les conceptions des étudiants peuvent être activées, renforcées, déstabilisées ou liées à d'autres. Dans l'un des articles de Balacheff (2013, p.12), un petit diagramme résume cette idée (*Diagramme 1*, P est pour les problèmes et C pour les conceptions). En accord avec le TSD en toile de fond, l'auteur explique que l'apprentissage est un processus dont le résultat est une évolution des conceptions en cours de renforcement, d'interrogation ou de transformation ; le moteur de ce processus étant les problèmes qui sont pensés comme des déstabilisations du système apprenant / milieu.

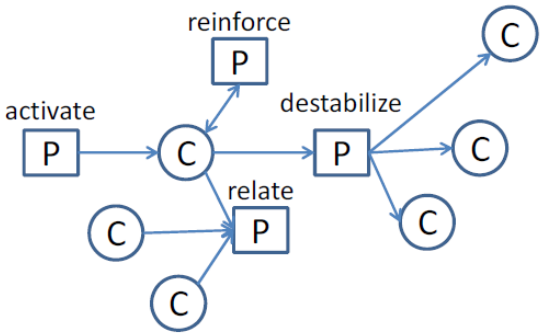


Diagramme 1 *– Relations entre problèmes (P) et conceptions (C)*

Le modèle présenté dans cette première partie est appelé cK¢ par son concepteur et chacune des trois lettres est soigneusement définie. Le nom cK¢ vient des trois piliers du modèle: conception (conception en anglais), savoir (Knowledge en anglais), concept (concept en anglais) où le savoir K désigne une conception qui est identifiée et formalisée par une institution (Balacheff, 2013). Quant à ¢, le concept, c'est l'ensemble de toutes les conceptions ayant un même objet. D'une certaine manière, Balacheff crée des classes d'équivalences pour montrer les liens entre les mathématiques les plus abstraites (les concepts), ce qui est enseigné (la connaissance) et ce qui est effectivement utilisé par les élèves (les conceptions), ce qu'il résume dans le diagramme suivant (*Diagramme 2*, Balacheff 2005, p.25).

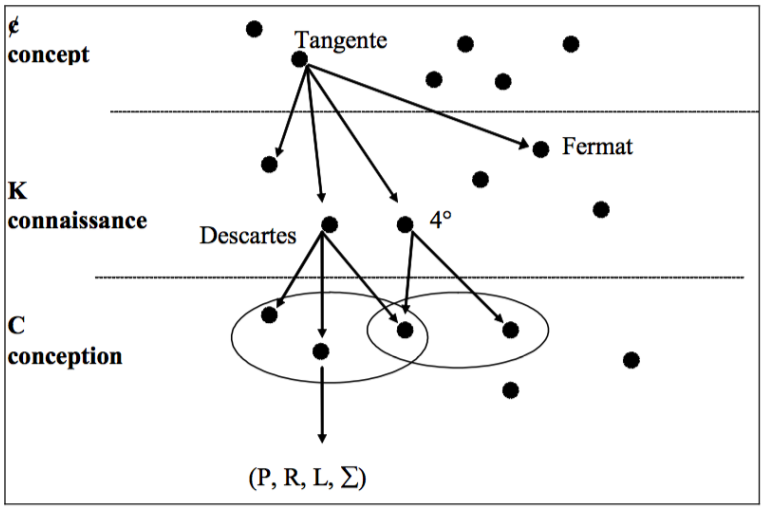


Diagramme 2 *– Les trois niveaux de cK¢ : les conceptions, les connaissances et les concepts*

Il est important de noter que ce processus est avant tout ascendant car l'entrée principale reste la conception au niveau des élèves. cK¢ est un modèle qui fonctionne *in fine* à un niveau épistémique et il pourra donc convenir à une analyse de l'histoire dans l'enseignement des mathématiques lorsque l'histoire partage cette orientation vers la construction de concepts.

II. ETUDE DIDACTIQUE D'UNE ACTIVITE A DIMENSION(S) HISTORIQUE(S)

L'exemple que je vais analyser porte sur un travail autour de grands nombres réalisé avec des élèves d'une classe de sixième (11-12 ans). Les grands nombres sont difficiles à manipuler par les élèves et des travaux récents de didactique des mathématiques ont montré que de nombreuses difficultés sont liées à un manque de maîtrise du système numérique. Tempier (2016) explique qu'un bon moyen d'analyser l'enseignement de la numération est de

considérer le rôle des différents rangs (nommés unités et classes) dans l'écriture des nombres. Ce que rappelle Tempier, c'est que les grands nombres sont construits dans la répétition d'un système d'unités (unités, dizaines, centaines) et de classes (unités, milliers, millions, milliards). Par exemple, 23456 se lit vingt-trois-mille-quatre-cent-cinquante-six où un bon élève peut identifier deux dizaines et trois unités dans la classe des milliers et quatre centaines, cinq dizaines et six unités dans la classe des unités. Selon Tempier, la compréhension des grands nombres requiert une bonne capacité à séparer leur écriture pour pouvoir, par exemple, dire combien il y a de centaines dans 23456 (234 centaines et 56 unités). De nombreuses erreurs commises par les élèves peuvent être expliquées par l'une ou l'autre de ces considérations (Tempier, 2016).

Comment l'histoire des mathématiques peut-elle être utile dans ce contexte ? Dans le cadre d'un cours d'histoire des mathématiques, une activité expérimentale à destination d'élèves de sixième a été préparée par des étudiants de niveau licence se destinant au professorat des écoles (de Vittori, 2017). La partie centrale de cette séance était basée sur l'utilisation de quipus incas. Les quipus sont des cordelettes (une ou plusieurs) où des nœuds sont faits pour exprimer des nombres. Ce système est simple et il fonctionne sur un système décimal tout comme le nôtre (Asher & Asher, 1997). Ce qui est intéressant, c'est que ce système peut être utilisé pour mettre en évidence la distinction entre unités et classes pointée par Tempier. En effet, pour chaque classe (des milliers, des millions, des milliards) une nouvelle cordelette est attachée sur le quipu et ainsi sur chacune d'elles, les nombres ne sont jamais supérieurs à 999 ce qui permet une identification rapide des centaines, des dizaines et des unités. En pratique, après une brève présentation du contexte et la manière de faire les nœuds, l'activité proposée consiste principalement en une alternance de phases où les élèves réalisent des quipus et des phases où ils essaient de les lire, l'objectif étant alors d'inciter les élèves à travailler sur les *bons* regroupements en puissances de 10 (unités, milliers, millions) dans les deux systèmes. Bien sûr, les nombres deviennent de plus en plus grands au fur et à mesure que la séance avance. Voyons sur cet exemple comment le modèle cK¢ peut être utilisé pour rendre compte de la manière dont l'histoire interagit avec l'enseignement des mathématiques. Pour cette analyse, dans les différents items du quadruplet définissant une conception, je noterai « cont » en indice pour indiquer ce qui renvoie à une épistémologie contemporaine des mathématiques (généralement celle issue du vécu scolaire des élèves) et « hist » en indice pour marquer ce qui fait référence à une vision et/ou pratique ancienne (ici celle liée aux quipus incas) que nous connaissons uniquement *via* l'histoire.

Cette activité sur les quipus porte sur les grands nombres. L'ensemble des problèmes P est lié à ce sujet dans la mesure où les nombres, lorsqu'ils tendent à devenir très grands, nécessitent l'élaboration d'un système approprié pour leur écriture et leur manipulation. Il y a ensuite deux systèmes de représentation en jeu. Le premier, L_{cont}, notre système de numération contemporain, est toujours présent dans un contexte scolaire. Les élèves connaissent les nombres depuis leur plus jeune âge et l'activité proposée tente de compléter ces connaissances antérieures. Le deuxième système de représentation, L_{hist}, est le système inspiré par l'histoire. Au travers des quipus, une nouvelle façon d'écrire les nombres est donnée et les élèves sont invités à utiliser ce nouveau système pour communiquer entre eux. Comme l'explique Asher & Asher (1997, p.62), l'utilisation de ficelles en lieu et place de papier ou de papyrus a de nombreuses conséquences. Contrairement à la plupart des systèmes de numération les nœuds sur les cordelettes sont tridimensionnels. L'enregistrement des nombres sur un quipu est non linéaire et cette non-linéarité est une conséquence du matériau souple utilisé. Selon les historiens Asher & Asher (1997 p.62), c'est la position relative, associée aux couleurs et aux types de nœuds, qui rend l'enregistrement significatif. Le quipukamayok (maitre des quipus) devait donc avoir la capacité à concevoir et à agir sur les

nombres en trois dimensions et avec de la couleur. Dans ce contexte, le système contemporain des opérateurs R_{cont} utilisé par les élèves est exactement ce qui a été remarqué par Tempier. En présence de grands nombres, les élèves doivent les séparer en différentes classes, pour identifier les unités, les dizaines, etc. Toutes ces opérations font partie d'un ensemble d'actions techniques et intellectuelles qui permettent l'utilisation correcte et la compréhension des nombres. Mais dans cette activité, les élèves doivent aussi gérer R_{hist}, une manière de travailler avec des nombres notés au moyen de nœuds sur des cordes. Enfin, tous ces aspects sont contrôlés par Σ_{cont} *via* une confrontation lecture / écriture par les pairs (les élèves travaillaient en groupes) et une vérification de l'exactitude du décodage, et par Σ_{hist} en particulier lors de l'utilisation de l'alignement (assez naturellement, les élèves laissent pendre les cordes pour vérifier les positions). Au final, on constate dans cette activité deux manière de concevoir les mathématiques, la première au travers de (P, R_{cont}, L_{cont}, Σ_{cont}) et la seconde, qui trouve sa source dans l'histoire, (P, R_{hist}, L_{hist}, Σ_{hist}) et ce de manière concomitante. Ce que nous pouvons résumer dans le tableau suivant :

	Exemple : Quipus et grands nombres	
P	écriture, transmission de grands nombres (pour l'archivage de données comptable par exemple)	
R	**R_{cont}** décomposition algébrique en unités, en dizaines, en centaines et en unités, en milliers, en millions, en milliards; ajouter ou soustraire des unités à n'importe quel rang; ajouter ou supprimer des chiffres	**R_{hist}** décomposition en unités, dizaines, centaines et en unités, des milliers, des millions, des milliards; ajouter ou supprimer des nœuds, changer le type de nœud, ajouter ou supprimer des cordes
L	**L_{cont}** le système de numération décimal de l'école, écriture chiffrée, désignation orale des nombres	**L_{hist}** le système des Incas avec des noeuds sur les cordes
Σ	**Σ_{cont}** la confrontation lecture / écriture par les pairs; précision du décodage	**Σ_{hist}** le savoir-faire de quipukamayok (maitre du quipu) : utilisation des couleurs, alignement des différentes ficelles (comparaison de position)

Tableau 1 *– Analyse des conceptions dans l'activité sur les quipus incas*

L'interprétation de cette activité dans le modèle cK¢ donne l'occasion de montrer comment la dimension historique crée de nouvelles tâches dans lesquelles les élèves doivent passer d'une conception à une autre, voire les confronter. Dans la séance sur les quipus, l'objectif était avant tout de créer un conflit cognitif qui devient visible dans le modèle cK¢ par la co-présence de deux conceptions différentes (notifiées ici par le jeu des indices « cont » et « hist »)

III. CONCLUSION : HISTOIRE DES MATHEMATIQUES ET DUALITE PROBLEME/CONCEPTION CHEZ BALACHEFF

Au début de cet article, j'ai souligné l'importance de l'ancrage épistémologique du modèle cK¢. Ce modèle propose une analyse basée sur trois niveaux différents, du plus individualisé (conceptions des élèves) au plus abstrait (concepts mathématiques). Dans cette organisation, la connaissance se situe quelque part entre les deux et est représentative de toute situation d'enseignement dans laquelle les contenus scolaires doivent, au final, être stabilisés. Dans le diagramme suivant (*Diagramme 3*), les trois niveaux du modèle cK¢ sont rappelés pour notre exemple de l'activité avec les quipus dans laquelle les contenus mathématiques visés sont des nombres et le système numérique.

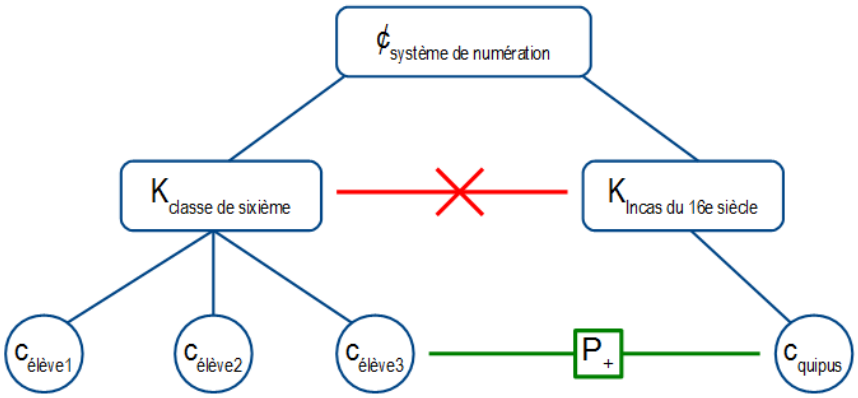


Diagramme 3 – *Application du modèle cK¢ à l'histoire des mathématiques en classe*

Dans cette utilisation de l'histoire, il est important de noter que les élèves ne peuvent être *réellement* des Incas du XVI^{e} siècle. Ainsi, nos élèves de sixième ne peuvent pas vivre ce que les anciens Incas vivaient car pour ce faire, ces élèves du XXI^{e} siècle devraient complètement oublier ce qu'ils ont appris depuis leur naissance. Pour notre sujet, cette limitation structurelle signifie que les connaissances mathématiques utilisées dans une classe de sixième ne peuvent être directement enrichies par celles des Incas, ce qui est symbolisé par la croix dans le diagramme. Ce que nous avons vu dans l'exemple précédent, c'est qu'un bon niveau peut consister dans une analyse des conceptions. De nos jours, dans toute classe, sur n'importe quel sujet mathématique, de nombreuses conceptions ($c_{élève1}$, $c_{élève2}$, etc.) peuvent être mises en jeu par les élèves. La principale spécificité de l'utilisation de l'histoire est l'addition d'un nouveau quadruplet (P, R, L, Σ) dans lequel apparaît une distance plus ou moins grande avec les conceptions contemporaines. Dans le modèle cK¢, problèmes et conceptions sont profondément liés. Comme nous l'avons rappelé au début de cet article, le travail de Balacheff est ancré dans la théorie de Brousseau selon laquelle la connaissance mathématique est une réponse à certains problèmes. Les relations entre les problèmes et les conceptions sont multiples (voir *Diagramme 1*) ; un problème pouvant activer, renforcer, déstabiliser ou simplement se rapporter à une ou plusieurs conceptions. Ces possibilités sont typiquement celles qui sont utilisées dans les séances alliant mathématiques et histoire. Comme le montre l'exemple précédent, les conceptions empruntées au passé sont mises en contact avec les élèves par l'introduction d'un nouveau problème P_+ (*Diagramme 3*) comprenant des tâches nouvelles (comme faire des nœuds sur des cordes ou les *lire*). P_+ crée un pont entre les conceptions contemporaines des élèves et celles issues du passé. Notons que pour qu'elles prennent sens pour les élèves, les conceptions dans lesquelles P_+ se situe doivent renvoyer à un même ensemble de problèmes. Ainsi, dans l'exemple précédent, le problème P_+ fait partie de deux types de conceptions : un ancrage historique (P_+, R_{hist}, L_{hist}, Σ_{hist}) et son sens contemporain (P_+, R_{cont}, L_{cont}, Σ_{cont}). De fait, une nouvelle conception (c_{quipus} dans notre exemple, *Diagramme 3*) rejoint l'ensemble des conceptions utilisables par l'élève et permet ainsi un enrichissement des connaissances associées ($K_{classe\ de\ sixième}$ dans notre exemple, *Diagramme 3*).

Notons pour terminer que notre exemple sur les quipus se veut avant tout générique car, l'application du modèle cK¢ n'est en rien spécifique à cette activité. En effet, chaque fois qu'une situation d'enseignement des mathématiques est basée sur la mise en place d'un pas de côté par le biais de l'histoire, une analyse précise des conceptions en jeu est possible. Dès lors, cette analyse permet d'identifier des relations subtiles entre les contenus historiques et les mathématiques contemporaines apprises par les élèves.

REFERENCES

Asher M., Asher R. (1997) *Mathematics of the Incas – Code of the Quipu*, Dover, 1997.

Balacheff N., Margolinas C. (2005) cK¢ Modèle des connaissances pour le calcul de situation didactiques. In Mercier A. & Margolinas C. (eds.) *Balises pour la didactique des mathématiques* (pp.1-32). Grenoble : Éditions La Pensée Sauvage.

Balacheff, N. (2013) cK¢, a model to reason on learners' conceptions. In M. V. Martinez, A. Castro Superfine (Eds). *PME-NA 2013 - Psychology of Mathematics Education*, North American Chapter, Nov 2013, Chicago, IL, United States. pp.2-15.

Chorlay, R. (2016) Historical sources in the classroom and their educational effects. In Radford, L., Furinghetti, F & Hausberger, T. (Eds), *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between History and Pedagogy of Mathematics* (HPM 2016, 18-22 July 2016). Montpellier, France: IREM de Montpellier, 5-23.

de Vittori, T. (web) EDU-HM website, Etudes Didactiques de l'Utilisation de l'Histoire des Mathématiques en classe et en formation, http://eduhm.univ-artois.fr (identification is required to access videos. Login: region-npdc, password : region-npdc).

de Vittori, T. (2015) Les tâches des élèves dans une activité mathématique à dimension historique. *Petit x* 97, 5-26.

de Vittori, T. (2016) Analysis of pupils tasks in the use of history in mathematics teaching, in Radford, L., &al. *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics*. Montpellier, France: IREM de Montpellier.

de Vittori, T., Leroy, A. (2017) Travailler la numération décimale avec les quipus incas : bienfaits et limites autour d'une expérience en classe de sixième. *Repères-IREM* 107, 21-44.

Fried, M. N. (2008) History of mathematics in mathematics education: A Saussurean perspective. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 5(2), 185–198.

Fried, M. N. (2014a) History of Mathematics and Mathematics Education. In Michael Matthews (Ed.*), History, philosophy and science teaching handbook*, volume I (pp. 669-705). New York: Springer.

Fried, M. N. (2014b) Our relationship to the mathematical past. *Lecture for the MAA-AMS Joint Conference - Short Course on Historiography*. Baltimore, Maryland, USA.

Fried, M., Guillemette, D., & Jahnke, H.N. (2016) Theoretical and/or conceptual frameworks for integrating history in mathematics education. In Radford, L., &al. *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics*. Montpellier, France: IREM de Montpellier.

Guillemette, D. (2017) History of mathematics in secondary school teachers' training: towards a nonviolent mathematics education. *Educational Studies in Mathematics* 96(3), 349–365.

Jahnke, H. N. (2014) History in mathematics education. A Hermeneutic Approach. In M. Fried, & T. Dreyfus (Eds.), *Mathematics & mathematics education: Searching for common ground* (pp. 75-88). Dordrecht: Springer 2014.

Jankvist, U. T. (2009) A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics* 71, 235–261.

Tempier F. (2016) New perspectives for didactical engineering. An example for the development of a resource for teaching decimal number system. *Journal of Mathematics Teacher Education* 19(2), 61-76 .

LA DUPLICATION DU CARRÉ AVEC PLATON EN CM2 et en 6e

GAUTREAU[*] Alexis – HEGUIAPHAL[**] Dominique

Résumé – Nous présentons une expérimentation effectuée en cours de Mathématiques en CM2 et en 6ème. Les élèves ont étudié le problème de la duplication du carré à travers un extrait du *Ménon* de Platon. L'objectif est double : faire travailler les élèves sur ce problème de duplication mais également sur la compréhension de texte.

Mots-clefs : Texte historique, Didactique du français, Cycle 3, Aire, Agrandissement de figure, Lexique géométrique.

Abstract - We present an experiment carried out in grades 5 and 6, in France. Pupils studied the historical problem of the duplication of squares through an excerpt of Plato's *Meno*. Our aim is twofold: make pupils work on the problem of duplication of squares and, at the same time, on the understanding of texts.

Key-words : Historical text, Didactic of the French language, Primary education, Area, Enlargement, Geometric vocabulary.

I. PRÉSENTATION DE L'EXPÉRIMENTATION

Pendant l'année scolaire 2016/2017, dans le cadre d'un groupe de travail de l'IREM M.:A.T.H. cycle 3 de Paris, nous avons construit une séquence à destination de classes de CM2 et 6e sur le problème de la duplication du carré, étudié à travers un extrait du *Ménon* de Platon. Cet exercice s'inscrit dans un projet plus large du groupe IREM M.:A.T.H.[1] au niveau national sur l'usage de sources patrimoniales et historiques dans l'enseignement des Mathématiques au cycle 3.

L'expérimentation a duré trois séances d'une heure, mais pourrait prendre plus ou moins de temps avec d'éventuelles adaptations. Elle a été mise en œuvre dans un CM2 et une 6e du 13e arrondissement de Paris. Une version transformée de ce scénario sera de nouveau jouée en durant l'année scolaire 2018 dans des classes de cycle 3, ce qui enrichira l'expérimentation. Les séances en CM2 et en 6e ont été enregistrées puis retranscrites, et les productions d'élèves recueillies et conservées à des fins d'analyse. Ces documents nous ont permis de confirmer, compléter ou infirmer certaines de nos analyses a priori.

La séquence a été conçue et animée par des enseignants expérimentés : Dominique Héguiaphal (CM2), Alexis Gautreau (6e) et Renaud Chorlay (formateur ESPE et chercheur au LDAR). Hormis la présentation de la séquence, dans cet article nous tenterons de dégager l'intérêt et les limites de l'exercice, tant du point de vue de la compréhension du texte de Platon lui-même, que du point de vue de l'apport de ce texte à l'activité mathématique des élèves.

La seule notion mathématique nouvelle dans la séquence à l'étude se trouve être le cœur du texte : le fait que doubler la longueur d'un côté du carré ne donne pas un carré d'aire double. Pour le reste, cette séquence n'est pas conçue comme une situation visant la découverte ou la première rencontre de notions mathématiques : la caractérisation instrumentée du carré et la

[*] [*] Cité scolaire Rodin, Paris 13ème – France – alexisgautreau00@gmail.com
[**] [**] École primaire Arago, Paris 13ème – France – dominique.heguiaphal@ac-paris.fr

[1] Ce projet a débouché sur l'écriture du livre : *Passerelles : enseigner les mathématiques par leur histoire au cycle 3*, dirigé par M. Moyon et D. Tournès.

comparaison d'aires avec ou sans mesures seront l'occasion pour les élèves de réinvestir des connaissances anciennes ; la situation met régulièrement l'élève en position d'expert devant s'appuyer sur ses connaissances antérieures non seulement pour chercher à résoudre un problème géométrique, mais aussi pour reformuler, voire critiquer, des formulations parfois éloignées des nôtres. L'élève devra également évaluer la qualité des arguments proposés dans le texte et même justifier certaines affirmations.

Il faut bien dire que nous ne sommes pas les premiers, loin de là, à nous attaquer à ce texte ; le problème du Ménon est un classique. Une expérimentation a déjà fait l'objet d'un article dans la revue Repère Irem (Kosyvas & Baralis, 2010). Cependant, nous avons choisi un autre chemin que celui emprunté par Kosyvas & Baralis. Ce problème peut être l'occasion d'un travail dans le cadre numérique, avec en ligne de mire la détermination par les élèves d'une valeur approchée ou d'un encadrement de la longueur de la diagonale du carré d'aire double. Nous avons choisi, en suivant Socrate, de privilégier le travail sur les grandeurs géométriques. Les mesures d'aires et de longueur données dans le texte ne serviront aux élèves qu'à contrôler leurs résultats obtenus par découpage et recollement. Nos élèves ont cherché, aux côtés de l'esclave, la "ligne" sur laquelle ce carré d'aire double est constructible. Il est notable que, lorsque nos élèves ont eu à choisir entre calculer l'aire du carré final à partir de mesures ou effectuer des pliages, découpages et recollements, ils aient tous choisi la seconde méthode, ne souhaitant pas s'engager dans le cadre numérique. C'était pourtant la méthode numérique que nous avions pensé majoritaire dans notre analyse a priori pour les élèves de 6e.

Par ailleurs, en examinant avec les élèves, dans un texte du patrimoine, une question mathématique, nous espérons lui conférer une dimension historique et culturelle, et partant, dévoiler aux élèves son aspect essentiel ou classique pour le monde intellectuel de l'époque classique de l'antiquité grecque ; en espérant que cela instille aux yeux des élèves de la valeur au problème mathématique. Aussi, notre parti-pris dans la construction de la séquence a été de faire travailler les élèves non seulement sur le problème du Ménon – doubler (en aire) un carré donné – mais sur le texte du Ménon (Platon, 1967). Notre motivation était donc double.

II. TRAVAILLER SUR UN TEXTE AUX ABORDS DIFFICILES EN CYCLE 3

Choisir de faire travailler les élèves sur le texte du Ménon c'est choisir de se confronter, en tant qu'enseignant, à cette difficulté du texte. Il ne s'agit pas là d'un caprice de notre part. Nous y sommes incités aussi bien par les programmes de français que par les travaux de didactique du français ; par ceux, en particulier, portant sur la compréhension de texte.

Nous avons cherché à concevoir la séquence en nous appuyant sur l'analyse des enjeux cognitifs et didactiques de la compréhension de texte tels qu'ils sont décrits par l'équipe des rédacteurs des manuels Lector & Lectrix (Cèbe & Goigoux, 2009). Ils rappellent que « comprendre un texte » englobe plusieurs familles de savoir-faire : décodage du code écrit (le sens usuel de « savoir lire »), mise en œuvre de compétences linguistiques et textuelles (syntaxe, lexique, ponctuation, connecteurs etc.), de compétences référentielles (ici le texte porte – en grande partie – sur des objets mathématiques), enfin, de compétences stratégiques (régulation, contrôle et évaluation, par l'élève, de son activité de lecture). Cèbe et Goigoux soulignent :

> S'il veut comprendre un texte, le lecteur doit mobiliser simultanément toutes ces compétences pour opérer deux grands types de traitement : des traitements locaux – qui lui permettent d'accéder à la signification des groupes de mots et des phrases – et des traitements plus globaux qui l'amènent à construire une représentation mentale cohérente de l'ensemble. (…) Ce dernier processus, appelé intégration sémantique, est cyclique : chaque ensemble d'informations nouvelles amène le lecteur à réorganiser la

> représentation qu'il construit pas à pas (…) Cela suppose qu'il soit suffisamment flexible pour accepter que ses premières représentations soient provisoires donc révisables. (Cèbe & Goigoux 2009, 7)

Les caractéristiques du Ménon nous ont conduits à construire la séquence de manière à accompagner l'élève – et l'ensemble de la classe – dans ce processus d'intégration sémantique. Nous reprenons de Lector & Lectrix des pistes pédagogiques permettant cet étayage ; citons en particulier (adapté de (Cèbe & Goigoux, 2009, 17-20)) :

- Rendre les élèves actifs et capables de réguler leur lecture. (…) Nous les invitons à évaluer leur degré de compréhension (« je suis sûr », « presque sûr », « pas sûr du tout »)
- Inviter à suppléer aux blancs du texte : on doit coopérer avec le texte pour aller un peu au-delà de ce qu'il dit explicitement, tout en respectant les « droits du texte ».
- Conduire à s'interroger sur les pensées des personnages : (…) leurs buts (pour le futur) et leurs raisons d'agir (en référence au passé) ; leurs sentiments ou leurs émotions ; leurs connaissances et leurs raisonnements.
- Faire rappeler et reformuler pour apprendre à mémoriser : nous multiplions les tâches de paraphrase et de reformulation.
- Faire du lexique un objectif permanent : explication par l'enseignant en amont ou en cours de lecture ; mais aussi, prise de conscience de la possibilité pour le lecteur de faire des hypothèses sur le sens d'un mot inconnu.

Ces éléments de didactique du Français nous ont permis d'analyser plus efficacement ce texte aux abords rugueux. Cela étant, il nous a paru naturel de découper le texte selon les trois parties de la résolution du problème de Ménon par l'esclave.

La séquence a été partagée en trois séances d'une heure :

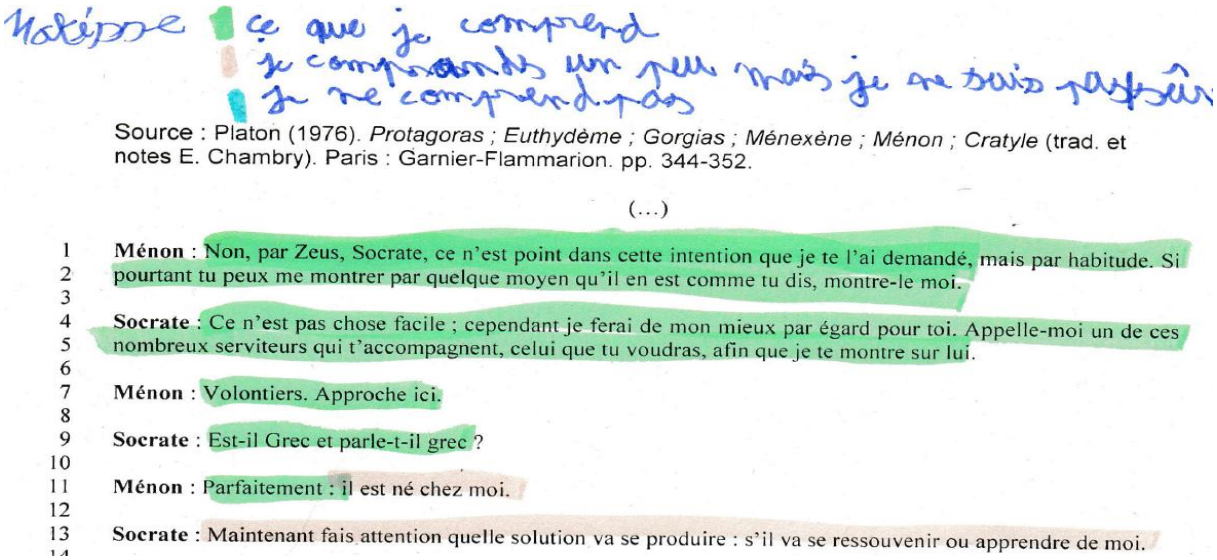
1re séance : Découverte du texte, présentation du contexte et pose du problème de la duplication du carré par le texte.

2e séance : Comparaison des réponses des élèves et de celle de l'esclave. Invalidation de la réponse par doublement du côté.

3e séance : découverte de la réponse de Socrate. Validation ou invalidation par les élèves de cette réponse. Bilan sur la construction générale du texte et son sens philosophique.

D'après les travaux d'élèves examinés, du point de vue du rapport qu'ils entretiennent avec la compréhension du texte, les élèves se partagent en deux groupes distincts. Par exemple, la première phrase du texte, qui n'est compliquée ni par son lexique ni par sa syntaxe, fait référence à une discussion antérieure entre Socrate et Ménon inconnue de nos élèves. Statistiquement, les élèves de bon niveau scolaire ont jugé ne pas avoir compris cette phrase en la soulignant d'une certaine couleur (cf. figure 1) ; les élèves de faible niveau scolaire ont exprimé qu'il la comprenait de façon sûre. De fait, les premiers cherchent à suppléer aux blancs du texte quand les seconds traite le texte de façon locale sans chercher à construire une représentation mentale cohérente de l'ensemble, selon les catégories exposées par Cèbe & Goigoux.

Ce point que les collègues qui enseignent le français connaissent bien, est, nous semble-t-il, important à considérer dès lors que l'on souhaite introduire des textes patrimoniaux en cours de Mathématiques ; mettre en œuvre ce type de séance demande de prendre en considération ces deux types de rapport à la compréhension d'un texte afin de trouver des moyens pour que le traitement global soit compris comme un attendu explicite de l'activité de compréhension par l'ensemble des élèves.



Source : Platon (1976). *Protagoras ; Euthydème ; Gorgias ; Ménexène ; Ménon ; Cratyle* (trad. et notes E. Chambry). Paris : Garnier-Flammarion. pp. 344-352.

(…)

Ménon : Non, par Zeus, Socrate, ce n'est point dans cette intention que je te l'ai demandé, mais par habitude. Si pourtant tu peux me montrer par quelque moyen qu'il en est comme tu dis, montre-le moi.

Socrate : Ce n'est pas chose facile ; cependant je ferai de mon mieux par égard pour toi. Appelle-moi un de ces nombreux serviteurs qui t'accompagnent, celui que tu voudras, afin que je te montre sur lui.

Ménon : Volontiers. Approche ici.

Socrate : Est-il Grec et parle-t-il grec ?

Ménon : Parfaitement : il est né chez moi.

Socrate : Maintenant fais attention quelle solution va se produire : s'il va se ressouvenir ou apprendre de moi.

***Figure 1** – Compréhension et surlignage en trois couleurs*

III. QUELQUES ENSEIGNEMENTS SUR L'ACTIVITÉ MATHÉMATIQUE DES ÉLÈVES

Cette séquence nous semble favoriser l'entrée dans le travail d'argumentation en géométrie, dans un contexte où l'on ne vise pas de « démonstration » au sens que ce terme prendra au cycle 4 : d'une part, le texte est un texte de nature argumentative ; il présente des échanges d'arguments – entre Socrate et l'esclave – à propos de figures et de grandeurs. D'autre part, le travail confié aux élèves va consister non seulement à chercher la réponse au problème posé, mais aussi à s'approprier et évaluer les arguments échangés dans le texte.

1. Présentation du problème et obstacles épistémologiques

Dans ce livre, Socrate cherche à prouver au citoyen grec Ménon que toute connaissance est disponible en l'homme si ce dernier se questionne suffisamment pour s'en *ressouvenir*. Pour appuyer sa thèse, Socrate convoque un esclave de Ménon et lui fait « redécouvrir » devant son maître la célèbre méthode de duplication de la surface d'un carré. L'esclave, à l'instar de nos élèves, pense initialement qu'il suffit de doubler la longueur du côté. Mais, aiguillé par Socrate, l'esclave finit par comprendre que le carré *penché* (*cf.* figure 2.D), qui a pour côtés les diagonales des quatre petits carrés, mesure en aire le double du carré initial.

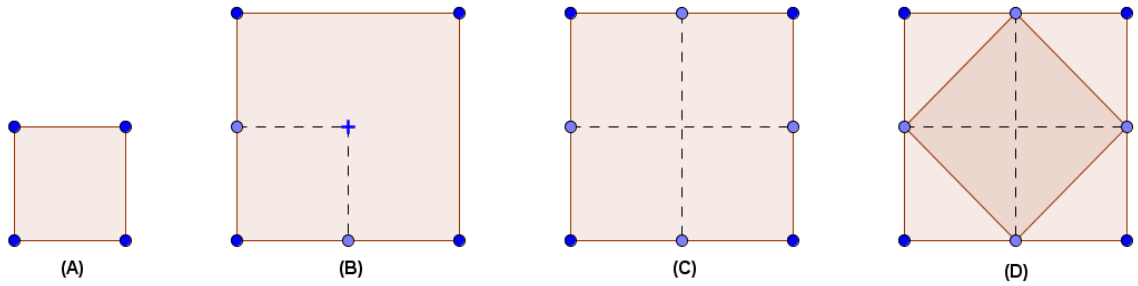


***Figure 2**. Construction du carré d'aire double.*

Le problème porte sur des notions fondamentales au cycle 3 : utilisation d'un vocabulaire précis pour décrire des figures géométriques assez complexes, caractérisation des quadrilatères usuels (en particulier, pour vérifier que le quadrilatère « penché » est bien un carré), comparaison d'aires avec et sans mesure, jeu entre les unités de longueur et les unités d'aire. En outre, l'erreur de l'esclave permet de travailler sur deux obstacles épistémologiques : difficulté à distinguer dans une même figure plane deux grandeurs différentes (la longueur du contour, l'aire de la surface), non proportionnalité des longueurs et des aires dans les situations d'agrandissement/réduction.

La séquence fournit l'occasion de confronter les élèves à des obstacles épistémologiques bien repérés dans la littérature didactique : difficulté à distinguer les deux grandeurs associées à une même surface (longueur du contour, aire) ; prégnance du modèle linéaire, pourtant en défaut dans les situations d'agrandissement /réduction (ici : doubler le côté du carré ne double pas l'aire). Contrairement aux connaissances sur les quadrilatères et les comparaisons d'aires – sur lesquelles on attend une certaine familiarité des élèves – la séquence ne peut supposer une quelconque expertise de l'élève sur ces points délicats. Cela étant, la construction de séquence vise non pas à esquiver ces difficultés, mais au contraire à amener les élèves à s'y confronter pour en prendre conscience.

Les deux obstacles ne jouent pas exactement le même rôle. Pour ce qui est de la distinction longueur/aire, la question est travaillée dès le début de l'enseignement des aires, au cycle 3. Notre séquence étant conçue pour le CM2 et la 6e, nous comptons sur une certaine familiarité des élèves avec cette distinction. La connaissance étant en cours de construction, les différents élèves d'une même classe n'en sont sans doute pas tous au même point, d'où l'importance des échanges d'arguments et de formulations entre élèves – et avec l'enseignant – lors des phases collectives. Pour ce qui est du caractère quadratique – donc non linéaire – de la dépendance de l'aire envers le périmètre (ou envers une longueur caractéristique, comme celle du côté du carré) dans les agrandissements/réductions, le phénomène est en général peu rencontré au cycle 3, et l'on ne peut viser le dépassement d'un obstacle en une seule confrontation. Nos objectifs sont ici modestes : nous aimerions qu'à la fin de la séquence les élèves puissent dire qu'en doublant le côté d'un carré on ne double pas son aire, en le justifiant par l'exhibition d'un contre-exemple.

2. Gros plan : au sujet de la distinction longueur/aire

Socrate parle dans le texte d'un carré de « deux pieds de côté », et fait observer à l'esclave que l'« espace » du carré est de « quatre pieds ». Nous demandons alors aux élèves (en binômes) :

La phrase « L'espace est donc deux fois deux pieds » (20) est très importante. Prenez quelques minutes pour réfléchir, et préparer par écrit vos réponses aux deux questions :

- Pouvez-vous expliquer de quoi parle Socrate ?
- Êtes-vous d'accord avec lui ?

Vous pouvez faire des phrases, ou bien des figures à main levée ; vous pouvez colorier ; tout est autorisé.

Le déroulement dans les classes montre que les élèves identifient bien le fait que l'on parle de l'aire du carré. Nous reproduisons des extraits de trois copies de CM2 :

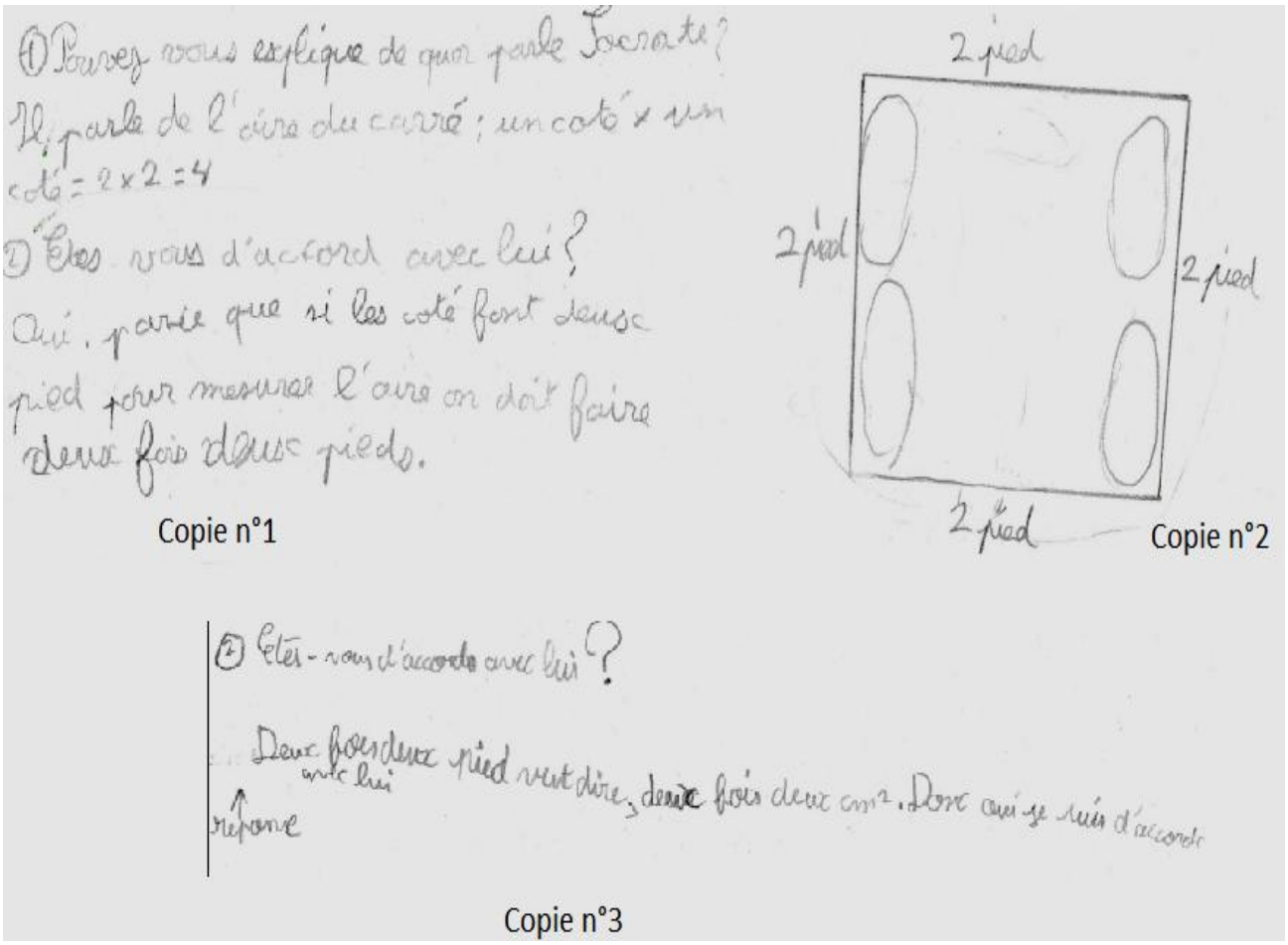


Figure 3 *– Trois copies d'élèves de CM2*

La copie n°1 est représentative de la réponse majoritaire ; beaucoup d'élèves, de façon laconique, valident par « oui, car 2×2 = 4 ». La copie n°2 montre même un cas de représentation permettant d'accommoder l'ambiguïté du texte : les pieds dessinés désignent à la fois les longueurs (par leur côté le plus long) et – vraisemblablement – les pieds d'aire (par la partie de la surface sur laquelle ils sont dessinés). La copie n°3 montre un cas, rare, où l'élève rappelle le rôle du carré pour désigner l'unité d'aire. On voit que le bilan collectif est nécessaire pour montrer le caractère problématique de l'usage par Socrate d'un même terme pour désigner l'unité de longueur et l'unité d'aire associée. L'introduction du terme « pied carré » pour l'unité d'aire ne choque pas les élèves ; elle peut être proposée par certains. On peut aussi choisir de distinguer les « pieds de long » et les « pieds d'aire ».

Figure 4. 3 copies d'élèves de CM2

3. Reformuler afin de préciser le lexique géométrique en jeu

Platon n'utilisait pas un vocabulaire géométrique aussi précis que celui que l'on utilise aujourd'hui en cours de Mathématiques en CM2 et 6ème. Pendant qu'il décrit la figure à l'esclave, Socrate la construit, mais le lecteur ne la voit pas. Le texte est de surcroît riche en ambigüité lexicale. Outre celle entre les unités de longueur et d'aire, le mot « espace » signifie aussi bien « surface » qu'« aire », et le mot « lignes » signifie « côtés » ou « diagonales ». Le texte commence par la construction d'une première figure dont on ne sait si, par « lignes », Socrate entend « côtés » ou « diagonales », ce qui génère la possibilité de construire plusieurs figures différentes. Nous avons laissé d'abord les élèves interpréter seuls les consignes de construction de Platon. C'est par le contexte, et grâce à la lecture de la suite du texte que les élèves vont pouvoir choisir la bonne figure. De fait, la première partie du texte est un véritable programme de construction que le lecteur doit constamment reformuler afin de lever les ambigüités lexicales et de réviser la représentation initiale qu'il s'était faite de la figure.

Parmi les objectifs prescrits dans les textes institutionnels de France au cycle 3, il y a notamment celui de savoir identifier les objets géométriques élémentaires dans des figures complexes et celui d'utiliser les notations géométriques académiques pour nommer ces objets. Le texte de Platon permet d'une part de montrer l'intérêt, voire la nécessité, de l'usage d'un vocabulaire précis et non ambigu, et d'autre part, il rend possible un travail sur cet usage du lexique à travers une activité de traduction du texte en un programme de construction d'un type attendu en CM2 et 6ème. Les travaux des élèves et enregistrements prouvent d'ailleurs que, bien loin d'embrouiller ou de conforter les élèves dans des usages ambigus du lexique géométrique, la compréhension du texte a imposé à tous de reformuler le vocabulaire géométrique pas à pas afin de construire la figure en suivant la chronologie du texte historique.

RÉFÉRENCES

Cèbe, S., Goigoux, R. (2009). *Lector & Lectrix. Apprendre à comprendre les textes narratifs. CM1-CM2-6e-Segpa*. Paris : Retz.

Chorlay & al. (2018). Doubler le carré avec Platon. In M. Moyon & D. Tournès (Éds.), Passerelles : Enseigner les mathématiques par leur histoire au cycle 3 (pp. 122-147). Ressources et formation, ARPEME.

Kosyvas, G., Baralis, G. (2010). *Les stratégies des élèves d'aujourd'hui sur le problème de la duplication du carré*. Repères IREM 78, 13-36.

Platon (1967). *Protagoras ; Euthydème ; Gorgias ; Ménexène ; Ménon ; Cratyle* (trad. et notes E. Chambry). Paris : Garnier-Flammarion, 344-352.
Disponible en ligne sur http://gallica.bnf.fr

RESOURCES ET PRATIQUES D'ENSEIGNMENTS DE LA REFORME DES MATHEMATIQUES MODERNES EN HONGRIE ET EN FRANCE

GOSZTONYI Katalin*

Résumé – Nous étudions les ressources des enseignants de l'époque des mathématiques modernes - manuels scolaires et livres de maîtres - à la fois comme documents historiques, traces des pratiques d'enseignement et, d'un point de vue didactique, comme ressources aidant les enseignants à concevoir leurs pratiques. Les différences trouvées entre les ressources hongroises et françaises mettent en lumière des conceptions différentes sur le travail de l'enseignant dans les réformes du deux pays.

Mots-clefs : manuels scolaires, ressources, pratiques d'enseignement, histoire de l'enseignement des mathématiques, découverte guidée

Abstract – We study the resources of teachers, textbooks and teachers handbooks, of the New Math period on one hand as historical documents, and on the other hand, from a didactic point of view, as resources for teachers helping the conception of their practices. The differences between the Hungarian and French resources show different conceptions on teachers' work during the reforms of the two countries.

Keywords: textbooks, resources, teaching practices, history of mathematics education, guided discovery

I. LE CONTEXTE DE LA RECHERCHE

Cet article présente un aspect d'une recherche plus large, l'analyse comparative des réformes des décennies 1960 et 1970 menées en Hongrie et en France (Gosztonyi, 2015). Nous étudions ici notamment les ressources, tout particulièrement les manuels scolaires et livres du professeur, offertes aux enseignants dans le cadre de ces réformes, et les informations que ces ressources fournisses sur les pratiques d'enseignement envisagées par les auteurs.

Dans le cas hongrois, il s'agit de la réforme dirigée par Tamás Varga entre 1963 et 1978 au niveau de l'école primaire et du collège : son projet et sa conception d'enseignement reste reconnu en Hongrie jusqu'en aujourd'hui, on considère qu'il garde de l'actualité et doit inspirer l'enseignement contemporain. En même temps, la diffusion de la conception de Varga parmi les enseignants reste limitée à un cercle restreint, se passe principalement par contact personnel. La thèse mentionnée ci-dessus avait l'objectif, d'une part, de contribuer à la reconstitution des principes théoriques de Varga, peu explicitées par le concepteur, et d'autre part, de fournir des bases pour une diffusion plus efficace.

La réforme de Varga s'isncrit dans le mouvement de réforme international des « mathématiques modernes », tout en portant des spécificités caractéristiques au contexte hongrois. Nous avons comparé cette réforme avec celle d'un des pays directeurs du mouvement international, la réforme française des mathématiques modernes, mise en place à partir de 1969. Nous avons également prise en compte différentes projets expérimentaux menés en France dans les années 1970, développés comme réactions à la réforme des mathématiques modernes et marquant à la fois l'émergence de la recherche didactique française et le début des travaux des IREM. La comparaison a permis de montrer qu'il y a de nombreux éléments communs entre les réformes des deux pays, issus des discussions internationaux de l'époque ; en même temps, les réformes des deux pays s'inspirent du contexte local, y compris la culture mathématique, pédagogique ou la transformation du système éducatif entre autres. Nous avons montré tout particulièrement que si la réforme française des « mathématiques modernes » s'inspire d'une épistémologie mathématique

* Université Eötvös Loránd de Budapest – Hongrie – katalin.gosztonyi@gmail.com

« bourbakiste », la réforme de Varga s'appuye plutôt sur une épistémologie représentée par certains mathématiciens hongrois soutenant la réforme : une épistémologie qui est liée à celle de Pólya et de Lakatos, qu'on peut appeler « heuristique ». La conception hongroise d'enseignement de mathématiques issue de cette approche, représentée par Varga peut être appelée enseignement par « découverte guidée ».

Les réformes de l'époque en question ont profondément transformé le contenu et la structure des programmes, mais ont également envisagé de changements essentiels des pratiques. Inspiré par la psychologie constructiviste (avant tout des travaux de Piaget), on cherche à faire participer l'élève dans la construction du savoir mathématique ; pour le faire, on s'appuye sur des différents outils de manipulation, surtout à l'école primaire ; « la pédagogie active » est mise en avant aussi (d'Enfert & Kahn, 2010). C'est aspect des réformes, concernant les pratiques, est plus difficile à étudier, car on n'a pas d'accès direct aux pratiques de l'époque et par ailleurs, les pratiques réelles des enseignants n'ont pas forcément correspondues aux pratiques envisagées par les concepteurs et réalisées aux cours des expérimentations (ce problème est souvent souligné dans les témoignages des acteurs). Même si des formations étaient mise en place, elles n'ont pas pu toucher l'ensemble des enseignants : la diffusion s'est passée donc essentiellement par des différentes ressources. Au delà des instructions des programmes, ce sont principalement des manuels scolaires et des livres du professeur qui devaient informer les enseignants et soutenir l'adaptation de leur travail.

Ces ressources discutent parfois explicitement des pratiques attendues, et en donnent surtout beaucoup d'information explicite. A travers l'analyse des manuels scolaires et des livres du professeur, nous cherchons donc à comprendre :

- Comment ces auteurs conçoivent le travail de l'enseignant ?
- Quelle est la cohérence de ces pratiques envisagées avec les principes générales des réformes de chaque pays ?
- Comment les ressources aident les enseignants à mettre en place ces pratiques ?

II. METHODOLOGIE ET ARRIERE-PLAN THEORIQUE

L'analyse articule l'approche historique et didactique. D'un point de vue historique, les documents écrites peuvent être considérés comme traces des pratiques existants dans le passé qui ne sont plus accessibles directement et dont la reconstitution pose problème[1]. D'un point de vue didactique, les documents comme des manuels scolaires ou livres de professeurs peuvent être considérés comme ressources aidant les enseignants à concevoir leurs pratiques (cf. Gueudet & Trouche, 2010). L'analyse a priori, l'analyse des potentialités des tâches ou situations joue un rôle important dans la tradition didactique française, et plus particulièrement dans la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau, 1998) et applicable sur l'analyse des ressources. Nous avons utilisé particulièrement la notion de *potentialité adidactique* des tâches, développé par Hersant et Perrin-Glorian (2003). En même temps, l'analyse des manuels scolaires et surtout des livres du professeur permettent d'aller au delà de l'analyse des potentialités des situations : les consignes données aux enseignants insistent sur certains aspects de la mise en place envisagée et en outre, les aspects des pratiques explicités ou laissés en silence permettent de tirer des conséquences sur les choix des auteurs et des conceptions sur le travail de l'enseignant guidant ces choix.

[1] L'analyse était particulièrement inspirée par les travaux menés dans le cadre du projet « Séries de problèmes » du Labex HASTEC (Bernard, 2015).

Nous nous sommes également appuyée sur la structuration du travail de l'enseignant défini par (Margolinas, 2002) en termes de niveaux. Notre étude concerne trois de ces niveaux :

0. Niveau de la situation didactique (ou la gestion de la séance)
1. Niveau du projet de leçon
2. Niveau de construction ou de conception d'un thème (ou de la progression annuelle)

Nous avons étudié la structure, le style, le langage et les consignes d'utilisation de chaque ressource, et en outre quelques exemples de tâches ou de situations proposés par ces documents.

III. LES RESSOURCES ETUDIEES

Au niveau de l'école primaire, très peu de manuels scolaires étaient proposés aux enseignants, les ressources typiques étaient des fiches de travail. En même temps, les fiches n'étaient pas censées couvrir toutes les activités des classes : les enseignants étaient demandés de mettre en place de nombreuses autre activités, souvent avec des outils de manipulation. Les livres du maître parfois très détaillés étaient préparés à l'époque pour soutenir ce travail des enseignants. Concernant le niveau de l'école primaire, nous avons donc étudié principalement les livres du maître qui offrent des réflexions souvent très explicites des pratiques attendues.

Au niveau du collège, on trouve des manuels scolaires ; en même temps, les livres du professeur sont beaucoup plus courts et moins explicites concernant les pratiques. L'analyse des manuels scolaires a pourtant permis de dégager des informations implicites concernant les pratiques favorisées par ces ressources.

Une différence importante doit être soulignée entre les ressources des deux pays : en Hongrie, à l'époque, une seule collection de manuels scolaires (C. Neményi, Varga, Göndöcs, Merő, & Merő, 1978; Kovács, Sz. Földvári, & Szeredi, 1980) était autorisée et cette collection était écrite par le même équipe qui a conçu la réforme. On peut donc supposer que ces documents représentent la conception des réformateurs. En France par contre, le marché des manuels scolaires était libre, de nombreuses séries étaient disponibles et ainsi le lien entre la conception de la réforme et de ces ressources est beaucoup moins claire. Quand c'était possible, nous avons cherché à étudier des exemples des auteurs qui ont participé à la conception du programme ou ceux qui expriment très explicitement leur lien à la réforme. En même temps, concernant les livres du maître, un autre critère était important, notamment la richesse de l'information fourni concernant les pratiques envisagées.

Pour l'école primaire (à part d'autres exemples, comme la collection de Picard, que nous ne traitons pas ici) nous avons particulièrement beaucoup étudié la collection « Math et calcul » d'Eiller (1972). Pour avoir une idée également des projets expérimentaux des années 1970, de l'époque après la réforme, nous avons étudié les documents du projet ERMEL (1978) (à part d'autres documents, par exemple de Brousseau qui font pas objet du présent article). Pour le collège, nous avons étudié des collections de Queysanne-Revuz, de Monge, de Maugin et de Polle-Clopeau.

IV. LES LIVRES DU MAITRE DE L'ECOLE PRIMAIRE.

Le livre du maître d'Eiller suit une structure très transparente. Après la présentation détaillée des principes de la réforme, il fourni une progression annuelle, et ensuite des descriptions détaillées du contenu mathématique et des « leçons », associées chaque fois à une rubrique de la progression annuelle. Avec un tableau synoptique permettant aux enseignants

de se repérer facilement et avec une description très structurée des leçons, contenant les détails du déroulement, Eiller économise une grande partie du travail de l'enseignant. Les situations courtes d'Eiller, bouclées chaque fois par un moment d'institutionnalisation laissent peu de responsabilité et autonomie aux élèves dans le développement de leurs connaissances mathématiques (peu de potentialité adidactique), présentent en même temps moins d'imprévu pour l'enseignant, qui peut ainsi suivre assez précisément les descriptions détaillées.

Les auteurs du recueil ERMEL soulignent en revanche, dans la préface, l'importance de laisser une certaine responsabilité à l'enseignant, pour un enseignement de meilleure qualité, surtout concernant la préparation des leçons. Le livre décrit ainsi des activités à mettre en place, mais sans découper la progression en leçons. La description des situations est bien structurée ici aussi, contient des buts, du matériel nécessaire, la description de l'activité, même si elle est moins figée que dans le cas d'Eiller. Les situations décrites sont des « situations adidactiques » classiques dans le sens de Brousseau, permettant aux élèves de développer leurs connaissances mathématiques en interaction avec le milieu construit. La particularité du livre est sa structuration en trois grandes parties : la description théorique du contenu du programme, la description des activités dans l'ordre de la progression annuelle, et les transcriptions de quelques séances réalisées. Cette structuration permet d'une part, selon la préface, plusieurs lectures du livre : à la fois comme compte rendu des expérimentations et comme ressource pour les enseignants (dans ce deuxième cas, commençant la lecture par la deuxième partie). D'autre part, l'insertion des transcriptions montre une réflexion sur les problèmes de la gestion de séances, même si la préface souligne qu'il ne s'agit pas de modèles, seulement des exemples de réactions spontanées des maîtres. En effet, en laissant plus d'autonomie aux élèves dans le processus d'apprentissage, l'enseignant se trouve face à plusieurs imprévus pendant la séance, ce qui peut expliquer l'apparition de ces exemples dans le recueil.

Le livre du maître de la réforme hongroise suit une structure beaucoup moins transparente : les présentations du contenu mathématique et de la mise en place pédagogique sont mixées dans un texte quasi-continu, contenant de nombreuses propositions de tâches mais souvent avec une description seulement partielle des situations. Le livre encourage les enseignants à faire une sélection, transformer, adapter les tâches ; les descriptions parfois floues et partielles contiennent plutôt des consignes d'adaptation, des remarques concernant les difficultés que le maître peut rencontrer pendant la mise en place, et quelques idées de solutions possibles à ces difficultés. Les activités proposées visent très clairement à donner une responsabilité importante aux élèves, mais moins dans le cadre des « situations adidactiques » au sens de Brousseau, plutôt en forme de dialogue collective guidé par l'enseignant : les consignes des livres du maître concernent souvent des interventions possibles aux différentes réactions potentiels des élèves, pour faire avancer le processus de recherche collective mais sans éliminer la responsabilité des élèves dans ce processus.

En ce qui concerne la progression annuelle, même si un « exemple de progression » est proposé à la fin du livre, les auteurs insistent qu'il n'est qu'un exemple et encouragent les enseignants à élaborer leur propre progression. Le programme, ainsi que le livre du maître envisage le traitement parallèle des cinq grands domaines mathématiques, avec de nombreux intersections entre eux. Même si c'est possible à faire à partir de la progression présentée dans le livre, elle n'est pas facile à suivre et nécessite la bonne connaissance du livre entier, comme des domaines traités dans différents chapitres du livre doivent souvent être discutés au cours de la même séance. En même temps, beaucoup de petites suggestions sont présentées dans les chapitres thématiques pour que l'enseignant puisse concevoir sa propre progression en fonction des besoins et des particularités des classes.

En résumé, il nous semble que la forme du livre hongrois témoigne à la fois de l'intention de laisser une grande autonomie aux enseignants à tous les niveaux de leur travail, et des efforts de leur fournir de nombreux conseils et idées pour ce travail. L'autonomie des maîtres est jugée nécessaire pour la bonne qualité de l'enseignement, et notamment pour l'adaptation aux conditions particulières de chaque classe – en même temps, ce travail autonome doit suivre certains principes précis, correspondant à l'approche « découverte guidée ». Résultat de ses ambitions complexes, le livre du maître est une ressource riche mais très difficile à utiliser : non seulement parce qu'il laisse une grande responsabilité à la charge des enseignants, mais aussi parce que l'enseignant doit maîtriser l'ensemble du programme afin de pouvoir s'en servir pour son travail quotidien.

V. LES MANUELS SCOLAIRES DU COLLEGE

En ce qui concerne les manuels scolaires du niveau collège, la différence entre les ressources françaises et hongroises des réformes des mathématiques modernes est très apparente. Les manuels scolaires français présentent le contenu du programme dans une forme déclarative, et à partir de la classe de Quatrième, principalement axiomatique-déductive. Ils mettent un grand accent sur l'utilisation du langage formel des mathématiques, considéré comme « simple et précis ». La typographie des livres contribue à la structuration forte, transparente du texte. Selon les consignes d'utilisation, le texte des manuels scolaires sert avant tout à décrire des « leçons », pour permettre aux élèves de comprendre et d'apprendre le cours ; ces leçons sont suivies d'exercices d'application et de contrôle[2]. Même si les préfaces de ces manuels insistent souvent à mettre en place des « méthodes actives », y donnent très peu d'aide, plutôt au contraire. Par ces traités linéaires, les manuels scolaires de l'école moyenne soutiennent la mise en place d'un enseignement du type magistral : la transmission directe du savoir mathématique institutionnel[3].

Les manuels scolaires hongrois présentent par contre des dialogues fictifs des élèves pour introduire des nouveaux éléments du savoir mathématique. Selon le livre du professeur, les dialogues peuvent servir de lecture aux élèves, mais fournissent avant tout des modèles d'enseignement : les enseignants sont invités à reproduire des dialogues similaires dans leur classe. La typographie des manuels est plus ludique et structure beaucoup moins le texte que celle des manuels scolaires français. Le langage utilisé dans les manuels hongrois articule langage mathématique et langage naturel, en utilisant relativement peu de langage formel. Contrairement au style « simple et précis » suivi par les manuels français, les manuels hongrois semblent avoir une autre conception sur la simplicité et la clarté du style : leurs textes cherchent à imiter le discours des enfants, ils ne sont pas exempts d'ambiguïtés, qu'ils élucident progressivement grâce à des formulations mathématiques plus précises. Cette forme de présentation suggère le type d'enseignement que nous nommons « découverte guidée ».[4]

[2] Une exception est la collection Queyzanne-Revuz, qui intègre des activités introductives à mettre en place en classe, les distinguant du texte du cours à l'aide de codes-couleurs. En même temps, il s'agit principalement d'exemples illustratifs introduisant des nouvelles notions, sans laisser une réelle autonomie aux élèves dans le processus d'apprentissage.

[3] Même si certaines nouvelles collections cherchent à changer ça dans les années 1970 (par ex. celle de Deledicq), globalement peu de changement peut être observé sur ce sujet.

[4] Dans les versions de cette collection adaptées à des réformes successives des décennies 1980 et '90, ces dialogues fictives, jugées mal utilisables, ont disparus des manuels scolaires hongrois : nous faisons l'hypothèse que la raison est qu'ils ont, dès le départ, correspondu plutôt à la fonction d'un livre du professeur qu'à un manuel scolaire.

VI. LES RESSOURCES ET LE TRAVAIL DE L'ENSEIGNANT

En résumé, nous pouvons constater que la structure, le style et le contenu des ressources sont très variés en fonction des conceptions sur la nature des mathématiques à enseigner, sur le travail de l'élève et de l'enseignant. La construction des livres du maître dépend du type et du degré d'autonomie que l'auteur vise à laisser aux enseignants, et des caractéristiques des situations didactiques envisagées. Les manuels scolaires du collège utilisent un style que les auteurs considèrent propre à l'activité mathématique : formel et axiomatique-déductif, langage par essence écrit pour le cas de la réforme française, peu formel, dialogique, imitant l'oralité et centré sur les problèmes pour le cas hongrois. Chacun de ces manuels peut également servir comme modèle d'enseignement ; leur structure et leur style suggèrent chaque fois un certain type de contrat aux enseignants, magistral dans le cas français (malgré les intentions de favoriser de la pédagogie active), « découverte guidée » dans le cas hongrois.

Les différentes conceptions sur les pratiques pédagogiques, résumées ci-dessus, demandent un travail de différente nature des enseignants et chargent ceux-ci de différentes responsabilités, que nous avons essayé de caractériser à l'aide des niveaux définis par Margolinas. Nous nous sommes particulièrement intéressés à trois de ces niveaux : le niveau +2, la conception des processus plus longs, le niveau +1, le projet de leçon et le niveau 0, la gestion de la situation didactique.

Pour les pratiques envisagées en France, le niveau le plus important semble être le +1. Chacune de nos sources a fourni une progression annuelle définie : même si elles soulignent chaque fois que l'enseignant est libre de suivre d'autres progressions, elles visent à leur économiser ce travail. La construction des livres du maître (particulièrement pour le niveau élémentaire) aide les enseignants à se repérer facilement dans la progression, et retrouver chaque fois la description de l'étape suivante qu'ils doivent enseigner. L'élément le plus important du travail de l'enseignant est la préparation de la leçon, ou plutôt la préparation des situations qui correspondent à une leçon ou une suite relativement courte de leçons. Le livre d'Eiller économise par ailleurs l'essentiel de ce travail aussi aux enseignants, fournissant une description très détaillée des situations à enseigner ; l'ERMEL au contraire, insiste sur l'importance de l'autonomie de l'enseignant à ce niveau.

Enfin, pour ce qui concerne le niveau 0, le travail de l'enseignant consiste en des phases didactiques relativement bien concevables à l'avance, comme la dévolution ou l'institutionnalisation, alternées éventuellement avec des phases adidactiques (courtes et pauvres chez Eiller, très importantes cependant dans ERMEL) où l'enseignant n'a que la tâche de la régulation pédagogique, sans action directe sur les connaissances mathématiques. Ainsi, avec une bonne préparation préalable (niveau +1), les actions didactiques de l'enseignant au cours de la gestion de la séance (niveau 0) sont assez bien prévisibles et nécessitent peu d'adaptation.

La conception de la réforme hongroise demande par contre un travail important à tous les trois niveaux, et particulièrement aux niveaux +2 et 0. En effet, le livre du maître insiste sur l'importance de se préparer « thématiquement » pour des périodes plus longues et non « leçon par leçon ». À titre d'exemple, pour des enseignants moins courageux, le livre fournit une progression, mais encourage plutôt l'élaboration autonome de la progression. La construction du livre permet, mais ne facilite pas une préparation des leçons à partir de la progression annuelle proposée : il faut en fait lire des chapitres thématiques plus longs pour comprendre le sens des tâches décrites, de plus, il faut prendre en considération plusieurs chapitres en même temps pour pouvoir mettre en place l'articulation demandée des domaines. Pour le collège, la question de la progression est beaucoup moins développée, mais le livre du professeur

mentionne également qu'il faut chercher l'articulation des domaines au lieu de suivre l'ordre thématique du manuel scolaire.

Quant au niveau 0, la pratique dialogique amène de nombreux éléments peu prévisibles à la gestion de la séance, et ces imprévus nécessitent une adaptation permanente de l'enseignant. Il ne s'agit pas seulement des régulations pédagogiques, mais de la transformation fréquente du milieu en fonction des réactions d'élèves, pour maintenir et pousser plus loin leur travail sans les décharger de la responsabilité de l'apprentissage. L'enseignant doit garder en tête des connaissances préalables des élèves qui n'étaient pas toujours institutionnalisées et dont la mobilisation peut demander un rappel du contexte de leur apparition. Il peut être nécessaire en outre de repenser, dans l'immédiat, les projets de long terme, laisser place au traitement d'un problème qui était prévu pour plus tard, si les questions ou débats des élèves y donnent lieu, et en tout cas, tenant compte de la nature ouverte des processus de construction de connaissance, penser à préparer des notions qui ne seraient introduites que plus tard, parfois dans une année ultérieure. Alors que les auterus de l'ERMEL soulignent que les transcriptions publiées de leçons sevent à titre exemple et ne présentent que les réactions spontanées des enseignants, les livres hongrois discutent systématiquement ces questions de gestion des séances.

En somme, on peut dire que le travail demandé aux enseignants dans la conception de Varga est très complexe, concerne plusieurs niveaux à la fois, nécessite des connaissances mathématiques et didactiques riches et stables, une grande autonomie et créativité. C'est sans doute une des limites d'applicabilité de cette conception et probablement un des obstacles auxquels sa diffusion s'est heurtée au moment de la réforme – d'autant plus qu'elle est arrivée dans le milieu d'un système scolaire très autoritaire et strictement régularisé.

VII. DISCUSSION ET PERSPECTIVES

Dans cette article, nous avons tenté de montrer comment nous nous servons des manuels scolaires et des livres du maître pour reconstituer la conception des auteurs – et des concepteurs des réformes de l'époque en question – sur le travail de l'enseignant de mathématiques. Bien sur, l'approche présente plusieurs limites. Il faut insister avant tout sur le fait qu'il ne s'agit pas ici de reconstituer des pratiques réellement mises en place (à part des références qui sont fait aux expérimentations dans ces ressources). En outre, si dans le cas hongrois les concepteurs de la réforme, les expérimentateurs et les auteurs de manuels constituent un équipe cohérent et on peut ainsi supposer une cohérence des conceptions derrière la production des ressources, le champ est beaucoup plus complexe dans le cas français. La question de la cohérence se pose tout particulièrement dans le cas de l'école primaire française ou les auteurs de manuels qui sont à la fois acteurs centraux de la réforme (comme Picard) publient des livres de maîtres peu informatives, et la cohérence avec la série d'Eiller, l'auteur de la collection la plus richement documentée et une des plus utilisées de l'époque, est plus difficile a justifier, même s'il inscrit ses travaux très explicitement dans le contexte des « mathématiques modernes ». D'un point de vue de l'histoire de l'éducation, et si on veut avoir un regard plus stable sur les pratiques diffusées et mises en place à l'époque, l'analyse des ressources traitées ici peut et doit être complétée par d'autres analyses (de documents de formation, de films éducatifs, d'entretiens avec des acteurs...).

En même temps, il nous semble que l'approche issue d'un croisement d'approches historiques et didactiques est puissante pour la reconstitution des conceptions d'auteurs : le fait qu'on n'y ai pas accès à des pratiques dans leur intégralité, seulement à des aspects que les auteurs explicitent, permet de comprendre ce qu'il considèrent important dans le travail

des enseignants, ce qu'il juge nécessaire à fournir aux enseignants et à quels niveaux ils attendent un travail autonome d'eux. Ces analyses ont fournis notamment des informations essentielles pour la reconstitution de la conception de Varga sur l'enseignement par « découverte guidée ».

D'autre part, ces analyses ont permis de mieux comprendre comment les enseignants peuvent se ressourcer de ces textes et quelles sont les difficultés potentiels de leur utilisation. Nous espérons ainsi de contribuer non seulement à une meilleure compréhension des difficultés de mise en place des réformes de l'époque des « mathématiques modernes » mais aussi aux réflexions didactiques actuelles sur les ressources d'enseignement.

Dans le contexte hongrois, un projet de recherche mené actuellement au sein du projet MTA-ELTE *Complex Mathematics Education* donne suite à ce travail, et cherche entre autres à reconcevoir des ressources pour la diffusion de l'approche « découverte guidée ».[5]

REFERENCES

Bernard, A. (Éd.). (2015) *Les séries de problèmes, un genre au carrefour des cultures*. EDP Sciences. Consulté à l'adresse https://www.shs-conferences.org/articles/shsconf/abs/2015/09/contents/contents.html

Brousseau, G. (1998) *La théorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

C. Neményi, E., Varga, T., Göndöcs, L., Merő, L., & Merő, L. (1978) *Kézikönyv a matematika 1. osztályos anyagának tanításához*. Budapest: Tankönyvkiadó.

d'Enfert, R., & Kahn, P. (Éd.). (2010) *En attendant la réforme. Disciplines scolaires et politiques éducatives sous la Quatrième République*. Grenoble: Presses Universitaires de Grenoble.

Eiller, R., Mertz, J., & Guyonnaud, M. T. (1972) *Math et calcul cours préparatoire. Document de travail pour le maître.* Paris: Hachette.

ERMEL (1978) *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire. Cycle préparatoire.* Paris: SERMAP OCDL.

Gosztonyi, K. (2015) *Traditions et réformes de l'enseignement des mathématiques à l'époque des « mathématiques modernes » : le cas de la Hongrie et de la France.* (PhD). University of Szeged; Université Paris-Diderot-Paris 7, Szeged; Paris.

Gueudet, G., & Trouche, L. (Éd.). (2010) *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques*. Rennes, France: Presses Universitaires de Rennes. Consulté à l'adresse http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/ressources/lecture/note-lecture/ressources-vives

Hersant, M., & Perrin-Glorian, M.-J. (2003) Milieu et contrat didactique, outils pour l'analyse de séquences ordinaires. *Recherches en Didactiques des Mathématiques, 23*(2), 217-276.

Kovács, Cs., Sz. Földvári, V., & Szeredi, É. (1980) *Matematika 7.* Budapest: Tankönyvkiadó.

Margolinas, C. (2002) Situations, milieux, connaissances – Analyse de l'activité du professeur. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, & R. Floris (Éds.), *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

[5] Ce travail est soutenu par le projet « MTA-ELTE *Komplex Mathematics Education in the 21th Century* » (ID number 471028). https://sites.google.com/view/mtakomplexmat

LA DETRANSPOSITION DES SAVOIRS D'ANALYSE MATHEMATIQUE AU SECONDAIRE

HATEGEKIMANA LUANDA* Emmanuel

Résumé – La présente étude se penche sur la didactique de l'analyse en partant de son histoire et de celle de ses concepts notamment celui de limite, un élément essentiel dans les études didactiques. L'analyse de l'évolution des notions mathématiques montre qu'à l'instar de la didactique de la géométrie, la pratique de l'enseignement de l'analyse devrait s'échelonner dans l'enseignement, du secondaire à l'université, en suivant quatre niveaux d'enseignement classés suivant quatre étapes de l'évolution des notions de l'analyse pour une bonne transformation des savoirs en connaissances durant l'apprentissage.

Mots clés : didactique de l'analyse, calcul infinitésimal, analyse, limites, détransposition.

Abstract: This study focuses on didactical analysis starting from his history and the history of limit concept, an essential element in didactic studies. The analysis of the evolution of mathematical concepts shows that, like the didactics of geometry, the practice of the analysis teaching should spread out to both secondary and university levels by following the four teaching levels ranged pursuant to the four stages of the evolution of the analysis notions for transformation of knowledge in the acquisition.

Key words: didactical analysis, infinitesimal calculi, analysis, boundary, detransposition

I. INTRODUCTION

En République Démocratique du Congo, et dans d'autres pays, l'analyse mathématique s'enseigne vers la fin du cycle secondaire en scientifique. Les contenus d'enseignement ne sont pas échelonnés sur plusieurs années mais s'enseignent en une année d'étude et pourtant l'analyse s'est formée durant une longue période. Le bas niveau de maitrise des notions d'analyse constaté au début de l'enseignement universitaire témoigne de difficultés de son apprentissage, un constat confirmé par le témoignage des professeurs du secondaire, les observations de leçons, les critiques des manuels (Hategekimana et Mbabare 2017) et les résultats d'autres recherches (Artigue 2001).

Il sied donc de penser une réorganisation et une progression des contenus pouvant permettre la construction progressive d'acquisitions des élèves. Ce serait une détransposition, c'est-à-dire un fonctionnement de la décontextualisation des savoirs enseignables pour déculturaliser et universaliser, en faisant évoluer les contenus scolaires par un enseignement hiérarchisé suivant les niveaux d'abstractions à travers la formation en spirale (Hategekimana 2016). En fait, cela se justifie puisque les mathématiques, caractérisées historiquement par une lente évolution, se sont construites à partir des problèmes de la vie pour se généraliser en des savoirs constituant l'objet d'enseignement actuel. A l'instar de l'enseignement de la géométrie (Houdement et Kouzniak 1998-1999) (Parzysz 2006), et selon la décontextualisation des savoirs mathématiques (Hategekimana 2015), de l'historique de l'analyse, des considérations d'Artigue (2011) et de Schneider (2011) notre objectif est de montrer que les contenus d'enseignement d'analyse peuvent être réorganisés dans une décontextualisation progressive dans les praxéologies de l'enseignement et de l'apprentissage scolaires.

Hypothétiquement, les contenus d'enseignement d'analyse mathématique peuvent être échelonnés sur plusieurs années dans le cursus de formation pour faciliter l'apprentissage par une décontextualisation des contenus d'enseignement en spirale. Ce qui permettrait

* Université de Goma – République Démocratique du Congo – hategekimana_emmanuel@yahoo.com

l'acquisition du sens des notions conceptuelles de manière progressive. Car selon Artigue (2011,5) :

> L'enseignement de l'analyse est resté simple « calculus », pour reprendre l'expression anglo-saxonne ou qu'il se soit donné des ambitions plus théoriques, force est de constater que, dans la plupart des pays, ce qui est réellement appris et ce qui est évalué, pour des raisons diverses, ne va guère au-delà d'une analyse algébrisée, enfermée dans un nombre limité de routines.

En outre, pour Schneider (2011, 96), il existe une bicéphalie d'un cours constitué de deux pôles correspondant à l'histoire de l'analyse à savoir le calcul infinitésimal dont les praxéologies sont du type ''modélisation'' et l'analyse formalisée dont les praxéologies sont du type ''déduction''. Ce bicéphalisme complique et rend difficile l'enseignement des limites en privilégiant l'aspect algorithmique au détriment de la construction du sens du concept ''limite'' et de la signification des propriétés. L'analyse des propos de Schneider et l'histoire de l'analyse nous conduisent à penser à hiérarchiser ces praxéologies à partir des situations didactiques pour faciliter et hiérarchiser l'apprentissage dans un contexte d'enseignement à spiral.

II. ÉVOLUTION HISTORIQUE DE L'ANALYSE

Entre 1590 et 1630, plusieurs mathématiciens comprirent que la démarche algébrique pour manipuler une donnée inconnue, afin d'obtenir une équation à résoudre, convenait à la résolution des problèmes arithmétiques et à l'étude des questions géométriques. Le fruit de leur réflexion en algèbre consista à accepter que lors de la mise en équation, toutes les grandeurs données, connues ou inconnues, qui interviennent dans le problème, soient représentées symboliquement. En géométrie, la méthode d'analyse algébrique concurrença l'utilisation de théorèmes démontrés par voie de synthèse. Alors, l'algèbre cessa d'être l'étude d'équations purement numériques pour devenir la manipulation de formules faisant intervenir plusieurs grandeurs indéterminées. Ce courant de recherche va atteindre la maturité en 1637 avec l'apparition de deux ouvrages marquant la naissance de la géométrie analytique de René Descartes et la circulation à Paris d'un manuscrit dénommé ''Introduction aux lieux plans et solides'' de Pierre de Fermat.

Au début du XVIIe siècle, l'attention des mathématiciens de l'Europe se pencha sur des problèmes non encore étudiés par les géomètres grecs de l'Antiquité notamment la détermination des tangentes à une courbe, les problèmes de rectification, de quadrature, de cubature et la recherche des centres de gravité des lignes, des surfaces et des solides ainsi que l'étude des questions de cinématique. Les Grecs de l'Antiquité s'étant déjà intéressés à ces questions, Archimède avait effectué la quadrature de plusieurs surfaces et la cubature de quelques volumes et avait déterminé les centres de gravité de ces figures et les tangentes à une figure plane dite « spirale d'Archimède » et Apollonius avait fait l'étude complète des tangentes aux coniques (Deug Mias 2004-2005, 109). En même temps ces mathématiciens examinèrent d'autres nouvelles figures géométriques, obtenues par des constructions variées. La géométrie analytique de Descartes et Fermat permit de définir de nombreuses nouvelles courbes sur lesquelles les méthodes des anciens Grecs montrèrent leurs limites. Par les ressources du calcul algébrique, ils résolurent les problèmes que ces nouvelles figures suggéraient.

Les premiers résultats furent obtenus par des raisonnements spécifiques aux problèmes étudiés et, de plus en plus, des méthodes générales furent mises au point. Intéressés par les problèmes de quadrature, ils ressentirent l'obligation de calquer leur manière de rédiger sur le modèle des anciens Grecs mais ils eurent l'idée d'utiliser librement des quantités infiniment petites. Les astronomes Kepler et Galilée furent parmi les premiers promoteurs de cette idée.

Dans son Dialogue concernant les deux grands systèmes du monde de 1632, Galilée proclama par exemple qu'il est vrai et nécessaire qu'une ligne soit constituée de points, et que le continuum soit constitué d'indivisibles. Faisant cela, il s'éloigna du point de vue des philosophes grecs stipulant que des points sans grandeur mis bout à bout ne pouvaient pas former une ligne. Cavalieri, élève de Galilée, transformera cette idée en une théorie plus systématique. Ses deux livres de Géométrie promues d'une nouvelle manière par les indivisibles du continuum (1635) et les Six exercices géométriques (1647), reçurent une large publicité et une forte influence au XVIIe siècle en devenant vite la source la plus citée sur les quadratures, sauf les traités d'Archimède.

Bien que le concept d'indivisible soit relativement naïf, Cavalieri développa des techniques puissantes pour séduire un grand nombre de mathématiciens. L'indivisible est historiquement très important et se place à un niveau supérieur de difficulté et d'abstraction mais continue de susciter l'inspiration des mathématiciens (Lehning 2017, 147-153) (Launay 2016, 95-96). Archimède (-287 à -212), le grand ancêtre des analystes allia la prudence d'Aristote à la témérité de Démocrite dans le calcul de la quadrature de la parabole ou de la détermination de l'aire délimitée par la parabole et un segment joignant deux de ses points (Deug Mias 2004-2005, 111), (Boudenot et Samueli 2014, 74-77). Les problèmes de la détermination des aires limités par des courbes conduiront à l'usage des notions de limites.

Vers 1660, les mathématiciens clarifièrent les liens entre les différents problèmes et s'aperçurent qu'on peut transformer un problème de rectification en un problème de quadrature et obtenir la relation de réciprocité entre les questions de tangentes et les problèmes de quadrature car la quadrature et la rectification sont des cas particuliers des problèmes inverses des tangentes. Apparurent alors le besoin d'inventer des méthodes plus générales d'abord pour contourner les obstacles dans plusieurs problèmes, causés par exemple par la présence de racines carrées dans les équations. Ensuite pour comprendre le fonctionnement des règles donnant les tangentes à une courbe et chercher une stratégie générale pour systématiser des liens entre les différents problèmes inverses des tangentes, de les classifier et les résoudre. La découverte de réponses à ces questions attribuées indépendamment à Newton et à Leibniz, entre 1665 et 1685, permettra d'organiser en une théorie unifiée, les méthodes inventées par leurs prédécesseurs pour l'étude des lignes courbes et à transcrire les arguments géométriques utilisés en des règles de calcul. Ils ont développé des concepts (fluentes et fluxions pour Newton, différentielles et intégrales pour Leibniz) pour manipuler les variations infinitésimales des grandeurs liées aux courbes puis des notations et des règles de calcul pour manier ces concepts. Ensuite, ils ont utilisé ces concepts pour traiter les questions de détermination de tangentes, d'effectuer des rectifications et des quadratures, et d'obtenir d'autres résultats inédits.

Newton rejetant les indivisibles, introduisit la notion de quantités évanouissantes, suites décroissantes convergeant vers zéro. Utilisant le système de notation de Leibniz, ses successeurs, les frères Jacob et Johann Bernoulli, donnèrent à la théorie ses premiers grands succès, en montrant que le calcul de Leibniz permet de résoudre et de relier entre eux, un grand nombre de problèmes inverses des tangentes. Les principaux progrès des mathématiques au XVIIIe siècle proviendront de l'exploration des possibilités de ce nouvel outil, le calcul infinitésimal de Newton et Leibniz. Deux phénomènes verront le jour à savoir la manipulation algébrique des formules qui remplaça progressivement l'étude des problèmes géométriques et la ramification du calcul infinitésimal en de nombreuses sous-disciplines.

Comme le calcul infinitésimal de 1700 porte sur des « variables », objets intuitifs sans définition précise représentant des grandeurs géométriques (coordonnées d'un point sur une courbe, longueur d'arc, aire sous une courbe, etc.), on a étendu ces variables aux variables

d'une fonction à une ou plusieurs variables réelles, objets qui n'ont pas de rapport direct avec la géométrie et qui constituent l'analyse moderne. La différentielle d'une variable ordinaire fut étendue à une variable infiniment petite et la fluxion d'une grandeur, vitesse d'accroissement, à la dérivée d'une fonction qui est le pendant moderne de la fluxion d'une grandeur ou de la différentielle d'une variable. Ce changement de cadre s'accompagna d'une simplification car la dérivée d'une fonction est une fonction et la différentielle d'une variable est un nombre. Enfin, le calcul de Newton reposant sur l'idée intuitive de « vitesse d'accroissement » et celui de Leibniz utilisant explicitement le concept non défini de « variable infiniment petite », devinrent l'analyse moderne qui propose une définition précise de la dérivée d'une fonction à partir de la notion de limite et permis d'atteindre la même précision dans les raisonnements que celle offerte par la géométrie d'Euclide. Bref, la transformation du calcul infinitésimal en analyse englobe l'adoption de la notion de fonction, de fonction dérivée au XVIIIe siècle et l'introduction de définitions précises basées sur la notion de limite au XIXe siècle.

Tout le XVIIIème siècle s'acharna à clarifier la pensée de Leibniz en faisant disparaître les quantités évanouissantes et surtout avec Cauchy jusqu'à Weierstrass, la notion de limite sera le fondement de tout l'édifice de l'analyse (Dhombres 1978, 173). Bref, le calcul infinitésimal est devenu, à la fin du XVIIIème siècle, une branche autonome des mathématiques appelée ''analyse'' (Deug Mias 2004-2005,154), et s'est fondée sur des notions algébriques des structures d'ensembles numériques et de géométrie et étudie les fonctions, les limites, les dérivées et les primitives. Ainsi, l'analyse mathématique se définit comme le prolongement moderne du calcul infinitésimal et est l'étude des fonctions, d'ensembles muni des structures topologiques et de leurs liens. Ses concepts de base sont les limites et fonctions continues. (Bouvier et al. 2009, 36).

Le terme fonction a été pour la première fois employé dans un sens mathématique par Leibniz à la fin du XVIIème siècle non dans un sens qu'on lui reconnait aujourd'hui, mais dans un contexte géométrique où il considérait divers segments liés à une courbe plane par exemple le segment horizontal la reliant à l'axe vertical ou la sous-tangente en un point courant et il écrivait métaphoriquement que ces segments répondaient à une certaine fonction pour la courbe. Pour lui l'important n'était pas les segments mais les relations entre eux. Le mot fonction eut alors un sens nouveau à savoir la dépendance d'une grandeur par rapport à une autre et Bernoulli utilisa alors la notation Φx pour dire que Φ est fonction de x et on postula qu'une fonction d'une variable est une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette variable et de constantes (Busser 2015, 8-9). Cette notion fut reprise par Dirichlet pour avoir le sens et la définition actuelle d'une fonction.

III. LA DIDACTIQUE DE L'ANALYSE

Au regard de cette évolution de l'analyse, on déduit quatre périodes de son développement :

- La période des résolutions géométriques des problèmes de quadrature et de cubature ainsi que ceux liés aux nouvelles figures non encore examinées, et qui sont notamment des grandeurs incommensurables, problèmes qui exigeait une autre façon de résolution.
- La période du calcul infinitésimal avec approche algébrique des grandeurs incommensurables par des indivisibles ou les suites évanouissantes et des infiniment petits, les variables étant ces grandeurs (le calcul de longueur d'une courbe, la détermination de cubature, de quadrature, problème de cinématique).

- La période de la mise sur point de l'analyse par le passage des variables des grandeurs aux variables de fonctions avec la notion de dépendance et la formalisation de la notion de limites permettant de passer de la différentielle d'une variable aux fonctions dérivées et aux intégrales et primitives des fonctions.
- La période du développement abstrait et de l'essor de l'analyse mathématiques entre les milieux du XIX^{ème} siècle et du XX^{ème} siècle par Cauchy et Weierstrass jusqu'à Lebesgue, Fréchet et Schwartz et qui se développe actuellement dans plusieurs directions notamment l'analyse complexe et fonctionnelle, le calcul différentiel, intégral, la théorie de la mesure.

L'analyse mathématique présente deux facettes dans le développement de toutes les mathématiques car étant le fruit de modélisation algébrique de situations issues du monde réel, ses savoirs sont issus des réalités du monde physique. Son enseignement doit partir donc des faits de la réalité du monde physique traduits en des situations didactiques à partir desquelles les élèves vont construire leurs connaissances. Aussi, puisqu'elle s'appuie sur des objets de nature géométrique (les courbes ou les aires) ou algébrique (écriture en équation, les nombres), son enseignement devrait articuler ses connaissances et celles de la géométrie et de l'algèbre en tenant compte de son orientation dans des situations didactiques.

Nous considérons les étapes de la détransposition des savoirs mathématiques enseignables (Hategekimana 2015), l'évolution historique et la diversité des reconstructions des concepts marquant l'entrée dans le champ de l'analyse, nouveau monde mathématique avec de nouveaux problèmes, objets, techniques et modes de pensée (Artigue 2001). Alors, entrer en analyse est au sens de la connaissance, la construire à partir des objets connus de géométrie et des considérations algébriques pouvant y prendre un sens différent. En effet, la connaissance, rapport de l'individu à l'objet de connaissance, peut changer selon les individus et les lunettes disciplinaires par lesquelles elle est considérée. Les faits engendrant les concepts de l'analyse constituent l'analyse AN0 où les praxéologies sont celles des grandeurs non définies constituant une sorte de reconstruit (Schneider 2011, 78). AN0 n'est pas de l'analyse proprement dite et correspond à la période de résolution des problèmes liés aux nouvelles figures non encore examinées, avec le problème de cubature et de quadrature, première phase dans l'évolution des savoirs de l'analyse. Elle permet de faire des interprétations issues de la géométrie, du calcul arithmétique et du monde réel, avec quelques implicites. C'est l'analyse arithmético-géométrique (AG) à partir de laquelle se fera la reconstruction intuitive de savoirs scolaires assurant l'entrée en analyse par la modélisation de l'arithmétique et la géométrie qui constituent la phase AN0.

L'introduction de la méthode algébrique conduit à l'analyse AN1 qui correspond, avec l'évolution des concepts à la phase historique du calcul infinitésimal à partir de laquelle les premiers concepts doivent être construits par des situations de AN0 donnant du sens analytique aux concepts. Ce sont des notions préliminaires de l'analyse standard (AS) dans laquelle s'inscrit l'analyse réelle enseignée contenant de définitions précises appuyées sur l'ensemble IR des réels car l'analyse réelle a été incorporée dans les programmes d'enseignement secondaire de la plupart des nations (Kuzniak et al. 2016), (Beke 1914 cité par Artigue 2001). L'analyse AN1 est le calcul infinitésimal fondé sur les problèmes des quadratures et cubatures pour des figures exprimées par des équations algébriques et représentées par des variables. Les situations didactiques doivent servir de cadre pour son enseignement se servant des variables de grandeurs pour asseoir les concepts d'indivisibles, des infiniment petits et en manipulant les grandeurs incommensurables. Les suites des variables et leurs limites, les différentielles des variables, etc. seront enseignés à ce niveau comme prélude aux notions propres dites d'analyse. Cette phase correspond logiquement à l'analyse calculatoire (AC), dans laquelle des propriétés algébriques se dégagent des interprétations géométriques, conduisant aux calculs algébriques de l'analyse comme calcul

généralisé avec des règles définies, plus ou moins explicites et appliquées indépendamment d'une réflexion sur l'existence et la nature des objets introduits. Le passage de la première phase à la deuxième est assuré par des interprétations géométriques induisant les propriétés pour justifier les calculs.

L'analyse AN2 doit correspondre, en comparaison à l'évolution de l'analyse, aux notions élémentaires de l'analyse proprement dite. Elle généralise le calcul infinitésimal, en passant des variables des grandeurs aux variables des fonctions. C'est un changement de cadre de variables d'objets connus aux variables des fonctions sans relation aucune avec la réalité qui renvoie à la praxéologie de la modélisation fonctionnelle (Schneider 2011, 81). Elle correspond au paradigme de l'analyse (AI), fondée sur les propriétés des nombres constituant les ensembles de départ et d'arrivée des fonctions. Cette troisième phase AN2 correspond à l'axiomatique abstraite car le contenu conceptuel du calcul infinitésimal est bien précisé, la praxéologie étant l'analyse formalisée (Schneider 2011, 80). Par exemple, on passerait de l'enseignement des suites d'une variable aux suites des fonctions ou du nombre dérivé à la dérivée d'une fonction ou alors de l'intégrale d'une fonction sur un segment à la primitive d'une fonction. On passe donc de la variation d'une variable et on l'associe à une relation qui la fait varier et donc à une fonction.

L'analyse AN3 est celle où les notions à enseigner sont les savoirs savants s'appuyant sur des ensembles dont les éléments sont quelconques. On passe de l'analyse réelle qu'on généralise à l'analyse de plusieurs variables par l'introduction des notions topologiques puis à l'analyse complexe et l'analyse définie sur n'importe quel ensemble. C'est l'analyse enseignée à l'université pour former les mathématiciens. Cette phase correspond ainsi, dans le processus de l'axiomatisation des savoirs mathématiques, à l'axiomatique formelle pur, toute référence aux situations concrètes étant gommée. Le passage de AN2 à AN3 est la généralisation de l'analyse réelle car toutes les mathématiques avancées se conçoivent comme généralisation des mathématiques élémentaires qui peuvent être qualifiées de réelles, l'ensemble constituant la référence concrète de l'espace qui nous entoure. A ce niveau, un travail spécifique et formel s'appuie sur l'approximation et la localité : bornes, inégalités, voisinages, négligeabilité ... C'est la phase correspondant à l'axiomatique formelle, le contenu étant formalisé de manière logique et leur validation se faisant par des démonstrations logiques et des déductions rigoureuses.

IV. EXEMPLE DE L'ENSEIGNEMENT DES LIMITES

La limite, notion centrale de l'analyse, fut formalisée très tard comme les nombres réels et la continuité. Malgré le beau texte de d'Alembert « Sur les principes métaphysiques du calcul infinitésimal » (l768), rejetant toute considération d'indivisible et exposant avec clarté le concept de limite et la façon dont s'en déduit le nombre dérivé, c'est au XIXème siècle que la limite est mise au premier plan, et les idées infinitésimales sont discréditées. L'analyse a reposé longtemps sur l'intuition et son évolution a été lente de sorte qu'elle ne peut être enseignée en une seule année scolaire sans construction des concepts en situation faisant évoluer l'intuition comme ce fut pour son évolution historique. L'idée de l'infiniment petit, liée au départ aux indivisibles et aux particules évanouissantes, puis à celle de limites permet de contextualiser le sens d'une limite et le faire progresser (Hategekimana, 2014). Analysant les pratiques enseignantes, Bosch et al. (2003) (cité par (Schneider 2011, 96)), soulignent l'existence de deux organisations mathématiques juxtaposées rendant bicéphale l'enseignement de l'analyse : l'une axée sur ''l'algèbre des limites'' dont les tâches sont les calculs des limites d'un point de vue axiomatique des propriétés et l'autre orientée vers la

topologie des limites dont les tâches consistent à prouver les propriétés de cette algèbre ou l'existence des limites.

Pour Hategekimana (2014) et Le Thai Bao (2007), l'enseignement des limites pourrait, par une meilleure détransposition, se faire par des situations basées sur les suites des valeurs approchées par défaut ou par excès, pour introduire le concept d'infiniment petit et jusqu'à la définition, les opérations et les propriétés élémentaires d'une limite. Les professeurs des mathématiques ayant assistés à l'expérimentation d'une situation de l'enseignement des limites en deuxième année secondaire en RDC ont affirmé avec satisfaction que les limites introduites dans la classe de deuxième ont été comprises dans leur sens et leur signification par les élèves (Hategekimana 2014, 146). Les concepts ''limites'' étant compris dans leur signification et leur sens à partir des exemples donnés, notions encore assez intuitives, et les élèves n'ayant pas une base solide pour comprendre la détermination de la convergence des suites, le calcul de la convergence des limites qui est la partie calculatoire doit intervenir après une interprétation géométrique et le dégagement des propriétés.

Le passage de AN0 à AN1 permet donc aux élèves de construire leurs connaissances sur les limites des suites en partant des situations didactiques fondées sur des aspects géométriques et le passage de AN1 à AN2 serait utile pour que les élèves dégagent et s'accoutument aux propriétés et aux calculs sur les limites des suites et enfin le passage de AN2 à AN3 doit aider les élèves à construire les limites des fonctions en généralisant celles des suites qui a été expérimentée après l'enseignement des nombres rationnels avant celui des irrationnels à partir des suites de Cauchy (Hategekimana 2014, 127-129). Sa mise en œuvre s'appuie sur des considérations géométriques et les intervalles puis les limites jouant le rôle de permettre la construction des nombres irrationnels comme limites non rationnelles des suites de Cauchy à termes rationnels devient utile et incontournable à ce niveau de scolarité.

V. CONCLUSION

Dans la logique de la détransposition des savoirs scolaires, l'enseignement de l'analyse, à l'instar de celui de la géométrie, peut s'échelonner suivant les niveaux d'acquisition scolaire, en partant de AN0, analyse arithmético-géométrique pour passer à AN1 analyse calculatoire ou calcul infinitésimal, puis à AN2 analyse réelle avec variables des fonctions où on formalise les notions de l'analyse réelle et enfin à AN3, analyse abstraite où l'analyse réelle est généralisée. Ces étapes s'appliquent au cas des limites comme nous l'avons montré, à l'expérimentation du passage de la première phase à la deuxième ayant déjà eu lieu. Au regard des relations historiques entre les différents concepts du calcul infinitésimal à l'analyse, cette didactique permettra une bonne assimilation progressive des notions des suites, limites, fonctions, séries, dérivées, intégrales et équations différentielles et une facilitation de l'acquisition des nombres réels. On peut donc conjecturer que l'enseignement des limites et autres concepts de l'analyse peut suivre le processus de détransposition et d'évolution des connaissances mathématique afin de permettre leur bonne acquisition en milieu scolaire dans un programme cyclique. Une affirmation à expérimenter et dont la première phase pour les limites a été faite. Cette réflexion sur la décontextualisation peut permettre de bien résoudre le problème de la réorganisation des contenus d'enseignement en assurant une bonne progression curriculaire par année d'études et par cycle de formation afin de faire grandir scientifiquement le long du parcours scolaire une croissance en connaissances pour arriver à une maturité disciplinaire.

REFERENCES

Artigue M. (2001) L'entrée dans le champ conceptuel de l'analyse : réformes curriculaires, recherches didactiques, où en est-on ? In T. Assude et B. Grugeon (Eds.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques, année 2000* (pp. 277-301). irem paris 7.

Artigue M. (2003) Évolutions et perspectives de l'enseignement de l'analyse au lycée. *L'Ouvert* 107, 1-18. http://numerisation.univ-irem.fr/ST/IST03008/IST03008.pdf

Boudenot J.-C., Samueli J.-J. (2014) T*rente livres de mathématiques qui ont changé le monde*. Paris : Ellipses.

Bourbaki N. (1972) É*léments d'histoire des mathématiques*. Paris : Hermann.

Bouvier A. et al. (2009) D*ictionnaire des mathématiques*. Paris : PUF, quadrige.

Busser E. (2015) *Histoire des mathématiques de l'antiquité à l'an mil*. *Tangentes* hors-série 30.

Deug Mias 1ère année (2004-2005) *Histoire des mathématiques*. Université Louis Pasteur.

Dhombres J. (1978) N*ombre, mesure et continu. Épistémologie et histoire*. Paris : Fernand Nathan.

Hategekimana L-E. (2014) *Sur l'enseignement des nombres rationnels et irrationnels*, thèse de doctorat. Kinshasa : Université Pédagogique Nationale.

Hategekimana L-E. (2015) De la transposition des savoirs mathématiques à leur détransposition dans l'enseignement secondaire. In L. Theis (Ed.) *Actes du colloque EMF 2015* (pp. 119-128). Alger : Université d'Alger.

Hategekimana L-E. (2017) Réciprocité entre les problématiques de l'enseignement des limites et des nombres réels. *Annales de l'UNIGOM* VII.2, 317-328.

Hategekimana L-E. (2016) *Les problèmes de l'enseignement des nombres rationnels et irrationnels*. Paris : Edilivres.

Hategekimana L-E. (2017) Problématique de l'enseignement des limites : diagnostique des insuffisances didactiques. *CERIGO* 16, 7-18.

Hategekimana L-E. et Banwitiya Y. (2014) La problématique des contenus d'enseignement sur les relations et les fonctions dans l'éducation mathématique au secondaire. Bukavu : *Cahiers du CERUKI*, nouvelle série n°44, 255-263.

Houdement C. et Kuzniak A. (1998-1999) *Réflexion sur l'enseignement de la géométrie pour formation des maîtres. Grand N* 64, 65-78.

Kuzniak A., Montoya Delgadillo E., Vandebrouck F, & Vivier L (2016) Le travail mathématique en analyse de la fin du secondaire au début du supérieur : identification et construction. In Y. Mathero, G. Geudet et al. (Eds), *Enjeux et débats en didactique des mathématiques* (pp.47-77). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Launay M. (2016) Le *grand roman des maths. De la préhistoire à nos jours*. Paris : Flammarion.

Lehning H. (2017) *Toutes les mathématiques du monde*. Paris : Flammarion.

Le Thai Bao (2007) *Étude didactique des relations entre enseignement de la 'notion de limite' au lycée et décimalisation des nombres réels dans un environnement 'calculatrice'. une étude de cas au Vietnam*. Thèse de doctorat. Grenoble : Université Joseph Fourier.

Parzysz B. (2006) La géométrie dans l'enseignement au secondaire et en formation des professeurs des écoles : de quoi s'agit-il ? *Quaderni di Ricerca in Didactica* 17, 128-161.

Schneider M. (2011) *Traité de didactique des mathématiques. La didactique par des exemples et contre-exemples*. Liège : Éditions de l'Université de Liège.

POTENTIALITES DE L'HISTOIRE DES MATHEMATIQUES DANS LA FORMATION DES ENSEIGNANTS DE MATHEMATIQUES

LEMES[*] Ana Jimena

Résumé – Pour mieux comprendre le potentiel de l'histoire des mathématiques, dans la formation des enseignants de mathématiques, on présente un sous-domaine du *pedagogical content knowledge* de Shulman (1987), défini par Ball et Bass (2009) comme *horizon content knowledge*, pour essayer d'établir une connexion entre un tel sous-domaine, l'histoire des mathématiques, et les compétences professionnelles nécessaires pour les tâches d'enseignement.

Mots-clefs : Didactique des mathématiques, Histoire des mathématiques, Formation des enseignants, Connaissance de l'horizon de la matière, Connaissance pédagogique de la matière.

Abstract – This article presents the advances of a PhD research. In this, a greater understanding of the potential of the History of Mathematics for teacher training is sought. The objective is to try to establish a connection between one of the subdomains of pedagogical content knowledge of Shulman (1987), defined by Ball (2009) as horizon content knowledge, history of mathematics and the professional competences for the task of teaching.

Keywords: Mathematics education, History of mathematics, Teachers training, Horizon content knowledge, Pedagogical content knowledge.

I. INTRODUCTION

L'objectif principal de cette recherche est de regarder comment un cours d'histoire des mathématiques peut influencer les conceptions que les futurs enseignants de mathématiques ont de cette discipline. L'histoire des mathématiques permet, entre autres, de contextualiser et problématiser des concepts, de stimuler la lecture et d'humaniser les mathématiques. D'après Barbin et Tzanakis (2014, p. 255), ces trente dernières années ont vu l'intégration de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement. Dans cette période, cette intégration est devenue un domaine intensément étudié, inspirant d'une part des nouvelles pratiques didactiques et activités de recherches spécifiques, et de l'autre, critiques autour du manque d'évidences empiriques par rapport à l'efficacité et à l'apport de l'histoire des mathématiques à l'apprentissage. Guillemette (2011, p. 9-10) présente plusieurs arguments qui critiquent cette intégration, parmi lesquels : plusieurs auteurs ne semblent pas accorder une réelle importance à l'introduction de l'histoire des mathématiques en classe ; certains y voient de nombreuses possibilités, mais redoutent les difficultés liées à son utilisation ; et notamment, le manque de résultats empiriques montrant un meilleur apprentissage chez les étudiants. Malgré ces arguments, on sait que l'intérêt pour l'histoire des mathématiques remonte à la seconde moitié de XIXe siècle :

> Des mathématiciens comme F. Klein et A. De Morgan et des historiens comme P. Tannery et G. Loria ont montré un intérêt actif pour le rôle de l'histoire des mathématiques dans l'éducation. [...] Au début du XXe siècle, cet intérêt a été relancé à la suite du discours et des débats sur les fondements des mathématiques. Poincaré a critiqué l'approche axiomatique de Hilbert et a déclaré que l'histoire de la science devrait être le "principal guide pour l'éducateur". (Barbin et Tzanakis, 2014, p. 255, notre traduction)

[*] Université de Lille – France – jimenalemes@gmail.com

Dans les années 1960 et 1970, l'intérêt pour l'histoire et l'épistémologie des mathématiques est devenu plus fort en réponse à la « réforme des maths modernes ». Ceux qui soutenaient la réforme s'opposaient fortement à « une conception historique de l'éducation », alors que, pour ses critiques, l'histoire est apparue comme une « thérapie contre le dogmatisme », concevant les mathématiques non seulement comme une langue mais aussi comme une activité humaine. Depuis 1968, différents groupes de travail ont été formés autour de l'histoire des mathématiques dans l'éducation. Parmi eux, le groupe *History and Pedagogy of Mathematics* joue un rôle d'orientation dans le domaine. Au milieu des années 1980, les Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques – IREM, ont commencé à organiser, tous les deux ans, une université d'été sur l'histoire et l'épistémologie dans l'enseignement des mathématiques. Depuis 1993, cette école d'été s'est étendue à l'échelle européenne et constitue maintenant l'European Summer University. Elle est devenue une activité internationale qui enrichit le groupe *History and Pedagogy of Mathematics.*

À partir de l'étude ICMI *History in Mathematics Education* (Fauvel et van Maanen, 2000), une communauté de chercheurs avec ces problématiques se consolide et devient une référence internationale. Des efforts sont faits pour systématiser les recherches autour des cours de mathématiques dans lesquels l'histoire des mathématiques est utilisée comme la principale ressource didactique (Clark (2006) ; Arcavi et Isoda (2007) ; Jankvist (2009) ; Barbin *et al* (2010) ; Smestad (2012) ; Matthews (2014) ; Barnett, Lodder et Pengelley (2015); Smestad (2017)).

En parallèle, il est possible d'identifier certains travaux (Lederman, Abd-El-Khalick, Bell et Schwartz (2002) ; Fried, Guillemette et Jahnke (2016) ; Jankvist, Mosvold et Clark (2016) ; Chorlay (2016)) qui cherchent à définir des cadres conceptuels et théoriques pour soutenir l'intégration de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement. Dans le cas de Lederman *et al*. (2002) ils ont les mêmes préoccupations au sujet des efforts déployés pour aider les élèves et les enseignants en sciences à se faire une idée éclairée de la nature des sciences. Ce travail est développé dans le cadre NOS (*Nature of Science*).

Parmi les recherches mentionnées ci-dessus, nous n'avons trouvé qu'une faible quantité de travaux sur l'inclusion de l'histoire des mathématiques comme ressource didactique dans la formation des enseignants. Chez Guacaneme, dans le contexte latino-américain:

> […] une autre question fait allusion en partie au besoin de matériaux plus nombreux et de meilleure qualité pour la formation en Histoire [...] ceci non seulement révèle le manque de matériel, mais suggère aussi que les existants peuvent ne pas être adéquats pour la formation des connaissances historiques requises par les enseignants de mathématiques liées à leur pratique d'enseignement. (Guacaneme, 2010, p. 144, notre traduction)

Pour Beltran, Saito et Trindade dans le contexte brésilien :

> Au cours des dernières décennies, l'inclusion des sujets d'histoire des sciences a augmenté dans les cours de formation initiale et continue des enseignants, ainsi que dans les baccalauréats en sciences naturelles et exactes. Cependant, il n'y a toujours pas de matériel spécialisé orienté pour enseigner l'histoire des sciences dans l'enseignement supérieur. (Beltran, Saito, Trindade, 2014, p. 9, notre traduction)

En effet, la plupart des travaux se concentrent sur l'enseignement secondaire. Ce constat constitue une des raisons principales pour laquelle nous avons choisi de conduire notre recherche dans le contexte spécifique de la formation des enseignants. De ce fait, il nous est nécessaire d'identifier et d'étudier les compétences professionnelles essentielles à l'exercice du métier, afin de mieux comprendre le potentiel de l'histoire dans la formation d'un enseignant des mathématiques. Dans ce contexte, nous présentons le cadre théorique défini par Ball et Bass (2009) comme *Mathematical Knowledge for Teaching* – MKT, qui s'inspire de la notion *pedagogical content knowledge* – PCK de Shulman (1987).

II. CADRE THEORIQUE

Chez Shulman (1987), le PCK[1] est une notion dans laquelle sont classés les différents types de connaissances qu'un enseignant doit maîtriser. Shulman postule que, bien qu'il soit impératif de connaître le contenu spécifique du sujet destiné à être enseigné, il ne suffit pas pour garantir un processus significatif d'enseignement et d'apprentissage. Il propose de regrouper les savoirs des enseignants relatifs aux contenus d'enseignement selon trois catégories : 1) la connaissance des contenus ; 2) la connaissance pédagogique de la matière (PCK), et ; 3) la connaissance des programmes d'enseignement. L'auteur relève qu'il est nécessaire pour l'enseignant de comprendre la structure du sujet enseigné et les principes de l'organisation conceptuelle. Cette compréhension approfondie du sujet qu'il enseigne doit être soutenue par une formation humaniste :

> L'enseignant communique aussi, consciemment ou pas, des idées sur la façon dont la vérité est déterminée dans un domaine, ainsi qu'un ensemble d'attitudes et de valeurs qui influencent dans la compréhension de l'étudiant sur les structures du sujet […]. (Shulman, 1987, p. 9, notre traduction).

On retrouve cette même idée en Olave (2013) d'après Lezama et Mingüer, en établissant un lien entre le discours mathématique scolaire d'un enseignant et sa culture mathématique :

> […] quand un professeur de mathématiques expose son cours, il le fait à travers sa culture mathématique, qui se manifeste dans la manière de concevoir les mathématiques, leur enseignement et leur apprentissage, ainsi qu'à travers leur mise en scène dans la classe. (Lezama et Mingüer *apud* Olave, 2013, p. 47, notre traduction)

Ce lien nous permet de connaître la culture mathématique d'un enseignant. Ainsi, si par culture mathématique, nous comprenons l'ensemble des idées à l'égard des mathématiques, nous serions en mesure d'approcher cette culture à partir du discours mathématique scolaire et aussi dans le sens inverse. Il serait également possible de détecter d'éventuelles modifications.

À partir de ces catégories, Ball, Thames et Phelps (2008) élaborent le modèle du MKT :

[1] Un équivalent en français de l'expression « *pedagogical content knowledge* » de Shulman, pourrait être « connaissances pédagogiques » (Clivaz, 2011, p. 28).

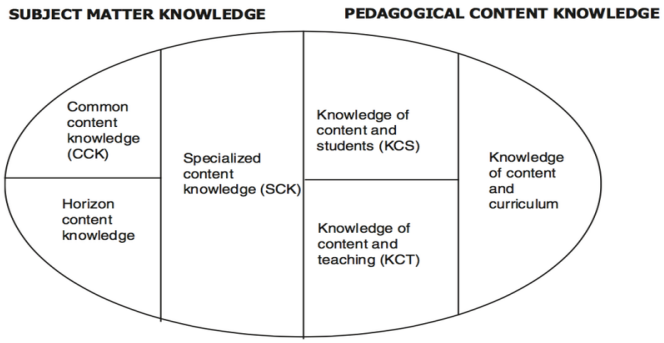


Figure 1 *– Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? Ball, Thames et Phelps (2008, p. 403)*

Ainsi, les sous-domaines suivants sont décrits : *common content knowledge*, *specialized content knowledge*, *horizon content knowledge*, *knowledge of content and students*, *knowledge of content and teaching* et *knowledge of content and curriculum*; les trois premiers dans le SMK et les trois autres dans le PCK.

En particulier, nous nous pencherons sur le sous-domaine HCK :

> [...] nous savons depuis le début qu'il existe une sorte de connaissance du contenu qui n'est ni commune ni spécialisée. Elle n'est pas directement déployée dans l'enseignement actuel, mais elle soutient un type de conscience, de sensibilité, de disposition qui informe, oriente et encadre culturellement la pratique pédagogique. Nous considérons cela comme une espèce de vision périphérique ou de conscience de l'horizon mathématique. (Ball et Bass, 2009, p. 5, notre traduction)

Cette « vision périphérique » mathématique ou « conscience du paysage mathématique » dans laquelle se situent l'expérience et l'enseignement, peut guider l'enseignant à écouter, parler et prendre des décisions par rapport aux concepts mathématiques qui seront proposés dans l'avenir. D'autre part, Jakobsen *et al* (2013) soutiennent de la même manière l'idée que le HCK contribue à l'enseignement du contenu de l'école :

> Connaître les mathématiques à l'horizon permet à l'enseignant de prendre conscience des potentialités des situations et suggère des possibilités de traitement du contenu mathématique enseigné à un niveau donné. Pour ce faire, un enseignant n'a pas besoin de tout savoir sur la preuve par contradiction, mais il doit avoir une idée de ce qu'il est et de son potentiel. Cela permettrait aux étudiants (au moins en théorie) de mieux comprendre et trouver le sens d'autres sujets, directement ou indirectement liés. (Jakobsen *et al*, 2013, p. 8, notre traduction)

Cela donne aux enseignants une sensibilité particulière à la façon dont ce contenu se trouve dans le territoire disciplinaire plus large. Dans ce sens, nous proposons d'établir une connexion entre les notions de culture mathématique et HCK. En établissant cette relation, il est possible de faire l'hypothèse que l'histoire des mathématiques influence le sous-domaine HCK, et que cela peut trouver son expression dans la culture mathématique de l'enseignant de mathématiques.

III. PREMIERES QUESTIONS ET OBJECTIFS

Le travail a commencé par l'élaboration des quelques questions à partir de l'idée de conception qu'utilise Garnica (2008). Cet auteur considère les conceptions comme des habitudes mentales stables qui fonctionnent jusqu'au moment où se présente un certain désaccord qu'il faudra alors modifier. Dans ce sens, il dit: « Les conceptions peuvent

agir, d'une part, comme un filtre qui structure le sens que nous donnons aux choses et, d'autre part, comme des bloqueurs par rapport aux nouvelles réalités, limitant nos possibilités d'agir et de comprendre » (2008, p. 508, notre traduction). Dans ce qui suit, nous présentons quelques questions qui guident notre recherche : Comment les conceptions se développent-elles ? Quels sont les leviers susceptibles de les faire évoluer ? L'histoire des mathématiques, en tant que discipline, influence-t-elle les conceptions des futurs enseignants sur les mathématiques ? Ces conceptions, influencent-elles les compétences professionnelles d'un enseignant ? Parmi les différentes compétences professionnelles, quelles sont celles sur lesquelles un cours d'histoire des mathématiques peut avoir une influence dans le cadre de la formation d'un enseignant de mathématiques ?

1. *La recherche a pour objectifs principaux :*

- Effectuer une analyse des conceptions des futurs enseignants de mathématiques, sur les mathématiques *a priori* et *a posteriori* d'un cours d'histoire des mathématiques ;
- Identifier l'influence de ce cours sur les conceptions des futurs enseignants ;
- Étudier les liens entre les conceptions par rapport aux mathématiques et les conceptions de son enseignement, en lien avec le développement des compétences professionnelles.

2. *En tant qu'objectifs secondaires :*

- Élaborer une notion de culture mathématique ;
- Rapprocher la notion de culture mathématique avec la notion de HCK.

IV. METHODOLOGIE

Notre intérêt est d'accéder aux expériences par rapport à l'histoire des mathématiques, de trois communautés différentes mais impliquées : 1) futurs enseignants des mathématiques (étudiants du cours d'histoire des mathématiques) ; 2) enseignants[2] avec l'expérience d'utilisation de l'histoire des mathématiques, et ; 3) experts (chercheurs qui se sont spécialisés dans la recherche et enseignement de l'histoire des sciences, histoire des mathématiques, épistémologie, etc.). La méthodologie est qualitative.

La collecte des données par rapport à la communauté des experts et des enseignants, repose sur un entretien individuel d'environ quarante minutes. L'intérêt de cela est de connaître les premiers repères de l'histoire des mathématiques, leur perspective d'enseignement après l'intégration de l'histoire autant que les potentialités et difficultés de son utilisation.

[2] Enseignants du groupe EMTA – « Enseignement des mathématiques par les textes anciens », de l'Irem de Lille.

En ce qui concerne la communauté des futurs enseignants, la collecte des données a été proposée à partir d'un questionnaire (*à priori* et *à posteriori* du cours d'histoire des mathématiques) ; des entretiens individuels d'environ trente minutes et ; des analyses sur leurs mémoires (dossier requis dans le cadre de l'évaluation finale du cours).

Le questionnaire a été développé sur la base des questions présentées dans la section précédente. Les deux objectifs principaux sont : récupérer des informations pour élaborer un profil des étudiants ; et récolter les informations de ceux qui pourraient être intéressés à collaborer à travers un entretien qui aurait lieu à la fin du semestre. Une méthodologie quantitative sera utilisée pour l'élaboration de ces profils.

Les étudiants choisis réalisent actuellement le cours d'histoire des mathématiques (Octobre 2017, Avril 2018). Ce cours est enseigné par la professeure Rossana Tazzioli et se déroule dans le master « Métier de l'Enseignement de l'Éducation et de la Formation » – *MEEF*, et le Diplôme Universitaire – *DU* tous les deux à l'Université Lille.

En raison de la différence d'expériences des trois communautés, nous pouvons faire l'hypothèse qu'ils présenteront différents niveaux de ce que nous avons appelé la culture mathématique. Dans ce cas, il existe la possibilité de questionner et de comparer ces niveaux en cherchant le lien avec le HCK. Les entretiens sont proposés de façon individuelle et à partir de questions ouvertes. Tous les entretiens seront enregistrés et puis quelques extraits seront transcrits. À partir des transcriptions, l'analyse des entretiens sera faite en prenant en compte l'analyse du contenu. Chez Vilatte cette analyse « consiste à établir un code d'analyse en fonction duquel on décompose le corpus en unités de signification, puis à constituer des catégories sémantiques (2007, 33) ».

Pour faire les analyses il faut identifier ce qui relève effectivement les informations qui nous intéressent, mais notamment ça dépend du cadre théorique à partir duquel on travaille :

> Une analyse de contenu dépend du cadre conceptuel dans lequel elle se situe et de l'objectif de l'étude ou de l'évaluation. La méthode d'analyse de contenu la plus simple consiste en un simple codage des unités lexicales. L'analyse thématique code des ensembles signifiants par thème. Le codage peut être effectué selon une syntaxe définie par le domaine d'étude, c'est-à-dire selon des règles de combinaisons des unités de signification. (Vilatte, 2007, 33)

V. RESULTATS

Nous présentons ici quelques arguments, identifiés dans l'un des entretiens réalisés avec un membre de la communauté des «experts». Nous exposons ces extraits dans lesquels nous identifions la controverse potentielle d'un croisement avec les deux autres communautés.

> Le cours d'hm que je donnais […] c'était une manière de leur faire penser les mathématiques. En particulier que les mathématiques c'est quelque chose que se pense. Et je n'avais pas pour but de leur proposer de faire des expériences en classe, pas du tout. (E1, 12:18)[3]

> Quand on fait soi même des mathématiques on a une expérience mathématiques qui n'est pas seulement en tant qu'élève, en tant qu'étudiant, mais en tant que être connaissant, agissant. […] Et

[3] Ce codage désigne le numéro d'interviewé et le minutage du début de la citation.

pour moi l'histoire des mathématiques, d'une certaine façon, fait le remplacement. Cet à dire que cela peut permettre justement d'entrer dans les mathématiques en tant qu'activité, en tant qu'action, en tant que cognition. (E1, 14:26)

[...] on était des bons élèves en mathématiques, mais ce n'est pas suffisant pour enseigner. Pour enseigner il faut beaucoup plus que ça. Il faut pouvoir effectivement avoir une idée de comment les mathématiques sont pensées, comme ça se développent. Donc moi j'ai fait toujours de cours d'histoire des mathématiques dans ce but. (E1, 15:35)

Un prof qui m'a dit "Ah, depuis que j'ai lu Descartes, mes élèves trouvent que je suis meilleur". Voilà, ça c'est une réaction intéressante, parce qu'il s'était passé quelque chose chez lui, et les élèves l'avaient senti. […] C'est ça que c'est important, c'est ce choc, qui s'exprime comme si ou comme ça, mais qui fait qu'on repense les mathématiques non plus de manière scolaire, mais comme étant quelque chose que se construit, que se pense. Et l'on va voir les élèves aussi comme des êtres pensants. (E1, 17:50)

Évidemment les enseignants me disaient "Tiens, ce texte là, j'ai trouvé qu'il était vraiment très intéressant et je l'ai travaillé avec mes élèves". Mais moi, j'ai jamais voulu le faire, c'était pas mon idée, c'était pas mon objectif. De donner des textes et de dire "on a fait ça, j'ai fait ça en classe" c'est beaucoup plus compliqué et ce n'est que dans un deuxième temps qu'on peut faire ça. Il faut que déjà les gens connaissent suffisamment l'histoire des mathématiques pour qu'ils se lancent à mettre l'histoire des mathématiques dans leur classe. (E1, 18:56)

REFERENCES

Arcavi A., Isoda M. (2007) Learning to listen: From historical sources to classroom practice. *Educational Studies in Mathematics* 66.2, 111-129.

Ball D., Thames M., & Phelps G. (2008) Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of teacher education*, 59. 5, 389-407.

Ball D., Bass H. (2009) With an eye on the mathematical horizon: Knowing mathematics for teaching to learners' mathematical futures. *Universitätsbibliothek Dortmund*.

Barbin E., Tzanakis C. (2014) History of mathematics and education. In Encyclopedia of mathematics education. *Springer Netherlands*. pp. 255-260.

Barnett, J. H., Lodder, J., & Pengelley, D. (2016). Teaching and learning mathematics from primary historical sources. *PRIMUS*, *26*(1), 1-18.

Beltran M., Saito F., & Trindade L. (2014) *História da Ciência para formação de professores*. São Paulo: Editora Livraria da Física.

Chorlay, R. (2016). Historical sources in the classroom and their educational effects. In L. Radford, F. Furighetti, & T. Hausberger (Eds.), *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics* (pp. 5-23). Montpellier, France: IREM de Montpellier.

Clark K. (2006) *Investigating Teachers' Experiences with the History of Logarithms: A Collection of Five Case Studies*. Doctoral Thesis. University of Maryland, College Park.

Fauvel J., Van Maanen J. (ed.) (2006) *History in mathematics education: The ICMI study*. Springer Science & Business Media.

Fried M., Guillemette D., & Jahnke H. (2016) Theoretical and/or conceptual frameworks for integrating history in mathematics education. In L. Radford, F. Furighetti, & T. Hausberger (Eds.), *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics* (pp. 211-230). Montpellier, France: IREM de Montpellier.

Garnica A. (2008) Um ensaio sobre as concepções de professores de matemática. *Educação e Pesquisa*, SciELO Brasil, 34.3, 495-510.

Guacaneme E. (2010) ¿Qué tipo de Historia de las Matemáticas debe ser apropiada por un profesor. *Revista Virtual EDUCyT*, vol. 2.2.

Guillemette D. (2011) L'histoire dans l'enseignement des mathématiques: sur la méthodologie de recherche. *Petit x* 86, 5-26.

Jakobsen A., Thames M., & Ribeiro C. (2013) Delineating issues related to horizon content knowledge for mathematics teaching. In B. Ubuz, Ç. Haser & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of CERME 8* (pp. 3125-3124). Antalia, Turkie: ERME. ISBN: 978-975-429-315-9

Jankvist U. (2009) *Using history as a 'goal' in mathematics education*. (Doctoral dissertation). Roskilde Universitet.

Jankvist U., Mosvold R. & Clark K. (2016) Mathematical knowledge for teaching teachers: The case of history in mathematics education. In L. Radford, F. Furighetti, & T. Hausberger (Eds.), *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics* (pp. 441-452). Montpellier, France: IREM de Montpellier.

Lederman, N. G., Abd-El-Khalick, F., Bell, R. L., & Schwartz, R. S. (2002). Views of nature of science questionnaire: Toward valid and meaningful assessment of learners' conceptions of nature of science. *Journal of research in science teaching*, *39*(6), 497-521.

Matthews M. (ed.). (2014) International handbook of research in history, philosophy and science teaching. *Dordrecht: Springer*.

Olave M. (2013) *Modelos de profesores formadores de Profesores de Matemática: cuáles son y en qué medida se transmiten a los futuros docentes? Un estudio de casos*. (Doctoral dissertation) — Centro de Investigación en ciencia aplicada y tecnología avanzada. Unidad Legaria. Instituto Politécnico Nacional. México.

Shulman L. (1987) Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard educational review.* 57.1, 1-23.

Smestad B. (2012) Not just "telling stories". History of mathematics for teacher students: What is it and how to teach it. In B. Barton, G. Burrill, B. Hodgson, G. Kaiser, O. Nam Kwon, H. Lew (Eds.) *12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 4247-4255). Seoul, Korea: Sung Je Cho.

Vilatte J. (2007) L'entretien comme outil d'évaluation. *Laboratoire Culture & communication* Université d'Avignon. http://www.mediationculturelle.net/wp-content/uploads/jcvilatte-lentretien.pdf

Groupe de travail 4 (GT4) Modélisation, interdisciplinarité et complexité

BILAN DU GROUPE DE TRAVAIL N°4

MODÉLISATION, INTERDISCIPLINARITÉ ET COMPLEXITÉ

Responsables

CABASSUT[1*] Richard – HITT[2**] Fernando – MALONGA [3***] Fernand

Correspondante CS

CARON[4****] France

I. MODELISATION

Dans les années 70, l'école de Freudenthal (Lerman 2014) a donné naissance au courant de recherche-développement Realistic Mathematics Education (Treffers 1971). De cette approche ont émergé les notions de «mathématisation horizontale» et «mathématisation verticale» (Freudenthal 1991), de «modèle pour» ou «modèle de» (Gravemeijer 2009). Au Royaume-Uni, la création en 1978 du Journal of Mathematical Modelling for Teachers fut suivie de l'inclusion de cours sur la modélisation mathématique dans le curriculum anglais. En 1983 avait lieu le premier congrès de ce qui allait devenir l'International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications (ICTMA). Des programmes de mathématiques développés dans cette approche ont été adoptés dans de nombreux pays où les processus de modélisation sont devenus centraux dans l'enseignement.

Dans les années 90, un autre courant émerge, porté par la National Science Fondation (NSF) aux États-Unis. Les membres de la NSF (1992) se sont interrogés sur l'importance d'un travail interdisciplinaire, promouvant le curriculum STEM (Science, Technology, Engineering and Mathematics). En Europe, le projet PRIMAS (Promoting Inquiry in Mathematics and Science Education Across Europe 2010-13), qui impliquaient l'interdisciplinarité entre les différentes didactiques, a été développé par 13 universités européennes (Katja & Reitz-Koncebovski 2013).

II. INTERDISCIPLINARITE

Ces différents mouvements dans le monde ont favorisé une attention accrue à la modélisation mathématique et à l'interdisciplinarité pour l'enseignement des mathématiques et des sciences, en constituant ainsi un nouveau paradigme (Adjiage et Rauscher 2013 ; Blum et al 2007 ; CERME 2005-2013 ; CMESG 2014).

Cette activité s'est reflétée dans les changements curriculaires de différents pays. Par exemple au Québec, dans l'approche par compétences a adoptée au début de ce millénaire, la

* Université de Strasbourg – France – richard.cabassut@unistra.fr

**GRUTEAM, Université du Québec à Montréal – Canada - hitt.fernando@uqam.ca

***Ecole Normale Supérieure, Université Marien Ngouabi - Congo Brazzaville – malongaf@gmail.com

****Université de Montréal–Canada – france.caron@umontreal.ca

première compétence à développer en mathématiques a trait à la résolution de situations-problèmes, où le terme de « situation » renvoie bien souvent à une situation du monde réel et au processus de modélisation. En France (2000) des dispositifs comme les TPE (Travaux Pratiques Encadrés) sont apparus pour permettre aux élèves des lycées de développer des projets de recherche scolaire, sur des domaines ciblés et répondant à une problématique. La réforme du collège (2016), a donné lieu aux EPI (Enseignements Pratiques Interdisciplinaires), visant le développement par l'élève de ses connaissances et compétences. On peut considérer que le recours à l'interdisciplinarité et à la modélisation au niveau scolaire se veut être le reflet des pratiques des scientifiques au niveau du savoir savant.

Cependant cela ne va pas de soi ; la prise en compte, par les systèmes scolaires, de toutes les variables importantes qui entrent en jeu dans une problématique de notre société, pose des problèmes complexes aussi bien dans leur définition, dans la pratique des classes que dans la gestion des modalités de travail entre des enseignants impliqués dans des projets interdisciplinaires.

III. COMPLEXITE

L'étude des systèmes complexes peut se révéler un cadre utile pour entrer dans un tel paradigme. Rappelons d'abord qu'un système complexe est un ensemble constitué d'un grand nombre d'entités en interaction, ayant la capacité de générer un nouveau type de comportement collectif à travers une auto-organisation, incluant la formation spontanée de structures temporelles, spatiales ou fonctionnelles. (Meyers, 2011). Des logiciels issus de la dynamique des systèmes (Forrester, 2007) ou de l'approche à base d'agents peuvent servir à aborder la modélisation et la simulation de systèmes complexes. France Caron en a fait la démonstration en simulant différents phénomènes à partir des modèles[5] qu'elle a développés dans l'environnement *Insight Maker*[6], un logiciel libre, gratuit et utilisable à même sa plate-forme web. L'interface iconographique peut sembler *a priori* faciliter la conception et la mise en œuvre de modèles à plusieurs variables ou composantes, avec les relations et les interactions qui les lient. Cela dit, il demeure néanmoins essentiel de prendre le temps d'enseigner les processus de calcul numérique pris en charge par l'outil (ex. le schéma d'Euler pour l'intégration numérique), car l'enseignement des mathématiques ne peut se limiter à former de futurs utilisateurs de boîtes noires. En ouvrant plutôt ces boîtes noires avec élèves et étudiants, on exploite le passage entre le continu et le discret, et l'on est amené à voir l'équation différentielle comme une description portant en elle, lorsqu'on la discrétise, le moyen de construire la solution. Des expérimentations choisies dans un tel environnement permettent aussi de répondre à des questions mathématiques comme : Pourquoi le nombre *e* ? Pourquoi des radians?

C'est précisément ici que laLa science de la complexité comprise comme la science des systèmes complexes (Meyers 2009/2012) a donné lieu à un nouveaucomme paradigme paradigme théorique a aussi été mise à contribution dans l'analyse des systèmes d'apprentissage (Davis & Simmt 2003, García 2000). Les variables qui entrent en jeu dans la

5 Les modèles sont accessibles ici: https://insightmaker.com/find?search=france+caron La suite des modèles {C01, C02, …, C07} constitue une séquence didactique permettant de passer en sept étapes de la modélisation du niveau d'une baignoire à la modélisation du cycle du carbone et la simulation des effets de la combustion des énergies fossiles sur la température globale moyenne. La séquence est documentée dans (Caron, 2015).

6 https://insightmaker.com/

classe de mathématiques sont nombreuses, et la simplification de ces variables n'est pas la bonne voie pour améliorer l'enseignement des mathématiques. Nous avons besoin d'un cadre théorico-pratique qui puisse permettre l'analyse des multiples variables qui interviennent dans l'enseignement des mathématiques, d'autant plus si l'on en accroît la complexité en y intégrant le développement de la modélisation à partir de situations réelles.

Plusieurs questions émergent de cette problématique :

- Du point de vue épistémologique, quel est le rôle des mathématiques par rapport aux autres disciplines dans la modélisation de situations réelles et complexes ?
- Quels sont les apports pour les apprentissages des élèves et quelles en sont les difficultés ?
- Comment les pratiques enseignantes prennent-elles en compte les injonctions institutionnelles au regard de la modélisation et de l'interdisciplinarité?
- À quels problèmes sociétaux, de recherche et d'enseignement, la question de l'interdisciplinarité sous l'angle de la modélisation répond-elle ?
- Quels défis et opportunités pose l'articulation des concepts issus de différentes disciplines pour l'enseignement?
- En quoi la science de la complexité peut-elle outiller l'analyse de la classe de mathématiques ou d'autres systèmes d'apprentissage ?
  Nous proposons de réfléchir à partir de ces questions ou d'autres que pourrait soulever le cadre de la modélisation mathématique, dans ses articulations avec l'interdisciplinarité ou la complexité.

IV. ORGANISATION DES TEXTES PRESENTES

Le groupe GT4 a réfléchi autour de 18 présentations des travaux. Les responsable du GT4 ont décidé d'organiser les travaux suivant les cinq parties principales suivantes.

1. La complexité

Est-il-indispensable d'être un spécialiste en mathématique pour être un enseignant de biologie ? (Abou Raad N., Hanadi C.)

Quelles synergies possibles entre mathématiques et physique dans l'enseignement ? (Roland M.)

2. La modélisation

Conditions institutionnelles dans la formation à l'enseignement de la modélisation : cas français. (Cabassut R.)

La modélisation algébrique des problèmes : rapport institutionnel à l'entrée de l'enseignement secondaire tunisien.(Hassayoune S.)

Un exemple de formation des professeurs de mathématiques à la modélisation. (Lécureux-Têtu M.-H.)

Le cadre théorique de l'ETM étendu : analyse d'une séquence utilisant la relativité restreinte.(Moutet L.)

3. L'interdisciplinarité

Espaces de travail mathématique connectes au lycée : un pont entre les mathématiques et les sciences physiques. Modélisation des câbles d'un pont suspendu par une fonction

numérique spécifique. (Lagrange J.-B. Et Le Feuvre B.)

Etude d'une approche collaborative entre mathématiques, physique et biologie : cas de l'enseignement de la stroboscopie. (Malonga Moungabio F., Louyidoula Bangana Yiya C.)

De quelques difficultés de l'interdisciplinarité. (Rogalski M.)

Une séance de géométrie élémentaire prenant appui sur une séance d'EPS a-t-elle un potentiel d'apprentissage en géométrie ? Un exemple au cycle 3. (Arab Had-Moussa M.)

La ligne droite, un objet pluridisciplinaire au début de l'enseignement secondaire : une analyse institutionnelle des manuels. (Tchonang Youkap P.)

4. *L'articulation des concepts des différentes disciplines*

(Re)Modélisation de décors géométriques : l'exemple de la mosaïque antique. (Parzysz B.)

La construction du concept physique de volume en cycle 3 : quelles difficultés ? quelles stratégies didactiques ? (Javoy S., Décroix A.-A., De Hosson C.)

Qu'est-ce qu'il se passe quand une figure géométrique rencontre Flatland ? (Pavlopoulou K., Patronis T.)

L'analyse de l'activité cérébrale associée à la réalisation de tâches mathématiques.(Lara-Melgoza R., Morales-Moreno L., Romo-Vázquez A., Romo-Vázquez R., Vélez-Pérez H.)

5. *Apprentissage des élèves ou enseignement Représentations institutionnelles ou non (travail collaboratif)*

La pensée arithmético-algébrique comme transition du primaire au secondaire : des situations d'investigation dans lesquelles modélisation et technologie jouent un rôle central.(Saboya M.)

EST...M : Enseignement des sciences et technologies … et des mathématiques. (Souchard L.)

V. BILAN ET PERSPECTIVES

Les échanges dans le groupe de travail ont mentionné plusieurs problématiques. Il y a plusieurs notions de complexité, celle liée aux problèmes et celle liée aux systèmes. De même, il y a plusieurs modélisations de la modélisation : la mathématisation qui est une modélisation mathématique, la modélisation dans une autre discipline, et la co-modélisation qui implique plusieurs disciplines. Dans ce contexte le rôle de la simulation doit être étudié de manière plus approfondie. L'interdisciplinarité conduit souvent à l'articulation des concepts de différentes disciplines et ouvre la voie à la co-construction de ces concepts. Concernant l'intégration des pratiques professionnelles pour l'apprentissage et l'enseignement, l'étude des scénarios d'enseignement est intéressante pour révéler les techniques mono-disciplinaires ou mixtes. L'évaluation par compétences et les dispositifs institutionnels (TPE, EPI, projet …) sont à étudier et montrent l'importance de la formation des enseignants.

D'autres questions ont surgi au cours des échanges. La complexité est-elle une effet de mode ? Quelle complexité produit l'évolution de la science et de l'informatique ? Quels critères pour les problèmes de modélisation? Comment préciser l'approche par compétences ? Quel apport des cadres théoriques, comme par exemple les Espaces de Travail Mathématique (ETM) ? Quelles distinctions entre pluri, inter et trans-disciplinarité ? Etudier ces questions serait tout un programme pour une prochaine rencontre.

REFERENCES

Adjiage, R. et Rauscher, J-C. (2013). Résolution d'un problème de modélisation et pratique écrite de l'écrit. *Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 33*/1, 9-43. Proceedings of CERME (2005-2015). Working group: Applications and Modelling or Modelling and Applications.

Blum, W., Galbraith, P., Henn, H. & Niss, M. (Eds. 2007). *Modelling and applications in mathematics education*. The 14th ICMI Study. New York: Springer.

Caron, F., (2015) Modélisation et simulation de systèmes dynamiques. *Bulletin AMQ*, Vol. LV, no 4. https://www.amq.math.ca/wp-content/uploads/bulletin/vol55/no4/07-maitre-modelisation.pdf

Caron F., Lidstone D. & Lovric M. (2014). Complex dynamical systems. In Oesterle S. et Allan D. (Eds.), *Actes du Groupe canadien d'étude en didactique des mathématiques* (pp. 137-148). Alberta, 30 mai – 3 juin 2014.

Davis, B. & Simmt, E. (2003). Understanding learning systems : mathematics education and complexity science. *Journal for Research in Mathematics Education*, *34*(2), 137-167.

International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications. The first twenty five years. http://www.icmihistory.unito.it/ictma.php

Forrester, J.W. (2007). System dynamics – A personal view of the first fifty years. *System Dynamics Review*, 23(2–3), 345–358.

Meyers, R. A. (Ed.). (2011). *Mathematics of complexity and dynamical systems – Selections from the encyclopedia of complexity and systems science*. New York: Springer.

ANNEXE

LISTE DES TEXTES DU GT4 PAR ORDRE ALPHABETIQUE DU PREMIER AUTEUR

ABOU RAAD N.

Est-il-indispensable d'être un spécialiste en mathématique pour être un enseignant de biologie ?

ARAB HADJ-MOUSSA M.

Une séance de géométrie élémentaire prenant appui sur une séance d'EPS a-t-elle un potentiel d'apprentissage en géométrie ? Un exemple au cycle 3.

HASSAYOUNE S.

La modélisation algébrique des problèmes : rapport institutionnel à l'entrée de l'enseignement secondaire tunisien.

JAVOY S.

La construction du concept physique de volume en cycle 3 : quelles difficultés ? quelles stratégies didactiques ?

LAGRANGE J.-B.

Espaces de travail mathématique connectés au lycée : un pont entre les mathématiques et les sciences physiques. Modélisation des câbles d'un pont suspendu par une fonction numérique spécifique.

LÉCUREUX-TÊTU M.-H.

Un exemple de formation des professeurs de mathématiques à la modélisation.

MALONGA MOUNGABIO F.

Etude d'une approche collaborative entre mathématiques, physique et biologie : cas de l'enseignement de la stroboscopie.

MOUTET L.

Le cadre théorique de l'ETM étendu : analyse d'une séquence utilisant la relativité restreinte.

PARZYSZ B.

(Re)Modélisation de décors géométriques : l'exemple de la mosaïque antique.

ROGALSKI M.

De quelques difficultés de l'interdisciplinarité.

ROLAND M.

Quelles synergies possibles entre mathématiques et physique dans l'enseignement ?

SABOYA M.

La pensée arithmético-algébrique comme transition du primaire au secondaire : des situations d'investigation dans lesquelles modélisation et technologie jouent un rôle central.

SOUCHARD L.

EST … M. *Enseignement des sciences et technologies … et des mathématiques.*

TCHONANG YOUKAP P.

La ligne droite, un objet pluridisciplinaire au début de l'enseignement secondaire : une analyse institutionnelle des manuels.

AFFICHES

CABASSUT R.

C*onditions institutionnelles dans la formation à l'enseignement de la modélisation : cas français.*

LARA-MELGOZA R.

L'analyse de l'activité cérébrale associée à la réalisation de tâches mathématiques.

N'GBO Y.

Echec des élèves des séries C et D au niveau de l'exercice de mécanique en sciences physiques au baccalauréat en Côte d'Ivoire. Le cas des élèves de la région de la Me.

PAVLOPOULOU K.

Qu'est-ce qu'il se passe quand une figure géométrique rencontre Flatland ?

EST-IL-INDISPENSABLE D'ETRE UN SPECIALISTE EN MATHEMATIQUE POUR ETRE UN ENSEIGNANT DE BIOLOGIE ?

ABOU RAAD [*] Nawal – CHATILA [**] Hanadi

Résumé – L'objet de cet article est de présenter brièvement les difficultés d'un groupe d'enseignant(e)s de biologie dans l'outillage des concepts mathématiques afin de promouvoir l'interdisciplinarité dans les formations universitaires. A partir d'entretien et d'une pratique d'une des activités de biologie en classe de troisième, nous avons pu déceler l'importance de la formation interdisciplinaire.

Mots-clefs : interdisciplinarité, biologie, mathématique.

Abstract – The purpose of this article is to present the difficulties faced by a group of biology teachers in the usage of mathematical concepts to promote interdisciplinarity in teaching preparation programs. The importance of the interdisciplinary teachers' training programs was highlighted from the teachers' interviews and the analysis of a biology activity from grade nine.

Keywords interdisciplinarity, biology, mathematics.

I. INTRODUCTION

"La nature des relations existantes entre la biologie et les mathématiques est à la fois polémique et complexe" (Lange, 2000). La biologie est la science du vivant : elle s'étend du niveau moléculaire à celui de la cellule, de l'organisme jusqu'au niveau de la population et de l'écosystème. Elle est un sujet très vaste et très varié ; elle a cessé d'être une science descriptive au cours du vingtième siècle pour devenir une science potentiellement mathématisable (Meyer, 2012). Alors que les mathématiques sont un ensemble de connaissances abstraites qui sont engendrées de raisonnement logique appliqué à des objets de savoir divers tels que les nombres, les formes, les structures et les transformations. Elles ne sont pas le réel mais donnent des éléments de compréhension et d'appréhension du réel en interrogeant d'autres sciences (Aldon, 2008). Tous les biologistes ont besoin d'avoir une compréhension basique, fondamentale de la chimie, de la physique, et surtout des mathématiques et des statistiques. Les enseignants de la biologie ont-ils besoin d'être spécialistes dans tous ces domaines ? En ce qui concerne les mathématiques, sujet de notre étude, les enseignants de biologie, au Liban, à partir de la classe de cinquième (élève de 12-13 ans), ont besoin de certaines connaissances qui leur donnent une base solide pour enseigner la biologie. La complexité des problèmes posés dans le champ de la biologie conduit souvent à favoriser des raisonnements scientifiques inductifs moins adaptés à une formalisation mathématique. Pour étudier la génétique, il suffit de comprendre les concepts de base des probabilités ; pour tester les hypothèses, calculer la moyenne, la médiane et le mode, les statistiques ont leur place. La plupart des activités et des documents à analyser demandent une connaissance basique de l'algèbre et des graphiques. Atlan (1979) souligne

> Il arrive que le langage mathématique soit utilisé par les biologistes de façon incorrecte et que pourtant 'ça marche'. C'est parce qu'il s'agit le plus souvent de métaphores et que cette utilisation correspond à des besoins - ou à des blocages - proprement biologiques, c'est-à-dire à des questions posées par le développement de la biologie elle-même.

1 [*] Université Libanaise, Faculté de Pédagogie - Liban - nabouraad@ul.edu.lb

2 [**] Université Libanaise, Faculté de Pédagogie - Liban - hanadi.chatila@ul.edu.lb

La biologie et les mathématiques peuvent être considérées comme complémentaires. Dans l'enseignement, la maîtrise des savoirs à enseigner doit se concevoir en fonction de l'usage de ces savoirs dans une situation d'enseignement déterminée, donc de leur transposition didactique. La maîtrise de la transposition didactique (Chevallard, 1980) fait partie des savoir-faire professionnels d'enseignement qui comportent des connaissances et savoir-faire sur les objectifs et contenus de programme. La transposition se fait à partir de pratiques, qui mettent en œuvre non seulement des savoirs, mais une culture, un habitus, des attitudes, des savoirs être.

Former des enseignants suppose qu'à partir des pratiques enseignantes, on reconstitue les savoirs et les compétences nécessaires (Arsac et al, 1994). Le curriculum de la formation professionnelle, au niveau du master professionnel "Enseignement d'une discipline", de la Faculté de Pédagogie-Université Libanaise, comporte un volet théorique et un volet pratique (stage). Sa conception est de ne pas se limiter à la simple transmission des connaissances, il tente de développer aussi des savoir-faire et de faire émerger chez le futur enseignant des savoir-être (attitudes, habitus, valeurs, éthique). Les savoirs sont organisés par disciplines, ils n'ont pas exploré les réalités de l'interdisciplinarité, ou de la transdisciplinarité, ainsi que la multidisciplinarité, termes à la mode depuis des années en Europe. Un tel curriculum permet aux futurs enseignants d'acquérir des connaissances et de développer un type de pensées disciplinaires nécessaires à l'exercice "compétent" de la profession, par une articulation alternée des savoirs académiques et des savoirs d'expérience propres à la discipline. Signalons que le programme de la Biologie et de la Didactique de la Biologie (modules primaires pour le master) ne permettent pas d'acquérir des connaissances et des méthodes de travail en mathématiques. De même le curriculum de la Faculté des Sciences-Université Libanaise ne présente aux étudiants de Licence en Science de la vie et de la Terre (Biologie) qu'une formation préliminaire en mathématiques. Dans le cursus universitaire, deux modules de mathématiques sont omniprésents en première année de licence. Un de ces modules est " les Statistiques" dont le contenu est une répétition du contenu scolaire et l'autre est "l'Algèbre" dont le contenu groupe les connaissances de base pour travailler avec les nombres.

Nous abordons dans ce travail la nécessité d'une approche interdisciplinaire de la conceptualisation. Nous voulons rechercher la place que les enseignant(e)s de biologie accordent aux liens interdisciplinaires dans leur enseignement. D'après notre expérience empirique et les curricula libanais universitaires et de formation, nous supposons que les enseignant(e)s de biologie ne peuvent pas transposer ou transférer une conception mathématique afin d'intégrer les acquis de leurs élèves puisqu'ils ne l'ont pas vécue eux-mêmes dans leur parcours de formation professionnelle et universitaire qui est loin d'être interdisciplinaire. D'où nos questionnements :

1. l'enseignement et l'apprentissage de la biologie est-il décloisonné ?
2. l'enseignant(e) de biologie perçoit-il (elle) et met-il (elle) des liens interdisciplinaires, en particulier aux mathématiques, dans son enseignement ?
3. la formation universitaire et professionnelle d'un(e) enseignant(e) de biologie comble-t-elle des besoins interdisciplinaires ?

En enseignement, selon Gauthier et al. (1997), la base de connaissances est l'ensemble de savoirs, de connaissances, d'habiletés et d'attitudes dont tout enseignant a besoin pour accomplir son travail de façon efficace dans toute situation d'enseignement. Ils postulent que, dans l'acte d'enseigner, plusieurs savoirs sont mobilisés

> Il est beaucoup plus pertinent de penser l'enseignement comme la mise en action de nombreux savoirs composant une sorte de réservoir dans lequel l'enseignant puise pour répondre à certaines demandes précises de sa situation d'enseignement (Gauthier et al. p.25).

Ces chercheurs se sont interrogés, comme d'autres, sur la nature des savoirs nécessaires à l'enseignant dans sa professionnalisation. Ils ont trouvé que ces savoirs sont composés principalement :

- de savoirs disciplinaires constitués par les contenus spécifiques de la discipline,
- de savoirs curriculaires définis dans les programmes scolaires par les responsables politiques de l'Éducation Nationale,
- de savoirs issus des sciences de l'éducation acquis par l'enseignant au cours de sa formation ou dans le cadre de l'exercice de sa profession,
- de savoirs de la tradition pédagogique liés à la représentation que s'est forgée l'enseignant à propos de l'école,
- de savoirs d'expérience liés à la pratique quotidienne et routinière du métier, et enfin,
- de savoirs d'action pédagogique constitués de savoirs d'expérience rendus publics, validés à la fois par l'expérience du terrain et par la recherche. (Gauthier et al.p.24)

II. LE SYSTEME EDUCATIF SCOLAIRE LIBANAIS

Au Liban, les écoles sont de deux types : publiques et privées. Ces dernières sont aussi de deux types : laïques ou missionnaires. Certaines sont anglophones et d'autres francophones. Dans toutes les écoles, les sciences ainsi que les mathématiques, sont enseignées depuis les petites classes en l'une des langues étrangères. Les mathématiques s'étendent en matière singulière, sur tous les niveaux de l'Education de Base, alors que les sciences sont partagées en biologie, physique et chimie à partir de la classe de cinquième.

Les programmes libanais publiés par le décret n^{o} 10227 le 8 mai 1997, ont été élaborés de manière à garantir la plus grande cohérence entre le contenu, les méthodes et l'évaluation des acquis. Ils visent parmi d'autres à donner à l'apprenant les connaissances et compétences nécessaires, à développer l'esprit scientifique et les valeurs qui s'y rattachent, à enrichir ses connaissances terminologiques et à assurer les connaissances et les principes scientifiques et mathématiques. Ils sont cloisonnés en matières indépendantes. Ils présentent une entrée par objectifs d'apprentissage ayant comme finalité des compétences à atteindre. La compétence est représentée comme « un ensemble intégré d'objectifs spécifiques ». Certaines de ces compétences sont liées au développement cognitif (mémoriser, gérer le temps d'étude, collecter, sélectionner, tirer des informations, prendre conscience de ses manières d'apprendre, etc.); d'autres renvoient à des opérations mentales comme (déduire, induire, synthétiser, comparer, etc.) ou encore à des mécanismes intellectuels qui figurent dans la taxonomie de Bloom (comprendre, appliquer, analyser, interpréter, synthétiser, évaluer, …) et à des savoir-faire méthodologiques (prendre des notes, structurer un discours, chercher une information, outiller un concept,…). Nous pensons que ce processus d'intégration devrait dépasser les limites d'une seule discipline, et s'étendre sur un champ interdisciplinaire ; d'où la nécessite de mettre en place et de mobiliser des compétences transversales interdisciplinaires. Ces programmes sont suivis dans toutes les écoles sauf les écoles conventionnées et homologuées par des pays étrangers, comme la France. En revanche, le manuel scolaire national est adopté par toutes les écoles publiques, alors que les écoles privées ont la liberté du choix du manuel scolaire. Les mathématiques constituent une activité de l'esprit qui prend les dimensions d'une grande aventure humaine. Elles sont un champ fertile au développement de la pensée critique, à la formation de l'habitude à l'honnêteté scientifique, à l'objectivité, à la rigueur et à la précision. Elles offrent aux élèves des connaissances nécessaires à la vie sociale et des moyens efficaces pour comprendre et explorer le monde réel quel qu'en soit le domaine : physique, chimique, biologique, astronomique, social, psychologique, informatique, etc.. Alors que les objectifs généraux de la Biologie ne sont que des objectifs conceptuels, techniques et méthodologiques. Ils se

focalisent sur la compréhension des principes scientifiques en relation avec la vie quotidienne dans les domaines de la santé, de l'environnement, de la technologie et de l'éthique.

Une étude des manuels scolaires nationaux libanais de biologie, à partir de la classe de cinquième, nous a révélé que les concepts mathématiques nécessaires à la résolution des activités proposées sont, les nombres, les probabilités, les statistiques, les fonctions (linéaires, affines, hyperboliques, sinusoïdales,…) ainsi que leur graphe.

III. METHODOLOGIE ET ANALYSE

Dans l'objectif de répondre à notre problématique, nous avons procédé à une série d'entretiens auprès d'une vingtaine d'enseignant(e)s de biologie en exercice (4 ans d'expérience au minimum) dans différentes écoles publiques libanaises anglophones et francophones. Ces enseignant(e)s ont une licence en Science de la vie et de la Terre au sein de la Faculté des Sciences, et ont suivi, derrière, pour un an, une formation professionnelle pour l'obtention du CAPES (Certificat d'Aptitude Pédagogique pour l'Enseignement Secondaire), dans l'enseignement de la Biologie au sein de la Faculté de Pédagogie - Université Libanaise. Nous présentons un exemplaire de nos questions :

1. Considérez-vous qu'il soit facile d'établir des liens interdisciplinaires dans votre enseignement ?
2. Comment évaluez-vous votre compétence à mettre en œuvre dans votre enseignement les liens entre la biologie et les mathématiques ?
3. Quelles sont les difficultés qui peuvent freiner la modélisation mathématiques dans l'enseignement d'une activité en biologie ?
4. ….

Ces entretiens visent à savoir

1. les conditions et les difficultés que ces enseignant(e)s associent à la mise en œuvre des liens interdisciplinaires dans leur enseignement ;
2. comment ces enseignant(e)s entreprennent les activités qui demandent une modélisation mathématique ;
3. s'il est nécessaire d'acquérir des connaissances mathématiques pour être un(e) enseignant(e) de biologie compétent(e) ;
4. les ressources de référence pour dépasser la difficulté de l'interdisciplinarité avec les mathématiques.

L'analyse de ces entretiens a révélé a) que les liens entre la biologie et les mathématiques ne sont pas prédominants dans les pratiques de ces enseignant(e)s, certain(e)s les qualifient même de difficiles; b) pour ces enseignant(e)s, le problème de la mise en œuvre des liens interdisciplinaires est à associer aux contraintes organisationnelles et institutionnelles; c) que le manque de connaissances en mathématique de certain(e)s enseignant(e)s influe sur leurs interprétations d'un résultat en biologie ; d) certain(e)s enseignant(e)s se considèrent des enseignant(e)s de biologie uniquement et non pas comme des enseignants qui prennent en charge des disciplines scientifiques; e) l'ignorance de la part des enseignant(e)s de biologie des règles de traitement du graphique en mathématique; f) que les enseignant(e)s de biologie s'éloignent du traitement mathématique dans les activités et surtout dans le traitement des graphes; g) le travail des enseignant(e)s de biologie se limite à guider leurs élèves uniquement dans le domaine de la biologie en laissant la charge à certains braves élèves de nouer les liens entre la biologie et les mathématiques.

Pour mieux cerner nos constats, nous allons reprendre et discuter des propos de ces enseignant(e)s. Signalons que leurs verbalisations sont reproduites telles quelles sont dites et que nous avons traduit celles qui sont en anglais.

- La majorité (16 des 20) des enseignant(e)s considère que les mathématiques sont un besoin pour enseigner la biologie, mais ils peuvent s'en tirer sans trop s'y attarder. L'important, pour eux, est que l'élève mémorise la stratégie de résolution sans s'enfoncer dans le concept mathématique non déjà rencontré. Pour exemplifier "*il n'est pas nécessaire qu'un enseignant de biologie connaisse les concepts mathématiques à fond, il lui suffit de savoir un peu d'algèbre*"; "*les mathématiques sont existant sûrement, mais je ne sens pas la nécessité de les connaitre à fond, savoir la biologie est très suffisant*"; "*Pour moi; les mathématiques sont existant surtout dans les graphes et les histogrammes, mais je ne m'occupe que de la variation et je pousse mes élèves à reconnaître le composé qui croît et celui qui décroît*". Les quatre autres enseignant(e)s ont confirmé le besoin des connaissances mathématiques pour réussir leur enseignement "*c'est vrai je suis enseignant de biologie ; mais* je dois *maîtriser les mathématiques pour résoudre tous les problèmes proposés et ne pas fuir certains comme font des collègues*" ; *"Connaître les mathématiques à fond est un grand besoin didactiquement parlan*t".
- 19 enseignant(e)s ont déclaré le besoin d'outiller uniquement les formules mathématiques impliquées. Pour eux, l'élève en biologie n'est pas censé reconnaître les bases mathématiques non déjà apprises avec l'enseignant des mathématiques. Pour exemplifier "*moi, je passe sur un graphe, sans importance sur la nature de la fonction, si elle est une hyperbole par exemple, je n'insiste pas sur le fait qu'elle ne touche pas x, puisque moi je ne sais pas pourquoi*?"; "*la probabilité est trop dure pour moi et pour mes élèves, je cherche des exercices typiques des examens officiels*"; "*Je force mes élèves à comprendre le concept de la biologie, et d'appliquer la formule, plus tard quand l'enseignant des mathématiques passe sur le concept déjà présent l'élève le comprendra, comme exemple la probabilité en génétique*". La 20ème enseignante affirme, contrairement aux autres, "*pour être un bon enseignant de biologie ; il faut être capable de modéliser mathématiquement ; donc connaître bien les concepts mathématiques*" :
- 12 des 20 enseignant(e)s n'ont éprouvé aucune difficulté vis à vis des connaissances mathématiques, puisqu'ils considèrent que dans leur enseignement il ne faut pas puiser dans ces connaissances, pour eux une formule est bien suffisante. Pour exemplifier : "*Pour le calcul de la vitesse de propagation du message nerveux, j'écris la formule et je montre la technique du calcul que les élèves devront appliquer*" ; "*le choix de l'échelle dans un graphe n'est pas important, je le trace à main levée, c'est la variation qui m'intéresse le plus*".
- 3 enseignant(e)s coopèrent parfois avec les enseignant(e)s des mathématiques pour qu'ils anticipent dans leurs explications, ce qui facilitera la tâche à l'élève dans le cours de biologie, et parfois pour avoir une aide dans l'étude d'un graphe ou dans la recherche d'une échelle. Deux autres font appel à leur habitus d'étudiant : " *moi, je n'ai aucune difficulté à outiller des concepts mathématiques car depuis toujours je suis bonne en math*". Une enseignante a fait recours aux connaissances mathématiques de ses élèves. Elle a dit "*si l'élève est bon en math, il peut appliquer sans aucun problème, si non, tant pis, l'enseignant de math lui expliquera*". Les autres confirment, que malgré leurs difficultés à anticiper un concept mathématique pour enseigner un savoir de leur discipline, ils n'ont jamais pratiqué un travail interdisciplinaire et n'ont jamais fait appel aux collègues enseignant(e)s des mathématiques. Ils font recours à des techniques suivant les indications des livres du maître.

Les avis varient en ce qui concerne les difficultés mathématiques dans l'enseignement de certaines activités en biologie. Certain(e)s se sentent mal à l'aise et évitent de traiter des

représentations graphiques. Ils focalisent l'attention de leurs élèves sur la forme et non pas sur le fond. Ce qui nous laisse dire que l'occupation primordiale de ces enseignant(e)s est la représentation visuelle et non pas celle conceptuelle. Ils ne coopèrent pas (ou peu) avec les enseignants des mathématiques.

IV. UNE ACTIVITE PORTANT SUR UNE DIFFICULTE MATHEMATIQUE

"La science est une activité qui consiste à poser et à résoudre des problèmes, et l'apprentissage scientifique doit permettre aux élèves de développer cette compétence" (Orange, 1997). En tant que didacticiennes, et avec une posture critique, nous avançons notre réflexion à travers une situation d'apprentissage (Document 1), tirée du manuel scolaire national de la classe de troisième (élèves de 14-15 ans), dans le but de repérer; à partir du débat scientifique (Johsua et Dupin, 1989), un problème didactique: à quel point un(e) enseignant(e) de biologie est capable d'organiser les nécessités mathématiques pour apprendre aux élèves à appréhender un graphe ?

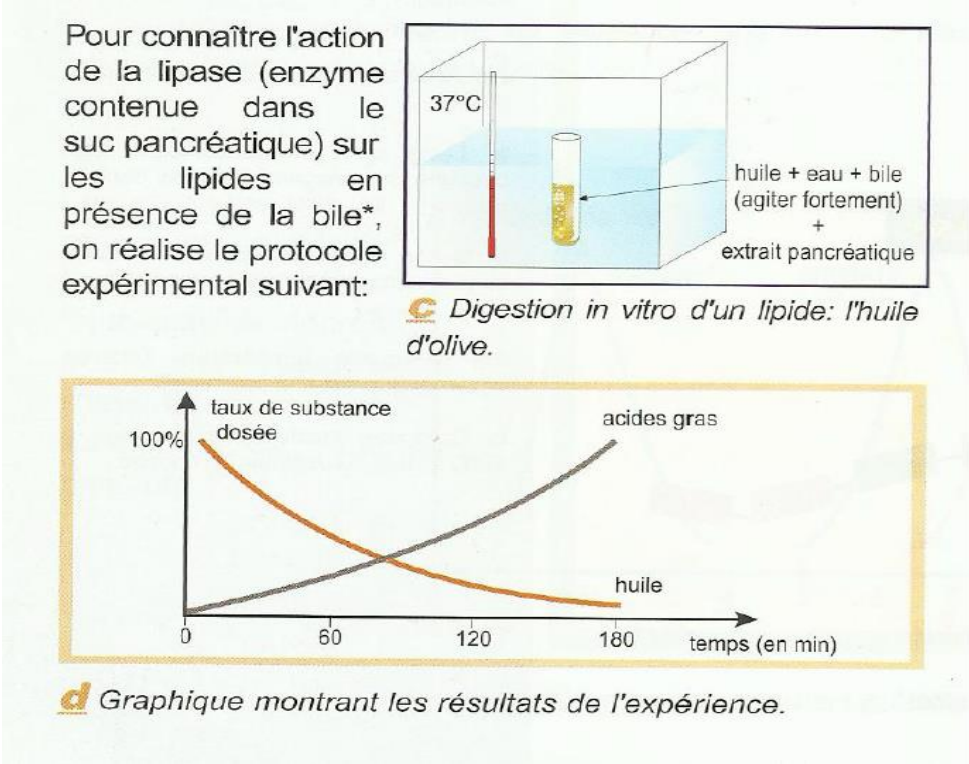


Figure 1

L'une des difficultés de l'enseignement de cette activité réside dans la quantité des mathématiques nécessaires pour que l'enseignant(e) de biologie comprenne ce que cette expérience propose et puisse répondre aux interrogations de ses élèves sur les allures de ces deux courbes.

En nous référant à la nature des savoirs nécessaires à l'enseignant(e) dans sa professionnalisation (Gauthier et al, 1997), nous pouvons proposer la description suivante : les savoirs disciplinaires tournent autour de la digestion de l'huile en présence de la lipase. Cette activité fait partie du chapitre " La digestion" qui est défini dans les programmes

scolaires au niveau de la classe de troisième. L'enseignant(e), dans son cursus scolaire et universitaire, a acquis une formation sur une telle connaissance.

Les enseignant(e)s interrogé(e)s dans l'explication du graphe sont convaincu(e)s qu'il ne s'agit que de confronter la variation de l'huile avec celle de l'acide gras. Ils suivent les indications du livre du maître : *"Le taux de l'huile diminue tandis que celui des acides gras augmente ; conclusion : les acides gras proviennent de l'huile*". Ici tous les enseignant(e)s ont annoncé le manque d'une connaissance biologique : le glycérol qui se produit en même temps que l'acide gras et qui est absent du graphe. Par contre, aucun d'eux (d'elles) n'a une argumentation sur le point de rencontre des deux courbes que l'un des enseignant(e)s l'a appelée "hyperbole" et une autre enseignante l'a désignée par « y=ax + b ». Cette intersection en mathématique désigne la solution commune aux deux fonctions; mais dans ce cas pouvons-nous dire que le taux de substance dosée est le même que la quantité d'acide gras produite au temps t indéfini sur le graphe, tel que 60 t 120, ainsi que le taux? Pour t = 0 min, le taux de l'huile est 100% et celui de la lipase 0%. En revanche, au t = 180 min, il semble que le taux de la lipase est 100%; alors que celui de l'huile qui devrait être 0% ne l'est pas ; la courbe ne touche pas l'axe des abscisses. Il parait que cette courbe tend vers l'infini. En questionnant les enseignant(e)s sur ce graphe, nous n'avons eu aucune réponse de confrontation des connaissances interdisciplinaires. Aucun(e) des enseignant(e)s n'a pu argumenter l'allure des courbes, est-ce-que la disparition de l'huile et la production de l'acide gras sont proportionnelles ? Quelle est la signification de ce point d'intersection ? Pour eux (elles), l'élève doit retenir de ce graphe que l'huile diminue pour former de l'acide gras et du glycérol. Nous nous posons la question suivante : pourquoi présenter les résultats de l'expérience sur un graphe tant que ce graphe ne sera pas interpréter par référence aux connaissances mathématiques qui sont en lien avec les connaissances de la biologie ? La modélisation mathématique doit prendre sa bonne place pour toute interprétation scientifique : Ne faut-il pas se concentrer sur le conceptuel pour donner du sens à l'apprentissage ?

IV. CONCLUSION

Cette étude, non exhaustive rapporte le manque de formation disciplinaire et didactique à l'interdisciplinarité : Elle montre l'importance pour les enseignants de biologie d'avoir des connaissances du champ des mathématiques leur permettant de comprendre les interactions entre les deux disciplines. Elle montre aussi l'influence de la culture disciplinaire des enseignant(e)s et prêche en faveur d'une approche interdisciplinaire. Les enseignant(e)s de biologie, dans leurs pratiques, rencontrent des difficultés à travailler avec leurs élèves des activités dont les stratégies de résolution nécessitent certains concepts mathématiques, ils manquent de références pour les traiter. Ils sont peu préparés à la modélisation mathématique et leurs interactions avec les enseignants des mathématiques sont limitées. Aussi, elle met à jour le problème de la formation initiale et continue des enseignants de biologie pour les préparer ou les accompagner à recourir dans leur enseignement à une approche interdisciplinaire entre mathématiques et sciences. Elle pourrait aussi contribuer à une réforme des curricula et un renouvellement des contenus de l'enseignement de la biologie (Coquidé et al, 2011 ; Abou Raad et Chatila, 2016). Notre point de vue, est qu'une réflexion didactique sur les pratiques enseignantes et la façon de les transposer d'un niveau d'enseignement à un autre est prioritaire et liée à la formation à l'enseignement. Cette formation doit s'inscrire dans une perspective d'interdisciplinarité et permettre de bien saisir l'apport des matières à la compréhension d'une situation donnée.

REFERENCES

Abou Raad N. & Chatila H. (2016) Investigating Lebanese grade seven biology teachers' mathematical knowledge and skill: A case study. *International Journal of Research in Education and Science* (IJRES), 2(2), 428-437.

Aldon G. (2008) *Modéliser, simuler en mathématiques*. Dossiers de l'ingénierie éducative n° 63-64.

Arsac G., Chevallard Y., Martinand J.-L., Tiberghien A. (1994) *La transposition didactique à l'épreuve*. Grenoble : La Pensée sauvage Éditions.

Atlan H. (1979) *Entre le cristal et la fumée*. Paris : Le Seuil.

Chevallard Y. (1980) *La transposition didactique* : La pensée sauvage : Grenoble

Coquidé M. et al. (2011). Espace et temps dans les sciences du vivant : nouvelles perspectives pour la recherche en didactique : *Recherche en didactique des sciences et des technologies*. 4 ; 139-160

Gauthier C. et al. (1997*) Pour une théorie de la pédagogie, Recherches contemporaines sur le savoir des enseignants.* Québec : Les Presses de l'Université Laval.

Johsua S.et Dupin J.-J. (1989) *Représentations et modélisations : le « débat scientifique » dans la classe et l'apprentissage de la physique*. Berne : Peter Lang.

Lange J.M (2000) Rencontres entre les disciplines, *ASTER* N° 30. 2000.

Martinand J-P. (1989) *Pratiques de référence, transposition didactique et savoirs professionnels en sciences techniques*. Les sciences de l'éducation, pour l'ère nouvelle, 2, 23-29

Meyer P. (2012) Comment mathématiser la biologie ? *Rue Descartes*, 74, (2), 20-23.

Orange C. (1997) Problèmes et modélisation en biologie : quels apprentissages pour le lycée. Paris *: Presses universitaires de France*.

UNE SEANCE DE GEOMETRIE ELEMENTAIRE PRENANT APPUI SUR UNE SEANCE D'EPS A-T-ELLE UN POTENTIEL D'APPRENTISSAGE EN GEOMETRIE ? UN EXEMPLE AU CYCLE 3

ARAB HADJ-MOUSSA[*] Mériem

Résumé – Cette recherche questionne les influences mutuelles du méso-espace et du micro-espace dans le cadre de la géométrie élémentaire. Nous avons élaboré et expérimenté une séquence « bi-disciplinaire » avec une première séance phare d'EPS (Education Physique et Sportive) à visée mathématique, dans le but d'introduire la notion de distance d'un point à une droite. Nous questionnons dans notre étude les apports en mathématiques de la convocation de cette notion de géométrie en EPS. Nous relevons ainsi à partir de nos observations, les points d'appuis et les obstacles.

Mots-clefs : méso-espace, micro-espace, problématique pratique, problématique spatio-géométrique, contrat didactique.

Abstract – This research seeks the mutual influences on the meso-espace and micro-space as part of elementary geometry. We elaborated and experienced a sequence « bi-disciplinary » with a first great session of Physical Education aimed at mathematics. Our purpose is to introduce the notion of distance from a point to a straight line. In our study, we question the mathematics contributors about the meeting of this geometry notion in Physical Education. We thus deduce from our observations the points of support and obstacles.

Key-words: meso-space, micro-space, practical problematic, geometric-spatio problematic, didactical contract

I. POURQUOI UNE SEANCE BI-DISCIPLINAIRE ? ARTICULATION DES DEUX DISCIPLINES : GEOMETRIE ET EPS

Notre réflexion sur l'articulation des deux disciplines Géométrie et EPS tient compte d'un travail dans les deux espaces : méso-espace et micro-espace. D'après Guy Brousseau (1983) :

- Le micro-espace *: c'est l'espace des interactions liées à la manipulation des petits objets. Le sujet est à l'extérieur de cet espace accessible immédiatement ou complètement par la manipulation ou par la vision. Les déplacements du sujet et des objets sont possibles.*
- Le méso-espace *est l'espace des déplacements du sujet dans un domaine contrôlé par la vue, les objets sont fixes et mesurent entre 0,5 et 50 fois la taille du sujet.*

Le macro-espace *: c'est l'espace urbain, le sujet est intérieur à cet espace ; il ne peut l'appréhender en une seule fois ; il doit coordonner des visions locales intellectuellement afin d'en construire une vision globale.*

Certains points propres à l'EPS, semblent favorables à cette articulation. Tout d'abord la possibilité de faire travailler les élèves dans le méso-espace pour faire des mathématiques, puis par mesure d'économie, la prise en compte du facteur temps, élément propre aux pratiques de l'école élémentaire : faire de l'EPS tout en visant certains apprentissages mathématiques. Particulièrement dans le méso-espace, nous avons souhaité donner la possibilité aux élèves de développer des compétences en lien avec leurs actions et qui ne sont pas clairement exprimées en classe. De cette réflexion découle naturellement la question :
Comment les deux espaces (micro-espace et méso-espace) se nourrissent-ils mutuellement pour un apprentissage en géométrie ? Notre réflexion s'est ensuite portée sur l'élaboration d'une séquence de géométrie au cycle 3 qui prend appui sur une séance

1 [*] Université Cergy Pontoise - France - meriem.hadj-moussa@u-cergy.fr

d'EPS. Nous avons ainsi réfléchi à la nature de la séance d'EPS qui va permettre de récupérer le méso-espace, plus particulièrement, nous nous sommes posées la question de savoir quel jeu sportif permettrait de poser un problème mathématique pour établir une stratégie gagnante qui conduit au savoir géométrique préconisé. Cette réflexion nous a permis d'avoir nos premières questions, notamment la question naturelle de l'espace qui s'impose avec l'étude des connaissances développables et transférables d'un type d'espace à un autre. Nous observerons ainsi l'impact de la nature de chacun de ces espaces sur les actions des élèves et leurs apprentissages. Les travaux de Berthelot et Salin (1995) montrent que l'enseignement de la géométrie dans la scolarité obligatoire nécessite l'organisation de problématiques associées à des rapports à l'espace très différents, ces problématiques sont identifiées comme suit.

La problématique pratique : les objets sur lesquels on travaille sont des objets physiques. La démarche de résolution est pratique. La validation se fait en restant sur l'espace sensible.

La problématique spatio-géométrique ou de modélisation **:** les objets sont physiques et/ou géométriques. Les validations sont liées au modèle ou à l'espace sensible qu'il modélise.

La problématique géométrique **:** les objets ne sont plus physiques mais théoriques. La démarche de résolution et la validation se font par un raisonnement qui s'appuie uniquement sur des connaissances géométriques reconnues.

Ainsi, notre travail va permettre d'étudier **les influences de la problématique pratique engendrée par un travail sur un espace donné**.

Les deux environnements de travail différents mettent en question la mémoire (Matheron et Salin, 2002), nous questionnons son influence sur certains apprentissages de la géométrie lorsque les élèves passent d'un type d'espace à un autre. **Comment va agir la mémoire pour un transfert de connaissances du méso-espace vers le micro-espace ?**

La géométrie possède un vocabulaire spécifique qui n'est pas toujours familier aux élèves. Notre intérêt porte sur un vocabulaire polysémique, ce vocabulaire commun au langage courant et au langage géométrique peut créer des obstacles chez certains élèves. Notons également que le langage géométrique possède des tournures ou « des façons de dire » qui peuvent être source de difficultés chez les élèves. Nous nous intéressons par conséquent au rôle du langage dans certains apprentissages de la géométrie. (Mathé, 2006).

Quelles sont les influences de l'espace sensible sur la construction d'un vocabulaire géométrique liée à une notion donnée ?

II. LA SEQUENCE

1. Notion de distance d'un point à une droite

La séquence comporte trois séances, elle est basée sur une notion de la géométrie élémentaire du cycle 3 avec un travail sur les deux espaces sensibles méso-espace et micro-espace. Cette notion porte sur la **distance d'un point à une droite** et se déroule avec des élèves d'une classe de CM1. Afin de pouvoir étudier l'influence du méso-espace sur le micro-espace, nous avons introduit cette séquence par une **première séance d'EPS** marquée par une certaine rupture avec les méthodes classiques, mettant ainsi une forme de travail originale à visée mathématique. Cette séance est convoquée en classe plus tard et implicitement par la voie de la mémoire lors des deux séances suivantes. La séquence construite est confiée à une enseignante de CM1 et des fiches de préparation détaillées des séances lui ont été remises. Un travail de collaboration fin et conséquent a pu être réalisé afin qu'elle puisse au mieux s'approprier les éléments fondamentaux des déroulements.

Nous présenterons ici essentiellement l'étude de la première séance considérée comme séance phare, suivra par la suite une analyse plus brève de la séance 2. Enfin, nous concluons en apportant les ouvertures qui se sont révélées à la suite de ce travail.

La séance 1. Nous avons fait le choix d'inscrire la séance 1 en EPS avec pour objectif de faire travailler les élèves implicitement sur une entrée dans la notion géométrique de distance d'un point à une droite dans le méso-espace. Ce choix nous permet de proposer aux élèves, grâce à des variantes d'un jeu classique et traditionnel, diverses recherches leur permettant de visualiser d'une manière pragmatique le fait que le plus court chemin pour aller d'un point à une droite est représenté par la droite passant par ce point perpendiculairement à cette droite. Dans l'élaboration des stratégies de gain des élèves, nous prenons en compte, du fait de la discipline, des compétences sportives dont peuvent faire appel les élèves dans ce type d'activités. Tenant compte de tous ces éléments, notre choix s'est porté sur une variante du jeu sportif « le béret » (cf. Figure 1), jeu classique et bien connu des élèves.

Deux équipes de nombre égal. Chaque joueur porte un numéro. Le béret au milieu de la piste de jeu. **But du jeu :** Ramener le béret dans son camp **Consignes** : A l'appel de son numéro par le maître, les 2 joueurs concernés par ce numéro, courent vers le béret et s'efforcent de le prendre pour le ramener dans son camp sans être touché afin de marquer un point. L'équipe gagnante est celle qui aura marqué plus de points.	

Figure 1 *- Le jeu du béret*

Les variantes du jeu vont être construites de façon à retrouver la configuration spatiale cherchée par rapport à nos intentions en géométrie. Le but étant de proposer aux élèves une situation de recherche pour déterminer la stratégie gagnante de ce jeu qui permettrait essentiellement de prendre conscience de manière pragmatique de la notion de distance d'un point à une droite dans le méso-espace. Cette séquence permettra également de percevoir dans ce type d'espace, que tous les points situés à une distance donnée d'une droite sont alignés.

2. Descriptifs de la séance 1 et analyse a priori

- **Sur la piste de jeu**

Contrairement au jeu classique, nous avons mis en place les ostensifs suivants pour enrichir le milieu : (cf. Figure *2*)

- deux lignes parallèles tracées au sol délimitant la zone intérieure de la piste de jeu.
- les différentes positions du béret sont toutes marquées au sol par une croix.
- des cartons-lettres (de A à F) matérialisent la position de chaque élève.

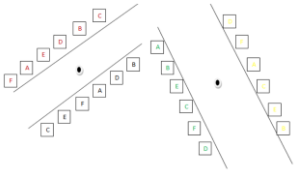


Figure 2 *– Dispositif du jeu du béret*

La situation de la séance 1 se formalise ainsi :

- **Les variables-points** : où placer le béret ? où se placer pour jouer et gagner ?
- **La relation** : former la distance du point-béret à la droite-ligne de position.
  Tous les points de positions possibles du béret sont alignés et se trouve sur une droite parallèle à la droite-ligne de position des élèves.

- **La tâche** : comment se placer par rapport au béret pour gagner ?

- **Les étapes de la séance et analyse a priori**

La séance comporte trois étapes qui correspondent à des variantes particulières du jeu. Ces variantes se cumulent afin de permettre l'évolution vers l'objectif mathématique. Chacune d'entre elles se déroule en trois ou quatre phases :

Phase 1. Les règles et les consignes définies et rappelées par l'enseignante.

Phase 2. La concertation et la recherche par groupe de la stratégie gagnante.

Phase 3. Le jeu effectif.

Phase 4. La mise en commun et l'institutionnalisation. Cette dernière peut ne figurer que partiellement ou pas du tout dans certaines variantes.

Etape 1. Une première variante du jeu classique du béret porte sur les numéros à attribuer aux camarades. Dans cette première étape, il est annoncé aux élèves qu'ils vont jouer au jeu du béret avec un changement de la règle du jeu classique : lors de l'attribution des numéros, chaque équipe réfléchit au choix d'un camarade à qui il sera attribué deux numéros et non un seul. Dans notre **analyse a priori**, nous avons établi que la stratégie gagnante attendue tiendra compte de **deux volets**. **Le premier** consiste à attribuer les deux numéros supplémentaires à l'élève qui se situe au niveau de la lettre qui correspond à la plus courte distance du béret. Mais le facteur vitesse étant pris en compte, **le deuxième volet** de cette stratégie serait de positionner les bons coureurs de son équipe assez loin du béret. Lorsque toutes les équipes sont prêtes, une partie de jeu est lancée avec les différentes phases citées ci-dessus.

Etape 2. Une deuxième variante sur la piste du jeu se rajoute à la première. Dans cette étape nous gardons la règle annoncée à l'étape 1 et nous faisons varier les positions du béret. Les élèves étant habitués à le voir dans le jeu traditionnel, au centre de la piste sans aucun déplacement. Ainsi, l'enseignante pose arbitrairement le béret ailleurs qu'à un point situé à égale distance des deux droites, ces positions, lorsqu'elles auront lieu, seront marquées au sol à la craie de couleur.

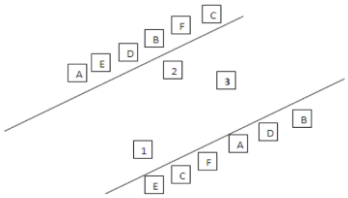


Figure 3 *- Dispositif 1*

Cette configuration (cf. *Figure 3*) va permettre de percevoir les positions possibles du béret qui rend le jeu équitable. Mais surtout, réaliser que tous les points de position du béret sont alignés et se trouvent sur une droite parallèle à la droite, ligne de position. Pour notre **analyse a priori** du jeu avec ce nouveau dispositif, il est attendu que les élèves réagissent rapidement aux nouvelles positions du béret en affirmant qu'ainsi, le jeu devient non équitable. Ils devraient également pouvoir anticiper sur le gain de l'équipe qui se situe sur la ligne la plus proche du béret.

Etape 3. Une variante supplémentaire va porter sur la position des élèves. Avant de la leur annoncer, l'enseignante propose un nouvel emplacement du béret situé sur la ligne médiane mais à un autre endroit que ceux déjà pris pour les étapes 1 et 2 (les croix marquées au sol

aideront à cet emplacement), une nouvelle croix blanche marquera cette nouvelle position. Puis, elle annonce aux élèves de chaque équipe la nouvelle règle qui caractérise cette étape : « Vous avez la possibilité de déplacer au choix une, deux, trois ou toutes les lettres pour les positionner là où vous voulez mais en respectant la limite de la zone intérieure délimitée par les deux lignes des deux équipes, et dans laquelle est posé le béret ».(cf. Figure 4)

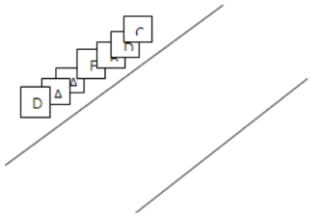


Figure 4 *- Dispositif 2*

Analyse a priori de cette étape : l'enjeu de cette étape est que les élèves puissent repérer et matérialiser leur place, tout en se donnant la liberté de faire chevaucher les cartons-lettres qui matérialisent leurs positions. Les cartons empilés face au béret représentent la position attendue, celle du plus court chemin entre les la ligne des élèves et le béret.

III. ELEMENTS D'ANALYSE A POSTERIORI DE LA SEANCE 1

Pour nos analyses a posteriori, nous avons essentiellement utilisé le cadre théorique de la TSD (Théorie des Situations Didactique), nous avons fait également appel à d'autres théories de l'apprentissage (rôle de la mémoire, du langage,…). Notre premier constat porte sur la **résistance du contrat didactique** lié à la discipline EPS. Il n'y a pas de dialectique avec le nouveau milieu matériel, les élèves ne tiennent pas compte de leur position par rapport au lieu du béret, les cartons posés au sol ne sont pas questionnés. Cette difficulté était prévisible dans cette étape et à ce niveau de la séance. L'enjeu pour les élèves est de gagner un jeu qui, même s'il semble apporter une variante, a déjà été rencontré en séances d'E.P.S. Le facteur vitesse est alors privilégié même pour le choix du camarade portant les deux numéros supplémentaires. La tentative de mobilisation des connaissances mathématiques en utilisant des ostensifs comme les croix (points géométriques) pour désigner les positions du béret n'a pas suffi à une rupture du contrat didactique d'EPS. Le milieu enrichi n'exclut pas l'utilisation du facteur vitesse qui continue de s'imposer. Nous pointons ainsi une **forte prégnance de la problématique pratique.** Lors de l'étape 2, l'enseignante intervient souvent pour ramener les élèves vers une réflexion sur une stratégie gagnante utilisant les mathématiques et rompre ainsi avec le contrat de didactique de l'EPS. Les élèves finissent par évoquer la « distance » entre le béret et l'élève qui joue. A un moment donné, il est question de trouver un moyen pour justifier que deux élèves face au béret sont à égale distance. Les élèves convoquent l'unité du pas pour mesurer, ils utilisent ainsi des moyens pragmatiques en relation avec certaines connaissances pratiques. L'espace sensible ne favorise pas d'emblée l'utilisation d'instruments géométriques pour le mesurage. Cependant, un élève remarque que les mesures réalisées au pas ne sont pas fiables car elles étaient effectuées par deux élèves différents. L'enseignante rebondit sur ce propos et réussit à amener les élèves à proposer le mètre : instrument attendu dans cette phase, mais dont l'intérêt portait sur un autre objet de savoir, celui de mesurer le plus court chemin. Cette phase est caractérisée par une articulation de connaissances spatiales spontanément développées dans une problématique pratique, et des connaissances géométriques qui permettraient une entrée dans une problématique de modélisation. Nous constatons également que les élèves continuent de marquer leur souci d'équité du jeu et ne réfléchissent qu'à la position du béret par rapport à leur position sur la

ligne du jeu. Leur action sur le terrain porte alors sur des déplacements du béret. Il n'était pas prévisible lors de la construction de la séance, de voir surgir dans la méso espace une procédure d'utilisation en acte de la symétrie centrale qui caractérise bien l'équité du jeu. Pour décrire leurs déplacements ainsi que leurs stratégies, les élèves montrent une **difficulté à utiliser un vocabulaire géométrique et sont amenés à accompagner avec le geste certains propos pour mieux se faire comprendre.** L'enseignante tente de relever les ambigüités référentielles relatives au vocabulaire géométrique et conduit ainsi les élèves à rompre avec la problématique pratique engagée pour tenter une problématique de modélisation. L'étape 3 du jeu est particulièrement caractérisée par l'exploitation des cartons-lettres matérialisant la position des élèves. Le rôle de ces lettres étant perçu comme seulement une nomination de chaque élève, l'action se résume donc à un simple échange de lettres et de positions. La robustesse du contrat en lien avec les règles du jeu classique et la compétence sportive de la vitesse, a empêché les élèves à penser des déplacements possibles des cartons qui rendraient l'accès au béret encore plus rapide. Grâce aux interventions de l'enseignante et aux échanges, certains élèves réussissent à saisir les deux points fondamentaux de la stratégie gagnante du jeu. Celui du point de position du béret et celui de leur propre position par rapport à celui-ci, ceci faisant appel à la connaissance spatiale de la notion de distance d'un point à une droite. Finalement, en l'absence d'éléments rigoureux propres à la problématique spatio-géométrique, nous pouvons conclure que cette phase peut être considérée comme une première rencontre avec l'institutionnalisation réelle de la notion de distance d'un point à une droite. Elle a permis l'introduction du vocabulaire géométrique nécessaire à cette notion ainsi que la mise en évidence en acte des propriétés qui en découlent.

La séance 2. La séance 2 de notre séquence a lieu un mois après la première séance, elle se détache de la première et propose une entrée différente de la notion géométrique de distance d'un point à une droite.

Descriptif de la séance 2 et analyse a priori. Nous avons fait le choix d'exploiter l'activité de découverte de la leçon sur la notion proposée dans le manuel Euro Maths (2009)

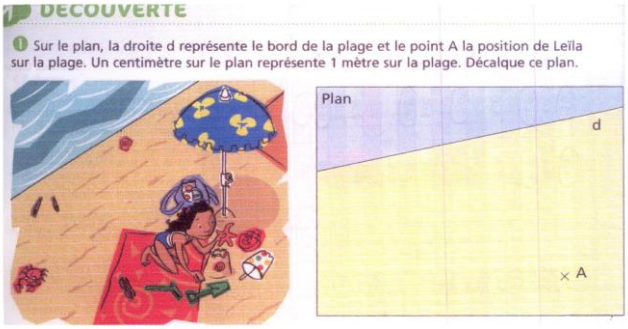


Figure 5 *- Activité de découverte Euro Maths (2009)*

Pour évoquer de manière plus prononcée la situation dans le méso-espace, quelques modifications ont été apportées au déroulement réel de la séance telle qu'elle se présente dans le manuel. Nous nous sommes basées sur le contexte et les données de la situation proposée mais avons fait le choix de relater une petite histoire autour de l'image qui accompagne le dessin géométrique du manuel.

L'étape 1 est une phase de description de l'image sans le plan et sans aucun texte (cf. Figure 5). Dans **l'étape 2**, l'enseignante présente un texte illustrant l'image :

« *à cause de la chaleur le sable est chaud, alors Leila veut aller toucher l'eau en prenant le plus court chemin. Nous allons essayer de l'aider. D'après vous comment allons-nous procéder ?* »

Le plan est introduit dans **l'étape 3**. Le point A représente Leïla et la droite matérialise le bord de mer. Ce plan (cf. *Figure 5*) est accompagné de la question suivante :

Il s'agit de trouver, le plus court chemin qui permet à Leïla de toucher l'eau. Comment est ce chemin, et comment est-il par rapport à la droite d ?

Cette étape se réalise en trois phases : un temps de recherche individuel, un travail en groupe, puis une phase de mise en commun qui aboutirait à une première institutionnalisation de la notion *:« Le chemin le plus court pour aller du point A à la droite est un chemin qui est en ligne droite et qui est perpendiculaire à la droite d ».*

Analyse a priori. Il est attendu à l'étape 2 que les élèves proposent de dessiner un plan de la situation. C'est donc un problème de production dont les variables sont représentées par un point, une droite et une relation entre ce point et cette droite. Le plan attendu est celui qui comportera une ligne matérialisant le bord de la mer et un point pour situer l'emplacement de Leïla (cf. *Figure 5*). Cependant, l'étape précédente et le contexte de l'histoire, pourraient favoriser des procédures qui utiliseraient ce qui a été cité, notamment les objets figurant sur l'image. L'effet du contrat didactique pourrait être suffisamment puissant pour éloigner les élèves de la procédure attendue. Ceux-ci pourraient proposer des réponses plus pragmatiques étoffant ainsi la petite histoire qui leur a été contée. Les diverses interventions de l'enseignante conduiront à la production du plan attendu. Un modèle de celui-ci sera affiché au tableau.

IV. ELEMENTS D'ANALYSE A POSTERIORI DE LA SEANCE 2

L'analyse s'est basée sur les différentes interactions des élèves avec un nouveau milieu dans le micro espace. Le but est de dégager des éléments de réponse relatifs à nos questions portant sur le transfert des connaissances du méso-espace vers le micro-espace et d'étudier le rôle de la mémoire. Nous nous sommes penchés sur les composantes du milieu objectif avec lesquelles l'élève interagit. A l'étape 2, nous constatons que la problématique pratique persiste mais s'affine par une tendance à la modélisation de la situation en fonction de l'histoire et des objets de l'image. Ceci permet de pointer un élément résistant du contrat didactique lié aux pratiques de classe habituelles propres à l'école. Il s'agit là d'une conséquence de l'étape 1 de description de l'image. Du fait de leur engagement dans la problématique pratique, et sans avoir à produire de plan, les élèves ont montré de façon empirique en utilisant seulement les objets de l'image, comment Leïla peut aller toucher l'eau. Ce constat nous permet de pointer une faiblesse sur le modèle choisi porté sur le point A du plan qui semble ne pas être évident pour les élèves. Ainsi, **le plan de l'image proposé représente-t-il un élément pertinent à l'élaboration d'une réponse attendue dans le micro-espace ?** L'enseignante finit par apporter un modèle de la situation : une feuille, une droite (*d*) matérialisant le bord de mer, un point A représentant Leïla. Ainsi, elle fait passer, de façon brutale, les élèves dans une problématique spatio-géométrique. Et c'est à ce niveau de la séance qu'un élève rappelle le lien avec la séance d'EPS en évoquant l'étude : « *pour aller d'un point A à un point B »*. Nous pouvons qualifier ce premier impact de la séance 1 comme portant sur la mémoire didactique. Les élèves, par leur mise en acte d'un savoir mathématique, ont contribué à la construction d'une mémoire de pratique collective (Matheron & Salin 2002), ceci s'est traduit par l'emploi d'ostensifs langagiers *« pour aller d'un point A à un point B »* et sans doute par le transfert des représentations d'images

mentales du terrain de jeu au micro-espace, notamment ici le plan de l'image. Il est par conséquent important de noter la place et le rôle de la mémoire dans cette séance. Elle a pu contribuer à l'enrichissement du milieu, et par conséquent à une évolution de la compréhension de la notion visée ; tout cela accompagné par des interventions pertinentes de l'enseignante. Des élèves ont pu ainsi faire un rapprochement de la situation vécue lors du jeu du béret avec celle de Leïla. Tous ces effets ont permis aux élèves de réaliser, grâce à la mémoire des pratiques et à l'aide des ostensifs disponibles, la possibilité de projeter sur le micro-espace des éléments du jeu leur permettant de comprendre la situation similaire proposée à la séance 2. Notons, que la mémoire est également intervenue dans le vocabulaire, mais les élèves ont donné l'impression de jouer le jeu du contrat didactique en reportant certains termes déjà rencontrés et attendus pour la phase d'institutionnalisation.

V. CONCLUSION

La situation de la séance 1 à spécificité mathématique mais inscrite en EPS, a permis d'étudier dans le méso-espace, la notion de distance d'un point à une droite.

Le caractère a-didactique perturbé par un facteur propre à la discipline d'EPS, a engendré une difficulté au niveau de l'équilibre contrat-milieu avec une forte résistance du contrat didactique propre à l'EPS. Sur les représentations que se confectionnent les élèves lors d'un travail dans le méso-espace, nous avons constaté que la séance 1 a mis en évidence le fait que le milieu objectif et celui de référence contribuent fortement à la construction de représentations mentales anticipant ainsi un travail sur le micro-espace. Les diverses interactions avec ces milieux se retrouvent sous forme de manipulations, d'actions et d'argumentations dans le micro-espace. Nous pouvons souligner que le méso-espace a permis aux élèves de vivre la « distance » avec motivation. Une fois le facteur « vitesse » écarté, les élèves continuent de chercher à rendre la distance au béret minimale. La prégnance de la problématique pratique fait obstacle à la rigueur géométrique. En effet, la taille de l'espace propre à la séance 1 a favorisé une problématique pratique très proche de la réalité. Les élèves faisant aussi partie de l'espace, ont eu un rapport pratique aux objets, ils ont appréhendé différemment les notions de *direction, de lignes droites, d'angles*,… Le contrôle des actions s'est réalisé de façon empirique et il a été difficile de faire intervenir des éléments propres à la géométrie. L'entrée dans une problématique spatio-géométrique marque un saut important. Ceci s'est notamment caractérisé lors de la séance 2, par une introduction assez brutale du plan par l'enseignante.

Finalement, les remarques portées sur la prégnance de la problématique pratique est un élément de conclusion important qui confirme bien les résultats de Berthelot et Salin (1995) qui préconisent un travail simultané dans le micro espace pour confronter l'élève au plan. Notre séquence n'a pas pris en compte ce point lors de sa construction. Nous avons plutôt choisi de faire convoquer par les élèves d'une manière exclusivement pragmatique la notion géométrique de distance d'un point à une droite dans le but de la convoquer plus tard lors de la séance 2 par le biais de la mémoire. En effet, nous constatons que le méso-espace s'avère être un élément pertinent du milieu en rapport avec la mémoire didactique. Celle-ci a permis d'élargir les possibilités d'action des élèves, bien au-delà de leurs connaissances mobilisables. Elle leur a permis de faire le lien entre les éléments de la piste du jeu du béret et les nouveaux objets du micro-espace. Ceci s'est traduit par des allers retours qui ont permis de mieux concevoir l'intérêt du passage à la modélisation des situations proposées dans le méso-espace. Par ailleurs, l'appropriation d'un vocabulaire spécifique de la géométrie, mais possédant un sens quotidien et usuel, semble incertaine. Cette ambigüité est d'autant plus difficile à lever pour les élèves, du fait de leur travail simultané dans les deux espaces (micro-espace et méso-

espace). D'autres points de nos analyses, non exposés ici, ont permis de soulever les questions suivantes :

- Les images mentales basées sur des connaissances disponibles de géométrie sont-elles des outils pertinents, suffisants et efficaces de modélisation ?
- Quelles influences du vocabulaire sur le rôle de la mémoire ?
- Le langage géométrique spécifique peut-il faire obstacle à une construction d'une mémoire basée sur des pratiques ostensives ?

REFERENCES

Berthelot R. & Salin M.H (1995) *Savoirs et connaissances dans l'enseignement de la géométrie,* Différents types de savoirs et leurs articulations (G. Arsaac coord.) Grenoble : La pensée sauvage.

Berthelot R. & Salin M.H (1992) *L'enseignement de la géométrie à l'école dans la scolarité obligatoire*. Thèse Université de Bordeaux.

Brousseau G. (1983) : *Etudes de questions d'enseignement. Un exemple : la géométrie* Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique, LSD IMAG, Université J. Fourier, Grenoble.

Mathe A.C. (2006) *Jeux et enjeux de langage dans la construction d'un vocabulaire de géométrie spécifique et partagé en cycle 3.* Thèse Université Claude Bernard-Lyon 1.

Matheron Y. & Salin M.H (2002) Les pratiques ostensives comme travail de construction d'une mémoire officielle de la classe dans la classe enseignante. *Revue Française de Pédagogie*, 141, 57-66.

LA MODÉLISATION ALGÉBRIQUE DES PROBLÈMES : RAPPORT INSTITUTIONNEL À L'ENTRÉE DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE TUNISIEN

HASSAYOUNE* Slimane

Résumé - L'objet de cet article est d'apporter un éclairage définitoire sur le processus de modélisation mathématique et d'expliciter le rapport institutionnel à ce processus en explorant son écologie dans l'institution *première année secondaire* en Tunisie. Notre quête est de diagnostiquer les éventuelles sources institutionnelles de difficultés des élèves et des enseignants liées à la modélisation.

Mots-clés *:* algèbre, modélisation mathématique, écologie, rapport institutionnel.

Abstract - The purpose of this paper is to shed a definitive light on the process of mathematical modeling and to clarify the institutional relationship to this process by exploring its ecology in the institution of first secondary year in Tunisia. Our quest is to diagnose the possible institutional sources of difficulties of students and teachers related to modeling.

Keywords: algebra, mathematical modeling, ecology, institutional relationship.

I. DÉFINITION ET INTÉRÊT DE LA DIDACTIQUE DE LA MODÉLISATION

Dans la littérature didactique, nous relevons deux directions de recherche concernant la modélisation mathématique : *l'apprentissage par la modélisation* et *l'apprentissage de la modélisation* (Coulange, 1998). De notre point de vue, ces deux directions sont communicantes, voire convergentes. En effet, l'apprentissage par la modélisation nécessite une appropriation préalable et soutenue de son processus et inversement, l'apprentissage finalisé de la modélisation débouche inéluctablement sur son usage dans d'autres apprentissages. Ainsi, la modélisation devrait être considérée, à la fois, comme un outil et un objet d'apprentissage en perpétuelle dialectique.

Par ailleurs, devant la désaffection, de plus en plus constatée, des cours de mathématiques et la désertion des sections scientifiques par la majorité des élèves de par le monde, plusieurs voix se sont levées pour dénoncer les approches théoriques (souvent magistrales) adoptées dans l'enseignement de ces disciplines. Des propositions pédagogiques et didactiques commencent à se faire jour ; on y suggère de donner plus de sens aux apprentissages en privilégiant les activités de résolution de problèmes et de réalisation de projets.

Or, opter pour un apprentissage vivant des mathématiques par le biais d'activités de résolution de problèmes nous conduit *nolens volens* à porter une attention soutenue sur le processus de modélisation intra ou extra-mathématique et à développer ce processus chez nos élèves car l'étude de tout problème nécessite une représentation préalable et plus ou moins exhaustive de ses données et des relations qu'elles entretiennent avec les inconnues avant d'entrer dans le processus de sa résolution.

L'objet de cet article est d'apporter un éclairage sur les principales spécificités épistémologiques et didactiques de la modélisation mathématique et d'analyser le rapport institutionnel à ce processus en explorant son écologie à l'entrée du cycle secondaire tunisien.

* Université Virtuelle de Tunis - Tunisie - slimhass@gmail.com

Notre quête est de repenser l'enseignement/apprentissage de/par la modélisation à travers une nouvelle conception des organisations didactiques prenant en compte les contraintes de ce rapport institutionnel.

Nos investigations sont menées dans le cadre de *La théorie anthropologique du didactique* (Chevallard, 1992) à laquelle nous empruntons les principaux indicateurs écologiques et institutionnels pris en compte dans notre recherche documentaire. Nous avons choisi de prospecter le champ institutionnel dans le contexte de l'enseignement/apprentissage de l'algèbre en première année secondaire (élèves de 15-16 ans), vu l'étroite liaison entre la modélisation et la pensée algébriques - qui sont essentiellement analytiques - d'une part, et le rôle-clé de ce niveau scolaire dans la formation générale des élèves via leur équipement d'une véritable culture mathématique les préparant aux diverses filières d'orientation, d'autre part[1].

Après l'évocation de la genèse épistémologique de la modélisation et le passage en revue des acceptions de didacticiens de mathématiques sur ce processus, nous présenterons succinctement ses principales étapes, puis nous procèderons à l'exploration de sa viabilité à travers la délimitation de ses habitats et ses niches dans les documents officiels en vigueur. Enfin, l'analyse des activités proposées dans le manuel scolaire nous permettra de prospecter les éventuelles sources de difficultés que peuvent rencontrer élèves et enseignants au cours de la résolution des problèmes.

II. DÉFINITION ET INTÉRÊT DIDACTIQUE DE LA MODÉLISATION

Depuis les dernières décennies du vingtième siècle, les épistémologues commencent à se méfier des méthodes syntactiques des théories scientifiques qui considèrent les sciences en tant qu'ensembles d'axiomes et de leurs conséquences logiques. Ils proposent d'adopter des démarches d'investigation sémantiques basées sur la construction de modèles pour mieux rendre compte de la complexité conceptuelle et méthodologique de l'activité scientifique (Moulines, 2006). Certains auteurs de l'époque définissent la notion de modèle de façon formelle à l'aide des concepts de la théorie des ensembles, comme ce fût le cas des logiciens fondateurs de l'école logique américaine de Stanford (Suppes, Mc Kinsey, Adams, etc.) qui se sont inspirés de la théorie sémantique de la vérité de Tarski (1901-1983) et des travaux du groupe Bourbaki. D'autres auteurs définissent la notion de modèle de façon informelle tout en insistant sur son objet de représentation partielle et idéalisée de la réalité.

La modélisation évoque au premier abord l'idée de représentation. Les sciences, qu'elles soient exactes ou empiriques, construisent des modèles pour représenter plus ou moins fidèlement des fragments de réalité. En effet, cette représentation est loin d'être une reproduction à l'identique des objets réels considérés, à l'image d'un miroir qui reflète fidèlement ces objets. Toutefois, faute de pouvoir réaliser un isomorphisme entre le système et son modèle, le scientifique se force et se contente d'accéder à l'établissement d'un rapport plus faible mais informatif entre les deux entités.

1. Ces élèves ont passé six années à l'école primaire et trois années au collège et se préparent à la fin de cette première année secondaire à une pré-orientation à l'une des filières suivantes : Sciences ; Technologie de l'informatique ; Économie et Services ; Lettres. Par ailleurs, après neuf années d'enseignement des mathématiques en langue arabe où ils ont été initiés à quelques rudiments d'algèbre élémentaire, ces élèves sont subitement exposés, à ce niveau scolaire, à un enseignement des mathématiques en langue française.

1. *Une esquisse de définition de la modélisation mathématique*

Chevallard (1989) définit la modélisation mathématique comme une schématisation représentant un système mathématique ou extra-mathématique et un modèle mathématique de ce système. Pour lui, un modèle mathématique est :

Un schéma simplifié qui suppose essentiellement deux registres d'entités: un système mathématique ou non mathématique et un modèle (mathématique) de ce système. (p. 53)

Cet auteur se place dans une optique large permettant de traiter la modélisation mathématique des systèmes en général, qu'ils soient issus du domaine mathématique ou non.

Dorier et al. (2013) définissent la modélisation mathématique comme un processus faisant correspondre deux systèmes en tenant compte des objets mis en jeu, des relations les liant et des questions posées. Ils incluent dans ce processus, outre la construction du modèle, la discussion et l'étude de la correspondance entre le système et son modèle en mettant l'accent sur la dynamique et les rétroactions du processus.

Modéliser signifie : construire, discuter et étudier une correspondance entre deux systèmes incluant des objets, des relations et des questions. (p. 11)

Coulange (1998) s'est intéressée à l'enseignement/apprentissage de la modélisation mathématique des situations de la vie courante en classe de seconde en France et est amenée à définir le modèle mathématique comme :

Une interprétation mathématique d'une situation …relativement à des questions que l'on se pose sur cette situation. (p. 35)

Blum et al. (2007) relèvent trois étapes importantes dans le cycle de modélisation mathématique : la conception et le développement (passage de la situation réelle au modèle réel), la description (recherche et élaboration du modèle mathématique) et l'évaluation (recherche et validation des solutions mathématiques).

Modéliser mathématiquement une situation revient donc à lui faire correspondre une interprétation mathématique simplifiée en tenant compte des données et des questions essentielles de la situation.

La modélisation mathématique est, par conséquent, un processus en deux étapes non nécessairement chronologiquement successives mais en interrelation l'une avec l'autre. Nous les citons ci-dessous :

- On commence par dégager les aspects pertinents du système au regard des questions posées. On épure ainsi le système de toute donnée superflue. Seules les informations essentielles sont retenues. Celles-ci forment ce que l'on appelle *le modèle pseudo-concret du système*.
- Ensuite on traduit ces aspects pertinents par des relations en liant les principales variables du système et en tenant compte des éventuelles contraintes pesant sur celles-ci. On débouche ainsi sur une question mathématique illustrée par des relations symboliques entre les variables en jeu. C'est *le modèle mathématique du système* du départ.

Une fois le modèle mathématique élaboré, on entame alors la résolution du problème posé par le système initial en procédant comme suit :

- On travaille le modèle mathématique obtenu pour en extraire des nouvelles connaissances mathématiques.
- Puis on examine la validité, la pertinence et la fiabilité des résultats mathématiques obtenus en les confrontant aux données, aux contraintes et au contexte du système du départ.

La figure suivante illustre l'agencement de ces étapes et met en exergue l'importance de la rétroaction qui permet la vérification et le contrôle des résultats obtenus.



Figure 1 *- Schéma du processus « modélisation mathématique»*

Par ailleurs, l'usage des nouvelles technologies devient, de nos jours, possible et à la portée des élèves. Dans les cas complexes, les modèles informatiques à support numérique ou graphique permettent de traduire et de traiter des situations mathématiques ou extra-mathématiques avec de très bonnes précisions. Ainsi, par exemple, la modélisation graphique sur ordinateur, s'avère efficace et facile à réaliser dans l'étude des relations entre les variables mises en jeu et dans l'analyse de leurs co-variations. La modélisation informatique permet aussi de provoquer des simulations pertinentes par l'entremise de programmations susceptibles d'affiner et d'optimiser les solutions. L'outil informatique peut également être utilisé pour explorer le degré de validité des modèles adoptés et leurs limites.

2. *La modélisation algébrique d'une situation*

La modélisation algébrique d'une situation faisant intervenir des calculs et des variations de grandeurs est une modélisation mathématique particulière de cette situation. Elle consiste à symboliser les données et les inconnues, à écrire les relations les liant et à opérationnaliser sur celles-ci en usant des règles et des techniques propres à l'algèbre.

Historiquement, la modélisation algébrique s'est fortement développée suite à l'apparition de la démarche analytique[2] et à son exploitation dans la résolution des problèmes. Utilisée au départ par Pappus d'Alexandrie (IV^{e} S) pour résoudre des problèmes de construction géométrique, cette méthode a immigré dans le champ algébrique grâce aux apports de *l'Arithmétique* de Diophante (III^{e} S) et de *l'Algèbre* des mathématiciens arabes (du début du IX^{e} S jusqu'au moyen âge). À la fin du XVI^{e} S Viète (1540-1603) créa ce qu'il appelle *l'art analytique* ou *l'algèbre nouvelle*. La résolution algébrique de tout problème de calcul de grandeurs est alors devenue possible grâce à la symbolisation des inconnues et des données (paramètres) et à l'opérationnalisation sur celles-ci.

L'exemple du problème suivant et de sa solution illustre bien la démarche modélisante et analytique utilisée alors par Viète :

2.Cette démarche appelée aussi *méthode du problème résolu*, consiste à partir de ce que l'on veut obtenir en se demandant d'où est-ce qu'il peut provenir, et en procédant ainsi de proche en proche, on arrive à un résultat connu ou admis qui constitue alors un point d'ancrage pour amorcer une synthèse permettant de résoudre le problème.

Problème : Étant donné la différence de deux côtés et leur somme, trouver les côtés.
Solution : Soit B la différence des deux côtés, et soit D leur somme.
Soit A, le côté le plus petit, donc le plus grand sera A + B. Pour cette raison la somme des côtés sera 2A + B. Ce qui est la même chose que D. Et … A sera égal à (D-B)/2.
Soit E le côté le plus grand. Le plus petit sera donc E - B. Pour cette raison la somme des côtés sera 2E - B. Ce qui est la même chose que D. … E sera égal à (D+B)/2.
Donc la différence des deux côtés et leur somme étant données, les côtés seront trouvés. En effet, la moitié de la somme des côtés moins la moitié de la différence est égal au côté le plus petit ; les mêmes quantités ajoutées donnent le plus grand côté. C'était la recherche à faire.
Soit B 40, D 100, A fait 30 et E 70. (Boyé, 2003, P. 10)

Viète commence par symboliser les données du problème (la différence et la somme des côtés) respectivement par les deux consonnes *B* et *D* ; et en symbolisant le côté le plus petit par la voyelle *A*, il obtient une autre écriture de la somme qu'il égalise avec *D* pour aboutir à l'équation *A+(A+B)=D* dont la solution est la valeur du plus petit côté *A* en fonction des données *B* et *D*.

Par ce processus de modélisation, Viète permet de parcourir l'étude de toute une famille de problèmes. Il ne se contente pas de fixer numériquement la différence et la somme des côtés, mais il modélise le problème dans sa forme la plus générale en symbolisant aussi bien les inconnues que les données. L'opérationnalisation sur celles-ci et la traduction des relations par des équations paramétrées lui permettent ainsi de résoudre une infinité de problèmes faisant partie de cette famille. Ce n'est qu'à la fin du travail formel que Viète entreprend d'envisager des exemples numériques en les remplaçant dans les formules générales trouvées.

Descartes (1637) précise davantage la modélisation algébrique en insistant sur la possibilité d'exprimer certaines grandeurs de deux manières différentes en nombre égal au nombre des termes inconnus ; la règle pour la direction de l'esprit numéro XIX stipule que:

C'est par cette méthode qu'il faut chercher autant de grandeurs exprimées de deux manières différentes que nous supposons connus de termes inconnus, pour parcourir directement la difficulté ; car, par ce moyen, nous aurons autant de comparaisons entre deux choses égales.(p. 328)

Grâce à l'apport de cette règle, le schéma du processus de modélisation se précise davantage et devient :

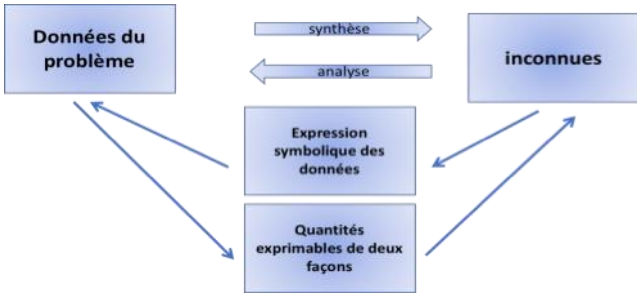


Figure 2 *- Schéma du processus de modélisation intégrant la règle XIX pour la direction de l'esprit, inspiré de (Gascon, 1993, p. 52).*

Gascon (Ibid., p. 54) explicite le développement de la démarche *analyse/synthèse* et son évolution vers la modélisation algébrique en évoquant deux variations : La première variation, basée sur les apports de Viète et de Descartes, aboutit à ce qu'il appelle *modèle reformulé* ; tandis que la seconde variation qui s'appuie sur le changement des données en paramètres conduit au *modèle algébrique*.

3. Avantages didactiques du développement du processus «modélisation algébrique»

Le développement du processus de modélisation algébrique chez les élèves favorise l'atteinte de plusieurs objectifs didactiques liés aux champs sémiotique, sémantique et technologico-théorique.

Sur le plan sémiotique, la modélisation algébrique des situations offre des possibilités diverses de symbolisation aussi bien des quantités inconnues que des quantités données et permet ainsi le traitement des cas généraux et l'étude des conditions d'existence et d'unicité des solutions par l'introduction de paramètres. D'autre part, l'analyse sémantique -en amont et en aval- du système visant à sélectionner les informations pertinentes et à contrôler la validité des solutions mathématiques trouvées, implique davantage les élèves dans les tâches qui leur sont confiées et rend ainsi les apprentissages plus significatifs. La modélisation algébrique des situations permet aussi d'élargir l'environnement technologico-théorique[3] du travail à travers les opportunités offertes par les tâches de transformation et les techniques de manipulation des expressions algébriques. Ceci permet également d'accroitre les connaissances sur le système modélisé et de s'ouvrir ainsi sur de nouvelles questions.

Eu égard à toutes ces considérations didactiques, il apparait donc que le développement de la modélisation algébrique chez les élèves favorise leur motivation, donne du sens aux apprentissages et rend les connaissances disponibles plus fonctionnelles.

III. ANALYSE ÉCOLOGIQUE : QUESTIONNEMENT DE LA VIABILITÉ DU PROCESSUS DE MODÉLISATION DANS L'INSTITUTION «PREMIÈRE ANNÉE SECONDAIRE»

1. Analyse du programme scolaire

L'analyse du programme de la première année secondaire (élèves de 15-16 ans) en vigueur (Ministère de l'Éducation, 2005) nous a permis de préciser les habitats et les niches du processus « modélisation mathématique »

Les instructions officielles prescrivent clairement que les mathématiques doivent s'ouvrir sur l'environnement des élèves et sur les autres disciplines :

Au cours de la première année secondaire, les élèves utiliseront, appliqueront et apprécieront les mathématiques dans des situations familières ou non familières, dans des contextes mathématiques ou en rapport avec l'environnement. (p. 5)

Le programme scolaire en vigueur réserve une place importante au développement du processus de modélisation. Il préconise de développer chez les élèves des aptitudes de modélisation de situations réelles dans les cinq genres d'activités mathématiques retenus pour ce niveau scolaire (*activités numériques, activités algébriques, activités géométriques, activités dans un repère, mesure de grandeurs*).

Nous rapportons dans le tableau 1 ci-dessous, tous les libellés du programme scolaire se rapportant à la modélisation mathématique en indiquant particulièrement les habitats et les niches de ce processus tels que préconisés par l'institution *première année secondaire*.

3. Au sens de *la théorie anthropologique du didactique* qui considère le bloc [technologie, Théorie] en tant que bloc des Savoirs mathématiques servant à expliquer et justifier les procédés techniques déployés dans la réalisation des tâches.

pages	habitats	niches
6	Introduction	« Les élèves développeront leurs aptitudes à …modéliser des situations réelles… »
9	Activités numériques	« Les élèvent modélisent des situations réelles menant à la proportionnalité … »
10	Activités algébriques	« Les élèves modélisent des situations réelles menant à des équations, inéquations ou fonctions linéaires ou affines »
12	Activités géométriques	« Les élèves modélisent des situations réelles menant aux figures de base du plan et de l'espace»
14	Activités dans un repère	« Les élèves modélisent des situations réelles en produisant des représentations graphiques »
15	Mesure des grandeurs	« Les élèves modélisent des situations réelles menant à des mesures des grandeurs simples ou composées »

Tableau 1 *- Habitats et niches du processus « modélisation »*

Ce rapide survol du programme scolaire nous permet à présent d'entrevoir un premier aspect du rapport institutionnel à l'objet de savoir « modélisation mathématique ». Le programme réserve un vaste habitat et une niche multiple et pratique au processus « modélisation » ; mais nous constatons qu'aucune allusion explicite n'est faite à une quelconque méthode de modélisation. En outre, aucune précision n'est énoncée à propos de la technologie et de la théorie[4] qui sont susceptibles de supporter le développement de la praxéologie « modélisation mathématique ».

IV. Du côté du manuel scolaire

Un seul manuel scolaire (Mcharrek et al., 2005) est utilisé par tous les élèves tunisiens de ce niveau scolaire. Chaque chapitre du manuel est structuré en sept rubriques : « Reprendre », « Découvrir », « Retenir », « S'auto-évaluer », « Mobiliser ses compétences », « Exercices et problèmes » et « math-culture ». Nous envisageons de compléter nos investigations sur le rapport institutionnel à la modélisation algébrique à travers l'analyse de quelques activités[5] du chapitre « Équations et inéquations du premier degré à une inconnue ».

Dans la rubrique « Découvrir », six des dix activités proposées portent sur des situations réelles. Seules les deux dernières, puisées des domaines biologique et économique, demandent aux élèves d'élaborer une modélisation algébrique par le biais de la question « Mettre le problème en équation », mais aucune indication n'est donnée sur la méthode à entreprendre pour ce faire.

Dans la rubrique « Retenir », qui est censée résumer le savoir mathématique institutionnalisé du chapitre, nous n'avons relevé aucune trace théorique ou pratique d'indications ou de point de méthode en lien avec le processus de mise en équation. Ceci

4. Conformément à la théorie anthropologique du didactique, une technologie est un discours servant à justifier les techniques adoptées dans la réalisation des tâches alors qu'une théorie est le discours qui explique et étaye la dite technologie.

5. Des exemples de ces activités sont présentés en annexe ci-joint.

prouve l'aspect para-mathématique attribué à la modélisation mathématique par l'institution en la considérant comme un outil susceptible d'être appris sur le tas sans faire l'objet d'un enseignement/apprentissage mathématique spécifique.

Dans la rubrique « Mobiliser ses compétences », deux situations sont proposées dans lesquelles les inconnues sont explicitement précisées et symbolisées par l'énoncé laissant aux élèves la seule tâche d'écrire et de résoudre l'équation obtenue.

Dans la rubrique « Exercices et problèmes », 14 exercices et problèmes concrets, puisés de la vie courante, sur 23 - soit 60% - sont proposés et leur résolution nécessite une modélisation algébrique.

Cette brève analyse du manuel scolaire confirme les précédents résultats concernant l'importance de la modélisation mathématique préconisée par le programme scolaire. Toutefois, il apparait que ce processus cognitif est réduit à une simple symbolisation littérale des inconnues (souvent explicitement indiquées par les énoncés des problèmes proposés) et l'écriture des relations qu'elles entretiennent avec les données. Ceci ne manque pas d'appauvrir *le topos* des élèves dont les tâches deviennent techniques et calculatoires, car dans ces conditions - où les problèmes sont présentés sous forme de modèle pseudo-concret - ils ne sont pas amenés à mobiliser le processus de modélisation mathématique à proprement parler.

V. CONCLUSION

En conclusion, vu l'importance donnée à la modélisation mathématique dans les libellés du programme de la première année secondaire en Tunisie et le nombre élevé d'activités, d'exercices et de problèmes du manuel scolaire nécessitant la mobilisation de ce processus, il apparait que cette modélisation est appelée à vivre -dans l'institution *première année secondaire en Tunisie*- dans l'habitat « Équations et inéquations du premier degré à une inconnue» en tant que véritable enjeu d'apprentissage. Toutefois, n'étant pas explicite dans les instructions officielles, et absente de la rubrique des savoirs mathématiques institutionnalisés, cette modélisation n'est pas reconnue en tant qu'objet d'apprentissage, et nous pouvons même faire l'hypothèse que les enseignants lui réservent une place minime dans leurs organisations mathématiques et didactiques. Ceci pourrait générer diverses difficultés, aussi bien pour les élèves que pour les enseignants lors de la résolution de problèmes en contextes réels, ce qui est confirmé par les faibles scores des élèves tunisiens aux évaluations internationales qui focalisent de plus en plus sur la disponibilité et la mise en fonction des connaissances mathématiques *in situ*. En effet, à l'enquête PISA 2012, 10% seulement des élèves tunisiens sont au-dessus du seuil minimum (niveau 2) relativement au processus « Modéliser mathématiquement des situations ».

Pour remédier à ces difficultés, nous suggérons d'exposer les élèves, plus souvent et tout au long de leur cursus scolaire, à des problèmes en rupture avec le contrat didactique habituel et dont la résolution nécessite une modélisation mathématique non évidente (situations complexes, introduction de données superflues, inconnues non apparentes, outils mathématiques non indiqués, etc.) et d'institutionnaliser les savoirs et savoir-faire construits et liés à cette modélisation.

RÉFÉRENCES

Blum W. & Leiss D. (2007) How do students and teachers deal with mathematical modelling problems? The example "fillig up", in Haines et al. (Eds.) *mathematical modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics* (221-231). Chichester : Horwood Publishing.

Boyé A. (2003) *François Viète, inventeur de l'algèbre* ? IREM, Pays de la Loire.

Chevallard Y. (1989), Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement, perspectives curriculaires : La notion de modélisation, *petit x*, n°19, 43-72.
Chevallard Y. (1991) Concepts fondamentaux de la didactique : Perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en didactique des Mathématiques*, vol. 12(1), 73-112.
Coulange L. (1998) Les problèmes concrets à mettre en équations dans l'enseignement, *petit x*, n° 47, 33-58.
Descartes R. (1637) Règles pour la direction de l'esprit, *Œuvres de Descartes*, édition Levrault, 1824-1826, tome XI (pp. 201-329). Consulté sur le site : https://fr.wikisource.org/wiki/R%C3%A8gles_pour_la_direction_de_l%E2%80%99esprit
Dorier et al. (2013) la modélisation dans l'enseignement des mathématiques en suisse romande, *petit x n° 91*, 5-24.
Gascon J. (1993) Un nouveau modèle de l'Algèbre élémentaire comme alternative à l'arithmétique généralisée, *Petit x*, n° 37, 43-63.
Mcharrek R. et al. (2005) *Mathématiques, Première année secondaire*, CNP, Tunisie.
Ministère de l'Education (2005) *Programme de la première année secondaire*, Tunisie.
Moulines C. U. (2006) *La philosophie des sciences : l'invention d'une discipline, fin XIX^{e}/début XXI^{e} siècle*, édition rue d'Ulm, Paris.

ANNEXE : ACTIVITES DU MANUEL SCOLAIRE DE LA 1^{ERE} ANNEE SECONDAIRE (MCHARREK, 2005)

Rubrique « Découvrir »

Activité 9 (p. 200)

Les biologistes estiment qu'au repos, en une minute, 13% du volume du sang envoyé par le cœur sert à irriguer le cerveau, 19% sert à irriguer les reins. Le reste correspond à 390 ml et sert à irriguer le reste du corps.

1- Mettre le problème en équation.

2- Déterminer le volume (en ml) du sang envoyé par le cœur.

3- Quel est le débit du sang envoyé par le cœur en l s ?

Activité 10 (p. 200)

Un marchand possède une certaine somme d'argent. La première année il dépense sur cette somme cent livres, il augmente ensuite ce qui lui reste d'un tiers. La seconde année il dépense encore cent livres, il augmente ensuite ce qui lui reste d'un tiers. La troisième année il dépense encore cent livres, il augmente ensuite ce qui lui reste d'un tiers. Il se trouve alors deux fois plus riche qu'au commencement de la première année.

1- Mettre le problème en équation.

2- Quel est le capital du marchand à chaque année ?

Rubrique « Mobiliser ses compétences »

Situation 1 (p. 205) [l'énoncé de la situation est accompagné d'une figure portant les données et l'inconnue, notée x, du problème]

Chez un mathématicien arabe du XIème siècle, on trouve le problème suivant : « Sur chaque rive d'un fleuve se trouve un palmier, l'un vis à vis de l'autre. La hauteur du premier est de 30 aunes, et celle du second est de 20 aunes. La distance entre leurs pieds est de 50 aunes. Un oiseau est perché sur la cime de chaque arbre. Brusquement les oiseaux ont aperçu un poisson à la surface de l'eau, ils se sont jetés sur lui et l'ont atteint au même instant. À quelle distance du plus grand palmier se trouvait le poisson ? »

Rubrique « Exercice et problèmes »

Problème 10 (p. 209)
La lettre x désigne le chiffre des centaines du nombre 9x27. Pour quelles valeurs de x le nombre 9x27 est divisible par 3 ?
Problème 18 (p. 210)
Actuellement l'âge de Mohamed est le triple de l'âge de sa fille. Dans quelques années, Mohamed aura le double de l'âge de sa fille et la somme de leurs âges sera égale à 96 ans.
Quels sont les âges actuels du père et de la fille ?

LA CONSTRUCTION DU CONCEPT PHYSIQUE DE VOLUME EN CYCLE III : QUELLES DIFFICULTES ? QUELLES STRATEGIES DIDACTIQUES ?

JAVOY[*] Sandra – DECROIX[**] Anne-Amandine – de HOSSON [***] Cécile

Résumé – Une étude sur la construction du concept de densité en cycle 3 nous a amené à questionner l'enseignement et l'apprentissage du volume à l'école élémentaire. Nous présentons ici les résultats d'une enquête du cadre institutionnel et des représentations des élèves sur ce concept multidisciplinaire, faisant émerger des difficultés de conceptualisation inhérentes à une approche principalement mathématique du volume que nous proposons de surmonter par un scénario d'enseignement de son sens physique.

Mots-clefs : volume, concept multidisciplinaire, cadre institutionnel, conceptions, scénario d'enseignement

Abstract – A study on the construction of the concept of density in fifth grade led us to question the teaching and learning of volume in elementary school. Here we present the results of a survey of the institutional framework and students' representations of this multidisciplinary concept. This survey reveals difficulties of conceptualization probably linked to a mainly mathematical approach of the concept of volume. We propose to overcome these difficulties through a teaching scenario based on the physical meaning of the concept of volume.

Keywords: volume, multidisciplinary concept, institutional framework, students' conceptions, teaching scenario

I. CONTEXTE

Cette contribution trouve sa source dans une recherche en cours ayant pour objectif l'élaboration d'une séquence d'enseignement permettant d'initier la construction du concept de densité en cycle 3, mentionnée dans les textes officiels comme exemple de propriété permettant de caractériser un échantillon de matière et de distinguer les matériaux.

La densité, pour les solides et les liquides, est définie comme le rapport de la masse d'un corps sur celle d'un même volume d'eau liquide à 4°C. Dans le cas d'un matériau à l'état solide, la densité permet en outre de prévoir son comportement lors de son immersion dans l'eau liquide (**Figure 1**). En tant que concept, la densité s'inscrit donc dans un système conceptuel complexe, comprenant notamment les concepts de masse et de volume et sa conceptualisation par les élèves ne peut donc probablement pas se réaliser en dehors d'une bonne compréhension du sens physique de ces grandeurs. C'est d'ailleurs ce qu'indiquent les résultats de l'étude menée par Hashweh (2016) auprès d'élèves de 12-13 ans, qui portait sur l'enseignement et l'apprentissage de la masse volumique[5]. Son étude montre notamment qu'une bonne compréhension du sens physique du concept de volume permet aux élèves une

[1] [*] Université d'Orléans, LDAR (EA 4434) UA UCP UPD UPEC URN - France – sandra.javoy@univ-orleans.fr

[2] [**] LDAR (EA 4434) UA UCP UPD UPEC URN - France – aamandine.decroix@espe-lnf.fr

[3] [***] LDAR (EA 4434) UA UCP UPD UPEC URN - France – cecile.dehosson@univ-paris-diderot.fr

[4] BO de nov. 2015, disponible à http://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?pid_bo=33400.

[5] La masse volumique d'une substance (density en anglais) étant la masse d'une substance par unité de volume, cette grandeur physique est intimement liée à la densité ; la définition de la densité est d'ailleurs bien souvent ramenée au rapport de la masse volumique de la substance sur celle de l'eau.

meilleure conceptualisation de la masse volumique et les amène notamment à associer plus facilement le volume d'un solide au volume d'eau déplacé lors de son immersion. L'étude menée par Hashweh confirme par ailleurs les travaux de Piaget & Inhelder (1941) selon lesquels le co-développement de la densité avec le volume pourrait favoriser la conceptualisation de la densité.

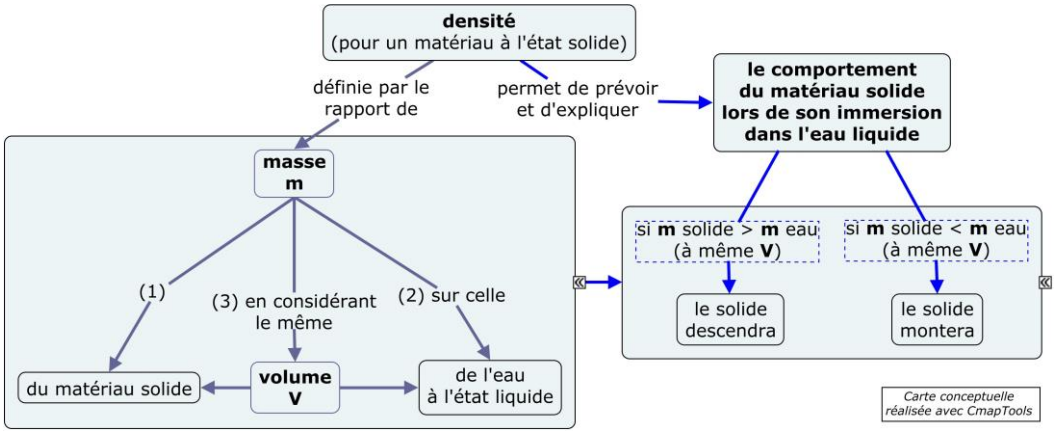


Figure 1 *– Carte conceptuelle de quelques caractéristiques épistémologiques de la densité, mettant en évidence les relations trophiques du concept de densité avec les concepts de masse et de volume*

Ainsi notre étude portant sur la construction du concept de densité en cycle 3 nous a conduites à explorer l'enseignement et l'apprentissage du volume à l'école élémentaire, dans un contexte où, à notre connaissance, très peu voire aucune étude en didactique de la physique portant spécifiquement sur le concept de volume n'est disponible dans la littérature.

II. PROBLEMATIQUE

En physique, le volume d'un solide, comme celui d'un liquide, est une grandeur extensive qui renvoie à l'espace occupé par le solide ou le liquide. Selon le Centre National de Ressources Textuelles et Lexicales (CNRTL)[6], le volume du solide (pris dans son acception mathématique) renvoie d'une part, à « une figure à trois dimensions, délimitée par plusieurs faces jointives » et d'autre part, à la « mesure de cette figure, calculée selon certaines formules mathématiques ». Cette polysémie à l'œuvre selon la discipline considérée peut, d'après nous, constituer un obstacle lexical (au sens d'Astolfi & Peterfalvi 1993) et être source de difficulté pour les élèves si une distinction n'est pas explicitement opérée par les enseignants. En outre, plusieurs études, notamment celle de Dawkins et *al.* (2008) sur l'enseignement de la masse volumique et celle d'Akatugba & Wallace (1999) sur les processus mathématiques utilisés par les élèves lors de la résolution de problèmes de physique, semblent indiquer qu'une introduction trop précoce du formalisme mathématique peut détourner les élèves du sens physique de certaines grandeurs physiques ou que l'utilisation de relations mathématiques, qui semble être privilégiée par les élèves une fois introduites, pourraient faire oublier le sens des concepts physiques. La primauté de la mathématisation de concepts scientifiques dans la pensée des élèves pourrait alors faire écran à la compréhension d'autres grandeurs associées (comme le volume pour la densité). Nous

[6] Source : http://www.cnrtl.fr.

[7] Même si cette définition ne convient pas à tous les solides, comme une sphère qui possède une surface non plane, elle semble renvoyer le concept de volume aux formes solides (cube, parallélépipède rectangle,…) définies en géométrie, par opposition aux formes simples (carré, rectangle,…).

avons ainsi des raisons de penser que la projection mathématique du mot « volume », approché par la mesure et l'utilisation de relation mathématiques, pourrait faire obstacle à la construction de son sens physique et donc être génératrice de difficulté pour l'apprentissage de la densité.

La coexistence de deux unités de mesure du volume (le litre et le mètre cube), peut également, selon nous, constituer une difficulté à l'apprentissage du volume, puisque dans le langage courant, le litre (et ses multiples) est principalement associé au volume d'un liquide ou à une capacité (ou contenance), tandis que le mètre cube (et ses multiples) est plus généralement associé au volume d'un solide. Cette distinction d'usage des unités pourrait conduire les élèves à opérer une différenciation entre la définition du volume pour un solide et celle pour un liquide, ne leur permettant alors ni de comparer, ni de se rendre compte d'une égalité de volume entre un solide et un liquide, qui est une nécessité d'une part, pour amener les élèves à associer le volume d'un solide au volume d'eau déplacé lors de son immersion et d'autre part, pour initier la construction du concept de densité par comparaison de masses, à volumes identiques, entre un solide et de l'eau à l'état liquide.

En termes d'analyse écologique (Chevallard 1986), le concept de volume semble donc vivre dans des univers épistémologique et culturel différents : l'univers des mathématiques, celui de la physique et celui de la vie quotidienne. L'habitat écologique du concept de volume étant distinct d'un univers épistémologique et culturel à l'autre, son rôle fonctionnel l'est probablement aussi, ce qui peut rendre la circulation cognitive difficile, notamment si un changement de niche écologique est opéré par l'enseignant sans que cela soit explicitement travaillé avec les élèves. C'est cette dimension qui est ici à l'étude et qui engage une exploration du cadre institutionnel (les programmes) et des conceptions des élèves sur le volume à la fin de l'école élémentaire. Aussi, nous présentons dans cet article les résultats d'une analyse des attendus institutionnels concernant l'enseignement du volume à l'école élémentaire et les résultats d'un examen des conceptions sur le concept de volume d'élèves âgés de 10 à 13 ans, sur lesquels nous nous sommes appuyées pour proposer une stratégie didactique susceptible de favoriser l'apprentissage du sens physique du volume, nécessaire à la construction du concept de densité.

III. METHODOLOGIE

Dans un premier temps, nous avons réalisé une analyse du cadre institutionnel à partir de l'étude du BO de novembre 2015. Nous avons examiné les prescriptions institutionnelles en cycles 2 et 3, d'une part, en sciences (en particulier dans le thème «Qu'est-ce que la matière ? », en cycle 2 et dans les thèmes « Matière, mouvement, énergie, information » et « Matériaux et objets techniques », en cycle 3), et d'autre part, en mathématiques : en particulier dans le domaine « Grandeurs et mesures ». Cette analyse a été complétée par l'étude des ressources d'accompagnement disponibles sur le site Eduscol .

Dans un deuxième temps, nous avons recensé les conceptions des élèves sur le concept de volume mises en évidence par plusieurs études didactiques sur l'enseignement et l'apprentissage de la masse volumique et par les travaux, en psychologie du développement,

---

[8] Disponible à http://eduscol.education.fr/.

[9] Nous nous sommes appuyées sur ces études puisque d'une part, et à notre connaissance, aucune étude en didactique de la physique portant spécifiquement sur le concept de volume ou de densité n'est disponible dans la littérature et que, d'autre part, la

de Piaget & Inhelder (1941). Ce recensement a été complété par nos propres constatations obtenues à partir d'une part, d'entretiens individuels menés auprès de trois élèves de 6e (de 11 et 12 ans, identifiés par les lettres *L*, *Am* et *An* par la suite) de deux collèges différents, en début d'année scolaire 2016-2017, permettant ainsi d'identifier leurs conceptions avant que ne leur soit réintroduit le concept de volume. Nous avons d'autre part réalisé un entretien avec deux élèves de 11 ans d'une même classe de CM2 (identifiés par les lettres *E* et *S* par la suite), en fin d'année scolaire 2016-2017, afin d'identifier leurs conceptions à la fin de l'école élémentaire. Les trois premiers entretiens étaient constitués de questions principalement supportées par la comparaison de différents objets qui devaient permettre d'identifier les conceptions des élèves relatives aux savoirs de références qui nous paraissaient pertinents pour la construction du concept de densité. En référence aux caractéristiques épistémologiques de la densité présentées dans la **Figure 1** et concernant plus spécifiquement le concept de volume, nous avons ainsi questionné les connaissances et représentations des élèves sur son sens physique, sa conservation lors de la déformation d'un solide ou la forme d'un récipient contenant un liquide et sur les outils et instruments de mesure ou de comparaison de cette grandeur. Nous avons réalisé une analyse qualitative des transcrits de ces entretiens que nous avons complétée par une analyse lexicométrique, effectuée à l'aide du logiciel Iramuteq. L'entretien en binôme nous a permis de compléter l'identification des conceptions des élèves sur le concept de volume.

Les résultats de ces deux analyses nous ont permis d'identifier un certain nombre d'éléments susceptibles d'être générateur de difficultés pour la compréhension du sens physique du volume et donc source d'obstacles à la construction de la densité en cycle 3. C'est au regard de ces enquêtes que nous proposons finalement un scénario d'enseignement permettant la conceptualisation du volume qui permettrait de favoriser l'apprentissage de la densité.

IV. RESULTATS DE L'ENQUETE SUR LE CADRE INSTITUTIONNEL ET LES CONCEPTIONS DES ELEVES

1. Le cadre institutionnel

Passelaigue (2011), à partir de l'étude des textes officiels et des documents annexes de mathématiques et de sciences, pour les classes d'enfants de 7 à 11 ans, de 1923 à 2008, a montré que les grandeurs physiques, telles que la masse et le volume, ont principalement été abordées dans la discipline « mathématiques », comme outil servant à la construction du nombre (notamment les décimaux) et de la mesure, donc en dehors de leur sens physique. Concernant plus spécifiquement le volume, cette grandeur physique n'a été considérée comme « objet d'étude en dehors de la mesure » et abordée en sciences que dans les programmes de 1978/1980. Avec la réforme de l'école élémentaire et du collège de 2015, le constat reste à peu près le même. Les résultats de la recherche de l'occurrence du mot « volume » dans le BO de novembre 2015pour les cycles 2 et 3, présentés dans le **Tableau 1**, montre notamment l'absence du mot « volume » au cycle 3 en sciences, contre 18 occurrences en mathématiques et 4 en arts plastiques.

Discipline	**Cycle 2**	**Cycle 3**

conceptualisation de la masse volumique étant intimement liée à celle du volume, ces études ont permis d'atteindre un certain nombre de conceptions des élèves sur ce concept.

[10] Préambules, instructions, documents d'application et documents d'accompagnement.

Français*	2	1
Mathématiques	1	18
Sciences	1	0
Arts plastiques**	2	4

**« volume » cité relativement au « volume de la voix » ; **« volume » cité relativement à l'exploration de l'espace en trois dimensions, notamment à l'aide de modelages.*

***Tableau 1** - Occurrence du mot « volume » par discipline et par cycle dans le BO de novembre 2015*

Au cycle 2, en sciences, la masse et le volume apparaissent dans les compétences en ces termes : « comparer et mesurer […] le volume et la masse de l'eau à l'état solide et à l'état liquide », sans que soit explicitement mentionné la construction du sens physique de ces grandeurs. En mathématiques, dans le domaine « grandeurs et mesures », c'est principalement la « contenance » qui est mentionnée. Les objectifs affichés sont de travailler, avec les élèves, la mesure, à travers notamment l'utilisation d'instruments de mesure et l'introduction des unités de mesure (et donc du litre et ses multiples pour la contenance) et de réaliser des opérations mathématiques (addition, multiplication par un nombre …) sur les grandeurs. Il est explicitement mentionné que l'enseignement dans la discipline « Questionner le monde » doit se faire en étroite relation avec le domaine « grandeurs et mesures » en mathématiques ; il reste cependant à savoir comment l'enseignant prend en charge l'incohérence de l'utilisation du mot « volume » en sciences et celui de « contenance » en mathématiques, d'autant que dans les ressources disponibles sur le site Eduscol**Erreur ! Signet non défini.** les deux termes sont utilisés sans que ne soit explicitement mentionnée une différence entre les deux.

Au cycle 3, la grandeur « volume » n'est plus mentionnée dans le BO dans l'enseignement « Sciences et technologie », seulement dans le domaine « Grandeurs et mesures » en mathématiques. Bien qu'il soit mentionné, dans la partie « Repères de progressivité », que « L'étude d'une grandeur nécessite des activités ayant pour but de définir la grandeur », il est précisé que cela doit se faire par « comparaison directe ou indirecte, ou recours à la mesure », ce qui peut poser question sur la construction du sens physique des grandeurs si celle-ci n'est réalisée qu'à travers la mesure et le nombre (Passelaigue 2011). Une différenciation est formulée entre « volume » et « contenance » : « comparer ou mesurer des contenances (ou volumes intérieurs d'un récipient) » et les enseignants doivent cependant amener les élèves à « Relier les unités de volume et de contenance », pour lesquelles il est d'ailleurs précisé que les « Unités usuelles de contenance » sont des « multiples et sous-multiples du litre » et que celles de volume sont les « cm^3, dm^3 et m^3 ». Comme indiqué plus haut, ceci peut, selon nous, conduire les élèves à opérer une différenciation entre la définition du volume d'un solide et celle d'un liquide. Enfin, bien qu'il soit précisé, dans les compétences attendues, l'estimation de la « mesure d'un volume par différentes procédures », c'est principalement par l'introduction de formules mathématiques qu'est travaillée la détermination du volume d'un cube et d'un pavé droit ; il n'est pas proposé leur détermination par déplacement d'eau lors de leur immersion. Une activité où des objets de différentes masses mais de volume identique ou de différents volumes mais de masse identique sont immergés dans l'eau est présentée dans une ressource d'Eduscol, intitulée « masse et volume ». Elle n'a cependant pas pour objectif d'amener les élèves à déterminer le volume d'un objet (ni à introduire le caractère plus ou moins dense des matériaux), mais est présentée comme activité permettant de les aider à différencier les grandeurs masse et volume. Enfin, dans une autre ressource, intitulée « Masse et matière (1) », le volume d'un objet est associé à deux reprises à sa « taille », terme également polysémique, dont l'usage en place du volume peut également être source de confusion pour les élèves.

Finalement, excepté dans un document destiné aux enseignants pour « Approfondir ses connaissances pour s'approprier le programme », le sens physique du volume relatif à

l'espace occupé par un solide ou un liquide n'est explicitement mentionné ni dans le BO, ni dans les supports d'accompagnement des cycles 2 et 3 ; c'est en arts plastiques qu'il semble le plus être approché à travers l'étude de « L'espace en trois dimensions », par la « découverte et expérimentation du travail en volume » grâce à des activités de modelage, d'assemblage et de construction. L'enseignement institutionnel du volume est donc essentiellement attendu dans l'univers épistémologique et culturel des mathématiques ; c'est donc principalement sa projection mathématique (« figure à trois dimensions » et « mesure de cette figure ») qui semble être privilégiée à l'école élémentaire.

2. Les conceptions des élèves sur le concept de volume

L'analyse des entretiens que nous avons menés nous a permis d'identifier des régularités chez les élèves, dont certaines avaient été relevées dans les études de Hewson & Hewson (1983), Dole et *al*. (2009) et Hashweh (2016) sur l'apprentissage et l'enseignement de la masse volumique. Elle montre notamment que les élèves n'associent pas le volume d'un solide ou d'un liquide à l'espace qu'il occupe, donc à son sens physique. L'étude menée par Hashweh montre qu'il s'agit pourtant d'un prérequis nécessaire pour que les élèves puissent ensuite associer le volume d'un objet au volume d'eau déplacé lors de son immersion. Sans ce préalable, les élèves interrogés par Hashweh ont alors eu tendance à associer le volume d'eau déplacé à la masse de l'objet, confirmant les résultats des travaux de Piaget & Inhelder (1941) et ce que semble également indiquer l'étude d'Andersson (1986) et celle de Karplus et *al*. (1977), citée par Andersson.

Comme pour l'étude de Hewson & Hewson, notre analyse qualitative des entretiens montre également que les élèves semblent confondre le concept de volume avec celui de forme. Par exemple, lorsque nous avons demandé à *An* ce que le mot « volume » lui évoquait, sa réponse a été : « le volume c'est la forme de l'objet […] ça peut être heu en rond / en pavé […] une sphère ». Cette confusion explique probablement leur incapacité à rendre compte de la conservation du volume d'un solide déformable ou d'un liquide transvasé dans un récipient de forme différente. Lorsque nous avons présenté à *An* une boule de pâte à modeler que nous avons par la suite déformée, il nous a par exemple indiqué que : « [le volume de pâte à modeler] va être différent […] parce qu'on a / on a changé la forme de / de la pâte à modeler » et lorsque nous avons demandé à *L* comment il ferait pour déterminer le volume d'eau contenue dans une bouteille que nous lui présentions, sa réponse a été : « ben ça dépend / parce que si on met l'eau comme ça [*L* penche la bouteille contenant de l'eau] ce sera pas le même volume // si on met l'eau comme ça [*L* met la bouteille à l'horizontale] ». Après plusieurs hésitations, seule *Am* a affirmé qu'après inclinaison de la bouteille contenant l'eau : « on aurait le même volume // mais ça sera pas la même forme ». Cette conception de non-conservation du volume d'un solide déformable ou d'un liquide avait également été mise en évidence par Hashweh et Hewson & Hewson et, avant eux, par Piaget & Inhelder (1941). Selon ces derniers, la conceptualisation de la conservation du volume d'un solide ou d'un liquide suppose d'avoir construit l'idée de l'incompressibilité des matières condensées ; or, toujours selon Piaget & Inhelder, jusqu'à 11-12 ans, les enfants conçoivent la matière comme une enveloppe plus ou moins remplie de corpuscules plus ou moins serrés et adopte un schéma de rapprochement et d'éloignement possible de ces corpuscules à l'intérieur de l'enveloppe, les conduisant à la non-conservation du volume lors de déformations.

Comme l'ont montré Hewson et Hewson, les élèves que nous avons interviewés semblent également associer le volume à une quantité de matière. *An* et *Am* distinguent notamment l'utilisation de l'unité de masse pour une quantité de matière solide et l'unité de volume « litre » (ou ses multiples) pour une quantité de matière liquide : « en cuisine on se / ben les masses comme ça on mesure en grammes / ben ça dépend heu c'est quoi si c'est du liquide on

mesure en millilitres ou en litres » (*Am*). Ici, c'est dans l'univers culturel de la vie quotidienne que les élèves semblent mobiliser leurs connaissances du volume, l'associant à une quantité de matière. Cette confusion peut également trouver son origine dans l'institution scolaire puisque c'est par la notion de contenance (définie comme étant la quantité de ce qu'un récipient peut contenir) qu'est introduit le volume d'un liquide. Dole et *al*. avaient d'ailleurs remarqué que la plupart des explications utilisées par les élèves pour décrire le concept de volume, portaient essentiellement sur la capacité et la contenance. Pour les volumes de solides, lorsque nous avons demandé aux élèves que nous avons interviewés de classer des objets de même forme en fonction de leur volume, comme Hewson & Hewson, nous avons pu également remarquer qu'ils semblent confondre le volume d'un solide avec sa « taille », terminologie employée dans la ressource « Masse et matière (1) » mentionnée précédemment, faisant donc là aussi écho à l'enseignement institutionnel du volume.

Les élèves semblent enfin associer le concept de volume aux formes solides (dont ils ne semblent que partiellement maîtriser les noms : cube, parallélépipède rectangle, sphère …), par comparaison aux formes simples (carré, rectangle, disque), et à leur mesure. Par exemple, lorsque nous avons demandé à *S* et *E* ce que le mot « volume » leur évoquait :

> *S* : le volume c'est quand on peut le voir en 3D par exemple une forme c'est quand on peut le dessiner juste comme ça par exemple sur une feuille »
> *[…]*
> *E* : quand on prend un crayon et qu'on forme un carré sur la feuille on dit pas un cube parce que c'est un carré
> *S* : oui là c'est on voit qu'une face
> *E* : et un cube c'est vraiment tout … c'est toutes les faces

et pour *Am* : « par exemple c'est des volumes des cubes ou des parallélépipèdes ». Les propos tenus ici par *S*, *E* et *Am* font écho aux sens mathématiques du volume trouvés sur le site du CNRTL. C'est d'ailleurs par l'utilisation de relations mathématiques (qu'ils ne semblent en outre que partiellement connaître) que les élèves proposent de déterminer le volume des solides que nous leur avons soumis : « ben je prendrais une règle / je ferais largeur fois longueur et ça me donnerait son volume » (*L*). Les élèves mobilisent donc ici leurs connaissances du volume dans l'univers épistémologique et culturel des mathématiques, travaillés dans l'institution scolaire. Les savoirs construits dans cette institution ne semblent cependant que partiellement maîtrisés, car outre l'utilisation de relations mathématiques erronées pour déterminer le volume de solides de formes géométriques simples, aucun élève interrogé ne mentionne l'unité de mesure du volume du système international (*i.e.* le mètre cube ou ses multiples). Confronté à un objet de forme géométrique « simple » ou quelconque, il est important de relever également qu'aucun élève interviewé ne fait référence à la détermination de son volume par déplacement d'eau après son immersion totale.

Notre analyse lexicométrique des entretiens individuels a confirmé certains points de notre analyse qualitative puisque d'une part, une analyse de similitude fait apparaître une certaine proximité dans l'utilisation par les élèves des mots « volume » et « forme » et d'autre part, une classification par la méthode de Reinert fait apparaître une classe comportant le mot volume associé à : « mathématique », « cube »/« carré »/« côté » (faisant écho à la géométrie) et « calculer »/« mesurer »/« nombre »/ « longueur » (faisant écho à la détermination du volume à partir de relations mathématiques). Les élèves interviewés semblent donc avoir suivi un enseignement du volume principalement dans la discipline « mathématiques » (ce que *Am*

[11] Le volume étant une grandeur extensive, sa valeur numérique est proportionnelle à la quantité de matière considérée ; ceci explique que, par exemple dans les recettes de cuisine, lorsqu'un ingrédient se présente à l'état liquide, c'est son volume à prélever qui est indiqué en place de sa masse (grandeur physique définie en sciences pour rendre compte d'une quantité de matière).

confirme : « ça les volumes je les ai vu en mathématiques ») et vraisemblablement en dehors d'une exposition à son sens physique. L'enseignement institutionnel du volume et son rôle fonctionnel dans l'univers quotidien semblent par ailleurs avoir conduit les élèves à distinguer le « volume d'un solide » et le « volume d'un liquide ». Cette disjonction entre les deux, entretenue par l'usage de deux unités de mesures différentes, et la confusion identifiée chez les élèves entre forme et volume pour un solide et un liquide (pouvant trouver sa source là aussi dans l'enseignement institutionnel du volume) constituent sans doute les principaux obstacles à la construction du concept de densité que nous proposons de surmonter par un scénario d'apprentissage du sens physique du volume en cycle 3.

V. PROPOSITION D'UNE STRATEGIE DIDACTIQUE POUR L'ENSEIGNEMENT DU VOLUME A L'ECOLE ELEMENTAIRE

La première étape de notre scénario d'enseignement entend viser l'association du volume à l'espace occupé par un solide ou un liquide. Elle pourrait prendre appui sur un réinvestissement des notions vues en cycle 2, sur les propriétés de la matière. En effet, pour éprouver la matérialité de l'air, les élèves sont amenés, au cours de ce cycle, à se rendre compte que toute matière, qu'elle soit à l'état solide, liquide ou gazeux, a une masse et occupe de l'espace. Ainsi l'acception physique du mot « volume » pourrait être introduite et amener les élèves à se rendre compte que sa signification est la même pour un solide et un liquide.

Lors d'une deuxième étape, l'association du volume d'un objet au volume d'eau déplacé lors de son immersion pourrait être travaillée. Cette étape prendrait appui sur un réinvestissement de ce qui aura été vu lors de la première étape (i.e. même définition pour le volume d'un solide et d'un liquide), pour conduire les élèves à reconnaître une égalité de volume entre un solide et un liquide occupant le même espace. Pour cela un vase à débordement (vase de Boudréaux) pourrait être utilisé, permettant de récupérer le volume d'eau déplacé dans un récipient qui serait, dans un premier temps, de mêmes forme et dimensions que le solide immergé. Ensuite, l'utilisation de solides de même volume mais de formes différentes, conduirait les élèves à opérer une différenciation entre la « forme » et le « volume » d'un solide, qui pourrait être extrapolée aux liquides. Cette approche devrait par suite favoriser la conceptualisation de la conservation du volume des solides déformables et des liquides .

Pour notre scénario d'enseignement, au regard des études de Dawkins et *al*. (2008) et de Akatugba & Wallace (1999) et de notre enquête sur les conceptions des élèves, nous préconisons par ailleurs, pour une compréhension holistique et durable du sens physique du volume, l'utilisation d'activités de comparaison détachées de la mesure et du nombre.

VI. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Notre étude montre que les élèves, à l'issue de l'école élémentaire, ont un rapport au concept de volume, comme objet de savoir, principalement inscrit dans l'écologie mathématique et celle de la vie quotidienne. L'analyse des attendus institutionnels, confirmée par l'analyse des conceptions des élèves, a notamment permis de constater que

[12] Par exemple en récupérant dans un même récipient le volume d'eau déplacé par un même morceau de pâte à modeler mais de formes différentes.

[13] Par exemple en récupérant dans des récipients de formes différentes le volume d'eau déplacé par un même solide.

l'enseignement du volume à l'école élémentaire se fait principalement dans la discipline « mathématiques », conduisant les élèves à associer le volume à une forme géométrique et à sa mesure, par l'application de relations mathématiques. Cette approche, en dehors d'une exposition à son sens physique, semble conduire les élèves :

- à confondre le volume occupé par de la matière, quel que soit son état physique, avec sa forme,
- à opérer une différenciation entre le volume d'un solide et le volume d'un liquide, entretenue par l'utilisation de deux unités de mesure différentes selon l'état physique,
- à associer le volume à une quantité de matière, association entretenue par le rôle fonctionnel donné à cette grandeur dans l'univers quotidien.

Ces conceptions peuvent être génératrices de difficultés pour l'apprentissage de la densité par comparaison de masses, à volumes identiques, entre un solide et de l'eau à l'état liquide. L'apprentissage du concept de volume comme objet de savoir par une modification du rapport des élèves à ce savoir pour le faire vivre dans l'univers culturel et épistémologique de la physique apparaît donc comme une nécessité.

Au regard des résultats de cette enquête du cadre institutionnel et des représentations des élèves sur le concept de volume, pour remédier aux difficultés inhérentes à une approche principalement mathématique du volume à l'école élémentaire, nous proposons donc un scénario d'enseignement du sens physique du volume. Il s'appuie sur des activités de comparaison, en dehors du nombre et de la mesure, qui devraient permettre aux élèves de relier le volume d'un solide et d'un liquide à l'espace qu'ils occupent et de comparer les volumes de solides de formes différentes entre eux et avec celui d'un liquide par l'emploi de la méthode habituellement utilisée pour déterminer le volume d'un solide de forme quelconque par déplacement d'eau.

Ce scénario sera testé sous forme de Teaching Experiment (Komorek & Duit 2004) avec deux élèves de CM2 avant d'être expérimenté en classe entière dans le cadre d'une séquence visant la construction du concept de densité.

REFERENCES

Akatugba A. H., & Wallace, J. (1999). Mathematical Dimensions of Students' Use of Proportional Reasoning In High School Physics. *School Science and Mathematics, 99*(1), 31-41.

Andersson B. (1986). The experiential gestalt of causation: a common core to pupils' preconceptions in science. *European Journal of Science Education, 8*(2), 155-171.

Astolfi J.-P., & Peterfalvi B. (1993). Obstacles et construction de situations didactiques en sciences expérimentales. *Aster N°16. Modèles pédagogiques*, 103-141.

Chevallard Y. (1986), «Esquisse d'une théorie formelle du didactique», *in* C. Laborde, *Actes du Premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique* (CIRM, Marseille, 16-21 novembre 1986), La Pensée sauvage, Grenoble, 1988, 97-106.

Dawkins, K. R., Dickerson D. L., McKinney S. E., & Butler S. (2008). Teaching Density to Middle School Students: Preservice Science Teachers'Content Knowledge and Pedagogical Practices. *The Clearing House: A Journal of Educational Strategies, Issues and Ideas, 82*(1), 21-26.

Dole S., Clarke D., Wright T., & Hilton G. (2009). *Developing Year 5 Students' Understanding of Density: Implications for Mathematics Teaching*. In Crossing Divides:

Proceedings of the 32nd Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Vol. 1, p. 153-160, in Palmerston North, NZ: MERGA.

Hashweh M. Z. (2016). The complexity of teaching density in middle school. *Research in Science & Technological Education, 34*(1), 1-24.

Hewson M. G., & Hewson P. W. (1983). Effect of instruction using students' prior knowledge and conceptual change strategies on science learning. *Journal of Research in Science Teaching, 20*(8), 731-743.

Karplus R., Lawson A. E., Wollman W., Appel M., Bernoff R., Howe A., Rusch J. J. & Sullivan F. (1977), *Science Teaching and the Development of Reasoning - a workshop* (Lawrence Hall of Science University of California, Berkeley).

Komorek M., & Duit R. (2004). The teaching experiment as a powerful method to develop and evaluate teaching and learning sequences in the domain of non-linear systems. *International Journal of Science Education ,26*(5), 619-633.

Passelaigue Theys D. (2011). *Grandeurs et mesures à l'école élémentaire* (Thèse de doctorat). Université de Montpellier 2.

Piaget J., & Inhelder B. (1941). *Le développement des quantités physiques chez l'élève : conservation et atomisme*. Neuchâtel et Paris : 2e éd. (augmentée et suivantes) Delachaux et Niestlé.

ESPACES DE TRAVAIL MATHEMATIQUE CONNECTES AU LYCEE : UN PONT ENTRE LES MATHEMATIQUES ET LES SCIENCES PHYSIQUES. MODELISATION DES CABLES D'UN PONT SUSPENDU PAR UNE FONCTION NUMERIQUE SPECIFIQUE.

LAGRANGE Jean-Baptiste[1]* et LE FEUVRE Bernard[2]**

Résumé - Cet article porte sur la modélisation dans l'enseignement des mathématiques au lycée et l'interaction avec les sciences physiques. Le cadre est celui des Espaces de Travail Mathématiques Connectés. Comment organiser ces Espaces pour donner du sens aux concepts mathématiques enseignés ? Comment permettent-ils aux élèves de comprendre les liens entre ces concepts et les autres sciences ou le monde réel ? Quelles interactions avec la physique cela suppose-il ? Pour aborder ces questions, nous présentons une expérimentation impliquant un travail en Sciences Physiques, suivi d'un travail sur différents modèles selon un dispositif jigsaw (travail en puzzle) impliquant chaque élève dans un travail collaboratif de recherche et de restitution.

Mots-clefs : Modélisation, Casyopée, calculs algébriques, Espaces de Travail Mathématiques, travail en groupe jigsaw

Abstract - we focused on modeling in high school mathematics education in interaction with physical sciences; our framework is that of Connected Mathematical Work Spaces. How to organize these spaces to make sense of the mathematical concepts taught? How do students understand the links between these concepts and other sciences, or the real world? What interactions with physics does this imply? To address these questions, we present an experiment involving a work in Physical Sciences, followed by a work on different models in "jigsaw" group work, making students investigate and report collaboratively.

Keywords: Modelling, Casyopée, Calculus, Mathématical Working Spaces, Jigsaw Group Work

I. LE MONDE REEL ET L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

1. La modélisation

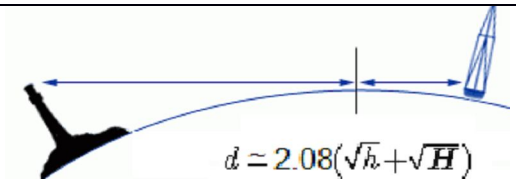
Le groupe Casyopée[3] travaille depuis plusieurs années sur l'enseignement des fonctions dans le cadre du curriculum des programmes nationaux français. Celui-ci privilégie une approche algébrique : il est demandé aux élèves d'émettre de façon informelle des conjectures puis de les prouver à l'aide de raisonnements mathématiques classiques (Minh & Lagrange, 2016). En réaction à ce traitement étroit des fonctions, l'objectif du groupe Casyopée est de créer et d'expérimenter des situations pour le lycée où les élèves comprennent les fonctions à travers des approches convergentes d'une question. Parallèlement, le groupe développe le logiciel Casyopée associant géométrie dynamique et environnement algébrique comme outil pour contribuer à ces situations. Nous considérons ici particulièrement des situations où les questions sur lesquelles les situations sont basées relèvent du « monde réel ». L'objectif est de donner du sens aux mathématiques enseignées comme outil pour comprendre le monde. Là aussi, le curriculum est réducteur, en ce sens qu'il considère la modélisation comme une simple « traduction en langage mathématique » d'une situation du monde réel. La conséquence est que les pratiques couramment observées privilégient les manipulations de calcul algébrique au détriment de la compréhension de ces calculs en lien avec la situation étudiée.

[1]* LDAR - France
[2]** IREM Rennes - France
[3] Le groupe Casyopée de l'IREM de Rennes est composé de R. halbert, C. Le Bihan, J. B. Lagrange, B. Le Feuvre, M.C. Manens. En 2016, il a évolué en groupe « jigsaw » de l'IREM de Rennes et a intégré de nouveaux membres.

Le cycle de modélisation de Blum et Leiss (2005) est une référence courante. Il présente l'avantage de distinguer plusieurs modèles de nature différente et de caractériser le type d'activité impliqué par le passage de l'un à l'autre. Nous souhaitons cependant y apporter quelques compléments. Tout d'abord, le cycle sépare de façon tranchée les modèles « dans la réalité » et « le » modèle mathématique. Cela peut conduire à minorer le travail mathématique dans les premiers modèles, les plus proches de la situation réelle. Par exemple, dans la situation du phare (Blum, Ferri 2009) il est demandé de trouver la distance d'un navigateur à un phare, au moment où le navigateur aperçoit sa lumière juste sur l'horizon.

Le « modèle réel » proposé suppose que le navigateur est au niveau de la mer, ce qui est impossible en conditions réelles. En « science de la navigation », on utilise le résultat suivant :

d distance en Nautiques, *h* et *H* les hauteurs respectives de l'œil de l'observateur et de la lanterne du phare (en m)



Rechercher un modèle plus approprié aurait été l'occasion d'un véritable travail faisant interagir la connaissance des conditions réelles de navigation avec des mathématiques.

À côté du modèle « science de la navigation », nous pouvons distinguer un modèle géométrico-algébrique qui conduit à la formule $d = \sqrt{h^2 + 2.R.h} + \sqrt{H^2 + 2.R.H}$, h et H étant les hauteurs respectives de l'œil de l'observateur et de la lanterne du phare et R le rayon terrestre, et un modèle « analytique » qui prend en compte la « prépondérance » de R sur h et H pour valider l'approximation

$d \approx \sqrt{2R}\left(\sqrt{h} + \sqrt{H}\right) ou d \approx \sqrt{2.R.H}\left(1 + \sqrt{\frac{h}{H}}\right)$, formule qui permet d'apprécier l'influence de la hauteur de l'œil de l'observateur.

Plutôt que de faire une séparation tranchée entre « réel » et mathématiques, nous préférons concevoir la modélisation comme mettant en jeu plusieurs modèles, chacun faisant interagir de façon différente la réalité et les mathématiques. Ceci permet aussi de voir les modèles proches de la réalité comme relevant de domaines scientifiques plus ou moins mathématisés, plutôt que du sens commun : dans l'exemple qui vient d'être donné il s'agit de la science de la navigation ; nous considérerons plus loin un exemple impliquant les sciences physiques.

Nous souhaitons enfin enrichir le cycle de modélisation pour rendre compte des multiples allers-retours entre différents modèles. Ces allers-retours sont nécessaires pour des démarches de vérification et ce sont elles aussi qui donnent du sens aux concepts en jeu dans les différents modèles par les connexions auxquelles ils conduisent.

2. Les Espaces de Travail Mathématiques connectés

Pour distinguer le travail sur différents modèles, nous mobilisons le cadre théorique des Espaces de Travail Mathématiques (Kuzniak & Richard 2013) qui permet de caractériser la façon dont les concepts prennent sens dans un contexte de travail donné. Un espace de travail est caractérisé par un plan épistémologique associant un « representamen », c'est-à-dire une représentation de l'objet sur lequel on travaille (ici un modèle), les artefacts qui permettent ce travail et un cadre théorique de référence. Ce plan épistémologique est relié à un plan cognitif par trois types de genèses : la genèse sémiotique qui donne au « representamen » son statut mathématique, la genèse instrumentale qui fait de l'artefact un instrument intériorisé et la genèse discursive qui donne son sens au cadre de référence en le mobilisant pour des preuves. Comme nous venons de le dire, la modélisation telle que

nous l'entendons fait intervenir plusieurs modèles, et, pour chacun de ces modèles un espace de travail. Dans l'exemple qui précède nous considérons un espace géométrico-algébrique où le travail est surtout calculatoire et un espace « analytique » qui met en jeu l'approximation et la prépondérance.

Nous nous intéressons aux allers-retours entre ces différents modèles et donc aux liens (ou connexions) que l'élève peut faire entre les espaces de travail. Nous considérons les genèses à l'œuvre lorsque ces connexions interviennent. Notre cadre théorique est donc celui des « espaces de travail connectés » proposé par Minh & Lagrange (2016) spécifiquement pour l'enseignement des fonctions. Notre hypothèse est que ce cadre des espaces de travail connectés peut aider à concevoir et évaluer des situations d'enseignement / apprentissage basées sur la modélisation. Dans les sections suivantes, nous allons tester cette hypothèse à partir d'un exemple.

II. MODELISATION ET PONTS SUSPENDUS

Nous avons expérimenté en classe de Terminale la modélisation de ponts suspendus, visant à faire découvrir par les élèves une fonction modélisant un câble porteur à partir d'une étude des tensions menée en interdisciplinarité Math-Physiques. Dans l'esprit du cadre défini dans la section précédente, nous présentons dans cette section quatre modèles. La section suivante présentera une mise en œuvre en classe et les espaces de travail associés aux modèles.

1. Un modèle statique discret

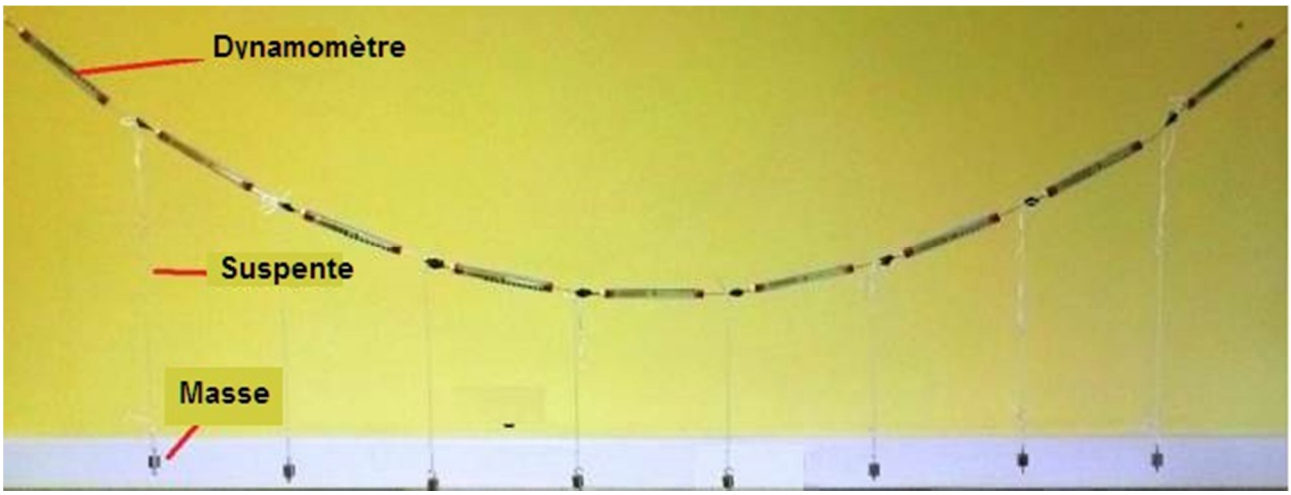


Figure 1 *- Une maquette d'un câble principal*

Le modèle statique discret dérive du nombre fini de suspentes : un câble principal est représenté comme un ensemble de n segments, en commençant et en terminant au niveau des points d'ancrage, et séparés par (n-1) points de suspension reliant le câble principal et les suspentes. Dans la maquette de la **Figure 1**, le tablier est modélisé par un ensemble de masses raccordées aux suspentes. Les dynamomètres permettent de visualiser la tension dans chaque segment. La modélisation de la tension dans l'un des câbles principaux peut être effectuée en considérant la suite des tensions $\vec{T}_i$ sur chaque segment, et pour chacune, les valeurs de la composante horizontale et de la composante verticale (H_i ; V_i). La loi d'équilibre statique, appliquée à chaque point de suspension, implique que la composante horizontale est la même dans tous les segments. Cela implique aussi que la suite des valeurs de la composante verticale est en progression arithmétique.

2. Un modèle géométrique discret

Connaissant la position d'un point d'ancrage (partie supérieure d'un pilier), il est possible de calculer la suite des coordonnées des points de l'ensemble des segments modélisant le câble principal. L désigne la longueur du tablier du pont, M_0 et M_n les points d'ancrage sur les piliers ; M_1,

M_2,… M_{n-1}, les points où les suspenseurs sont fixés au câble. La suite des abscisses des Mi est en progression arithmétique de raison $\frac{L}{n}$. La pente d'un segment [M_i, M_{i+1}] est le rapport entre les composantes verticale et horizontale de la tension dans ce segment, d'où la formule de récurrence pour les ordonnées des M_i : $y_{i+1} = y_i + \frac{L}{n}\frac{V_i}{H}$. Avec la formule de récurrence donnée par le modèle statique pour V_i, il est possible de calculer les y_i.

3. Un modèle algorithmique discret

Un algorithme (

***Figure* 2**) permet de définir une fonction affine par morceaux en systématisant la construction géométrique. Les données proviennent du Pont du Golden Gate et l'origine du système de coordonnées est au milieu du pont.

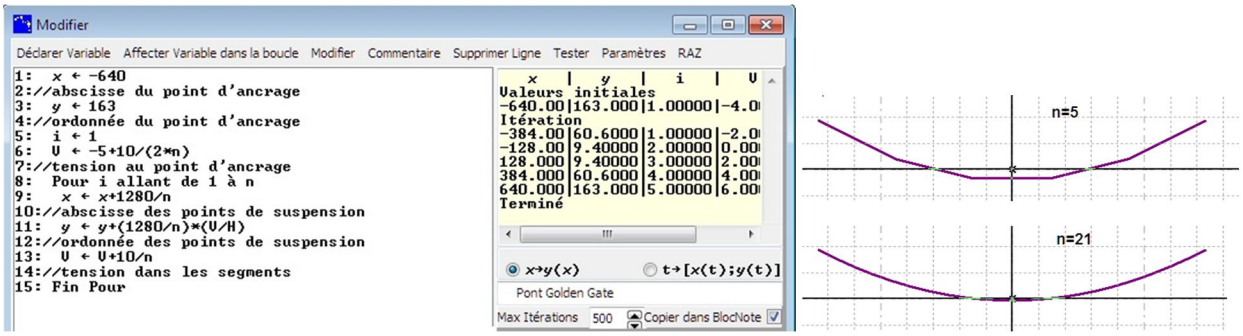


***Figure* 2** *: L'algorithme et la visualisation*

A ce stade, H est inconnu et donc paramétrique, et nous choisissons également un paramètre n pour le nombre de suspentes afin de dessiner des représentations pour plusieurs valeurs de n. En utilisant Casyopée (fonctions définies par un algorithme, Halbert et al 2017), nous obtenons des représentations pour des valeurs variées de H et n. Pour les petites valeurs de n, la représentation est un ensemble de segments. Pour des valeurs plus grandes, elle paraît une courbe. On peut ajuster H afin que le câble atteigne une hauteur donnée au-dessus du pont. Plus cette composante horizontale est grande, plus le câble s'élève au-dessus du tablier.

4. Un modèle continu

Étant donné le grand nombre de suspentes, on peut chercher une courbe, limite de l'ensemble des segments modélisant le câble lorsque ce nombre tend vers l'infini, et que donc la distance entre suspentes tend vers zéro. Avec un choix de l'origine du repère au milieu du tablier, on considère alors le câble principal comme modélisé par la courbe d'une fonction *f* définie sur [-L/2 ; L/2]. La tension en un point du câble d'abscisse x est la limite de la tension sur une suite de segments d'amplitude tendant vers zéro et encadrant x dans le modèle discret. Comme la composante horizontale de la tension dans le modèle discret est une constante que nous avons notée H, la composante horizontale de la tension dans le modèle continu est cette même constante. Par un passage à la limite depuis le modèle en statique, on obtient : $V(x) = x\frac{P}{2L}$ avec P masse du tablier du pont et L sa longueur.

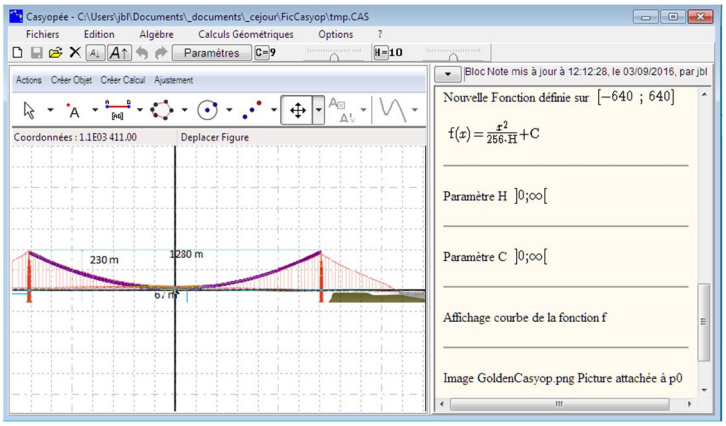


***Figure 3** : un modèle continu*

Avec les données du pont du Golden Gate, nous avons $f'(x) = \frac{x}{128H}$ puis par intégration $f(x) = \frac{x^2}{256H} + C$. Avec Casyopée, on peut tracer la courbe de la fonction, insérer une image du pont dans le volet de géométrie, et piloter H et C de façon que la courbe s'adapte au câble (**Figure 3**).

III. MISE EN ŒUVRE EN CLASSE

La classe en puzzle ou Jigsaw Classroom

Ce dispositif a été adopté par le groupe Casyopée après une insatisfaction ressentie par rapport aux usages « traditionnels » des TICE, qu'ils soient en classe entière ou en salle informatique où finalement les élèves sont souvent très guidés dans leurs manipulations et où il y a peu d'échanges au-delà du binôme sur ordinateur. Les objectifs sont de donner plus de responsabilité à l'élève dans l'apprentissage, d'impliquer tous les élèves et de favoriser la collaboration entre eux. Les modalités de travail sont en quatre phases. Un temps de problématisation peut être individuel ou en groupe ou à la maison. Les élèves sont ensuite répartis en groupes d'experts qui travaillent sur différentes approches du problème à partir d'un document et d'autres supports. Ensuite les groupes sont mixés et dans les nouveaux groupes, chaque expert développe son approche du problème pour les autres et le groupe élabore un compte rendu. Finalement, il y a une synthèse en classe entière.

1. Potentialités, contraintes ; espaces de travail

La présentation des modèles ci-dessus montre que l'étude d'un pont suspendu implique de considérer les données dans le monde réel, ainsi qu'un certain nombre de concepts liés à la physique et à l'analyse : la tension, l'équilibre statique des forces, la projection de vecteurs, la pente de segments et le gradient des courbes, une progression arithmétique et une fonction linéaire, les modèles discrets et continus, les limites et l'intégration ... Tous ces contenus sont enseignés dans les programmes du secondaire, ainsi l'objectif pour les élèves n'est pas de « réinventer » chacun d'eux isolément, mais plutôt de reconnaître comment une question dans une situation du monde réel implique la compréhension de ces concepts de façon opératoire et en interaction. Dans le programme français, l'étude d'un pont suspendu peut être réalisée dans la dernière année du cycle scientifique secondaire (12ème année, Terminale). L'année précédente, les élèves ont étudié les progressions arithmétiques et la dérivation des fonctions (en relation avec la pente des tangentes), et, ont appris à programmer les valeurs de suites, ainsi que des approximations de courbes de fonctions dont la dérivée est connue (méthode d'Euler). Dans cette dernière année, les élèves ont travaillé sur les tensions en physique et sur l'intégration en mathématiques. Il existe une contrainte dans ces classes : les élèves passent le baccalauréat à la fin de l'année, un examen pour lequel les compétences standards comptent plus que la compréhension en profondeur. Ainsi, il y a peu de temps pour des situations qui vont au-delà de compétences isolées dans des tâches standards, et un enseignant doit

insister sur la contribution de tâches moins standards comme dans la situation proposée ici. A partir des quatre modèles présentés ci-dessus, nous considérons quatre espaces de travail.

- Dans le premier, l'objet en jeu est la suite des tensions au niveau des points de connexion des suspentes, et les règles sont la loi d'équilibre statique et les propriétés des progressions arithmétiques. Les artefacts sont des dispositifs concrets de mesure utilisés en physique et en mathématiques, dynamomètres, rapporteurs, ainsi que d'autres outils « abstraits » comme la décomposition des tensions dans les composants verticaux et horizontaux. Nous appelons cet espace de travail, l'espace des systèmes statiques, ou en raccourci, l'espace de la statique.
- Le deuxième espace de travail porte sur un modèle discret d'un câble principal, et donc sur des objets géométriques. La règle principale est la définition analytique d'un segment : les élèves doivent calculer les coordonnées du point, connaissant les coordonnées de l'autre point, la pente et la différence entre les abscisses. Nous appelons cet espace de travail, l'espace géométrique.
- Dans le troisième espace de travail, un artefact important est l'environnement de programmation de Casyopée, qui permet de calculer une série de points au moyen d'un traitement itératif simple ; ces points permettent de définir une fonction par morceaux continue, dont le graphique, dans le cas du pont, représente le modèle discret du câble principal. Nous appelons cet espace de travail, l'espace algorithmique.
- Enfin, les objets dans le quatrième espace sont des fonctions régies par les règles classiques de l'analyse. C'est l'espace de travail des fonctions mathématiques. Trouver une primitive d'une fonction linéaire ne devrait pas être difficile pour les élèves. Toutefois, la formule de la fonction linéaire implique un paramètre (la composante horizontale H de la tension). Ils peuvent utiliser un logiciel comme Casyopée pour obtenir une courbe de ce modèle continu, comparer à une image du pont et au modèle discret, et ajuster la composante horizontale H afin que les trois représentations coïncident.

2. Les quatre phases

- La première phase dure une heure et a été préparée avec le professeur de physique. Elle vise d'abord à initier les élèves aux questions liées aux ponts, en particulier les ponts suspendus. Ils sont invités à consulter un site web dédié, pour sélectionner et esquisser quatre ponts de différents types, à regarder une vidéo illustrant l'idée de tension le long d'une corde horizontale et le fait que, quelle que soit la tension, la corde n'est plus rectiligne dès qu'une force est appliquée verticalement sur un point.



***Figure 4** : les montages de la 1ère phase*

Ils doivent répondre à trois questions : (1) pourquoi dans un pont suspendu les câbles principaux ne sont-ils pas rectilignes ? (2) quel type de fonction proposez-vous pour modéliser le câble principal ? (3) la forme d'un câble principal est-il déterminé par la longueur des suspentes ? Toujours dans cette première phase, les élèves doivent réaliser deux montages comme dans la Figure 4, lire les tensions dans les dynamomètres et mesurer les angles, calculer les composantes horizontale et verticale des tensions et vérifier l'équilibre statique des forces.

- La deuxième phase dure 50 min. Au début, les données relatives au pont du Golden Gate sont présentées à toute la classe. Les élèves regardent aussi une maquette (**Figure 1**), et un élève lit les tensions dans les dynamomètres à toute la classe. Ensuite, les élèves sont divisés en groupes de quatre. Chaque groupe a une tâche, A, B, C ou D. C'est le dispositif « classe en puzzle » que nous avons présenté ci-dessus.

La tâche A est liée à l'espace de travail statique : inspirés par le travail dans la première phase, les élèves doivent prendre en compte la suite des composantes verticale et horizontale des tensions au niveau des points de connexion, reconnaître que la composante horizontale est constante et calculer une formule pour la suite des composantes verticales.

La tâche B est liée à l'espace de travail géométrique. Une formule pour la valeur de la pente de chaque segment d'un modèle discret du câble principal est donnée aux élèves, en fonction d'un paramètre H et du nombre n de segments. Les élèves doivent calculer des formules pour générer la suite des coordonnées des points de suspension.

La tâche C est liée à l'espace de travail algorithmique. Un algorithme comme dans la figure 3 est donné aux élèves ; ils doivent entrer et exécuter l'algorithme dans Casyopée, interpréter le paramètre n, et régler le paramètre H dans le but que le modèle donné par l'algorithme soit conforme à la forme du câble.

La tâche D est liée à l'espace de travail des fonctions mathématiques. Les élèves doivent rechercher une fonction *f* dont la courbe soit un modèle d'un câble principal (modèle continu). Ils sont informés du fait que la composante horizontale de la tension dans le câble est une constante H et une formule leur est donnée exprimant la composante horizontale de la tension en fonction de l'abscisse dans un repère donné. Ils doivent trouver une formule pour la dérivée de *f*, en tenant compte du fait que la tension est dans la direction de la tangente à la courbe. Puis, en utilisant Casyopée, ils doivent trouver une formule pour *f* et régler le paramètre H afin que la courbe de la fonction *f* soit conforme à la forme du câble (Figure 3).

- La troisième phase dure aussi 50 min. Les élèves forment de nouveaux groupes.

Chacun de ces nouveaux groupes est construit de façon à rassembler un ou deux élèves de chacun des groupes de la seconde phase, ayant fait respectivement les tâches A, B, C ou D. Il est demandé, à l'intérieur de ces nouveaux groupes, de partager les résultats obtenus à la seconde phase, et de rédiger un rapport mettant en évidence les points importants. Dans ce travail, un élève venant par exemple d'un groupe ayant fait la tâche A, est un expert de l'espace de travail « statique » et informe les élèves venant d'autres groupes des méthodes travaillées dans cet espace de travail A.

Comme nous l'avons montré plus haut, l'idée de plusieurs espaces de travail pour l'étude d'un problème est un guide pour l'organisation des tâches.

- La quatrième phase (30 min) est une synthèse collective dirigée par le professeur.

Observation

Cette mise en œuvre a été observée dans une classe de Terminale de 35 élèves à la fin du mois de mars. Cette classe était familière avec l'organisation « Jigsaw Classroom » qui avait déjà été mise en œuvre pour un travail collaboratif sur un chapitre de cours. Les élèves étaient pour la plupart des élèves qui réussissent correctement, sans plus. Les contenus en jeu en physique et en mathématiques avaient été enseignés aux élèves dans les cours précédents. Les phases ont été enregistrées et des entretiens ont été menés avec 3 élèves après la phase 3.

Phase 1 : problématisation

Dans la première phase, la plupart des élèves ont esquissé un pont suspendu sans les suspentes. Ils ont généralement expliqué la non-horizontalité du câble principal par le poids du tablier du pont,

mais ont adhéré à la fausse explication de la forme par la longueur des suspentes. Ils ont compris à partir de la vidéo que le poids du tablier « plie » le câble, mais ils n'ont pas lié la forme du câble avec la répartition uniforme du poids, grâce aux suspentes. Certains élèves ont montré une meilleure compréhension, en écrivant que la forme est la conséquence des forces (ou des tensions) sur le câble. Dans le reste de la première phase, après avoir surmonté les difficultés instrumentales avec les montages, les élèves ont correctement enregistré les angles et l'intensité des forces. Ils ont reconnu la loi d'équilibre statique, mais ils n'ont généralement pas calculé les composantes. En particulier le fait que la composante horizontale est la même sur tous les trois dynamomètres dans l'appareil à deux poids n'ait pas apparu. Dans la discussion en classe, avant de diviser la classe en groupes pour la phase 2, l'enseignant a insisté sur la décomposition d'un vecteur en composantes et sur les variations des composantes de la tension dans le câble en jeu dans les phases suivantes. Il a également répété que le but est d'étudier mathématiquement la forme du câble.

Phase 2 : groupes d'experts

Une série de quatre groupes ont été observés faisant chaque tâche en phase 2. Les élèves observant la tâche A (statique) ont assez bien réussi, alors que des difficultés ont été observées pour les élèves effectuant d'autres tâches. Les élèves de la tâche B (géométrie) ont commencé par esquisser un pont avec beaucoup de suspentes, ce qui ne leur a pas permis pas de considérer des segments modélisant le câble principal. Ils ont été invités par l'observateur à limiter à 4 suspentes. Il leur a fallu du temps pour trouver les coordonnées du point d'ancrage et ils ont eu des difficultés à utiliser la formule donnée pour la pente des segments et la distance entre les suspentes afin de calculer les coordonnées du point suivant. En fait, ce calcul implique plusieurs paramètres liés aux données du pont, situation courante en sciences physiques mais non en mathématiques. Les élèves de la tâche C (algorithmique) ont été très lents à entrer l'algorithme dans Casyopée. L'affichage de la courbe sur l'écran a été erroné à cause de petites erreurs dans l'algorithme. Ils n'ont pu corriger que lorsque l'observateur les a aidés à analyser l'algorithme. Ils ont identifié le paramètre n comme étant lié au nombre de suspentes et ont proposé la valeur 83 (le nombre de suspentes dans le Golden Gate Bridge). Ils ont estimé que cette valeur est « proche de l'infini » et c'est pourquoi la courbe n'est pas apparue comme une ligne brisée, contrairement à ce qui a été observé pour de petites valeurs de n. Lorsque l'observateur a expliqué que H est une tension, ils ont pris conscience de ce que l'augmentation de la valeur de ce paramètre « redresse » le câble, et ont trouvé une valeur appropriée. Les élèves de la tâche D (fonctions mathématiques) ont trouvé une formule pour la tension verticale, mais ont eu de la difficulté à interpréter le fait que la tension est dans la direction de la tangente à la courbe.

Phase 3 : groupes d'apprentissage

Un groupe a été observé en phase 3 réunissant des élèves observés en phase 2. Dans ce groupe, chaque élève a expliqué sa tâche et son travail dans la phase précédente. L'enregistrement vidéo montre que les autres élèves ont écouté attentivement et demandé des explications supplémentaires. Le paramètre H a été identifié par les élèves comme jouant un rôle dans chaque tâche ; par exemple quand un élève qui avait fait la tâche C ne s'est plus souvenu de l'effet de l'augmentation de H, confondant avec la « hauteur du câble », l'élève qui avait fait la tâche A l'a corrigé, en disant que c'est une tension et que l'augmenter devait « redresser » le câble plutôt que de le « relâcher ». Le même élève a aidé à surmonter la difficulté rencontrée par l'élève qui avait fait la tâche D pour trouver la direction de la tangente à la courbe et ensuite la dérivée de la fonction, en disant « il suffit d'intégrer le quotient de V et H ». En allant plus loin dans la tâche D, les élèves ont été troublés par le paramètre H dans le dénominateur, certains proposant un *Ln (H)* dans la primitive. Ils ont pu réaliser la tâche D en utilisant Casyopée. En revanche, la tâche non terminée B et le lien avec l'algorithme dans la tâche C n'ont pas été abordés.

Entretiens d'évaluation

Trois élèves ont été interviewés après la phase 3, afin de mieux évaluer les liens entre les modélisations dans les trois domaines opérés au cours du travail de groupe. Ils ont souligné que la situation était plus complexe que d'habitude (« nous avons dû relier beaucoup de choses différentes ») et qu'ils n'étaient pas « habitués à mélanger la physique et les mathématiques ». En commentant la première phase, ils ont montré comment leur compréhension de la structure d'un pont a progressé : ils ont mentionné le rôle des suspentes et ont fait le lien entre un pont suspendu et un pont en arc relativement à la façon dont le pont est soutenu. Ils ont également fait le lien entre le montage avec deux poids dans la première phase, et un pont suspendu « avec deux suspentes ». Ils ont encore eu des difficultés à considérer les pentes des segments dans la tâche B pour trouver les coordonnées des points de suspension. Cependant, ils ont correctement interprété l'algorithme de la tâche C et ont été capables de relier l'évolution de H et de x et y respectivement dans les tâches A et B. Ils n'ont pas montré clairement que la fonction de la tâche D était la limite de la fonction définie par un algorithme dans la tâche C. À partir de la visualisation graphique, ils ont pensé que c'était plus ou moins la même fonction pour de grandes valeurs de n. La visualisation est alors la façon dont les élèves relient l'algorithme et la fonction mathématique. L'observateur a demandé d'expliquer pourquoi le gradient en un point de la courbe est le quotient de V et H. La réponse attendue était que la tension a la direction de la tangente, mais les élèves ont simplement écrit $f'(x) = \Delta y/\Delta x V(x)/H$ sans plus d'explication. Il semble que la première égalité soit commune dans le cours de physique et que la seconde dérive de la définition des composantes dans la tâche A. Ainsi, les élèves ont établi un lien entre l'étude statique et la fonction mathématique sans considérer explicitement un passage à la limite d'un modèle discret à un modèle continu.

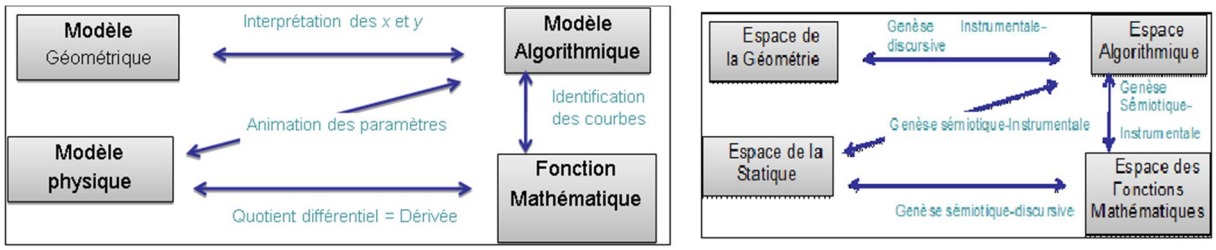


Figure 5*: Les liens opérés par les élèves*

IV. CONCLUSION

Nous reprenons les questions de l'appel à contributions à partir de notre expérience. Les réponses que nous apportons nous semblent valider l'hypothèse émise au début de cet article.

● *Du point de vue épistémologique, quel est le rôle des mathématiques par rapport aux autres disciplines dans la modélisation de situations réelles et complexes ?*

Le cadre des espaces de travail connectés permet de considérer les autres disciplines (les sciences physiques dans l'exemple) non comme des « pré-mathématiques », mais comme des espaces de travail à part entière avec leur propre mathématisation, et de développer des liens avec les espaces de travail mathématiques.

● *Quels sont les apports pour les apprentissages des élèves et quelles en sont les difficultés ?*

Les difficultés sont dans la complexité de la situation soulignée par les élèves. Ceux-ci comprennent certains aspects des modèles et des liens entre modèles, mais ne maîtrisent pas l'ensemble. Néanmoins, les liens qu'ils font entre les espaces de travail leur permettent, selon nous, de mieux maîtriser les concepts d'analyse du lycée.

● *Comment les pratiques enseignantes prennent-elles en compte les injonctions institutionnelles au regard de la modélisation et de l'interdisciplinarité?*

Il n'est pas facile au lycée et plus particulièrement en Terminale de se conformer à ces injonctions. Dans l'exemple du pont, la collaboration avec le laboratoire de Physique et l'organisation en classe « jigsaw » a permis de faire vivre la situation.

● *À quels problèmes sociétaux, de recherche et d'enseignement, la question de l'interdisciplinarité sous l'angle de la modélisation répond-elle ?*

Un professeur de Sciences Physiques nous a déclaré que la situation du pont serait pour lui un support pour répondre à une question souvent posée par les élèves : qu'est-ce que le métier d'ingénieur et à quoi servent les maths et la physique du lycée pour cela ?

● *Quels défis et opportunités pose l'articulation des concepts issus de différentes disciplines pour l'enseignement ?*

Dans l'exemple du pont, l'articulation des concepts sous-tendue par les liens entre espaces de travail est une opportunité pour sortir d'un enseignement de l'analyse réduit à la visualisation et au calcul algébrique, et pour donner sens aux concepts de ce domaine.

REFERENCES

Blum W., & Leiss D. (2005) How do students and teachers deal with mathematical modelling problems? Dans C. Haines, P. Galbraith, W. Blum et S. Khan (dir.), *Mathematical Modeling (ICTMA-12). Education, Engineering and Economics* (p. 222-231). Chichester: Horwood.

Blum W., Galbraith P. L., & Niss M (2007) Introduction. In W. Blum P. L. Galbraith, H Heml, &M Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 32). New York, NY: Springer.

Blum W., & Ferri R. B. (2009) Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(1), 45–58.

Halbert R.,Lagrange, J. B., Le Bihan C., Le Feuvre, B., Manens, M. C. (2017) Définir des fonctions par un algorithme ; motivation, réalisation dans Casyopée et exemples. *Mathematice*,53. http://revue.sesamath.net/spip.php?article914.

Kuzniak A. & Richard P.R. (2013) Espaces de travail mathématique. Point de vues et perspectives. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa* 17, Numero Extra. 1.

Lagrange J.-B. (2016) Connected working spaces for secondary students' understanding of calculus: modelling a suspension bridge through "jigsaw" group work. *Colloque Espaces de Travail Mathématique* July 18-22 2016 University of Western Macedonia. http://etm5.web.uowm.gr/wp-content/uploads/2017/10/ETM5-FIN.pdf

Minh T. K., Lagrange J.B. (2016) Connected functional working spaces: a framework for the teaching and learning of functions at upper secondary level. *ZDM Mathematics Education*. 48: 793. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0774-z

ANNEXE : remarques sur la présentation

Les quelques questions ont porté sur l'organisation des séances où les élèves ont travaillé en puzzle (jigsaw teaching). Notamment il a été précisé que ce sont les mêmes élèves qui ont participé aux différentes étapes du travail en puzzle.

UN EXEMPLE DE FORMATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES À LA MODÉLISATION

LÉCUREUX-TÊTU * Marie-Hélène

Résumé – Après avoir mis en évidence des manques dans l'enseignement de la modélisation, nous décrivons une technique de construction d'un scénario d'enseignement essayant de répondre à ces manques. Au travers de la présentation de ce scénario en formation des professeurs stagiaires de mathématiques, nous décrivons des obstacles de natures diverses à cet enseignement de la modélisation.

Mots-clefs : modélisation, variables, définition de fonction, formation des professeurs

Abstract – After highlighting gaps in the teaching modeling, we describe a technique for constructing a scenario of teaching modeling. This scenario tries to answer the gaps. Through the presentation of this scenario to trainee teachers, we describe obstacles of various natures to this teaching modeling.

Keywords: modeling, variables, definition of function, teacher training

Dans de nombreux pays, la modélisation prend une place de plus en plus grande dans l'enseignement des mathématiques. Ainsi la dernière réforme du collège en France demande aux professeurs de mathématiques de développer chez les élèves un certain nombre de compétences, dont la compétence « modéliser » (Ministère de l'Éducation Nationale 2015), mettant ainsi la profession de professeurs de mathématiques devant les questions « comment développer cette compétence ? Comment enseigner la modélisation ? ». Ces questions se déclinent dans la formation des professeurs : « Comment former les professeurs à développer la compétence « modéliser » chez leurs élèves ? »

Nous nous proposons ici de présenter un temps de formation à la modélisation de professeurs de mathématiques stagiaires. Il s'agit de la formation initiale des enseignants de collège et lycée, au sein du parcours « mathématiques » du master métiers de l'enseignement, de l'éducation et de la formation (MEEF) 2^{d} degré, qui est la structure principale de la formation initiale des professeurs en France actuellement.

I. NOTION DE MODÉLISATION

Ce temps de formation des professeurs stagiaires se place au sein de l'unité d'enseignement (UE) « interdisciplinarité ». Il est à noter que les responsables de ce parcours ont demandé spécifiquement aux formateurs de cette UE d'insister sur l'enseignement de la modélisation. Nous commençons par interroger la notion de modélisation en sciences expérimentales, pour faire le lien avec la modélisation au travers du regard des didacticiens des mathématiques.

1. Modélisation en sciences expérimentales

Nous avons pu intégrer un groupe interdisciplinaire de scientifiques, essentiellement des physiciens, et participer à des phases de modélisation. Ce groupe de travail de sciences est composé de façon régulière de physiciens de différents domaines de la physique ainsi que de spécialistes du comportement animal. Dans toutes les réunions auxquelles nous avons pu assister, les problèmes sont liés à des équations différentielles, les méthodes de résolution pouvant relever de l'analyse ou de la mise en place de méthodes de Monte Carlo. La notion de

* ESPE Toulouse Midi-Pyrénées, Université Jean Jaurès ; UMR EFTS – France– marie-helene.lecureux@univ-tlse2.fr

modélisation est centrale dans ce groupe qui y a longuement réfléchi. Nous présentons des éléments de réflexion issus de l'observation de ce groupe, ainsi que différents entretiens menés avec certains de ses membres.

La première phase de travail consiste à essayer de définir le système étudié, la question posée sur ce système, et les variables pertinentes. Le temps de description verbale est très important. Il s'articule à des temps d'expérimentation auxquels nous n'avons pas pu assister. En lien avec la détermination du système et de la question, l'objectif est de faire émerger les variables pertinentes. Dans cette première étape de modélisation, on ne se sert pas des mathématiques. Du point de vue numérique, le travail essentiel consiste à évaluer l'importance de certaines variables, et éventuellement de simplifier en ne tenant pas compte d'effets considérés comme secondaires. Pour ces choix, on se fie plus à l'expérience qu'aux calculs. Une jeune femme venant d'obtenir une thèse interdisciplinaire physique-chimie-biologie raconte lors d'un entretien le travail sur les variables : « Qu'est-ce qu'on veut mesurer ? Qu'est-ce que je calcule ? C'est quoi les données d'entrée pour faire le calcul ? » Un physicien de ce groupe a décrit le processus de modélisation par le schéma ci-après. Notons que ce schéma n'est pas répandu chez tous les physiciens, c'est un schéma de pensée de notre groupe de travail.

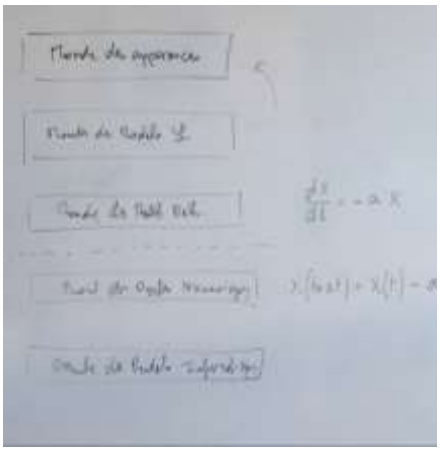


***Figure 1** : le processus de modélisation, description par un physicien*

Cette séparation marquée entre le temps de verbalisation et le temps d'utilisation des mathématiques a été pour nous une découverte qui nous questionne sur la possibilité de travailler la modélisation en classe de mathématiques hors interdisciplinarité. En particulier, la détermination des variables qui pilotent l'état d'un système, est une étape cruciale dans la modélisation et qui nécessite une longue réflexion, bien loin de l'expression « mettre en équation » que nous avons rencontrée chez des professeurs ou des étudiants de mathématiques.

2. Modélisation en didactique des mathématiques

Au cours du colloque EMF 2012, Soury-Lavergne et Bessot s'appuient sur des travaux en didactique des mathématiques pour décrire le processus de modélisation. Elles font référence à un schéma construit à partir des travaux de Coulange (1998) et Rodriguez (2007) pour définir le processus de modélisation :

Ce schéma découpe le processus de modélisation en quatre phases :

Phase 1. Passage du système extramathématique à un ou plusieurs modèles intermédiaires

Phase 2. Passage des modèles intermédiaires à un modèle mathématique calculable permettant de reformuler les questions initiales en un problème mathématique.

Phase 3. Phase de calcul dans le modèle mathématique pour produire les réponses au problème mathématique.

Phase 4. Retour à la situation étudiée pour transformer les réponses au problème mathématique en des réponses aux questions initiales et les confronter à la réalité modélisée.

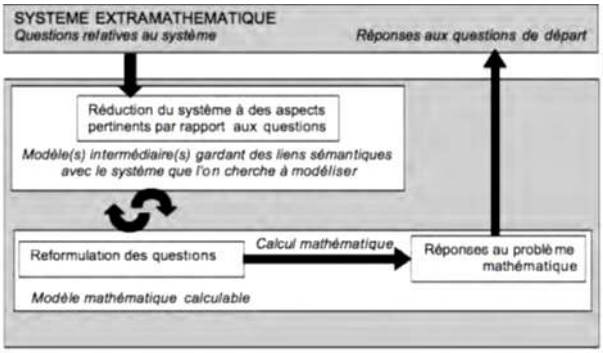


Figure 2 *– Schéma du processus de modélisation (d'après Coulange 1998)*

Les phases 1 et 2 ainsi décrites nous paraissent correspondre à ce que nous avons observé en sciences expérimentales : on part d'un système extramathématique, des questions se posent relatives à ce système, et à travailler sur les variables. Cela conduit à simplifier, en éliminant certaines variables, à modifier les questions, et on aboutit à un modèle mathématique calculable. On peut penser que la mention de « l'extramathématique » est une difficulté pour le professeur de mathématique hors interdisciplinarité.

Dans cette même communication, Soury-Lavergne et Bessot (2012) font référence à deux thèses, celle de Rodriguez (2007) et celle de Nguyen Thi (2011). Elles signalent que « Dans l'enseignement secondaire, il y a une propension à enseigner des modèles existants fournissant des éléments de savoir bien définis et négociables » (Rodriguez, 2007). Ainsi, en classe de mathématiques, les phases 1 et 2 du processus de modélisation serait rarement rencontrée.

Ces deux modèles de la modélisation, celui issu de la physique et celui issu de la didactique des mathématiques sont différents. En particulier, il n'y a pas de boucle dans le modèle issu de la physique. Mais les deux insistent sur l'importance de la formulation en début de modélisation.

Nous faisons l'hypothèse que le temps de réflexion et de mise en œuvre des phases 1 et 2 est rarement mis en œuvre de façon approfondie dans une classe de mathématique ordinaire, au collège ou au lycée. Cette hypothèse concorde avec de nombreux travaux en didactique sur la modélisation. Elle concorde aussi avec notre représentation initiale de ce qu'est la modélisation.

La question de l'enseignement de la modélisation évolue alors : Comment permettre aux élèves de collège et lycée de rencontrer en classe de mathématiques ces phases 1 et 2 ? D'ailleurs, est-ce seulement possible de faire vivre ces phases dans un cours purement disciplinaire de mathématiques ? Dans le cadre de la formation des professeurs s'ajoute la question de formation : comment faire rencontrer aux étudiants ces phases 1 et 2 pour qu'ils sachent que ces phases existent ?

II. CONSTITUTION DU RECUEIL DES DONNÉES

Une contrainte majeure a pesé sur le recueil de données. Cette contrainte est liée aux évaluations de la formation : les professeurs stagiaires sont évalués comme dans tout master, mais sont aussi évalués pour leur titularisation de professeur de mathématiques, fonctionnaire de l'état. Ces évaluations pèsent très lourdement sur l'état psychologique des étudiants. Il a été fait le choix d'annoncer que ce moment de formation était hors évaluation, de façon à laisser toute liberté de penser – et de participer activement ou non – aux étudiants. Des étudiants sont venus remercier en fin de cours du fait qu'on puisse « enfin apprendre hors évaluation », ce qui reflète bien la pression vécue.

Mais en conséquence, nous n'avons pas de retour direct sur la façon dont les étudiants se sont ou non emparés de la situation proposée dans leur métier de professeur de mathématiques. Tout questionnaire pourrait être mal perçu par certains étudiants qui sont très défiants. Après l'année de formation, les étudiants sont très dispersés géographiquement, et il est difficile d'avoir des retours. L'évaluation de l'unité d'enseignement (UE) interdisciplinarité comporte un examen qui ne portait pas sur la modélisation, de façon à respecter ce qui a été affirmé aux étudiants, mais aussi un dossier contenant la construction d'un scénario d'enseignement en interdisciplinarité.

Le climat de défiance évoqué précédemment ne nous a pas permis d'enregistrer la séance. Le recueil de données repose sur deux éléments. La formatrice ayant l'habitude d'incorporer des éléments de réponse des étudiants dans ses diaporamas en cours de séance, nous disposons de ces traces écrites. Par ailleurs, nous disposons de son témoignage à l'issue de la séance. On ne peut que constater la fragilité de ce recueil de donnée, en espérant que d'autres possibilités s'ouvrent à nous dans les années ultérieures.

III. EXPÉRIMENTATION EN FORMATION DES PROFESSEURS STAGIAIRES

Dans l'expérimentation que nous présentons, nous avons un double objectif de formation. D'une part, permettre aux professeurs stagiaires de disposer d'un scénario d'enseignement à la modélisation qui puisse leur servir de ressource et d'autre part leur permettre de rencontrer les phases 1 et 2 du processus de modélisation. Nous avons fait le choix de proposer aux professeurs stagiaires un support d'activité pour des classes du collège, en reprenant une technique souvent utilisée dans la formation : les étudiants doivent analyser le support d'activité, accompagné éventuellement d'un scénario pédagogique. De façon usuelle, l'analyse implique de résoudre le problème mathématique posé.

1. Construction du support d'activité pour une classe de collège

Ainsi que nous l'avons indiqué, nous travaillons dans le cadre de l'UE « interdisciplinarité ». Malgré la possibilité d'être en lien avec d'autres disciplines, notre choix s'est porté sur une situation de la vie quotidienne pour apporter un système extramathématique. Pour le didacticien, cela évite d'avoir à prendre en compte les interactions avec les autres disciplines enseignées. Pour les professeurs stagiaires, il est indispensable que la présentation de la situation leur permette de se projeter et d'imaginer la situation mise en place dans la classe. L'organisation de séance d'enseignement en interdisciplinarité étant complexe, il a été choisi de séparer l'étude de la modélisation de l'étude de la façon de travailler en interdisciplinarité. Il est ainsi plus simple de s'imaginer réaliser l'activité dans sa classe.

Nous avons donc cherché à construire une situation concrète respectant les contenus du programme de mathématiques du cycle 4. Notre objectif est que cette situation puisse permettre de mettre en œuvre un élément de la première phase de modélisation, celle de description du système ainsi que les variables pertinentes.

Nous sommes allée puiser des idées dans une ressource méconnue des professeurs de mathématiques de collège et lycée : les documents à destination de l'enseignement des mathématiques en lycée professionnel. Cet enseignement a la particularité d'être proposé par des professeurs bivalents : mathématiques – physique chimie. Ces professeurs sont familiers de la notion de modélisation en sciences physiques et chimiques

Le ministère met à disposition des professeurs de lycée professionnels des documents appelés « ressources », sur le site Eduscol. Nous nous sommes servie de la proposition d'un document où il était proposé aux professeurs de donner à étudier la question : « il est régulièrement dit que, pour économiser de l'eau, il vaut mieux prendre une douche qu'un bain. Est-ce vrai ? » (DGESCO 2009).

Nous avons proposé comme point de départ une affiche – cela permis aussi de faire un lien avec un autre contenu de l'UE : l'éducation aux médias. On trouvera d'autres images d'un même type sur internet à partir de la recherche « je prends une douche plutôt qu'un bain ».



Figure 3 *– L'affiche*

Dans le scénario pédagogique le professeur commence par poser la question « est-ce bien vrai ? » à la classe en l'associant à une photographie de l'affiche. Dans le temps de débat qui suit, le professeur note au tableau ces différentes idées, sans intervenir sur les contenus qui peuvent être de tout ordre. Il émerge une comparaison des volumes d'eau utilisés, et le besoin de connaître le volume d'eau dans la baignoire ainsi que le débit de la douche. D'autres éléments de comparaison peuvent apparaitre, en particulier sur la quantité d'énergie utilisée, mais la quantité d'eau utilisée sera toujours présente.

Au cours de la deuxième étape, le professeur annonce qu'on va s'interroger sur la quantité d'eau utilisée : « est-ce mieux de prendre un bain ou une douche pour la quantité d'eau ? » en laissant de côté dans cette étape tout autre élément apparu dans la discussion. On peut proposer un scénario où les élèves enquêtent sur les volumes de baignoire et les débits de douche. Les sites dédiés au bricolage ou aux professionnels de la plomberie sont riches en indications à ce sujet. On peut aussi fournir des documents donnant des indications sur ces grandeurs.

Une fois fixées les données : volume d'eau utilisé pour le bain, et débit de la douche, on passe à la troisième étape, l'écriture du modèle mathématique ou étape de mathématisation. Cette étape de mathématisation convoque la notion de fonction par le lien entre la quantité

d'eau utilisée sous la douche en fonction du temps. Le programme du cycle 4 (Ministère de l'Éducation Nationale 2015), dans le domaine mathématiques « organisation et gestions de données », pour la partie « comprendre et utiliser la notion de fonction » précise dans les connaissances et compétences associées à faire étudier :

Modéliser des phénomènes continus par une fonction.

Résoudre des problèmes modélisés par des fonctions (équations, inéquations).

- Dépendance d'une grandeur mesurable en fonction d'une autre.
- Notion de variable mathématique. […]
- Cas particulier d'une fonction linéaire, d'une fonction affine.

Du point de vue du programme sur les fonctions, la situation proposée est donc conforme au programme du collège. Elle conduit à utiliser une fonction linéaire, par l'hypothèse du débit constant. Nous avons pu repérer cette hypothèse sur des sites de plomberie. Par ailleurs, la manipulation d'une grandeur quotient, le débit, est aussi au programme du cycle 4.

À la fin de cette étape de mathématisation, on peut alors commencer à travailler le modèle mathématique pour répondre à la question. Il est possible d'utiliser les représentations graphiques de fonction, ou de faire une résolution de type algébrique.

Le retour à la situation montre la transformation naturelle de la question, conformément au schéma de la figure 2 (d'après Coulange 1998). On est passé de « est-ce vrai ? » à la question « quel est le temps au-delà duquel il vaut mieux prendre un bain qu'une douche ? ». En conséquence, la réponse n'est pas de la forme « vrai ou faux », mais est plus subtile : suivant le temps passé sous la douche, il est plus économique en eau de prendre un bain ou une douche. D'un point de vue épistémologique, il nous semble important de faire émerger le fait qu'on ne peut pas répondre simplement « c'est mieux ou c'est moins bien de prendre une douche plutôt qu'un bain ». Cela participe à mieux comprendre la différence entre réflexion scientifique et opinion.

La situation peut être prolongée par une amélioration du modèle, l'amélioration consistant à prendre en compte d'autres éléments de la comparaison bain-douche. On peut s'appuyer sur des points discutés lors de la première phase volontairement négligés dans la deuxième partie. Ainsi, il est possible de rappeler simplement que, généralement, on attend que l'eau soit chaude pour se laver sous la douche. En conséquence, la quantité d'eau dépensée en fonction du temps passé sous la douche est une fonction affine. En proposant une valeur numérique au temps de chauffe, on aboutit à un nouveau temps en-dessous duquel il est mieux de prendre une douche. On peut s'interroger aussi sur l'effet du remplissage de la baignoire : si elle est remplie à moitié ou aux trois-quarts, cela change la réponse. Cette possibilité offerte par la situation permet de mieux rendre compte de ce qu'est le processus de modélisation dans son retour au système et à la question posée sur le système. Elle éclaire le fait qu'on choisisse des variables et qu'on peut modifier ce choix pour affiner le modèle.

2. Déroulement de l'expérimentation avec les professeurs stagiaires.

Nous avons pu mener à bien cette séquence de formation deux années consécutives, dans le cours magistral de l'UE « interdisciplinarité ». L'effectif des promotions a été à chaque fois d'une soixantaine d'étudiants, placés dans une grande salle ou dans un amphithéâtre, ce qui contraint à une position frontale entre étudiants et formateur et n'est propice ni aux travaux en groupe, ni aux débats.

Avant de présenter la situation, la formatrice a affiché sur son diaporama la question « qu'est-ce que modéliser ? » et elle a demandé aux étudiants de prendre un peu de temps

pour y réfléchir. Cela a permis d'introduire un premier questionnement sur la modélisation dans le milieu didactique. Pédagogiquement, c'est aussi un moyen pour que les étudiants se sentent autorisés à prendre la parole, malgré la disposition de la salle et l'effectif, ce qui est très important pour la mise en œuvre de la situation « bain-douche ». Les réponses ont été notées d'abord au tableau, puis dans la version du diaporama mise à disposition de la promotion dans l'environnement numérique de travail de l'université, ce qui correspond aux habitudes de la formatrice. Cette question nous permet d'accéder à une représentation de la modélisation proposée par les professeurs stagiaires.

Les réponses des deux promotions telles qu'elles apparaissent dans le diaporama de la formation sont disponibles en annexe. La seconde promotion a d'abord fait référence au programme du cycle 4, ce qui n'est pas étonnant car il est demandé très régulièrement au cours de la formation des professeurs de s'appuyer sur le programme.

L'affiche a ensuite été projetée ; pour des raisons techniques le texte « une douche nécessite 50 litres d'eau contre 200 pour un bain » n'est pas apparu. La formatrice a demandé alors si l'affiche dit vrai : est-ce qu'il vaut mieux prendre une douche plutôt qu'un bain ? Elle a pris note des réponses au tableau, sans aucune censure. Des propositions sont apparues sur l'énergie dépensée, le volume d'eau. Quelques jeunes parents présents ont évoqué la situation des fratries misent dans le bain ensemble, ce qui dépense moins d'eau que plusieurs douches successives. Ce n'est pas anecdotique : dans le cas de plusieurs enfants en bas âge, la question ne se pose pas de la même façon. Cela fait partie de la complexité de la situation réelle.

Après ce travail de réflexion, la formatrice, comme dans le scénario pour une classe de collège, propose d'étudier uniquement la question du volume d'eau. Elle projette alors un document indiquant différents volumes de baignoires – la contenance 200 litres est rare, les valeurs sont plutôt inférieures, puis un document donnant des indications sur les débits de douche. La formatrice demande alors aux étudiants comment on peut répondre à la question posée : « Vaut-il mieux prendre un bain ou une douche ? » Elle précise : on peut imaginer une baignoire de 180 litres – c'est un grand modèle, remplie aux trois quarts, et une douche avec un débit de 20 litres par seconde. La réponse des étudiants est loin d'être immédiate. Nous n'avons malheureusement pas pu filmer ces séances, mais nous gardons le souvenir d'une étudiante dont le visage s'est illuminé et qui a fait un geste de la main évoquant une « droite oblique ». La réaction nous a surprise : les mathématiques mises en jeu sont en principe dominées par les professeurs stagiaires. Pour terminer, un des étudiants propose l'expression de deux fonctions, représentant la quantité d'eau en fonction du temps soit pour la douche soit pour la baignoire – cette seconde fonction est constante.

Le temps de formation se poursuit alors sur la question : à quel niveau de classe peut-on proposer cette situation ? Les professeurs stagiaires ont reconnus facilement qu'il s'agit d'une situation utilisable en fin de cycle 4. Faute de temps, l'analyse avec les professeurs stagiaires n'a pas été poussée plus avant.

3. Éléments d'analyse

Dans la partie consacrée à l'affiche, le temps passé à réfléchir au système extramathématique, à estimer les variables qui pilotent l'état du système, a été long et les étudiants ont proposé des réponses très riches. Il nous semble qu'il y a eu réellement un temps de réflexion correspondant aux phases 1 et 2 de modélisation. De ce point de vue, la situation de comparaison bain-douche nous parait porter la capacité à mettre en œuvre cette phase.

Nous nous sommes posée la question de la possibilité de travailler ces phases 1 et 2 dans une classe de mathématiques, sans lien avec les autres disciplines. Un des physiciens membre

du groupe que nous avons mentionné en début de ce texte nous a fourni un élément de réponse : la physique qui est travaillée dans la situation bain douche est bien connue de tous. Cela pourrait être considéré comme un élément caractéristique des situations souvent appelées « de la vie quotidienne ». Nous avons débattu de ce point dans notre groupe de travail : il n'est pas certain que la notion de débit soit si bien comprise des élèves. Sur certains sites de plomberie, nous avons trouvé des descriptions de technique pour mesurer le débit d'une douche, en prenant un récipient gradué, une montre et en mesurant le temps pris à remplir le récipient en ouvrant la douche à fond. On peut imaginer que cela fournisse une expérimentation qui soit utilisable en cours de mathématiques.

Les réponses fournies par les étudiants à la question « qu'est-ce que modéliser ? » ont fait émerger dans les deux promotions l'idée d'un changement de langage et l'idée de simplification. La première promotion n'a pas évoqué le passage du réel vers les mathématiques. Dans les deux cas, il n'est pas question de variables, mais il se peut que ce soit lié à la forme très générale de la question posée. Le retour des mathématiques vers le réel ou l'extra-mathématiques (phase 4 du processus de modélisation) n'est jamais évoqué, alors que le travail de modélisation est souvent décrit dans les travaux de didactique comme une boucle entre le réel et les mathématiques. Il se peut que ce soit lié à la formulation de la question : modéliser est perçu comme une phase de la modélisation dans son ensemble. Si « modéliser » est « fabriquer un modèle » ainsi que l'a affirmé un étudiant, il est normal de ne pas se préoccuper de la suite : le travail mathématique du modèle et le retour à la situation. Il est possible aussi que la modélisation ne soit pas pensée sous forme de boucle. Nous savons que dans la formation en didactique de ces étudiants, les formateurs proposent l'analyse d'énoncés proposant des situations du monde. Ces formateurs insistent sur le retour à la situation en fin de travail du modèle. Cela mériterait une étude plus approfondie

Nous n'avions pas anticipé la difficulté des professeurs stagiaires à résoudre le problème et la réaction d'étonnement manifestée par certains en cours de résolution. Une explication possible réside dans un aspect épistémologique souligné par Soury-Lavergne et Bessot (2012), la conception dynamique et la conception statique de fonction :

> Les recherches sur la notion de fonction distinguent deux conceptions de cette notion que l'on peut repérer comme se succédant dans l'histoire :
>
> • la covariation de deux grandeurs. Nous parlerons de conception dynamique de la notion de fonction, décrite par Euler en 1755 :
>
> Si certaines quantités dépendent d'autres quantités de telle manière que si les autres changent, ces quantités changent aussi, alors on a l'habitude de nommer ces quantités fonction de ces dernières. (Euler 1755)
>
> • la correspondance associant un nombre unique à un nombre donné. Nous parlerons de conception statique de la notion de fonction, définie par Hankel en 1870 de la façon suivante :
>
> On dit que *y* est fonction de *x* si à chaque valeur de *x* d'un certain intervalle correspond une valeur bien définie de *y* sans que cela exige pour autant que *y* soit défini pour tout l'intervalle par la même loi en fonction de *x*, ni même que *y* soit défini par une expression mathématique explicite de *x*. (Hankel 1870)

Les étudiants n'ont pas eu le réflexe de décrire par une fonction le lien entre la quantité d'eau utilisée sous la douche et la durée de la douche. Ainsi que nous l'avons préalablement indiqué, dans le programme actuel du cycle 4 (Ministère de l'Éducation Nationale 2015), les fonctions doivent être étudiées avec « la dépendance d'une grandeur mesurable en fonction d'une autre. » On peut s'interroger sur la façon dont les professeurs vont pourvoir faire vivre cette dépendance alors que la conception statique de fonction est aussi prégnante.

REFERENCES

Coulange L. (1998) Les problèmes concrets à mettre en équation dans l'enseignement. *Petit x* 47, 33-58.

DGESCO (2009) *Ressources en mathématiques et sciences physiques et chimiques, Exemples d'activité en algèbre et analyse* http://eduscol.education.fr/cid46460/ressources-en-mathematiques-et-sciences-physiques-et-chimiques.html

Euler L. (1755) *Opera Omnia ser.1*. vol. VIII. Editions A. Kazer & F. Rudio (1922).

Hankel H. (1870) *Untersuchungen über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Funktionen.* Tübingen (Dissertation).

Ministère de l'Éducation Nationale (2015) *Bulletin Officiel Spécial n°11 du 26 novembre 2015* http://cache.media.education.gouv.fr/file/MEN_SPE_11/35/1/BO_SPE_11_26-11-2015_504351.pdf

Nguyen Thi N. (2011) *La périodicité dans les enseignements scientifiques en France et au Viêt Nam : une ingénierie didactique d'introduction aux fonctions périodiques par la modélisation*. Thèse de doctorat. Université Joseph Fourier Grenoble 1 et Université Pédagogique d'Ho Chi Minh Ville - disponible sur HAL <tel-00630048>

Rodriguez R. (2007) *Les équations différentielles comme outil de modélisation mathématique en Classe de Physique et de Mathématiques au lycée : une étude de manuels et de processus de modélisation d'élèves en Terminale S*. Thèse de doctorat Université Joseph-Fourier, Grenoble I – disponible sur HAL <tel-00292286>

Soury-Lavergne S., Bessot A. (2012) *Modélisation de phénomènes variables à l'aide de la géométrie dynamique*. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012 (GT5, pp. 742–753). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

ANNEXE

Réponses des promotions à la question « qu'est-ce que modéliser ? ». Ces réponses sont celles qui sont notées dans le diaporama de la formation, les diapositives étant reproduites ci-après.

Promotion 1 :

- Représenter
- Coder
- Passer d'un langage à un autre
- Simplifier
- Se rapprocher de quelque chose qu'on connait, un modèle
- On perd de l'information

Promotion 2 :

- Passer d'un langage disciplinaire à un autre (les changements de registre seraient de la représentation ???)
- Extraire de l'information utile d'un texte pour répondre à une question précise
- Partir d'un phénomène, d'un constat pour en faire une vérité mathématique
- Passer d'une situation réelle à des données exploitables
- Traduire un problème extra mathématiques en mathématiques
- Trouver une représentation simplifiée d'une situation complexe
- Fabriquer un modèle
- À partir d'un problème créer un espace de travail mathématique (ou se ramener à …)

ETUDE D'UNE APPROCHE COLLABORATIVE ENTRE MATHÉMATIQUES, PHYSIQUE ET BIOLOGIE : CAS DE L'ENSEIGNEMENT DE LA STROBOSCOPIE

MALONGA MOUNGABIO[*] Fernand Alfred, LOUYIDOULA BANGANA YIYA[**] Chris Poppel.

Résumé - La pratique de l'interdisciplinarité est considérée comme un des leviers permettant de donner du sens à certains savoirs. Nous nous proposons de présenter ici une analyse de cas de « dialogue » entre mathématiques, physique et biologique autour de l'enseignement de la stroboscopie en classe de terminale scientifique.

Mots-clefs : Interdisciplinarité ; stroboscopie ; persistance rétinienne ; périodicité ; sinusoïde.

Abstract – Texte du résumé traduit en anglais

The practice of interdisciplinarity is considered as one of the levers for giving meaning to certain knowledge. We propose to present here a case analysis of the "dialogue" between mathematics, physics and biology around the teaching of stroboscopy in the scientific terminal class.

Keywords: Interdisciplinarity; stroboscopy; retinal persistence; periodicity; sinusoid.

I. INTRODUCTION

Dans de nombreux systèmes d'enseignement, des interfaces entre les mathématiques et les autres domaines scientifiques (comme les sciences physiques ou biologiques) sont mises en évidence notamment pour tenter d'assurer une meilleure visibilité des mathématiques et en montrer l'intérêt pour la compréhension des avancées scientifiques et technologiques. Tel est le cas de l'enseignement des sciences au Congo-Brazzaville dont les programmes scolaires visent à montrer l'intérêt et la puissance des mathématiques au service d'autres domaines à travers l'activité de modélisation.

Nous rapportons ici, une réflexion sur la mise en synergie de trois disciplines (physique, mathématiques et biologie) à propos de l'enseignement de la stroboscopie, dispensé en physique en classe de terminale scientifique.

La stroboscopie est une méthode d'étude des phénomènes périodiques très rapide. Le cours sur la stroboscopie nécessite un stroboscope. Cependant, l'absence de cet appareil dans plusieurs lycées au Congo conduit la plupart des enseignants de physique d'aborder à peine (ou pas du tout) ce cours, qui est pourtant indiqué pour servir d'introduction à l'étude des phénomènes périodiques.

Nous proposons une *analyse à priori* d'une mise en scène de ce cours sans nécessairement disposer d'un stroboscope, avec l'implication des enseignants des trois disciplines à savoir, la physique, les mathématiques et les sciences de la vie et de la terre (biologie).

[*] Ecole Normale Supérieure, Université Marien Ngouabi - Congo Brazzaville – malongaf@gmail.com

[**] Ecole Normale Supérieure, Université Marien Ngouabi - Congo Brazzaville – chris.louyindoula@umng.cg

II. LES FINALITES DE L'ENSEIGNEMENT DES SCIENCES AU CONGO-BRAZZAVILLE : QUE DISENT LES PROGRAMMES ?

D'après les commentaires des programmes scolaires édition 2002, les finalités de l'enseignement des sciences doivent permettre de :

- stimuler la curiosité intellectuelle de l'élève ; donner à l'élève le goût de la recherche ; créer progressivement chez l'élève une attitude scientifique.

> Ce qui lui [l'élève] permettra de développer des aptitudes à la démarche scientifique, à la maîtrise du langage mathématique (interpréter des graphiques, savoir schématiser), à utiliser un dispositif expérimental permettant de valider ou d'invalider une hypothèse, etc.

(Programme de physique 2002, p. 7)

- apprendre à l'élève, les mathématiques de l'action, celles du sens. En effet, les mathématiques.

> Les mathématiques sont considérées comme un socle de la pensée commune, une pensée mobilisée pour l'action dans la vie quotidienne, comme discipline de service ayant une composante culturelle, comme une discipline contribuant à l'amélioration des capacités participant au développement de l'intelligence...

(Programme de mathématiques, p. 10)

- conduire l'élève à :

> Connaitre les caractères de la nature, l'homme en tant qu'être biologique et ses fonctions ; expliquer scientifiquement les lois et phénomènes naturelles dans les différentes sciences biologiques, géologiques et écologiques ; réaliser et interpréter des expériences pour la vérification de ces lois …

(Programme des sciences de la vie et de la terre, P. 9)

A la lecture de ces extraits de programmes de ces trois disciplines, bien que les termes d'inter- pluri- ou trans- disciplinarité n'apparaissent pas de façon explicite, les concepteurs de ces programmes n'excluent pas un travail pouvant s'appuyer sur une vision croisée entre ces disciplines scientifiques.

C'est en ce sens que nous nous sommes proposés de mener notre réflexion autour de l'enseignement de la stroboscopie dans un contexte de transdisciplinarité entre la physique, les mathématiques et la biologie.

III. PROBLEMATIQUE ET METHODOLOGIE

1. Problématique

Notre étude part du constat que la plupart des enseignants ne traitent pas le cours de stroboscopie, pourtant inscrit dans le programme. Pour notre part, nous considérons que cette notion constitue une interface entre plusieurs disciplines. Nous nous appuyons sur une mise en relation entre la physique, les mathématiques et la biologie pour proposer un enseignement de la stroboscopie en classe de terminale scientifique (élèves de 17-18 ans). L'approche que nous préconisons relève de la transdisciplinarité en ce sens que chaque discipline conserve sa spécificité et son indépendance. Cependant la mise en pratique d'une telle approche considérée comme un facteur favorable à la conceptualisation, ne va pas de soi et conduit à se poser quelques questions :

- Comment mettre en place un scénario pédagogique tenant compte de ces trois disciplines, toutes soumises à des contraintes fortes ?

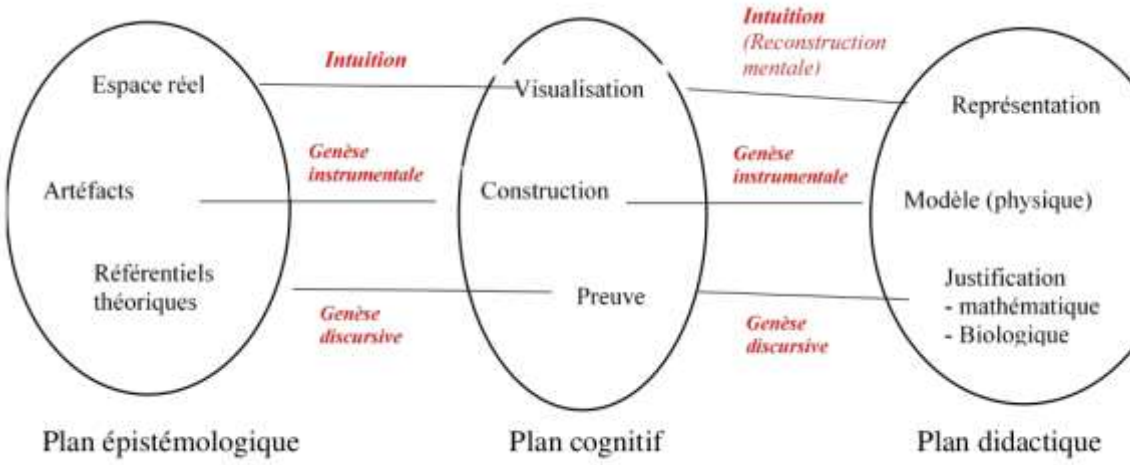
- Quelle est la part des mathématiques et de la biologie nécessaire à la compréhension du phénomène ?

2. Cadre théorique

La complexité des questions à traiter nous conduit à emprunter la notion d'Espace de Travail Mathématique (ETM) de Kuzniak (2011), qui considère que toute étude didactique suppose la description d'un Espace de Travail pour le domaine abordé. En mathématiques, la notion d'ETM s'appuie sur une articulation des plans épistémologiques et cognitifs à travers trois genèses :

- une genèse instrumentale qui permet de rendre opératoire les artefacts dans le processus constructif ;
- une genèse sémiotique basée sur les registres de représentation sémiotiques qui assure aux objets tangibles de l'ETM leur statut d'objets mathématiques opératoires ;
- une genèse discursive de la preuve qui va donner un sens aux propriétés pour les mettre au service du raisonnement mathématique.

Le caractère pluridisciplinaire de notre étude nous conduit d'envisager la construction d'un « Espace de Travail Transdisciplinaire » (ETT) à l'instar des ETM.



Le plan épistémologique est constitué d'un espace réel, des artefacts (lampe, disques) et de référentiels théoriques issus de la physique, de la biologie et des mathématiques.

Le plan cognitif est celui de la visualisation du phénomène (présenté au ralenti), de la construction de différents cas relatifs à l'apparition des points sur le disque et de la preuve.

Outre les plans épistémologiques et cognitifs des ETM, nous nous proposons de préciser le plan didactique comme cadre d'intelligibilité (Malonga, 2009, 2010) du phénomène étudié.

Ce cadre théorique devrait nous permettre de décrire le phénomène observé ainsi le scénario pédagogique conçu.

3. Méthodologie

Pour tenter de répondre à nos questions, nous examinons les possibilités d'une mise en place d'une expérimentation dans une classe de terminale scientifique ; nous nous envisageons un scénario découpé en plusieurs phases, comme l'indique le tableau ci-dessous :

Phase	Discipline	Action	Connaissances en jeu
1	Mathématiques	Etude d'une situation concrète périodique	Congruence, Fonctions périodiques, sinusoïde, représentation graphique
2	Biologie	Cours sur la représentation visuelle	Fonction de la rétine, persistance rétinienne
3	Physique	Caractéristique des phénomènes périodiques : formalisation	Mouvement circulaire, vecteur de Fresnel, différence de phase, avance, retard, opposition, quadrature de phase
		Cas de la stroboscopie	Fréquence : éclairs et disque tournant
4	Réinvestissement	Evaluation	

***Tableau 1** : organisation des enseignements selon les disciplines*

Les deux premières phases se déroulent indépendamment car elles n'ont aucun lien direct. En mathématiques, il est nécessaire de s'assurer que l'élève maîtrise les principales notions liées à l'étude des fonctions sinusoïdales et de congruence.

De même en biologie, il est important que l'élève ait déjà vu les caractéristiques de l'œil notamment celles liées à la rétine. C'est à ce niveau que l'on présente la notion de la persistance rétinienne c'est-à-dire la capacité de l'œil, pouvant être perçue comme étant un défaut aussi bien qu'un atout, consistant à ce que l'image observée soit gardée en mémoire par la rétine un court instant après l'observation.

C'est à la troisième phase (cours de physique) que les notions traitées en mathématiques et en biologie sont mises à profit. La préparation de ce cours de physique se fait par les enseignants des trois disciplines.

IV. L'ENSEIGNEMENT DE LA STROBOSCOPIE EN PHYSIQUE

Matériel :

- Deux disques en carton D1 et D2 d'un rayon donné ;
- Une lampe torche ;
- Un cylindre creux en carton dont le diamètre de sa base correspond à celui de la lampe torche ;
- Trois potences de taille différente réalisée en fil de cuivre (fil électrique) ;
- Un marqueur de couleur noire.

Déroulement

Au début de ce cours de physique, les élèves sont invités à suivre un extrait de film afin de remarquer le phénomène stroboscopique.

Etant donné que nous ne disposons pas d'un moteur électrique, ni d'un stroboscope, nous allons reproduire cette expérience au ralenti et avec du matériel de récupération. Prenons les deux disques en carton fixés par leur centre à une potence. Sur le premier disque, on marque un point noir à l'aide d'un marqueur et sur le second disque, on perce un trou de sorte que si l'on superposait les deux disques, ce trou coïncide avec le point noir. Tout est disposé de la manière suivante.

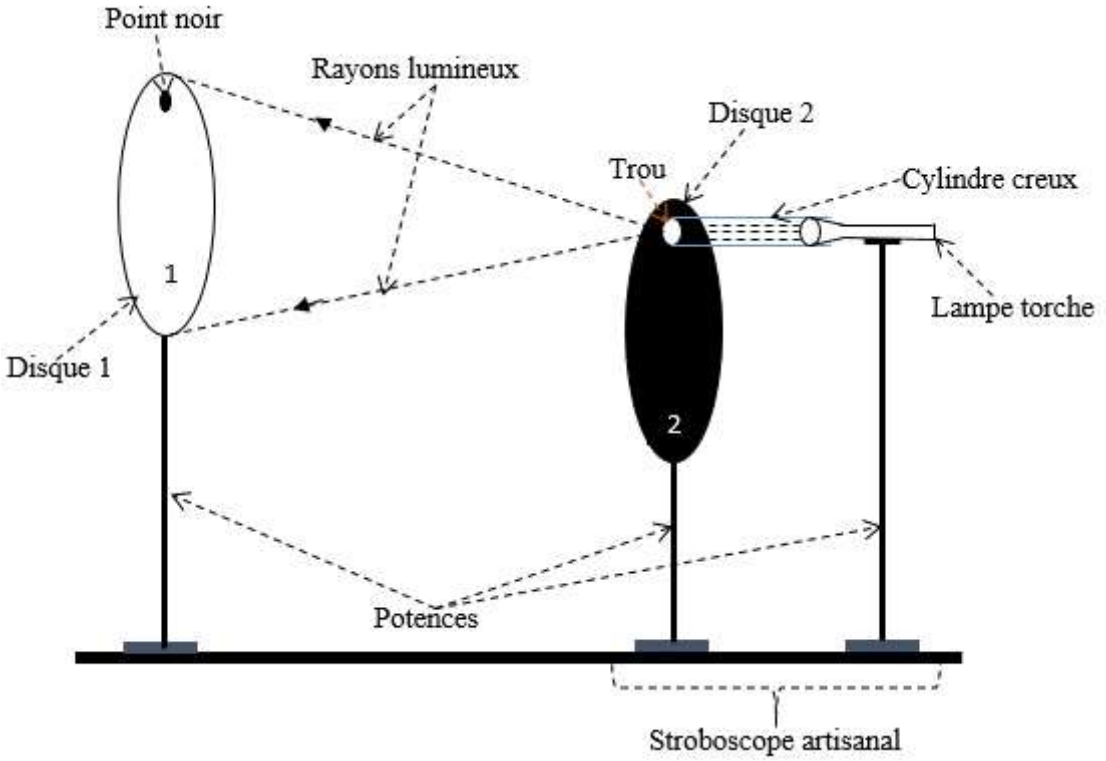


***Figure 1** : Dispositif expérimental*

La lampe torche est allumée en continue et le cylindre en carton empêche toute diffraction de la lumière sauf lorsque la base du cylindre creux coïncide avec le trou du disque 2 ; dans ce cas, le disque 1 sur lequel est marquée la tâche noire est éclairé.

Le disque 1 et le disque 2 tournent avec des fréquences de rotation respectives f et f_e. La fréquence f_e correspond à la fréquence des éclairs c'est-à-dire celle du stroboscope artisanal ainsi constitué.

- Si $f_e = \frac{f}{k}$ ou $T_e = k.T$ avec k un entier non nul, T la période de rotation du disque 1 et T_e celle du disque 2.

Entre deux éclairages consécutifs (intervalle de temps T_e), le premier disque effectue un nombre entier k de tours. Le point noir est toujours éclairé à la même position, le disque parait donc immobile.

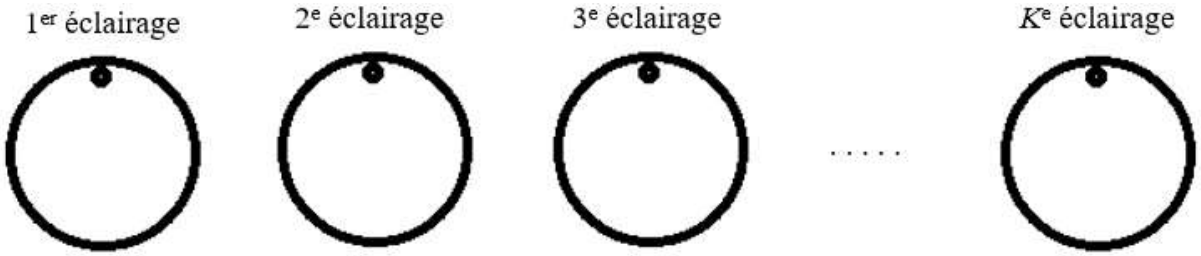


***Figure 2** : Immobilité du point noir*

Justification mathématique

Nous considérons un repère orthonormé (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) placé au centre du disque 1. On suppose que le point noir est un point A auquel on associe le vecteur OA (vecteur de FRESNEL). La position de A peut être décrite par l'équation horaire $X_1 = acos(\omega_1 t + \varphi)$

avec $\left\|\overrightarrow{OA}\right\|$ = a, $\varphi = (\overrightarrow{ox}, \overrightarrow{OA}$ et la pulsation telle que $\omega_1 = 2\pi f_1 = \frac{2\pi}{T_1}$.

En prenant l'axe (Ox) sur la verticale (A appartient à (Ox)), on a $X_1 = acos(\omega_1 t)$.

Par un jeu de translation, on trouve l'équation horaire du point associé au trou du disque 2. Ainsi on a $X_2 = acos(\omega_2 t)$

A l'instant t=T_e=kT, on a $X_1 = X_2$ = a ; ce qui justifie l'immobilité du point noir.

- Si $f_e \simeq \frac{f}{k}$ avec $f_e < \frac{f}{k}$ (ou $T_e \simeq k.T$ avec $T_e > k.T$)

Entre deux éclairages consécutifs, le premier disque effectue un peu plus de k tours : $\left(k + \frac{1}{n}\right)$ tours. L'observateur à l'impression qu'il n'a effectué que $\frac{1}{n}$ tours. Le disque semble tourner lentement dans le sens réel (sens du mouvement au départ).

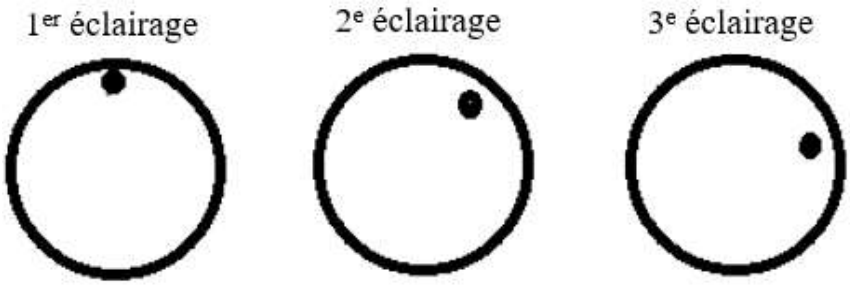


***Figure 3** : déplacement dans le sens des aiguilles d'une montre*

Justification mathématique

A l'instant t= $T_e = \left(k + \frac{1}{n}\right)$T,

$X_2\ acos(\omega_2 T_2) = acos(2\pi)$ = - a

$X_1\ \underset{acos}{\omega_1 \left(k + \frac{1}{n}\right) T_1}] = acos\left[2\pi\left(k + \frac{1}{n}\right)\right] = acos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

Or n>1 et pour tout entier naturel n, on a $X_1 < X_2$

On a l'impression d'un déplacement dans le sens des aiguilles d'une montre lorsqu'on augmente la vitesse de rotation du disque 1 c'est-à-dire qu'on fait varier les valeurs de n du plus petit au plus grand.

- Si $f_e \simeq \frac{f}{k}$ avec $f_e > \frac{f}{k}$ou $T_e \simeq k.T$ avec $T_e < k.T$

Entre deux éclairages consécutifs, le premier disque effectue un peu moins de *k* tours : $\left(k - \frac{1}{n}\right)$ tours. L'observateur a l'impression qu'il a effectué seulement $\frac{1}{n}$ tour en sens inverse. Le disque semble tourner lentement dans le sens inverse du mouvement réel.

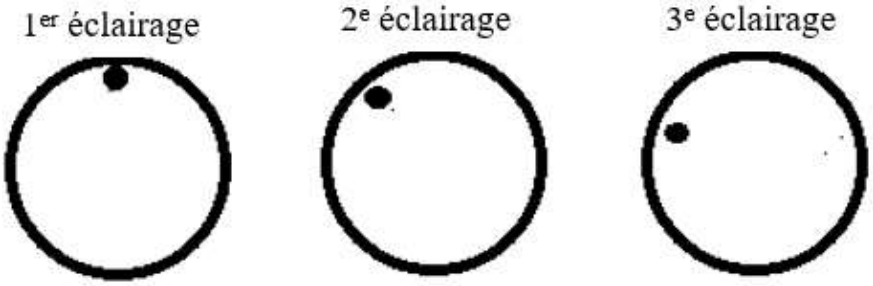


***Figure 4** : déplacement dans le sens contraire des aiguilles d'une montre*

Justification mathématique

La justification est la même que dans le cas précédent, c'est-à-dire qu'à l'instant

t= $T_e = \left(k - \frac{1}{n}\right)$T, X_2 = - a et $X_1 = acos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ et pour tout entier naturel n, on a $X_1 < X_2$

On a l'impression d'un déplacement dans le sens contraire des aiguilles d'une montre lorsqu'on diminue la vitesse de rotation du disque 1 c'est-à-dire qu'on fait varier les valeurs de n du plus grand au plus petit.

- Si $f_e = k.f$ ou $T = k.T_e$

A cause du fait que l'expérience se déroule au ralenti, entre deux éclairages consécutifs, le premier disque effectue $\frac{1}{k}$ tour. Le point noir est éclairé *k* fois par tour et apparait à différent endroits.

Exemple pour $k = 3$ on a :

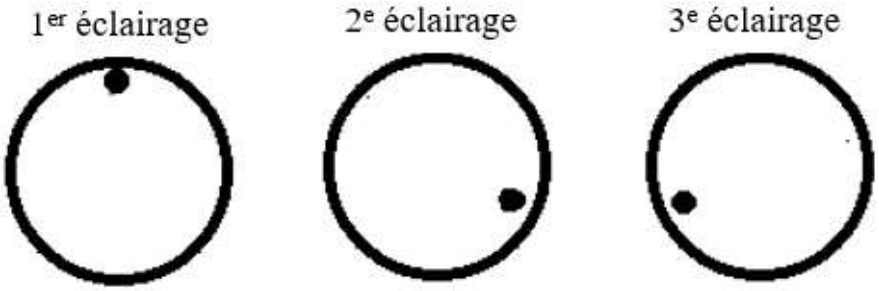


***Figure 5** : Différentes positions de la tâche noire*

Si l'expérience ne se déroule pas au ralenti et avec une période du second disque $T_e < 0{,}004s$ (temps limite pour obtenir une persistance des impressions rétiniennes[1]), à cause de la

[1] En Biologie on explique que : lorsqu'une image se forme sur la rétine, elle ne disparaît pas immédiatement mais reste "imprimée" environ un dixième de seconde avant que les cellules de la rétine redeviennent à nouveau sensibles à la lumière. Cette image est gardée quelque instant en mémoire, environ 1/25ème de seconde, même après sa disparition. Ce phénomène s'appelle la persistance rétinienne.

persistance des impressions rétiniennes, l'observateur a l'impression de voir le premier disque immobile portant *k* tâches noires (les trois images de la figure 5 ont fusionné).

Exemple pour $k = 3$ on a :



Figure 6 *: L'impression de percevoir 3 points noirs*

Par exemple sur un ventilateur en marche, il nous est impossible de distinguer les pales du ventilateur en mouvement. Mais quand on l'arrête, avant que ces pales ne s'immobilisent, on peut distinguer les pales tournées et se rendre compte qu'il y'a eu multiplication du nombre de pales à cause de la persistance des impressions rétiniennes.

V. SYNTHESE

L'espace réel permet la visualisation du phénomène décrit au ralenti. Un effort de reconstitution mentale est attendue chez l'apprenant pour pouvoir représenter sur son cahier les différents cas du phénomène (apparition de *k* points noirs sur le disque D1). Par ailleurs, le fait de présenter le phénomène au ralenti conduit à produire de façon pragmatique un premier niveau de preuve. Mais l'exploitation de la théorie physique en termes de « phase » et « déphasage » conduit à la mise en place d'un modèle (équations horaires) dont la justification est à la portée des élèves. Les mathématiques permettent d'expliquer la théorie de la persistance rétinienne.

VI. CONCLUSION

Deux Espaces de Travail Transdisciplinaires peuvent être dégagés : celui de l'enseignant et celui de l'élève. L'objectif de ce cours est de faire en sorte que les deux espaces soient proches, tant du moins de point de vue de l'élaboration du modèle que de la mise en œuvre des justificatifs mathématiques.

Ainsi, l'étude de la stroboscopie peut constituer une occasion de faire vivre aux élèves l'expérience d'un « dialogue » entre plusieurs disciplines scientifiques. L'activité proposée traduit une part de modélisation du phénomène des impressions rétiniennes et permet de montrer l'intérêt et la puissance des mathématiques au service de la physique et de la biologie.

RÉFERENCE

INRAP (2002) Programmes scolaires. Ministère de l'Enseignement Primaire, Secondaire et de l'Alphabétisation.

KUZNIAK A. (2011) L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 2011, 16, 9-24.

MALONGA MOUNGABIO F. & BEAUFILS D. (2010) Modélisation et registres sémiotiques : exemple d'étude de manuels de physique de terminale. *Revue de didactique des sciences et de technologie,* Vol. 1, n°1, 293-316

MALONGA MOUNGABIO F. (2009) Les équations différentielles à l'interface mathématiques - physique : praxéologie et jeux de cadres de rationalité dans les manuels de terminale S. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 29, n°3, 335 – 357..

LE CADRE THEORIQUE DE L'ETM ETENDU : ANALYSE D'UNE SEQUENCE UTILISANT LA RELATIVITE RESTREINTE

MOUTET* Laurent

Résumé – Le cadre théorique de l'ETM étendu est utilisé pour analyser les tâches mises en œuvre lors du processus de modélisation. Il permet de montrer, au travers d'une séquence d'enseignement de relativité restreinte en terminale S en France (grade 12), quelles sont les interactions entre le plan cognitif et les plans épistémologiques de la physique ou des mathématiques. Les genèses, l'association de genèses et l'interaction entre les différents plans sont explicitées pour certaines étapes du cycle de modélisation.

Mots-clefs : Mathématiques, physique, ETM étendu, relativité restreinte, modélisation.

Abstract – The theoretical frame of the extended MWS allows analysing the tasks operated during the process of modelling. It allows showing, through the example of a special relativity teaching sequence in a grade 12 class in France, which are the interactions between the cognitive plane and the epistemological planes of the physics or the mathematics. The geneses, the association of geneses and the interaction between differents plans can be clarified for certain stages of the cycle of modelling.

Keywords: Mathematics, physics, extended MWS, special relativity, modelling.

I. PRESENTATION DU CADRE THEORIQUE DE L'ETM ETENDU

L'espace de travail mathématique (ETM) a été développé afin de mieux comprendre les enjeux didactiques autour du travail mathématique dans un cadre scolaire (Kuzniak et al., 2016). L'ETM comporte deux niveaux : un de nature cognitive en relation avec l'apprenant et un autre de nature épistémologique en rapport avec les contenus mathématiques étudiés. Le plan épistémologique contient un ensemble de représentamen (signes utilisés), un ensemble d'artéfacts (instruments de dessins ou logiciels) et un ensemble théorique de référence (définitions et propriétés). Le plan cognitif contient un processus de visualisation (représentation de l'espace dans le cas de la géométrie), un processus de construction (fonction des outils utilisés) et un processus discursif (argumentations et preuves). Le travail mathématique résulte d'une articulation entre les plans cognitifs et épistémologiques grâce à une genèse instrumentale (opérationnalisation des artefacts), une genèse sémiotique (basée sur le registre des représentations sémiotiques) et une genèse discursive (présentation du raisonnement mathématique). Les différentes phases du travail mathématique associées à une tâche peuvent être mises en évidence par la représentation de trois plans verticaux sur le diagramme de l'ETM. Les interactions de type sémiotique-instrumentale (sem-ins) conduisent à une démarche de découverte et d'exploration d'un problème scolaire donné. Celles de type instrumentale-discursive (ins-dis) privilégient le raisonnement mathématique en relation avec les preuves expérimentales. Enfin, celles de type sémiotique-discursive (sem-dis) sont caractéristiques de la communication de résultats de type mathématique ainsi que d'un raisonnement plus élaboré. Le diagramme des ETM a été adapté (Moutet, 2016) en rajoutant un plan épistémologique correspondant au cadre de rationalité de la physique (Lerouge, 2000 et Malafosse, 2002, **figure 1**). La position des plans n'a pas d'importance, ce sont plutôt les liens et le jeu d'aller-retour entre ces plans qui est intéressante. Il a été choisi de ne garder qu'un seul plan cognitif à cause de la similarité des opérations cognitives des deux disciplines mises en jeu (physique et mathématiques). Les représentations des élèves ou les schèmes activés peuvent toutefois être prises en compte à l'aide de la notion d'ETM personnel de l'élève qui correspond à ce que font véritablement les élèves lorsqu'ils sont confrontés à un problème scolaire. Le cadre de l'ETM étendu permet d'analyser finement les interactions

* LDAR – France - laurent.moutet@ac-amiens.fr

entre les différents cadres de rationalité et le plan cognitif de l'élève puis de qualifier la nature du travail effectué ou celui qui lui est demandé dans le contexte bien particulier d'une approche diagrammatique de la relativité restreinte.

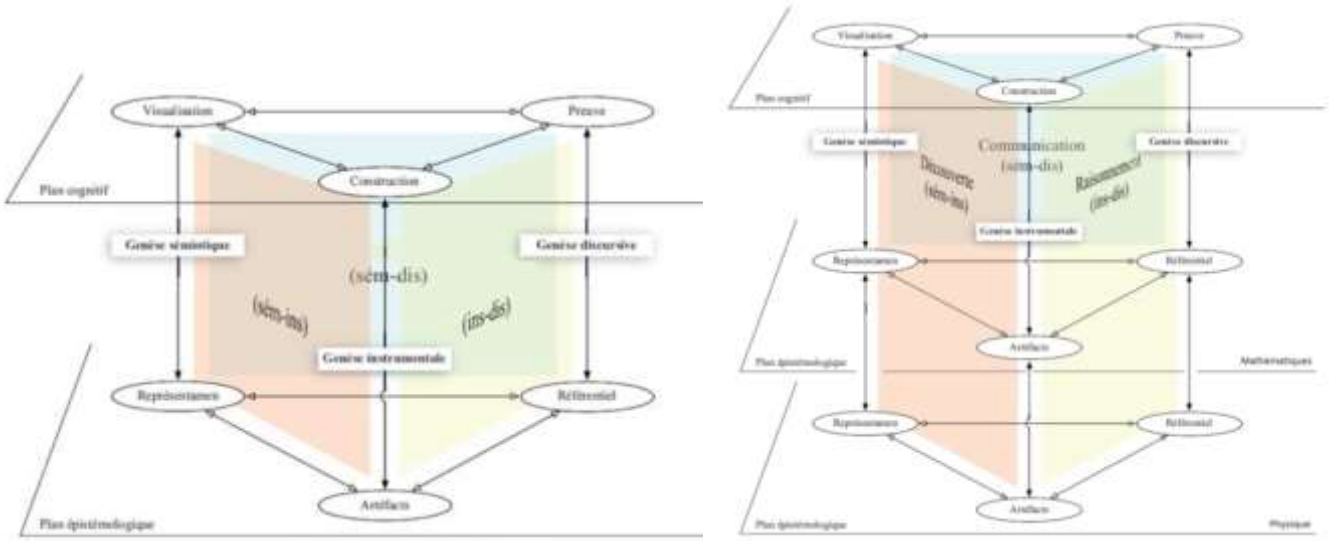


Figure 1 *– Modèle de l'ETM (à gauche) et de l'ETM étendu (à droite)*

II. LE CYCLE DE MODELISATION

Le cycle de modélisation de Blum & Leiss (2005, **figure 2**) décrit les différentes étapes utilisées par un chercheur en mathématique lors du processus de modélisation. Ils font l'hypothèse que le même cycle peut être transposé dans les autres disciplines scientifiques ainsi que dans un cadre scolaire. Ce cycle commence par une situation réelle (SR) associée à une situation concrète. La compréhension plus ou moins implicite et complète de la situation par l'élève correspond à la situation modèle (SM). Une idéalisation et une simplification des données de l'énoncé ont alors lieu cette fois-ci de manière plus explicite pour conduire au modèle réel (MR). Une phase de mathématisation explicite conduit au modèle mathématique (MM) puis, en travaillant ce modèle, aux résultats mathématiques (RM). L'interprétation de ces résultats conduit aux résultats réels (RR) qui sont validés en tenant compte de la situation modèle (SM). Plusieurs cycles de modélisation sont alors possibles permettant une optimisation lors des confrontations des résultats réels obtenus (RR) en lien avec la situation réelle (SR) donnée.

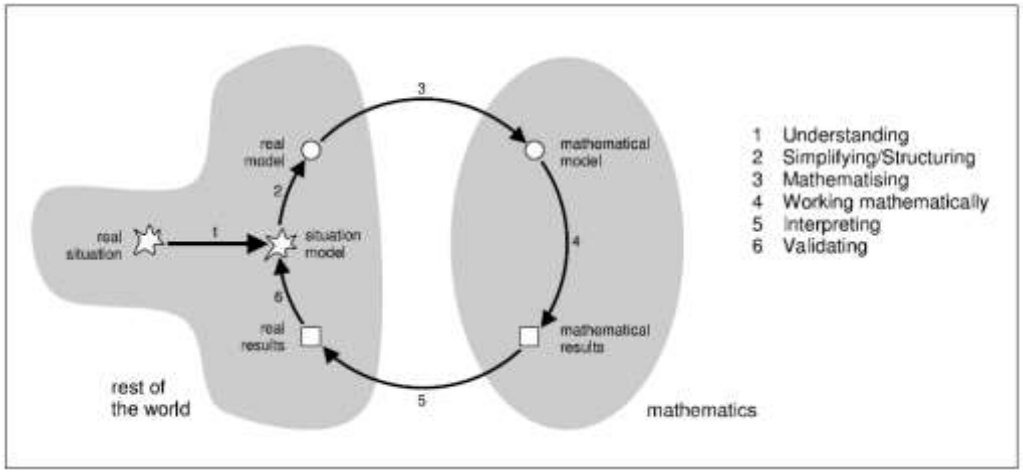


Figure 2 *– Cycle de modélisation de Blum et Leiss (2005)*

Borromeo Ferri (2006) s'intéresse également à la modélisation dans un cadre scolaire avec une dimension cognitive. Elle utilise un cycle de modélisation ressemblant à celui de Blum et Leiss mais en préférant l'expression représentation mentale de la situation (RMS) à la place de SM tout en conservant la même signification. Elle explique que des connaissances extra mathématiques sont mobilisées lors du passage de l'étape RMS→MR et MR→MM. Il nous semble que c'est également le cas lors des passages de RM→RR et RR→RMS. Ces connaissances extra mathématiques font écho, dans le cadre de notre étude, au cadre de rationalité des sciences physiques. D'autre part, elle évoque « des chemins de modélisation individuels » propres aux élèves lors du processus de modélisation. Le cycle n'est pas parcouru linéairement et en fonction des élèves, certaines phases sont privilégiées par rapport à d'autres qui peuvent être ignorées.

III. DU « MODELE REEL » AUX « RESULTATS REELS »

Nous nous sommes basés sur le cycle de modélisation de Blum & Leiss (2005) pour positionner une séquence d'enseignement (Moutet, 2016) portant sur le changement d'ordre chronologique d'événements en fonction du référentiel dans le cadre de la relativité restreinte (de Hosson, 2010). Nous avons effectué une étude préliminaire d'une séquence en étudiant le passage MR→RR avec l'objectif de développer à plus long terme une séquence couvrant un cycle complet de modélisation SR→RR. Dans ce cas-là, il ne sera pas pertinent d'utiliser comme véhicule une « deux chevaux » afin de favoriser les passages SR→SM et SM→MR.

Deux questions de recherche ont guidé ce travail : Comment le cadre de l'ETM étendu permet d'analyser les jeux de cadres de rationalité entre les mathématiques et la physique lors d'une séquence traitant de la relativité restreinte avec des élèves de terminale S via une approche géométrique ? Dans quelle mesure l'analyse de l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique par le cadre de l'ETM étendu permet de montrer qu'il favorise une conceptualisation chez les élèves ?

La séquence est destinée à des élèves de terminale S (grade 12). Elle suit l'apprentissage du cours et la correction d'exercices du manuel. Elle participe à la conceptualisation des notions de relativité restreinte en permettant de les réinvestir dans un contexte différent et inconnu (Vergnaud, 1990). Deux référentiels liés à deux observateurs, Armineh et Daniel, sont utilisés. Armineh conduit une voiture se déplaçant à une vitesse proche de la vitesse de la lumière par rapport à Daniel. Ce dernier se trouve sur le bord de la route à côté de trois flashs lumineux S_1, S_2 et S_3 associés à trois événements particuliers E_1, E_2 et E_3 initialement connus dans le référentiel de Daniel (**figure 3**). Il s'agit ici du MR puisqu'on retrouve des éléments de simplification et de pré-mathématisation de la situation (axe (Ox), route rectiligne, représentation sur un schéma des deux observateurs et des sources lumineuses S_1, S_2 et S_3). Il est demandé aux élèves de construire le diagramme de Minkowski de la situation à l'aide du logiciel GeoGebra et de faire varier la vitesse d'Armineh par rapport à Daniel pour en déduire des résultats remarquables.

Le diagramme d'espace-temps de Minkowski, associé au MM, a déjà été construit par les élèves et utilisé en classe à l'aide d'une activité papier-crayon relativement guidée par l'enseignant. Le logiciel de géométrie dynamique GeoGebra conduit, au travers d'une activité dans laquelle les élèves sont en autonomie, à réinvestir le diagramme d'espace-temps de Minkowski. L'utilisation de GeoGebra permet d'activer une autre genèse instrumentale, ce qui conduit à une analyse a priori différente de l'activité papier-crayon à l'aide du modèle de l'ETM étendu. Le diagramme de Minkowski permet de représenter le repère (xOc.t) relatif au référentiel de Daniel et le repère (x'Oc.t') relatif au référentiel d'Armineh. Cette dernière se

déplace initialement à la vitesse v de 0,6 fois la vitesse de la lumière dans le vide (on considère que la vitesse de la lumière dans le vide est à peu près égale à celle dans l'air) par rapport à Daniel suivant un axe (Ox). Les droites (Ox) ou (Ox') correspondent à la route dans les référentiels de Daniel ou d'Armineh (**figure 4**).

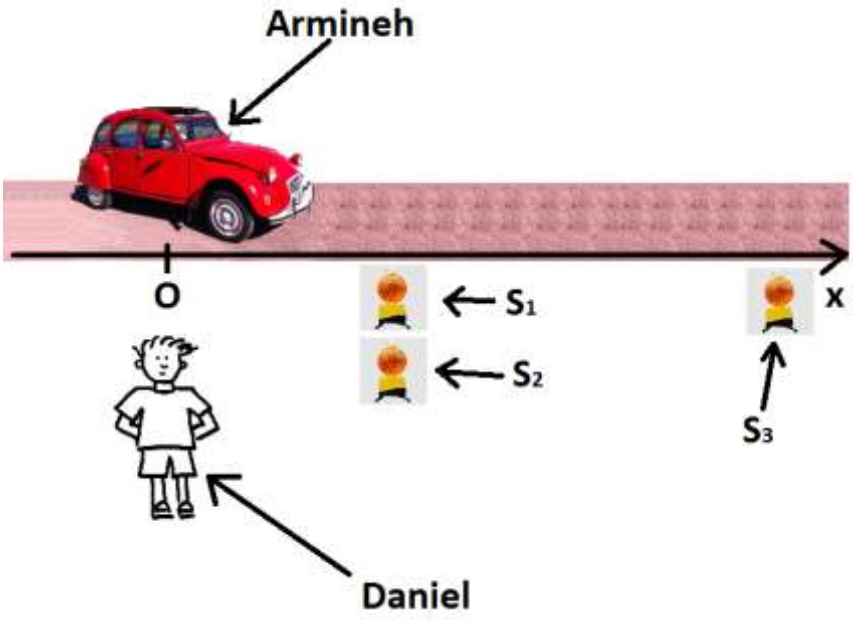


Figure 3 *– Le « modèle réel » de la situation*

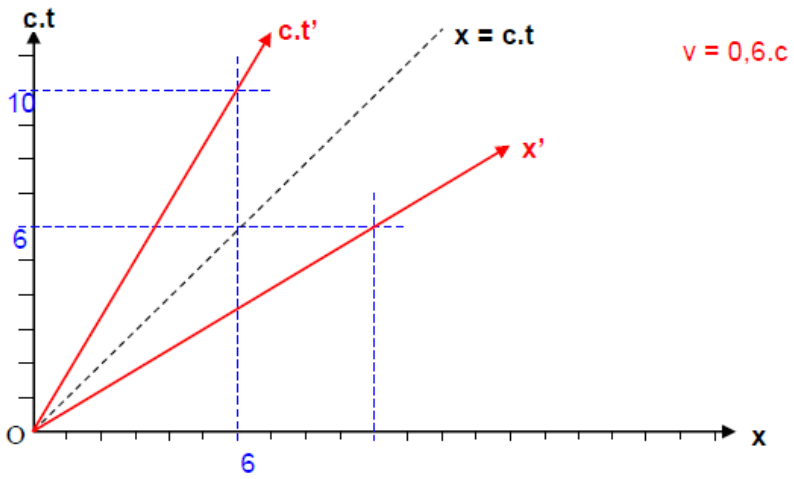


Figure 4 *– Le « modèle mathématique » : diagramme de Minkowski pour v = 0,6.c*

Le diagramme de Minkowski est un diagramme d'espace-temps permettant de connaitre les coordonnées spatio-temporelles d'un événement dans un repère du référentiel d'Armineh ou de Daniel. Dans le diagramme de Minkowski, la droite x = 0 est décrite par l'axe (Oc.t) dans le repère du référentiel de Daniel. De même la droite x' = 0 est décrite par l'axe (Oc.t') dans le repère du référentiel d'Armineh. Les projections sur ce type de diagramme se font parallèlement aux axes. L'axe (Ox') est le symétrique de l'axe (Oc.t') par rapport à la droite x = c.t. C'est la même chose pour les axes (Ox) et (Oc.t).

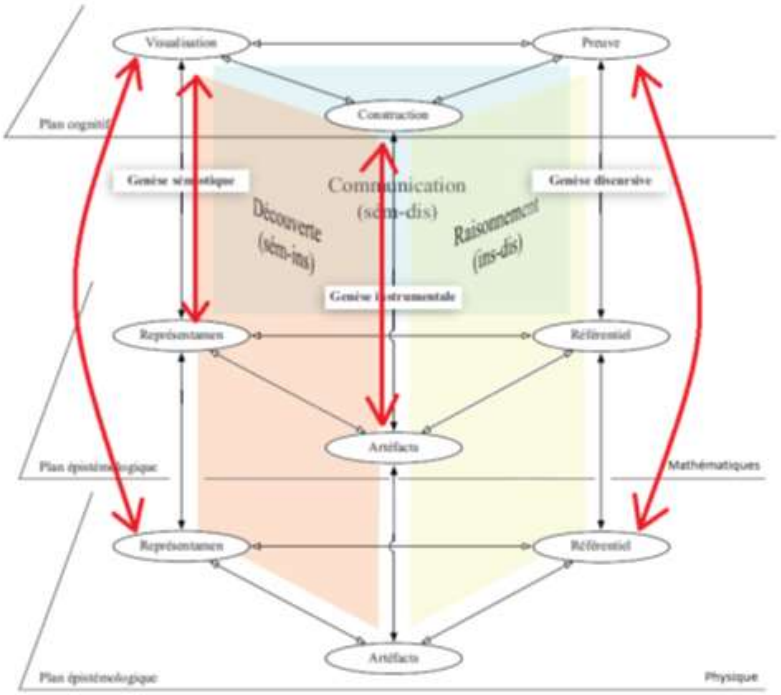


Figure 5 *– Analyse a priori de la tâche associée à l'utilisation du curseur avec GeoGebra*

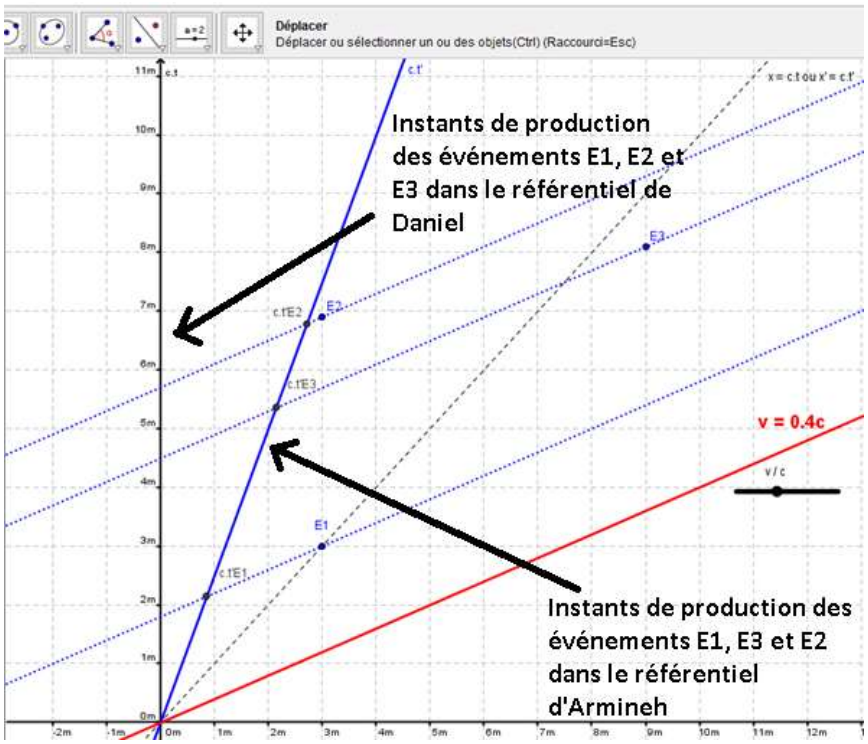


Figure 6 *– Les « résultats mathématiques » : diagramme de Minkowski avec GeoGebra*

Le curseur de GeoGebra permet de modifier les conditions expérimentales en changeant la vitesse v, ce qui conduit une genèse sémiotique différente par rapport à l'activité préliminaire papier-crayon. Le plan épistémologique des mathématiques et le plan cognitif sont mobilisés lors de la construction du curseur. Les axes Ox' et Oc.t' sont modifiés avec la vitesse v, ils se rapprochent de la droite x' = c.t' lorsque la vitesse v se rapproche de c. Le plan épistémologique de la physique est également mobilisé avec le plan cognitif lorsque les élèves

concluent sur l'ordre chronologique relatif des événements E_1, E_2 et E_3 suivant les deux référentiels (**figure 5** et **figure 6**). L'utilisation du logiciel GeoGebra favorise une genèse discursive car elle permet ensuite aux élèves de faire des prévisions sur l'ordre chronologique des événements sans avoir à manipuler directement le modèle mathématique. Le modèle de l'ETM étendu utilisé pour l'analyse *a priori* des différentes tâches à effectuer par les élèves a également été testé pour l'analyse *a posteriori* du travail effectué par quatre élèves.

IV. ANALYSE *A POSTERIORI* DE LA SEQUENCE D'ENSEIGNEMENT

Une classe de 34 élèves de terminale S d'un lycée de Picardie maritime a participé à l'expérimentation. Une première séance papier – crayon a été effectuée afin de construire et d'utiliser le diagramme de Minkowski avec un guidage fort de l'enseignant. L'activité, correspondant à la seconde séance, a été ensuite donnée à des binômes comme devoir à réaliser à la maison. Les conditions de vitesses étaient différentes d'un groupe à l'autre. La très grande majorité des élèves n'avait pas utilisé le logiciel GeoGebra au lycée. Les élèves ont rendu une première version de leur devoir maison puis ils ont travaillé deux heures en demi-classe en salle informatique afin de finaliser leur fichier GeoGebra. Chaque élève a réalisé également un enregistrement MP3 permettant de résumer la totalité de la séquence qui aura duré cinq heures en tout. Le travail de quatre élèves a été analysé. Ils ont été choisis en tenant compte de leurs résultats scolaires (élèves en réussite et en difficulté).

Ici c'est le travail de l'***élève C*** qui est présenté. Le diagramme de Minkowski comporte les trois événements de placés, les différents axes, la droite x = c.t, et des projections parallèlement à l'axe Oc.t' coupant l'axe Ox'. Néanmoins les différents éléments ne sont pas nommés sur GeoGebra et le curseur n'apparait pas. La notion d'événement semble mobilisée. La notion de référentiel semble l'être partiellement, car les axes des repères ne sont pas nommés. La notion d'ordre chronologique relatif n'est pas traitée, les coordonnées des événements sur l'axe oc.t' non plus (**figure 7**).

La version retravaillée en classe (intervention orale de l'enseignant pour donner des informations techniques sur le logiciel GeoGebra à chaque binôme) comporte les différents éléments qui manquaient dans la première version. Un curseur permet de changer la valeur de v/c et les projections des événements parallèlement à l'axe Ox' sur l'axe Oc.t' ou parallèlement à l'axe Oc.t' sur l'axe Ox' apparaissent. Les coordonnées des trois événements sont mentionnées dans le repère (x'Oc.t'). Les axes Ox' et Oc.t' sont maintenant nommés, mais la droite x = c.t ou x' = c.t' est simplement décrite comme « xy ». Il est possible de traiter maintenant la notion d'ordre chronologique relatif.

Ce travail met en évidence des genèses de type sémiotiques – instrumentales (découverte du logiciel GeoGebra) et de façon moins marquée des genèses instrumentales – discursives (raisonnement élaboré afin de construire le diagramme de Minkowski). ***L'élève C*** arrive à construire un diagramme de Minkowski. Il n'a pas par contre encore atteint une pratique élaborée du MM car le curseur nécessaire à la simulation n'est pas initialement créé.

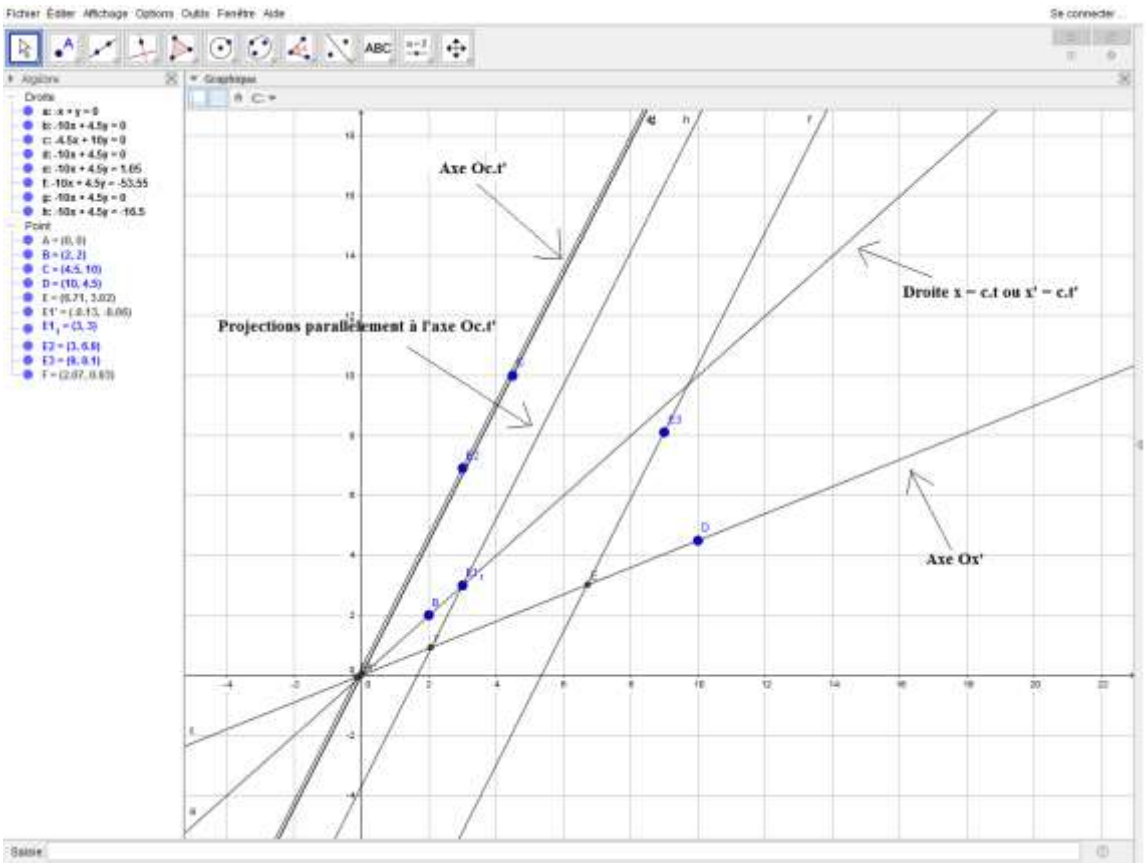


Figure 7 *– Copie d'écran de la première version GeoGebra de l'élève C*

L'enregistrement audio de l'***élève C*** montre qu'il utilise très souvent des genèses de type instrumentales associées à de nombreuses genèses de type discursives puisqu'il a tendance à utiliser le diagramme de Minkowski pour en déduire des RR. Néanmoins des erreurs de physique apparaissent (confondre le référentiel d'Armineh et de Daniel, se tromper dans l'ordre chronologique des événements). L'analyse *a posteriori* est décomposée en trois grandes étapes (**figure 8**).

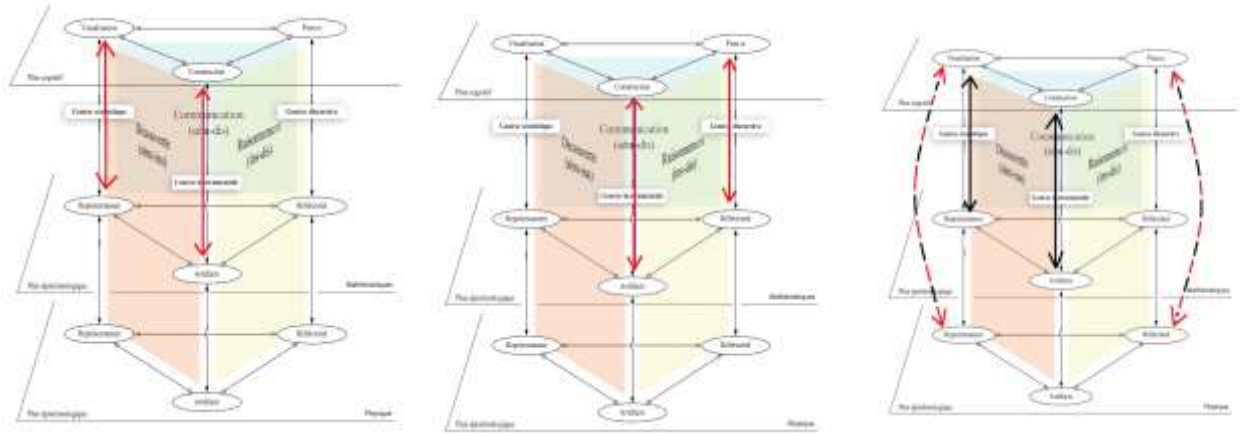


Figure 8 *– Analyse a posteriori des tâches effectuées par l'élève C*

Les deux premières étapes correspondent à l'appropriation du MM. La seconde étape est associée au tracé de l'axe Ox' qui mobilise un raisonnement un peu plus élaboré puisqu'une symétrie par rapport à la droite x'=c.t' est nécessaire. La troisième étape traite de la

construction du curseur qui n'est pas maitrisée (visualisée par des flèches noires) et par la communication des RR qui ne sont pas toujours corrects même s'ils sont présents (visualisés par des pointillés noirs et rouges).

V. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Le cadre de l'ETM étendu nous a servi à analyser les tâches associées à certaines étapes du cycle de modélisation MR→RR. Le cadre de l'ETM étendu permet de prendre en compte la mobilisation des plans épistémologiques des mathématiques et / ou de la physique pour chacune des tâches demandées aux élèves. L'utilisation du logiciel GeoGebra développe des genèses spécifiques par rapport à une activité papier - crayon. Une nouvelle génèse sémiotique conduit à une visualisation du changement des coordonnées temporelles des événements en fonction de la vitesse v d'Armineh par rapport à Daniel. Une nouvelle genèse instrumentale correspond à la manipulation du logiciel de géométrie dynamique avec la fonctionnalité curseur permettant de changer simplement les conditions expérimentales. Enfin une nouvelle genèse discursive est mobilisée lors de la description de l'ordre chronologique des événements en fonction du référentiel d'étude et de la vitesse v. Nous envisageons, par la suite, d'analyser grâce au modèle de l'ETM étendu ou à une de ses évolutions, dans certains contextes particuliers, les tâches mises en œuvre à chacune des étapes du cycle global de modélisation SR→RR. Des résultats préliminaires tendent à montrer que les genèses ainsi que les plans épistémologiques des mathématiques et de la physique ne sont pas mobilisés de la même façon en fonction de l'étape du cycle de modélisation, ce qui va dans le sens des travaux de Borromeo Ferri (2006).

VI. REMERCIEMENTS

Je remercie Alain Kuzniak et Cécile de Hosson leur encadrement lors de ce travail de thèse ainsi que tous les membres du groupe de travail ETM du LDAR.

REFERENCES

Blum W., Leiss D. (2005) « Filling up » - the problem of independance-preserving teacher interven-tions in lessons with demanding modeling tasks. In M. Bosch (Ed.) *Proceedings for the CERME 4*, Spain. 1623-1633.

Borromeo Ferri R. (2006) Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM mathematics Education*, 38, 86-95.

de Hosson C., Kermen I., Parizot E. (2010) Exploring students'understanding of reference frames and time in Galilean and special relativity. *Eur. J. Phy.*, 31, 1527-1538.

Kuzniak A., Tanguay D., Elia I. (2016) Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM mathematics Education*, 48, 721-737.

Lerouge A. (2000) La notion de cadre de rationalité. A propos de la droite au collège. *Recherches en didactique des mathématiques*, 20, 171-208.

Malafosse D. (2002) Pertinence des notions de cadre de rationalité et de registre sémiotique en didactique de la physique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 22, 31-76.

Moutet L. (2016) *Diagrammes et théorie de la relativité restreinte : une ingénierie didactique*, Thèse de doctorat de l'université Paris Diderot, France.

Vergnaud G. (1990) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, 10.2, 133-170.

(RE)MODÉLISATION DE DÉCORS GÉOMÉTRIQUES : L'EXEMPLE DE LA MOSAÏQUE ANTIQUE

PARZYSZ* Bernard

Résumé − Une recherche en cours sur le long terme, ayant pour finalité de retrouver les connaissances et les gestes professionnels des artisans de l'Antiquité qui ont réalisé les mosaïques à décor géométrique, menée conjointement avec des archéologues spécialistes, est ici présentée, en prenant appui sur un exemple. Ce type de recherche peut être étendu à d'autres domaines et époques, et il peut également être décliné au niveau du collège, dans le cadre d'EPI faisant intervenir au moins mathématiques, histoire et arts plastiques.

Mots-clés − mosaïque, modélisation, géométrie, collège, EPI.

Abstract − An ongoing long-term research, the aim of which is to uncover the knowledge and professional gestures of the antique craftsmen who carried out mosaics with geometric patterns, undertaken together with archaeologists specialists of the domain, is presented here and illustrated with an example. Such a research can be extended to other domains and periods, and it can also be applied to high school teaching as a multidisciplinary work involving at least mathematics, history and plastic arts.

Keywords – mosaic, modelling, geometry, high school, multidisciplinarity.

> [Il libro dell'Universo] è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, senza i quali mezi è impossibile intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.
>
> Galilée, *Il Saggiatore* (1623)
>
> Cette science ridicule a pour objet des surfaces, des lignes et des points, qui n'existent pas dans la nature. (…) La géométrie, en fait, n'est qu'une mauvaise plaisanterie.
>
> Voltaire, *Jeannot et Colin* (1764)

Le but de cet article est double : d'une part, présenter une recherche au long cours articulant géométrie et archéologie du décor, et d'autre part proposer la prise en compte, au niveau du collège, d'un type de projets interdisciplinaires dans lequel interviennent tour à tour, et sont articulés les uns avec les autres, des réalisations appartenant au domaine des arts appliqués, des procédures de construction relevant de la géométrie instrumentée et les modèles correspondants en géométrie euclidienne.

I. PRÉSENTATION DE LA RECHERCHE

Cette recherche, débutée il y a maintenant plus de dix ans, est partie du constat que les mosaïstes antiques ont réalisé des pavements à décor « géométrique » qui sont parfois de véritables chefs d'œuvre. Même si jusqu'ici ces réalisations n'ont que très peu intéressé les archéologues spécialistes de mosaïque, faute d'outils pour les étudier, elles méritent mieux que le sort qui leur est habituellement réservé. Il existe bien un ouvrage de référence recensant les décors [Balmelle *et al*., 1985], au demeurant d'une grande utilité, mais pour chaque décor recensé il se cantonne à un dessin accompagné d'une description. Or, une question essentielle, pour un historien des sciences et des techniques, est celle de la façon dont ces décors ont pu être obtenus à l'aide des instruments, des connaissances, des techniques et des conditions de travail de l'époque. Aucun écrit contemporain ne nous est malheureusement parvenu sur les

1* Université d'Orléans & Laboratoire de Didactique André Revuz - France

savoirs et les savoir-faire antiques mis en œuvre dans ce domaine, et les seuls documents dont nous disposons sont en fait les mosaïques elles-mêmes. La situation est d'ailleurs sensiblement la même pour d'autres types de décors − notamment la peinture, la pierre et le stuc − antiques mais aussi médiévaux, auxquels ce qui suit peut également être appliqué *mutatis mutandis*.

L'idée de départ est qu'un panneau de mosaïque à décor « géométrique » est l'aboutissement, sous une forme particulière − un assemblage de petits fragments taillés de pierre, de céramique ou de verre (les *tesselles*) – d'un dessin réalisé sur place au seul moyen d'un cordeau, et éventuellement d'une règle et d'une équerre. On se situe donc dans le cadre de la géométrie instrumentée, une géométrie « pratique » dans laquelle les objets en jeu sont des tracés réalisés à l'aide de certains instruments, la problématique étant celle de la précision et la validation étant essentiellement d'ordre perceptif (le « coup d'œil »), éventuellement instrumenté. Cette idée s'appuie sur le fait que des tracés préparatoires dessinés, peints ou incisés ont parfois été retrouvés sous des mosaïques, comme à Besançon[2], mais leur caractère exceptionnel − lié en partie au fait que par le passé on n'y prêtait pas attention – fait qu'ils ne peuvent être que d'une utilité très marginale pour la détermination de ces modèles. Précisons qu'il ne faut pas confondre les lignes directrices, d'un décor qui ont pour fonction de guider la mise en place de la structure conçue par le maître d'œuvre (le *pictor*), avec les tracés préparatoires, qui sont destinés à guider la pose des tesselles par l'ouvrier.

Au départ il s'agissait donc, à partir d'une étude des seuls documents disponibles − à savoir les mosaïques elles-mêmes − d'essayer de déterminer la géométrie des modèles ayant servi à les réaliser afin de pouvoir en proposer des procédures de construction, en rapport avec l'appréhension séquentielle de R. Duval :

> Il y a un ordre de prise en compte des unités figurales qui entrent dans la construction d'une figure. Cet ordre dépend des propriétés mathématiques à représenter et des contraintes techniques des instruments utilisés. ([Duval 1994], p. 125)

Il fallait pour cela entreprendre une étude fine des documents car

> les relations constitutives des objets ne sont pas des propriétés dont la présence peut être décidée d'un simple coup d'œil, la visualisation ne permettant, pour les relations entre deux unités figurales, qu'une estimation perceptive sujette à illusion. » ([Duval 2005], p. 15)

Ce faisant, on pouvait également espérer en tirer des renseignements sur les connaissances et les techniques mises en œuvre, qui se transmettaient essentiellement oralement de maître à apprenti, comme en témoignent certains graffitis retrouvés sur des sites antiques [Parzysz, à paraître].

II. ÉTUDE D'UN EXEMPLE

Considérons ce panneau de mosaïque des Grands Thermes du Nord de Timgad (Algérie)[3], daté du 2e siècle de notre ère (fig. 1 A). Il ne s'agit pas ici d'étudier le groupe de symétrie de ce décor − ce qui serait totalement anachronique − mais, en quelque sorte, de se mettre dans la peau d'un mosaïste antique expérimenté qui, mis en présence de cette mosaïque et souhaitant la reproduire ailleurs, voudrait l'étudier dans le but de l'inclure dans son « catalogue »

---

2 [Chantriaux *et al*., 2017], pp. 284-289.

3 [Germain, S.., 1973], pl. LXXXV.

personnel de motifs[4], et pour cela y repérer des répétitions et des figures géométriques connues.

1. Analyse.

La géométrie du modèle ayant servi à la construction de ce panneau présente *a priori* une certaine complexité ; on peut y identifier des cercles, des carrés de deux tailles et des losanges, ainsi que des motifs qui se répètent. En poursuivant l'observation, on peut considérer que le champ est carré et on s'aperçoit qu'il est constitué d'un assemblage de 9 modules identiques (3×3), deux modules voisins étant disposés en miroir par rapport à leur côté commun (fig. 1 B).



A B

Figure 1 − *Mosaïque de Timgad*

Le module unitaire, carré, est composé, aux angles, de 4 quarts de cercles tangents à un motif central constitué de la réunion de deux carrés (fig. 2 A), dont les sommets sont ceux d'un octogone régulier inscrit dans le carré initial[5] (fig. 2 B). Les petits carrés situés aux angles de ce motif résultent des parallèles menées par les intersections des carrés aux côtés de l'un des deux (fig. 2 C). Enfin, les côtés du carré central sont parallèles à ceux du second carré, leurs milieux étant les sommets des petits carrés les plus proches du centre (fig. 2 D).

De nos jours, ces propriétés peuvent être testées − directement ou sur un document fiable− soit manuellement aux instruments, soit à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.



A B C D

Figure 2 − *Timgad : éléments du module*

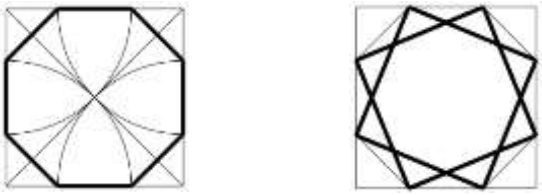
Le *pictor* a pu, au passage, reconnaître deux schémas-clés très répandus, qu'il connaît : l'octogone régulier inscrit dans un carré et l'« étoile de deux carrés »[6] (fig. 3) qui, réalisés dans cet ordre, l'aideront à mémoriser le module.

---

[4] La question de l'existence de cahiers de modèles fait toujours débat parmi les spécialistes. Pour ce qui est des décors géométriques, je pense que la connaissance des constructions élémentaires et de quelques « schémas-clés » faciles à mémoriser (Parzysz, 2009) permettait de se dispenser d'aide-mémoires matériels.

[5] Le motif de l'octogone régulier inscrit dans un carré étant très courant, et sa construction devait faire partie du bagage de base de tout mosaïste.

[6] Selon la terminologie de référence chez les archéologues spécialistes.



octogone régulier *étoile de deux carrés*

Figure 3 *– Timgad : les deux schémas-clés*

2. Procédure

L'étude précédente conduit à une procédure, instrumentée au cordeau, d'obtention du module à partir du carré dans lequel il s'inscrit :

1) Tracé des diagonales du carré.
2) Tracé des sommets de l'octogone régulier inscrit dans le carré.
3) Tracé des deux carrés constituant le motif étoilé.
4) Tracé des 4 carrés d'angle.
5) Tracé du carré central.
6) Tracé des quarts de cercles des angles.

N.B. La phase 6 peut intervenir après la phase 3.

On peut alors constater *de visu*, et si besoin aux instruments, que l'ensemble des tracés correspond bien aux observations faites au début de l'étude.

3. Validation

La procédure ci-dessus se décline terme à terme en une construction de géométrie euclidienne, effectuée à partir de la donnée d'un carré. Dans ce paradigme – le paradigme G2 de Houdement & Kuzniak (2006) −, pour valider cette construction par rapport aux assertions de l'étude initiale, il est alors nécessaire de répondre à un certain nombre de questions, telles que :

Obtient-on bien des carrés ? Des losanges avec des angles aigus de 45° ?
Les points obtenus au 2° sont-ils les sommets d'un octogone régulier ?
Les deux quadrilatères du 3° sont-ils des carrés ? Et ceux du 4° ? Et celui du 5° ?
Les autres quadrilatères sont-ils des losanges avec des angles aigus de 45° ?

Bien évidemment, ce genre de questionnement n'était pas celui du mosaïste antique, mais il se pose à celui qui, de nos jours veut accéder, non plus seulement au *comment*, mais au *pourquoi*, par exemple pour savoir si une construction est exacte ou approchée (et dans ce cas à combien près), ou pour comparer deux constructions différentes d'un même motif. La problématique de la géométrie euclidienne est celle de la *conformité* aux théorèmes et aux règles de la démonstration, tandis que celle du praticien est, conjointement avec celle de la *précision*, celle de l'*économie* : pour lui, lorsque deux constructions produisent des résultats difficilement discernables, elles se valent, et il aura tendance à privilégier la plus simple

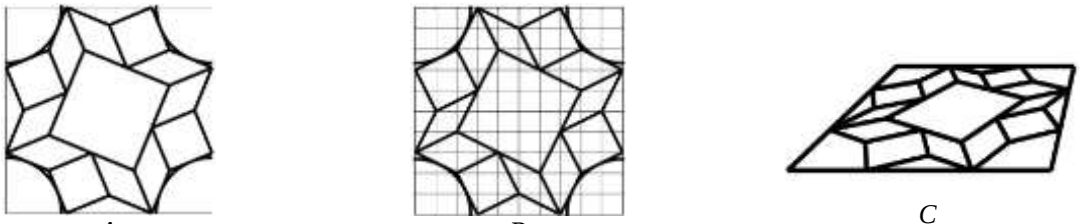
En illustration, voici une seconde procédure − dite « cavalière » − elle aussi instrumentée au cordeau, du module de Timgad (fig. 4 B), qu'on peut comparer à la précédente[7] (fig. 4 A) :

1) Subdivision des côtés du carré en 10 (par essais successifs) (voir Annexe).

---

[7] Cette seconde construction n'est pas une vue de l'esprit : un nombre important de décors géométriques sont construits sur un réseau carré à l'aide de la « diagonale du cavalier » – en référence à la pièce du jeu d'échecs −, c'est-à-dire la diagonale d'un carré dont la longueur est double de la largeur [Parzysz, 2012].

2) Tracé du réseau carré 10 ×10 correspondant.
3) Utilisation des nœuds du réseau pour tracer les polygones (à la règle).
4) Tracé (au coup d'œil et au cordeau) des quarts de cercles des angles.



A
première construction

B
seconde construction

C
seconde construction
en perspective

Figure 4 *− Timgad : constructions exacte (à gauche) et approchée (au centre)*

Cette seconde construction est également composée de carrés et de losanges, mais ceux-ci ne sont pas tous égaux : selon le cas, leurs angles aigus mesurent environ 37° ou 53° au lieu de 45°. Cependant, dans le cas d'un pavement de mosaïque l'effet de perspective empêche une personne stationnant dessus de percevoir cette différence.

Lorsque plusieurs modèles d'un même décor sont *a priori* envisageables, la question se pose de déterminer celui qui a effectivement été mis en œuvre par le *pictor*. La référence à d'autres mosaïques et certains éléments, comme par exemple l'étude du décor aux limites du champ[8], peuvent être utiles ; ainsi, à Timgad, le quadrillage proposé est tout à fait compatible avec l'encadrement du champ. De même, la façon dont un motif secondaire s'insère dans le motif principal peut orienter vers un modèle. C'est par exemple le cas à Djemila (Algérie)[9], où un pavement de la Maison de Castorius renferme une inscription (fig. 5 A) qui semble recouper le décor de façon abrupte, sans souci de symétrie. On peut alors éluder la question de la position de cette inscription en considérant que le mosaïste l'a placée au jugé. Cependant, l'application du modèle « cavalier » précédent fait apparaître que le panneau a été inséré de façon tout à fait compatible avec les lignes – invisibles − du quadrillage, selon un carré de 10×10 (fig. 5 B), ce qui fournit la clé de l'énigme.



A

B

Figure 5 *− Djemila : mosaïque de Castorius (fin du 4e siècle)*

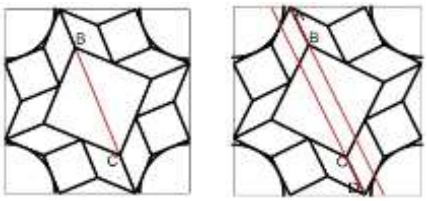
L'étude des propriétés géométriques est également un élément important dans la détermination du modèle. Reprenons l'exemple de Timgad (fig. 6).

Dans le premier modèle, les points A, B, C, D sont alignés, alors que dans le second ils ne le sont pas. Si le document support de l'étude montre un écart par rapport à cet alignement, faudra-t-il alors l'attribuer au manque de précision de la réalisation de la mosaïque ou au fait que ce n'est pas le premier modèle qui a été mis en œuvre ?

---

8 Cette étude permet également, dans certains cas, de déterminer l'endroit où a débuté la mise en place du décor.

9 [Blanchard-Lemée, 1979], pl. XXXVIII a.



premier modèle *second modèle*

Figure 6 *– Timgad : comparaison d'alignements*

C'est alors une convergence d'indices qui orientera vers un modèle ou vers un autre : soin apporté dans la mise en place des détails du décor, caractère systématique ou non des écarts observés, etc.

Comme on le voit, les finalités de ce type de recherche sont multiples :

- identifier le modèle le plus vraisemblablement mis en œuvre par le mosaïste, grâce à l'identification d'éléments géométriques et de propriétés (l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique s'y avère précieuse) ;
- concevoir une procédure de mise en place *in situ* de ce modèle, avec les techniques et les instruments en usage à l'époque (cordeau, règle non graduée[10], équerre) ;
- en induire des connaissances, des techniques et des savoir-faire mis en œuvre ;
- établir des parentés de structure géométrique entre diverses mosaïques, de façon à identifier des familles de décors reposant sur un même principe ou une même configuration ;
- aider les restaurateurs de mosaïques anciennes dans leur travail, en leur permettant de compléter les lacunes sous la forme qui leur semble la plus appropriée.

III. PROPOSITIONS POUR UNE UTILISATION AU COLLÈGE

Par rapport au cycle de modélisation (fig. 7) de Blum & Leiss (2005), dans l'enseignement secondaire la tâche qualifiée de « modélisation » consiste le plus souvent à appliquer un modèle connu à une situation « réelle », cette situation étant déjà en fait elle-même très fréquemment un modèle réel, obtenu en conférant un habillage pseudo-concret à une situation relevant d'un modèle mathématique bien identifiable.

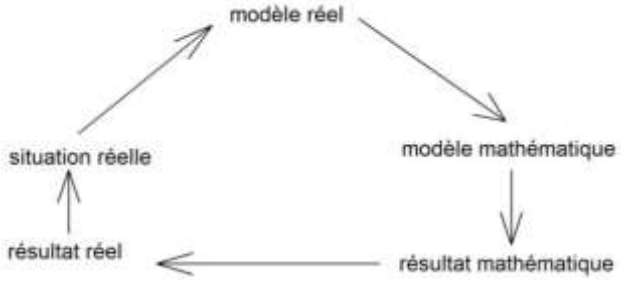


Figure 7 *– Cycle de modélisation d'après Blum & Leiß*

La tâche de l'élève consiste alors 1° à traduire les éléments de la situation (données, question) en un problème du modèle, 2° à résoudre le problème dans ce modèle, et 3° à traduire la solution en une réponse à la question initiale. La première partie de la démarche est

[10] Le système de numération romaine et la complexité du système de mesures discréditaient de fait l'utilisation de la règle graduée ; l'opération de base était le report de longueur, associée à des techniques très simples et très efficaces.

alors escamotée, au motif bien intentionné qu'une « vraie » situation réelle serait trop complexe à gérer par les élèves concernés.

Cependant, dans le cas de la mosaïque, la « situation réelle » existe bel et bien : c'est l'objet-mosaïque lui-même ; et le « modèle réel » est celui qui a été mis en œuvre par le mosaïste antique pour le réaliser. On peut par exemple, engager la classe dans un travail collectif de recherche pluridisciplinaire ayant pour but la reproduction en vraie grandeur, par exemple sur une dalle de béton[11] et à l'aide de craies de couleur, du décor d'un pavement de mosaïque antique. Pour cela, on fournit aux élèves des documents photographiques du panneau et, si possible, sous la forme d'un fichier d'un logiciel de géométrie de type Cabri ou Geogebra, un cliché orthogonal de la mosaïque inséré dans un rectangle. On leur propose alors de :

1° décrire la mosaïque (ou un motif de celle-ci) ;
2° ne retenir – en les nommant et en les caractérisant de façon aussi précise que possible − que les éléments géométriques qui selon eux permettront de la reproduire, à l'exclusion des éléments jugés purement décoratifs (fleurons, remplissage, etc.) ;
3° repérer des propriétés (alignements de points, égalités de longueurs, perpendicularités, points sur un même cercle…) permettant de situer les éléments retenus les uns par rapport aux autres ;
4° rédiger, sous la forme d'un algorithme, une procédure de construction du décor à partir de son cadre extérieur[12], à l'aide de droites et de cercles ;
5° à l'aide du logiciel, la réaliser à l'écran ;
6° au sol, tracer le cadre, puis le décor, en vraie grandeur à l'aide d'un cordeau, d'une règle non graduée et d'une équerre ;
7° comparer les résultats obtenus avec le document original.

La figure 8 A représente une mosaïque découverte à Autun (Saône-et-Loire) au début du 19e siècle et disparue depuis, qui n'est connue que par un dessin d'époque. En 2014, aidé d'une assistante, j'ai reproduit expérimentalement le décor en vraie grandeur à la craie sur une dalle de béton (fig. 8 B), en utilisant uniquement une règle de bois (non graduée), un cordeau et une équerre fabriquée sur place. L'excellente précision du résultat obtenu avec un outillage aussi fruste m'a surpris.



A- *dessin de 1836*



B- *épure au sol*

Figure 8 − *Mosaïque perdue d'Autun (milieu du 3e siècle)*[13]

D'autre part, des insuffisances et des incompatibilités apparaitront sans doute lors des contrôles opérés au cours des essais de construction, qui seront l'occasion d'une réflexion

---

11 À défaut, on peut utiliser un assemblage de grandes feuilles de papier fixé au mur.

12 Le *pictor* devait le plus souvent, en effet, intégrer son décor dans une surface aux limites prédéterminées, soit par les murs de la pièce, soit par les panneaux voisins..

13 [Stern & Blanchard-Lemée 1975], pl. XLVIII.

ayant pour objet de résoudre ces problèmes, la comparaison finale permettant de prendre conscience des imprécisions inhérentes au passage de la géométrie à l'objet matériel et de discuter du degré d'approximation « tolérable » dans la réalisation.. Lorsque des procédures différentes seront en concurrence, on les comparera afin de décider si elles produisent, ou non, la même configuration. Et, finalement, on discutera de celle qui sera finalement retenue par l'ensemble de la classe.

Dans cette démarche (fig. 9), le 1° concerne la situation réelle, tandis que le 2° et le 3°se situent dans le modèle réel (G1), où est opérée une certaine abstraction par apport à l'objet matériel dans un but déterminé : la reproduction. Il faut donc prendre en compte le fait qu'une mosaïque est en quelque sorte un dessin «pixellisé », les pixels étant ici les tesselles, petits fragments minéraux colorés qui la constituent. En particulier, le remplissage décoratif des surfaces, les couleurs, ainsi que l'épaisseur des traits (généralement constitués d'un ou deux rangs de tesselles) sont provisoirement « oubliés ».

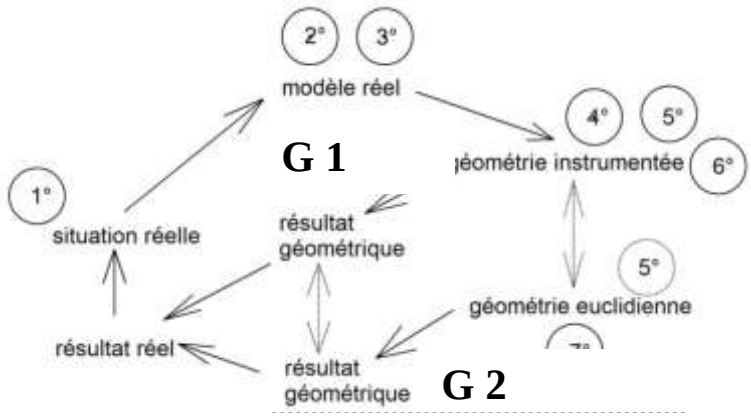


Figure 9 *–Adaptation du cycle initial*

Le 4° et le 5° amènent les élèves dans le modèle de la géométrie instrumentée (règle et compas, sous forme matérielle ou logicielle), tandis que le dialogue avec le logiciel permet de tester des conjectures perceptives, et le cas échéant de passer dans la géométrie euclidienne (G2), objectif important de l'enseignement de la géométrie au collège.

Quant au 6°, il les confronte aux contrôles instrumentés dans le méso-espace (Berthelot & Salin, 1992), qui permettent d'appliquer en acte des théorèmes de géométrie euclidienne. Par exemple, le tracé au sol du cadre rectangulaire amène à mettre en œuvre, selon la définition qui aura été choisie, la perpendicularité et/ou le parallélisme, dont la réalisation est peu précise mais qu'un contrôle par les diagonales permettra éventuellement de corriger.

Enfin, le 7° pourra être l'occasion de (re)passer dans la géométrie euclidienne pour s'attaquer à des questions auxquelles la seule perception ne permet pas de répondre à coup sûr, et/ou résoudre des contradictions entre le modèle et ses réalisations, et permettra de déboucher sur une institutionnalisation « vécue ».

Une telle démarche s'inscrit tout à fait dans le cadre des enseignements pratiques interdisciplinaires (EPI) institués par les nouveaux programmes français pour le collège[14] (élèves de 11 à 15 ans) :

> Mobilisant au moins deux disciplines, ils permettent de construire et d'approfondir des connaissances et des compétences inscrites dans les programmes d'enseignement. Ils s'appuient sur une démarche de projet et conduisent à une réalisation concrète, individuelle ou collective**.**

[14] http://eduscol.education.fr/cid108061/epi-mise-en-oeuvre.html

Dans le cadre d'un tel travail on peut faire intervenir conjointement au moins trois disciplines : les mathématiques (géométrie), l'histoire (Antiquité) et les arts plastiques (décor) ; le projet étant ici de réaliser en vraie grandeur le dessin d'une mosaïque, certaines d'entre elles, de très grande taille, sont constituées de panneaux à motifs différents (cf. par exemple [Parzysz, 2013]), permettant ainsi un travail réparti sur plusieurs groupes.

IV. CONCLUSION

On peut noter que la modélisation qu'implique une telle démarche est en fait une re-modélisation, puisqu'elle consiste en la recherche du modèle conçu par le *pictor*, modèle qu'il a ensuite matérialisé sous la forme de lignes directrices et qui a enfin été « pixellisé » en une surface couverte de petits fragments minéraux colorés, constituant la seule trace matérielle du modèle qui nous soit parvenue.

La recherche présentée ici permet, en premier lieu, d'apporter une aide à l'archéologue qui se trouve souvent démuni, au moment de la publication, pour décrire les décors des mosaïques qu'il/elle a mises au jour, la terminologie « officielle » n'étant pas suffisamment précise[15]. L'identification du modèle géométrique mis en œuvre par l'artisan antique permet non seulement une description adéquate de l'œuvre, mais ouvre aussi la voie à la recherche d'une procédure de mise en place qui fournira à l'historien des sciences et des techniques, en l'absence de tout document écrit, des informations sur les connaissances géométriques et les savoir-faire techniques de cet artisan. Enfin, dans le cas – fréquent − où la mosaïque ne nous est pas parvenue dans son intégralité, elle pourra également être utile pour en restituer les lacunes. Elle peut aussi, bien sûr, être – et elle l'a été – étendue à d'autres types de décors, ainsi qu'à d'autres époques.

On peut en outre décliner cette recherche dans l'enseignement, notamment au niveau du collège, en proposant des projets dans le cadre des EPI. L'intérêt pour les mathématiques est alors de faire parcourir aux élèves la totalité du cycle de modélisation géométrique à partir d'objets matériels, et en particulier de faire jouer à la géométrie euclidienne un rôle de « juge de paix » lorsque les contrôles perceptifs et instrumentés se révèlent insuffisants.

Enfin, ce texte est un appel aux chercheurs en histoire des sciences, qui peuvent trouver ici un champ encore peu exploité et original qui, bien que ne concernant pas la géométrie « savante » et ne reposant sur aucun document écrit, est susceptible d'enrichir notre connaissance de la science antique et médiévale.

RÉFÉRENCES

Alberti M. (2013). *La créativité en mathématiques. Fonctionnement d'un esprit d'exception.* Coll. Le monde est mathématique. Paris : RBA France.

Balmelle C. et al. (1985) *Le décor géométrique de la mosaïque romaine* (2 vol.) Picard, Paris.

Berthelot R. & Salin M.-H. (1992) *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans l'enseignement obligatoire.* Thèse. Bordeaux : Université Bordeaux I.

Blanchard-Lemée M. (1979) *Maisons à mosaïques du quartier central de Djemila (Cuicul).* Paris : Ophrys.

Blum W. & Leiß, D (2006) An introduction to mathematical modelling: an experiment with students in economics. *Proceedings of the 4th Congress of European Research on Mathematics Education,* 1623-1633. Barcelona: Universitat Ramon Llull.

[15] Par exemple, dire qu'un hexagone est « irrégulier » ou « oblong » ne renseigne guère sur sa forme exacte.

Chantriaux E., Hayes M., Laporte C., Phoungas A., Simon M. (2017). Dispositifs techniques et gestation de l'œuvre. *Le quartier antique du Palatium et ses domus. Archéologie au collège Lumière à Besançon (Doubs)* (C. Munier, éd.), 1344-1349. Besançon : Presses Universitaires de Franche-Comté.

Duval R. (1994) Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repères-IREM* 17, 121-138.

Duval R. (2005) Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences cognitive*s 10, 5-53.

Germain S. (1973) *Les mosaïques de Timgad. Étude descriptive et analytique*. Paris : CNRS.

Houdement C. & Kuzniak A. (2006) Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 11, 175-193.

Parzysz B. (2009) Key diagrams to design and construct Roman geometric mosaics? *Nexus Network Journal 11/2*, 273-288. Basel : Birkhaüser.

Parzysz B. (2012) Une grande famille de décors géométriques. *Proceedings of the 11th International Colloquium on Ancient Mosaics* (M. Šahin, ed.), 735-748. Istanbul: Zerobooks.

Parzysz B. (2013) La géométrie de la mosaïque de Grand. *Petit Vert* 115, 29-43 & *Petit Vert* 116, 27-33.

Parzysz B. (à paraître) Des rosaces sur un mur : que peuvent-elles nous apprendre sur leurs auteurs ? Une étude de cas. *Actes du 3e colloque Ductus*. Paris.

Stern H. & Blanchard-Lemée M. (1975) *Recueil général des mosaïques de la Gaule. Lyonnaise 2*. Paris : CNRS.

DE QUELQUES DIFFICULTES DE L'INTERDISCIPLINARITE

ROGALSKI[1*] Marc

Résumé – Nous défendons l'idée que réaliser des « ponts authentiques » entre disciplines pour résoudre des problèmes faisant appel aux mathématiques demande de bien dominer les concepts de chaque discipline, et nécessite certains préalables à chacune d'elles. Nous développons certains exemples d'intervention des mathématiques dans d'autres champs du niveau terminale ou licence (éducation citoyenne, physique), qui mettent en valeur ces nécessités.

Mots-clefs : interdisciplinarité, cadres, co-construction, physique, éducation citoyenne.

Abstract – We assert that for using mathematics in studying interdisciplinary problems there is a necessity for knowing well the concepts of both disciplines with their specificities. We present some examples of mathematical modeling in two different fields (education to citizenship, physics) for highlighting this necessity.

Keywords: interdisciplinarity, settings, co-construction, physics, education to citizenship.

I. DES SPECIFICITES DISCIPLINAIRES UTILES A L'INTERDISCIPLINARITE

Nous voulons attirer l'attention sur le fait qu'une bonne interdisciplinarité exige souvent que chacune des disciplines concernées soit bien maîtrisée, et même respecte certaines spécificités qui sont bien souvent laissées de côté dans les enseignements.

Nous nous appuyons sur le texte que Laurence Viennot a présenté à la journée d'hommage à André Revuz (Viennot 2010). L'auteure y attire justement l'attention, à propos des collaborations entre mathématiques et physique, sur certaines insuffisances des enseignements respectifs de ces deux disciplines. Elle cite particulièrement des points qui apparaissent dans les deux domaines : concilier les analyses locales et globales, bien distinguer le numérique du fonctionnel, bien comprendre l'utilité d'une procédure.

Il faut aussi ajouter que certains aspects de l'enseignement des mathématiques, par leur traitement même dans les programmes et les manuels, font obstacles à leur interprétation physique, c'est en particulier le cas pour la notion d'approximation locale (la dérivée), la proportionnalité, la mesure des grandeurs (en lien avec l'intégrale). Divers textes insistent sur l'un ou l'autre de ces aspects. Nous y reviendrons dans la troisième partie, préférant plutôt nous pencher d'abord sur quelques exemples détaillés d'activités interdisciplinaires qui mettent en valeur ces questions. Nous en avons choisi trois, qui nous semblent particulièrement significatifs, mais on pourrait en trouver bien d'autres.

II. DES EXEMPLES CONCRETS D'INTERDISCIPLINARITE

1. Premier exemple : la maladie de la vache folle et le « massacre bovin généralisé »

Cet exemple est largement motivé par l'article de G. Kuntz (2001), réagissant à un texte de C. Allègre publié dans l'*Express* le 1er mars 2001, voir Allègre (2004). Cela concerne directement un fait de société : *la maladie de la vache folle* et les précautions à prendre pour lutter contre l'épidémie et ses conséquences éventuelles sur nos concitoyens. C'est typiquement un sujet exemplaire pour les parcours « santé » et « citoyenneté » recommandés dans la scolarité. Dans son texte, C. Allègre étudie ce qu'on peut dire si un test « fiable » dans 99,9% des cas, portant sur une maladie *rare* infectant un individu sur 10 000, est positif sur un individu pris au hasard ; il affirme qu'alors la chance que l'individu soit malade n'est que de

1 * Laboratoire de Didactique André Revuz –France- marc.rogalski@imj-prg.fr

9% environ. Et que cette probabilité remonte à plus de 90% si la maladie touche 1% de la population. G. Kuntz, « *stupéfait et incrédule* », a recours aux mathématiques pour étudier le problème, et aussi pour analyser l'affirmation supplémentaire de C. Allègre, selon lequel, d'après l'argument précédent, « *si on abat toutes les vaches testées positives, on va déclencher un massacre bovin généralisé, ruineux et inutile* ».

A partir de cet article de G. Kuntz, on a proposé un exercice à des étudiants de CAPES (préparation du concours de recrutements des enseignants), pour lequel ils devaient d'abord lire le texte de G. Kuntz. Voici des extraits de l'énoncé de cet exercice, accompagnés d'indications de notre part sur les concepts à utiliser pour le résoudre et sur la solution (en italiques et entre crochets).

Enoncé. Dans une population de bovins, une proportion p faible ($p = 10^{-4}$) est atteinte d'une maladie rare, la maladie de la vache folle. On veut dépister la maladie grâce a un test très fiable, au sens suivant : la probabilité y qu'un individu malade (pris au hasard) ait un test négatif est $y = 2.10^{-3}$, et la probabilité z qu'un individu sain ait un test positif est $z = 10^{-3}$.

a) Traduire les données y et z en termes de probabilités conditionnelles (on note M l'événement « l'individu est malade » et T l'événement « le test est positif », et on notera ^{C}B l'événement contraire d'un événement B).

[*Il s'agit des probabilités conditionnelles* $y = P(^{C}T/M)$ *et* $z = P(T/^{C}M)$ *; évidemment il faut avoir bien compris ce concept*.]

b) À l'aide d'un arbre pondéré, déterminer $P(M\cap T)$, $P(^{C}M\cap T)$, $P(M/T)$; calculer de même $P(M/^{C}T)$. Quels commentaires vous suggèrent les valeurs numériques obtenues ?

[*Il faut savoir la formule* $P(M/T) = P(M\cap T)/P(T)$*… Il faut aussi savoir calculer avec un arbre la probabilité totale P(T), par exemple. On trouve* $P(M/T)\approx 0{,}09$ *et* $P(M/^{C}T)\approx 2.10^{-7}$*, ce qui confirme la première affirmation de C. Allègre*.]

c) Si on avait eu p = 1% (maladie peu rare), combien aurait-on obtenu pour P(M/T) ?
Commentaires ?

[*On aurait obtenu cette fois* $P(M/T)\approx 0{,}9$*, en accord avec la deuxième affirmation de C. Allègre : par un test même très fiable, les maladies rares sont bien plus difficiles à détecter que les maladies peu rares, ou alors il faut augmenter fortement la fiabilité du test, ce qui n'est pas toujours possible*.]

d) On reprend les valeurs numériques initiales pour la maladie de la vache folle, et on suppose que la population de bovins se monte à 10 millions. A combien de tests positifs faut-il s'attendre si on teste tous les bovins ?
On décide d'abattre tous les bovins testés positifs. A quels nombres faut-il s'attendre
- de bovins malades abattus,
- de bovins sains abattus
- de bovins malades non détectés ?
Commentaires ?

[*Il s'agit cette fois de calculer des espérances mathématiques de nombres de bovins pour une population de* 10^{7} *têtes. Il faut évidemment avoir compris ce concept d'espérance mathématique. On abattrait alors environ 11 000 bovins, dont 1 000 bovins malades et 10 000 bovins sains, le nombre de bovins malades non détectés serait de l'ordre de 2…autant dire aucun ! Le « massacre bovin généralisé » craint par C. Allègre se ramène ainsi à un nombre modeste donc probablement socialement supportable ! Mais cette conclusion peut varier si on décide d'abattre tous les bovins d'un élevage où apparaît au moins un animal à*

test positif, il faudrait alors compliquer le modèle… par exemple introduire la taille moyenne des élevages (environ 50 ?), et quantifier le fait que plus d'un individu par élevage serait en général atteint par la maladie, compte-tenu de son mode de propagation (farines animales).]

L'exercice se terminait par la donnée de la probabilité d'une contamination après un traitement précautionneux en abattoir et en boucherie et une donnée sur la consommation de viande par les citoyens, avec une complexité plus grande en fonction des hypothèses sur cette consommation. On aboutissait à un calcul d'espérance mathématique du nombre de personnes contaminées. [*On obtenait, sous certaines hypothèses… 0,16* !]

Commentaire Pour un problème typiquement conforme aux vœux des incitations à la responsabilité citoyenne, on met clairement en évidence que le bon sens ne suffit pas : comme le dit G. Kuntz, « *l'instrument qui défie le bon sens face à la réalité complexe du monde s'appelle les mathématiques* ». Mais ce n'est pas à elles de dire si face à une maladie rare comme celle de la vache folle, avec un test très fiable, il faudrait accepter d'abattre tous les animaux testés positifs, même si la majorité d'entre eux serait formée de bêtes saines : c'est une décision politique, mais seules les mathématiques peuvent éclairer ce choix en donnant l'ordre de grandeur de l'éventuel « massacre », car ce nombre est contraire au bon sens. De plus, le calcul de l'espérance mathématique du nombre de personnes contaminées (non traité ici) dépend étroitement des hypothèses ou des données statistiques connues sur la consommation de viande, il s'agit de *composantes sociologiques du problème*.

La conclusion comporte aussi un autre aspect : un élève de terminale peut raisonnablement traiter ce problème, mais à condition qu'il ait bien assimilé les concepts de probabilités conditionnelles, d'arbre de probabilités, de calcul de probabilité totale et de probabilité conditionnelle dans un arbre, d'espérance mathématique, et qu'il sache les utiliser de façon pertinente. On retrouve ici le fait que seule *la grande maîtrise de la discipline* (ici les probabilités) permet de l'utiliser pour éclairer un problème citoyen de manière critique. Quand on résoud le problème on voit aussi, en particulier, que *le changement de registre* consistant à utiliser un arbre pour étudier des probabilités conditionnelles est bien commode ! (bien sûr on peut raisonner directement avec des tableaux, mais c'est moins simple).

On peut penser que ces constats valent pour bien des disciplines, et pour bien des problèmes interdisciplinaires, en particulier de modélisation, dans lesquels les mathématiques doivent intervenir. Voici un autre exemple, concernant cette fois la physique et les mathématiques.

2. Deuxième exemple : le pendule tournant

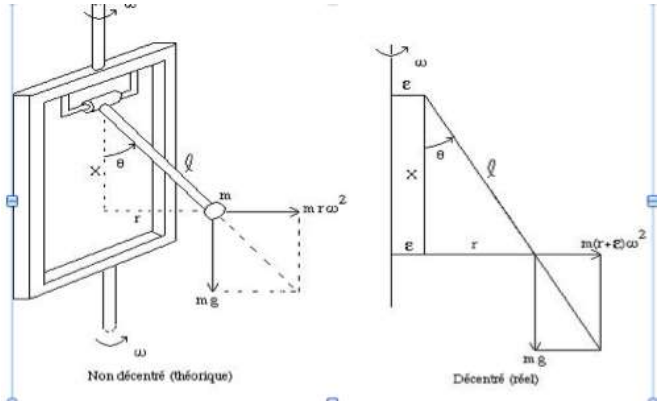


Figure 1 *- les cas non décentré (théorique) et décentré (réel) du pendule.*

Ce thème a été traité dans un groupe de travail sur les rapports entre physique et mathématiques du Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR) de l'Université Paris-Diderot. La figure 1 résume la situation, ou plutôt les deux situations, « théorique » et « réelle » (on suppose dans les deux cas la masse de la tige du pendule négligeable). Ironiquement, dans cette figure, la situation « réelle » est plus schématisée que la situation « théorique ».

Le pendule peut osciller librement dans un plan, plan dont la vitesse de rotation est, elle, fixée par un opérateur extérieur. On recherche alors la ou les positions pour lesquelles ce pendule reste immobile dans le référentiel tournant (on peut vérifier que la force de Coriolis n'intervient pas dans cette recherche).

Dans la situation théorique, l'équation égalant les moments des deux forces (pesanteur et centrifuge) donne $\omega^2 = (g/L)(1/\cos\theta)$, ce qui ne fournit aucune valeur pour θ si $\omega^2 < \omega_0^2 := g/L$. On infère donc que *dans ce cas le pendule reste vertical* ; à partir de la vitesse de rotation ω_0 , il s'écarte de l'angle θ donné par l'équation précédente. *L'existence de ce seuil* a rendu les physiciens perplexes : ils la jugeaient contraire à leur intuition ! Jusqu'à ce qu'ils donnent une interprétation en termes d'équilibres stables ou instables, point de bifurcation et « brisure de symétrie ». Voyons ceci en détails, ainsi que les mathématiques à utiliser pour interpréter ces notions.

Les courbes ω^2 fonction de θ et θ fonction de ω^2 ont les allures de la figure 2, ce qui se montre par utilisation des fonctions réciproques et de leurs dérivées. Il faut bien connaître la symétrie de leurs graphes, interpréter les dérivées. Et connaître les variations de la fonction arccosinus, car on a $\theta = \arccos(g/(L\,\omega^2))$. Il faut enfin doter d'un signe la mesure de l'angle θ, car le pendule peut s'écarter d'un côté ou de l'autre, il y a *symétrie* entre les deux possibilités.

Pour confirmer que la valeur $\theta = 0$ pour $0 < \omega^2 < \omega_0^2$ correspond à un équilibre stable, et à un équilibre instable pour $\omega^2 > \omega_0^2$, il faut étudier ce qui se passe quand on écarte légèrement le pendule de la position verticale, et regarder l'évolution en fonction du temps, avec $\theta(0)$ petit et $\theta'(0) = 0$. Le moment d'inertie du pendule étant $m L^2$, la relation fondamentale de la mécanique s'écrit $\theta'' = \omega^2 \cos\theta \sin\theta - (g/L)\sin\theta$. Comme on cherche ce qui se passe pour un temps t petit, on peut supposer $\theta(t)$ petit, et regarder *l'équation différentielle linéarisée*, qui est $\theta'' = (\omega^2 - g/L)\,\theta$. Selon le signe de $\omega^2 - g/L = \omega^2 - \omega_0^2$, on voit que l'équilibre $\theta(t) \equiv 0$ est stable ou instable (la résolution des deux équations linéarisées $\theta'' = k^2\theta$ et $\theta'' = -k^2\theta$ est standard et donne respectivement un cosinus hyperbolique ou un cosinus trigonométrique). Le point $(\omega_0^2, 0)$ est *un point de bifurcation*, et on peut qualifier le phénomène associé à cette bifurcation comme une « *brisure de symétrie* » car le système « choisit » (aléatoirement !) l'une des deux possibilités *a priori* symétriques $\theta < 0$ ou $\theta > 0$.

Tout ce qui précède est une étude théorique (dans le « modèle ») car elle suppose que le pendule au repos est exactement aligné sur l'axe de rotation. *Dans la réalité il y a un léger « décentrage » du point de suspension du pendule par rapport à cet axe,* disons d'une distance $\varepsilon > 0$. L'équation de l'équilibre est alors $\omega^2 = (g \tan\theta)/(\varepsilon + L \sin\theta)$, fonction de θ notée $\varphi_\varepsilon(\theta)$. Sa fonction réciproque va approcher, pour ε tendant vers 0, la fonction φ_0^{-1}

étudiée précédemment. Avec des arguments théoriques du niveau de L3 (compacité et théorème de Dini) ou avec des calculs compliqués de niveau L1, on peut montrer que cette convergence est *uniforme* lorsque le nombre ω^2 appartient à l'intervalle [0, +∞[. Voir la figure 3 ci-dessous.

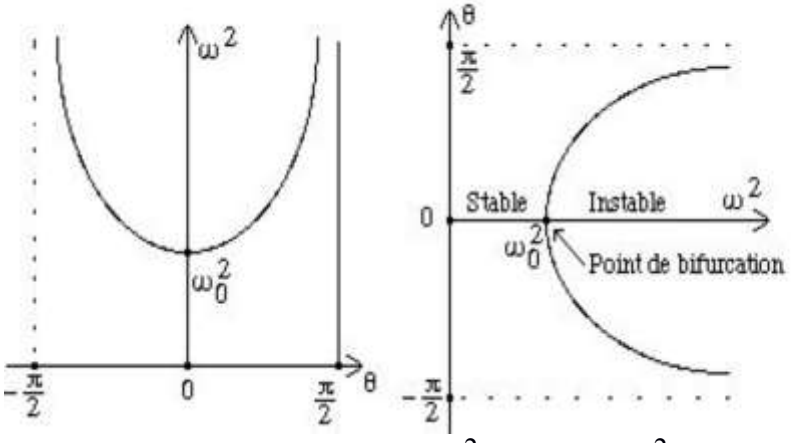


Figure 2 *- les fonctions réciproques* ω^2 *de* θ et θ *de* ω^2 *dans le modèle non décentré.*

Le décalage entre l'axe de rotation et le point de suspension du pendule supprime donc l'effet de seuil qui se manifeste dans le modèle théorique.

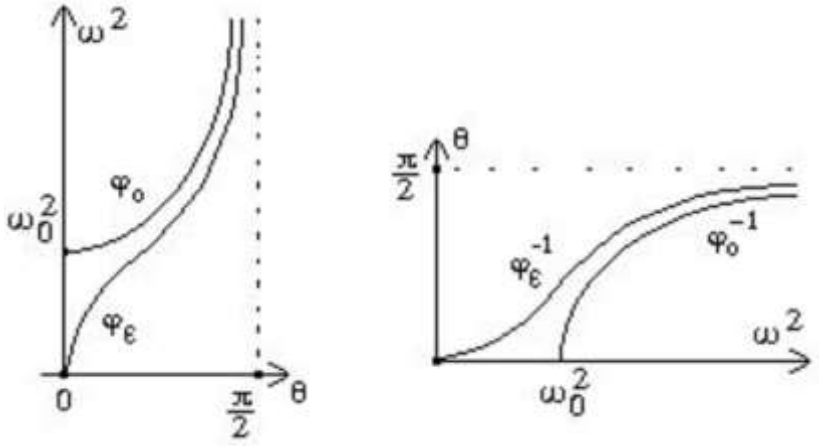


Figure 3 *- la suppression de l'effet de seuil dans le cas décentré*

En définitive, *cette situation physique demande de bien comprendre un certain nombre de concepts mathématiques* : fonction réciproque, équilibres stables et instables, linéarisation d'une équation différentielle, convergence uniforme. De façon similaire, notons que si la physique pour énoncer le problème est assez simple, l'analyse des équilibres demande plus de connaissances physiques (moment d'inertie, équation de la mécanique des rotations). De plus, les phénomènes physiques reconnus ici (bifurcation, équilibres stables ou instables, proximité des cas théorique et réel…) étaient assez imprévus avant l'analyse mathématique de la modélisation : bel exemple de collaboration math-physique ! Mais la considération de la figure 3 montre l'une des difficultés de cette collaboration : pour la physique, ω est donnée, on cherche θ, alors que les équations mathématiques donnent ω en fonction de θ !

Commentaire Voici donc un phénomène physique *simple à énoncer* : on peut le faire dès la terminale avec de la physique très élémentaire. Et pourtant sa compréhension physique demande des mathématiques assez compliquées, non accessibles au niveau où l'on peut faire

comprendre l'énoncé de la situation. Elle demande aussi une capacité à changer de cadre dans l'étude du phénomène : passer de la simple formule à une vision d'ensemble des graphes concernés. Et *la solution théorique est contraire au bon sens*, qui suggère que dès que le pendule tourne, il s'écarte de sa position d'équilibre (on pense spontanément aux manèges dont les nacelles sont suspendues, mais justement dans ce cas il y a un grand écart entre l'axe de rotation et le point de suspension : ε est grand). Enfin pour une étude perturbée plus réaliste, l'approximation par le cas théorique est délicate à prouver, et s'appuie encore plus sur le cadre graphique.

On peut penser que, lors d'activités interdisciplinaires entre physique et mathématique, en terminale ou en licence, on va souvent tomber sur le même type de difficultés, où les connaissances à mobiliser dans chacune des disciplines vont être d'un niveau élevé et demander d'être bien maîtrisées, même pour un problème d'énoncé simple. De plus, certains aspects des disciplines concernées sont indispensables alors qu'ils ne sont pas toujours enseignés (par exemple, ici, les changements de cadre entre formules et graphiques globaux).

3. Troisième exemple : l'intégrale et la mesure des grandeurs

Il s'agit d'une *co-construction* entre mathématiques et physique de l'instrument privilégié de la mesure des grandeurs : l'intégrale. Le point de départ est une situation didactique mise au point par D. Grenier, M. Legrand et F. Richard (1985), dite « situation du barreau », dont l'étude est détaillée dans (Legrand 1990), (Rogalski 2001), (Decroix et Rogalski 2013).

On pose à des étudiants de première année d'université la question :

« Quelle est l'attraction exercée par un barreau très fin homogène, de masse 18 kg et de longueur 6m, sur une masse ponctuelle de 2kg située à 3m dans le prolongement de la barre ? ».

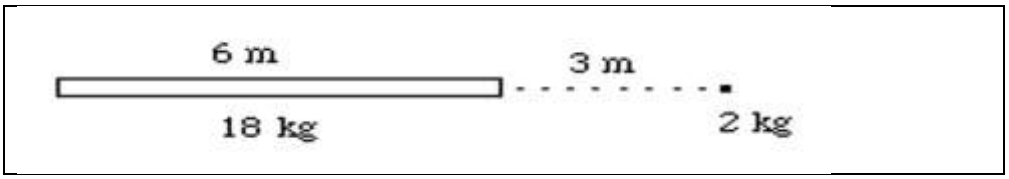


Figure 4 *- le barreau*

Nous ne détaillons pas ici le type de « débat scientifique » que l'on peut alors animer avec les étudiants, qui va faire surgir le centre de gravité, puis son inadéquation (lorsque un étudiant propose de couper la barre en deux et d'utiliser le centre de gravité de chaque morceau, le résultat n'est plus le même), puis le besoin d'encadrement en découpant la barre en morceaux et en concentrant toute la masse de chaque morceau à l'une ou l'autre de ses extrémités ; nous renvoyons à (D. Grenier, M. Legrand et F. Richard 1985), ou à (Decroix et Rogalski 2013).

L'idée essentielle est la suivante : quand on veut mesurer une grandeur totale dont l'intensité est donnée par une fonction *f non constante* en chaque point d'un domaine Ω muni d'une mesure *m* (par exemple la pression en chaque point d'une surface plane mesurée par l'aire, la hauteur d'une surface plane au-dessus d'un segment mesuré par la longueur, etc), on ne peut éviter une certaine procédure dite **procédure intégrale** :

découper en petits morceaux, sommer, encadrer, passer à la limite.

Il s'agit d'une procédure intuitive, qui d'une part est indispensable en physique et permet de modéliser des mesures de grandeurs, et de l'autre peut se décliner en mathématiques en plusieurs théories de l'intégrale (intégrale des fonctions réglées, intégrale de Darboux,

intégrale de Lebesgue) selon la nature des ensembles qu'on sait mesurer (intervalles, ensembles mesurables) et le mode de convergence adopté pour approcher par des fonctions étagées (convergence uniforme, convergence au sens de l'intégrale). Voir aussi (Rogalski 2013).

Commentaire Du point de vue de l'interdisciplinarité, c'est de cette procédure dont les physiciens ont besoin et non de « savoir calculer des intégrales », comme ils le disent trop souvent. En l'absence de cette prise de conscience, les étudiants n'arrivent pas à modéliser. Nous avons soumis le problème du barreau (par écrit) à 120 étudiants en fin de première année d'université ayant vu l'intégrale de Riemann sous sa forme mathématique abstraite ; seuls 12% d'entre eux ont saisi qu'il fallait une intégrale pour calculer l'attraction demandée. On voit ainsi que c'est typiquement l'un des cas où il est indispensable d'avoir construit le concept mathématique à partir d'un problème de physique, et de comprendre la problématique physique (mesure des grandeurs), pour être ensuite capable de l'utiliser dans cette discipline et en même temps d'en saisir la pertinence mathématique.

III. PROBLEMES GENERAUX

À partir de ces trois exemples d'activités interdisciplinaires, nous posons quelques problèmes auxquels l'absence de réponse dans l'enseignement peut entraver une pratique souhaitable de l'interdisciplinarité. Nous nous concentrons surtout sur les rapports entre mathématiques et physique, pour lesquels nous renvoyons à (De Hosson et al. 2015), (Robert et Treiner 2004) en ce qui concerne les aspects épistémologiques.

(1) Le traitement de certains concepts mathématiques enseignés au lycée ou en licence *ne doit pas être séparé de leur sens en physique* : c'est indispensable pour s'en servir dans cette discipline, c'est souvent essentiel pour comprendre leur pertinence mathématique. Comment mesurer des grandeurs en physique si l'intégrale n'a pas été vue comme l'instrument adapté à cette activité ?
Comment comprendre la notion de vitesse instantanée si la dérivée n'a pas été co-construite entre les deux disciplines ?
Comment comprendre l'importance de la proportionnalité de grandeurs en physique si la construction des fonctions linéaires ou affines n'en est pas le modèle adapté en mathématique ? Nous avons vu une classe de terminale S entière ne pas concevoir que si on connaît le débit d la quantité de liquide écoulée en un temps t est $d \times t$! Parce que, bien sûr, le lien entre proportionnalité mathématique, d'un côté, et taux de variations (constants) dans des problèmes de vitesse, de débits, d'intensité de courant… de l'autre, ne leur avait jamais été fait, n'avait pas motivé des notions et définitions mathématiques.

(2) La coordination des points de vue global et local est indispensable pour évaluer les erreurs de méthodes. Il faut saisir que l'intégrale est certes un moyen d'approximation local, mais que le résultat en est *globalement exact* ; voir à ce propos (Collectif 1989), (Decroix et Rogalski 2013). Ou voir que l'approximation d'une fonction par sa différentielle est *locale* au sens où l'erreur commise est une erreur *relative* : $\Delta f - f'(x)\Delta x$ est négligeable devant Δx (Artigue 1989), (Rogalski 2006), (Collectif 1989) et que cela rend vraisemblable la limite figurant dans une intégrale, et donne du sens à la procédure de l'accroissement différentiel utilisée pour modéliser un phénomène par une équation différentielle. De ce point de vue, le discours de la physique est parfois ambigu, qui parle parfois de négligeabilité sans préciser devant quelle variable une certaine grandeur est négligeable.

Résoudre une équation différentielle ou découvrir et calculer une intégrale sont des moyens de passer du local au global… en physique comme en mathématiques (voir (Rogalski 2008)). Est-il sûr que cette compréhension des choses (il s'agit d'un aspect de « méta ») soit souvent explicitée auprès des élèves ou des étudiants ?

(3) En physique, il faut bien comprendre pourquoi on utilise certaines procédures, alors que dans d'autres situations voisines elles sont inutiles : comparer l'utilité de découper en petits accroissements Δz l'altitude dans un gaz ou dans un liquide pour étudier la variation de la pression (Collectif 1989), (Viennot 2008, 2010), l'un étant incompressible et pas l'autre, et saisir corrélativement en mathématiques comme en physique qu'une procédure différentielle est inutile en cas de proportionnalité.

(4) L'étude de phénomènes physiques par leur traitement mathématique nécessite souvent des changements de cadre ou des changements de registre de représentation. Nous en avons vu un exemple avec le pendule tournant. Pour les mathématiques, voir (Rogalski 2002). Mais c'est aussi le cas en physique : que ce soit par l'intermédiaire de graphiques bien compris (Viennot et Leroy 2004), ou par des analogies pertinentes entre phénomènes différents, on y pratique aussi souvent des changements de point de vue.

(5) Il faut aussi comprendre qu'en physique trouver une réponse numérique passe très souvent par la détermination d'une fonction (Rogalski 2006) ; c'est l'une des difficultés de la modélisation, avec le choix des variables.

L'habitude des physiciens de noter *P*, *V*, … des fonctions avec les variables non précisées est très utile, mais redoutable pour les étudiants, à la fois à cause des habitudes mathématiques (qui donnent des noms différents à des grandeurs exprimées au moyen de variables différentes), et parce que les changements de variables dans les différentielles sont délicats quand on ne note que les grandeurs.

(6) Enfin, des ajustements de niveaux sont nécessaires entre mathématiques et d'autres disciplines intervenant dans une activité interdisciplinaire : pour la question la plus simple à poser, il ne va pas être rare que le niveau des moyens mathématiques qu'il faudra utiliser, voire ceux des autres disciplines, croisse de façon incontrôlée, ou en tout cas demande de solides compétences conceptuelles de la part des élèves ou des étudiants (et même parfois des enseignants). D'où des difficultés prévisibles en terminale et encore plus en licence scientifiques.

Sur beaucoup de ces points, très souvent les enseignements sont muets. Il y a en un certain sens des *préalables disciplinaire* qui appellent des changements substantiels dans les enseignements, si on veut développer une interdisciplinarité authentique, qui ne se réduise pas à des juxtapositions sans bénéfices mutuels. Cela signifie que des questions de nature épistémologiques (ou au moins « méta ») doivent faire partie intégrante des enseignements, en particulier en ce qui concerne les relations entre concepts mathématiques et concepts physiques.

Mais cela concerne aussi d'autres disciplines ; par exemple, les relations entre probabilités et fiabilité d'un test biologique, on l'a vu, demandent à être élucidées.

S'attaquer à des problèmes complexes par nature interdisciplinaires n'est pas un but en soi. On en attend la solution du problème, certes, mais aussi une meilleure compréhension dans les disciplines y intervenant aussi bien que la découverte non superficielle de nouveaux

champs. Nos exemples illustrent combien cela doit se préparer dans chacune des disciplines concernées.

REFERENCES

Allègre C. (2004) *Chroniques d'espoir*, Paris, Fayard.

Artigue M. (1989) Procédures différentielles dans la mise en équation de problèmes, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, Strasbourg, vol 2, 173-190.

Collectif (1989) Procédures différentielles dans les enseignements de mathématiques et de physique au niveau du premier cycle universitaire, *Rapport du GRECO du CNRS : "Didactique et acquisition des connaissances scientifiques"*, groupe mathématiques et physique-enseignement supérieur ; document IREM Paris-Diderot et LDPES.

Decroix A.-A., Rogalski M. (2013) Atelier : L'intégrale, de la physique aux mathématiques. *Actes du Colloque de Lyon*, IREM Paris-Diderot.

De Hosson C., Décamp N., Browaeys J. (2015) Contribution à la rénovation des programmes de physique, la nécessaire place des mathématiques dans l'enseignement de la physique, *BUP*, vol. 109, 483-490.

Grenier D., Legrand M., Richard F. (1986) Une séquence d'enseignement sur l'intégrale en DEUG A première année, *Cahiers de didactique des mathématiques* 22, IREM Paris-Diderot.

Kuntz G. (2001) Vache folle, probabilités, réalités et…pesanteur(s), *Repères IREM* n° 45, 56-59.

Legrand M. (1990) Un changement de point de vue sur l'enseignement de l'intégrale**,** dans *Enseigner autrement les mathématiques en Deug A première année*, Commission InterIREM Université.

Robert C., Treiner J. (2004) Une double émergence, *Bulletin de l'APMEP,* n° 453.

Rogalski M. (2002) Les changements de cadre dans la pratique des mathématiques et le jeu de cadres de Régine Douady, *Actes de la journée en hommage à Régine Douady* (juin 2001), IREM Paris-Diderot.

Rogalski M. (2006) Mise en équation différentielle et mesure des grandeurs par une intégrale, en terminale scientifique : un point de vue mathématique sur la collaboration avec la physique, *Repères IREM* n° 64, 27-48.

Rogalski M. (2008) Les rapports entre local et global : mathématiques, rôle en physique élémentaire, questions didactiques, in L. Viennot (éd.), *Didactique, épistémologie et histoire des sciences* (pp. 61-87), Paris : PUF.

Rogalski M. (2013) Quelques compléments à l'article de Hervé Quéffelec sur l'enseignement de l'intégration et de la mesure de Lebesgue : faire simple et pédagogique ?, *Gazette des mathématiciens*, n° 137.31-42.

Rogalski M., Pouyanne N., Robert A. (2001) *Carrefours entre analyse algèbre géométrie*, Paris : Ellipses.

Viennot L. (2008) La physique dans la culture scientifique : quelle place pour le raisonnement ? in L. Viennot (éd.), *Didactique, épistémologie et histoire des sciences* (pp. 213-236), Paris : PUF.

Viennot L. (2010) Relations mathématiques-physique et parcellisation des acquis conceptuels, in *Hommage à André Revuz*, (p. 82-100) LDAR, Université Paris-Diderot.

Viennot L., Leroy J.L. (2004) Doppler and Römer : what do they have in common ? *Physics Education*, 39-3, 273-280.

QUELLES SYNERGIES POSSIBLES ENTRE MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE DANS L'ENSEIGNEMENT ?

ROLAND[*]Michel

Résumé – Ce résumé vise à étudier la place de l'interdisciplinarité physico-mathématique au sein du système scolaire francophone de Belgique. Il s'agit d'une recherche de signification interprétative faisant appel à la systémique, le système scolaire étant un système hypercomplexe (SHC). Pour cette recherche, il convient de proposer une modélisation de ce dernier en s'appuyant sur les schémas de la transposition didactique. Sur base du modèle et d'un recueil d'informations, nous obtenons des pistes pour un recours à une véritable interdisciplinarité.

Mots-clefs : interdisciplinarité, systémique, transposition, modélisation

Abstract – This summary aims to study the place of physico-mathematical interdisciplinarity in the French-language school system in Belgium. It is a research for interpretative meaning using the systemic, the school system being a hypercomplex system (SHC). For this research, it is advisable to propose a modeling of this last one by relying on the schemas of the didactic transposition. Based on the modeling and a collection of information, we obtain ways to use a real interdisciplinary approach.

Keywords: interdisciplinarity, systemic, transposition, modelling

I. INTRODUCTION

Ce résumé explicite la méthodologie d'une recherche de signification au sens d'Astolfi[2]et plus précisément sa déclinaison interprétative au regard de la perception des acteurs de terrain à partir d'un recueil d'informations. Il s'agit d'étudier l'interdisciplinarité physico-mathématique au sein du système scolaire francophone belge sous l'angle des enseignants.

L'interdisciplinarité est un concept polymorphe localisé à l'intersection de la pédagogie et de la didactique ; la pédagogie pour son aspect fonctionnel ainsi que pour la diversité d'utilisation par les formateurs (enseignants, maîtres assistants, professeurs) et la didactique pour la référence aux savoirs de deux disciplines. De même, cette référence aux savoirs renvoie à leur construction, c'est-à-dire à l'épistémologie en lien avec la didactique[3]. Chacune possède des théories bien spécifiques qu'il faut envisager d'articuler, des cadres théoriques variés comme préconisés pour toute recherche de signification, avec une multitude de connexions possibles tant du point de vue des théories que des acteurs.

Le système scolaire est un système hypercomplexe (SHC) au sens de Francis Le Gallou[4] :

> Un système est un ensemble, formant une entité cohérente et autonome, d'objets réels et conceptuels (éléments matériels, individus, actions...) organisés en fonction d'un but (ou d'un ensemble de buts, objectifs, finalités, projets...) au moyen d'un jeu de relations (interrelations mutuelles, interactions dynamiques...), le tout immergé dans un environnement.

Nous entrons ainsi de plein pied dans le champ de la complexité par notre objet d'étude complexe, notre observable, mais également par sa place au sein d'un système hypercomplexe. Il ne faut pas confondre complexité et complication. La complication s'appréhende dans sa globalité grâce à l'expertise, le travail et la méthode. Par contre, pour la

---

[1] [*] Université Catholique de Louvain-la-Neuve, IRMP et CRIDEDIS – Belgique – roland.debled@skynet.be

[2] Le nouvel « Aster » (1985), Trois paradigmes pour les recherches en didactiques (1993).

[3] M. Roland (2017), Introduction de l'ouvrage collectif.

[4] In G. Donnadieu et M. Karsky (2002)

complexité, il est illusoire de croire qu'elle s'appréhende dans sa totalité. Il faudra émettre des hypothèses, ce qui induit un axiome constructiviste entre observateur et observable. Les modèles ne sont jamais que des représentations partielles, partiales mais opératoires de la réalité. Pourquoi dès lors ne pas recourir à une théorie visant l'étude des systèmes complexes, la systémique[5] ? Chevallard (1991) utilise dans *La transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné* de très nombreux concepts de la systémique. La recherche-action intégrale systémique[6]est un exemple de recherche alliant systémique et recherche en éducation.

La méthode systémique permet cette articulation de théories diverses et une analyse des systèmes dans leur complexité, leur globalité, fournissant ainsi une ossature, une colonne vertébrale à notre recherche. Nous la déclinons en cinq points inspirés de Donnadieu et Karsky (2002): l'observable, l'exploration systémique, la modélisation qualitative, la modélisation quantitative et finalement la simulation. Cette déclinaison fournit le cadre méthodologie afin de répondre à nos quatre "questions" de recherche (Roland & Dedonder).

II. OBSERVABLE

Notre observable est l'interdisciplinarité physico-mathématique qu'il convient de bien définir.

1. Interdisciplinarité

> L'interdisciplinarité scolaire est un instrument curriculaire, pédagogique et didactique visant, au sein d'une discipline, la construction et l'intégration de savoirs, l'appropriation de concepts et une modélisation du réel à partir de connaissances disciplinaires provenant d'au moins une autre discipline avec laquelle doit s'établir une réciprocité.

Cette définition s'inspire de la pensée développée par Jean-Pierre Astolfi (2010), Alain Maingain, Barbara Dufour et Gérard Fourez (2002), Yves Lenoir et Lucie Sauvé (1998). Les deux disciplines mises en jeu sont les mathématiques et la physique, les compétences acquises au sein de l'une pouvant participer aux apprentissages de l'autre et inversement.

2. Physico-mathématique

L'adjectif physico-mathématique est un concept unificateur. Il apparaît au début du 17ème siècle et est consacré en 1644 avec la parution de *Cogitata physico mathematica* et, en 1647 de *Novarum observationum physico-mathematicarum, tomus III,* de Marin Mersenne. Les travaux effectués par Michèle Artaud (1999) et Yves Chevallard (2003) montrent l'évolution des liens entre mathématiques et physique durant les derniers siècles laissant entrevoir l'apparition d'obstacles par le sentiment de domination d'une discipline sur l'autre ou de dérives empiristes engendrant un risque de repli disciplinaire. L'étude épistémologique montre que ce ne sont pas les disciplines qu'il faut remettre en cause, mais qu'il faut prendre conscience de la variabilité de leurs frontières et même de leur porosité. Il suffit pour cela de renvoyer le lecteur *Au systême figuré des connoissances humaines* de d'Alembert (1751).

Le 17ème siècle foisonne de questionnements physico-mathématiques engendrant la naissance du calcul infinitésimal. De cette période, nous extrayons des associations utiles entre les concepts de l'analyse et de la mécanique (Roland, 2016 et 2018), des concepts interdisciplinaires. Nous mettons en exergue une double approche du concept de dérivée,

---

5 G. Donnadieu et M. Karsky (2002)

6 André Morin et Pierrette Cardinal (2004)

toujours présente aujourd'hui dans la notation leibnizienne ou lagrangienne, pierre d'achoppement entre les enseignants de physique et de mathématiques. Cette double approche s'exploite dans l'analyse de la résolution de problèmes de cinématique (Roland, 2014 et 2017).

Un autre concept unificateur est celui de phénoménotechnique développé par Gaston Bachelard (2002), qui exprime une trilogie relationnelle : la physique, les mathématiques et les techniques. En fait, Bachelard développe dans de nombreux ouvrages des exemples de dualité (pratique-théorique, concret-abstrait, physique-mathématique, symbole-symbolisant, temps qui tourne-temps qui se balance, rationalisme électrique-rationalisme mécanique, ...) de type *doublets brunschvicgiens* (Bachelard, 1949) associant la technique, qui sont semblables à des praxéologies de type *modélisation.*

Nos concepts interdisciplinaires sont des dualités, des concepts physico-mathématiques. Un premier concept fait référence à la dualité fonction-mouvement (un monde de relation, prémices à la modélisation). Les élèves perçoivent-ils la similitude entre les fonctions f(x) de l'enseignant de mathématiques et les positions x(t) du mouvement de l'enseignant de physique ? Une deuxième dualité est le couplage dérivée-vitesse instantanée et même une bipolarité de la dérivée à la différentielle et de la vitesse à l'accélération (un monde d'incompréhension). La question est alors de comprendre les difficultés entre mathématiciens et physiciens engendrées par la notation de la dérivée, leibnizienne ou lagrangienne ? La dérivée est-elle un rapport de différentielle ? Le dernier couplage renvoie à la modélisation par la paire d'équations différentielles ordinaires (EDO)-loi fondamentale de la mécanique (un monde de modélisation). L'étude du pendule simple en est un exemple. Comment justifier que son mouvement est un mouvement harmonique ?

III. RECUEIL D'INFORMATIONS

Après avoir construit notre observable et précisé quelques concepts interdisciplinaires, le temps est venu de s'attaquer aux questions sur la réalité du terrain en s'appuyant sur l'élaboration d'un recueil d'informations[7]. Comment les injonctions sont-elles perçues et appliquées ? Quelle est la réalité du terrain et la place de l'interdisciplinarité au sein de ce dernier et ces différentes formes ? Quelle est la notation utilisée dans l'enseignement pour la dérivée lagrangienne ou leibnizienne ? Est-elle adaptée en fonction des disciplines ?

Ce recueil d'informations fait appel à une stratégie composée : l'étude de documents, l'interview, le questionnaire d'enquête et le questionnaire en ligne. Il prend appui sur la démarche systémique décrite par Donnadieu et Karsky (2002).

1. Exploration systémique

Nous déterminons les limites du système scolaire (SHC), le situons dans son environnement et analysons les échanges qu'il entretient avec ce dernier, pour déterminer la place de notre observable en son sein. Nous analysons son architecture interne, ses principaux composants ainsi que la nature des interrelations entre ceux-ci. Finalement, il est important d'avoir un aperçu historique du système pour analyser son comportement dans le temps.

Afin de mener à bien cette exploration, nous avons recours à la triangulation systémique : aspect fonctionnel, aspect structural et aspect historique[8]. Cette dernière se réalise à partir d'une étude de documents portant sur les particularités du système scolaire belge afin d'en

[7] Jean-Marie De Ketele et Xavier Roegiers (2009, 4ème édition)

[8] G Donnadieu et M Karsky (2002)

faire ressortir les trois aspects (Beckers J (1998) ; Grootaers D (1998) ; Crahay M (2000) ; Maroy C (2002) ; Draelants H, Dupriez V, Maroy C (2011)). Nous nous intéressons aux interactions complexes engendrant le recours à l'interdisciplinarité sous différentes formes.

Cette triangulation permet la construction d'une carte à partir de la théorie de la transposition didactique (Chevallard, 1991) pour analyser comment l'interdisciplinarité entre dans le système (input) et ce qu'elle apporte à la sortie (output) ; l'objectif étant de prouver une plus-value à son recours.

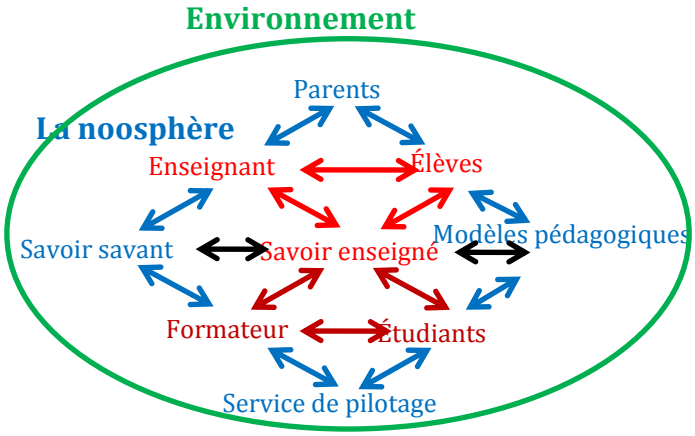


Figure 1 – Carte du système scolaire

Sur base de cette carte, nous construisons un canevas pour des interviews semi-dirigées (Roland, Léonard, Radelet, 2014) qui respectent les trois critères de qualité (pertinence, validité et fiabilité) décrits dans le recueil d'informations.

Notre objectif est de mettre en place une inférence, plutôt forte, c'est-à-dire une tendance importante à donner du sens à l'information recueillie, en attribuant une signification aux réponses au regard, par exemple, de notre expérience personnelle d'enseignant et de formateur. De plus, afin de permettre aux interviewés de prendre connaissance de notre référentiel, nous commençons nos interviews par une brève explication de notre sujet de recherche et du plan de l'interview en précisant une estimation du temps prévu et les modalités d'enregistrement. Il s'agit de fournir aux participants un descriptif leur permettant d'agencer leurs réponses en fonctions des différents sujets abordés, tout en leur laissant la liberté d'ajouter des informations qu'ils jugent pertinentes. Nous avons choisi trois catégories d'interviewés, chacune des catégories étant composé à part égale de deux mathématiciens et de deux physiciens de formation.

La **première catégorie** est composée de membres de notre public cible, c'est-à-dire d'enseignants des trois dernières années du secondaire (lycée) assumant des cours de mathématiques ou de physique. Ils ont en outre assumé des formations continues sur l'interdisciplinarité physico-mathématique. La **deuxième catégorie** vise à s'intéresser à la perception des formateurs des enseignants du degré inférieur (collège), c'est-à-dire à la formation initiale des enseignants, acteurs centraux du système. La **troisième catégorie** permet de renvoyer au sens premier de la didactique, son lien avec le savoir disciplinaire et donc le savoir savant. Nous interrogeons des professeurs d'Université sur la collaboration entre mathématiques et physique. Ils forment les enseignants, notre public cible, sur les différents savoirs disciplinaires. Ils transposent le savoir savant. Nous avons choisi d'interviewer des professeurs qui s'intéressent à cette relation physico-mathématique et qui possèdent une fibre pédagogique. Finalement, une **quatrième catégorie** a été établi suite à des opportunités de rencontre afin de récolter des avis de personnes en partie extérieure au système. Elle est constituée de deux professeurs italiens dont l'un s'intéresse à la promotion de l'enseignement des mathématiques (fondateur d'Il giardino di Archimedeà Florence) et l'autre est l'auteur de livres de physique pour l'enseignement secondaire italien tout en travaillant en collaboration avec le CERN sur des applications médicales d'accélérateurs de particules. Le dernier membre de ce groupe est responsable de l'agrégation de biologie dans

une université francophone belge et a enseigné les mathématiques et la physique dans le secondaire.

Le canevas s'établit selon cinq points afin d'analyser la position de l'interdisciplinarité au sein du système à partir de la carte.

Le premier point s'intéresse aux perceptions de l'interdisciplinarité dans le temps par le changement de posture des interviewés (élève, étudiant, enseignant, formateur), leur parcours curriculaire. Le deuxième point étudie le regard porté sur les différentes réformes et les différents programmes d'enseignement, autrement dit l'influence du service de pilotage et des modèles pédagogiques prescrits ou conseillés sur l'observable. Au troisième point, nous nous intéressons au sablier central de la carte (en rouge), c'est-à-dire aux collaborations tant internes, à une discipline, qu'externes, entre disciplines pour la formation des apprenants. Le quatrième point porte sur la place dans le curriculum des deux disciplines, pour une analyse du rôle des savoirs, savant et enseigné. Le dernier point concerne la vision de l'interdisciplinarité des interviewés.

Ces interviews confirment la pertinence et la validité de notre liste d'obstacles a priori. Elles nous permettent d'en ajouter un (l'obstacle de type traditionnel). Elles font aussi ressortir de grandes difficultés de collaboration entre les enseignants des deux disciplines et surtout avec une confrontation des positions au sein des universités, lieux des savoirs savants. Les obstacles sont présents dès l'enseignement des savoirs savants au sein des universités. Le cas de la différentielle en est une excellente illustration. Il suffit de se référer au projet réalisé à l'université Paris-Diderot dans les années 1980 ou à un article[9] intitulé *Obstacles to Mathematization in Physics : The case of the Differential.* De plus, lors des interviews, un questionnement a été formulé sur la relation possible entre nos recherches et la dialectique outil-objet de Régine Douady (1984 et 1992). Ce questionnement nous a poussé à étudier cette possibilité au regard de notre étude épistémologique sur la dualité de concepts, les concepts interdisciplinaires. Cette dialectique établit un dialogue, trop souvent rompu dans l'enseignement, entre les mathématiques et la physique.

2. Modélisation qualitative

L'objectif est de passer de la cartographie à la modélisation. Afin d'affiner nos premiers constats obtenus sous l'angle des formateurs, nous avons réalisé un questionnaire d'enquête remis à des étudiants en début de parcours universitaire dans des orientations scientifiques (Roland & Dedonder, 2018). Nous souhaitions analyser la perception des apprenants sur l'interdisciplinarité et les moyens mis en place par leurs différents enseignants pour faire ressortir les liens entre les deux disciplines. De ces questionnaires, il ressort que l'interdisciplinarité rencontrée est surtout à sens unique: les mathématiques, outils pour la physique. La collaboration entre les enseignants est rare. De plus, il est apparu des difficultés dans la résolution de trois exercices de cinématique et des approches différentes à mettre en parallèle avec l'étude épistémologique du Calculus. C'est l'occasion de faire appel à la dialectique outil-objet et les changements de cardes de Douady (1984 et 1992). Le changement de cadre permet de synthétiser les méthodes de résolution, mais aussi la mise en place de pistes pour l'enseignement fournissant une double approche des problèmes, mathématique ou physique, évitant la simple répétition d'une méthode non comprise par un changement de cadre.

Comme indiqué dans l'introduction, le cadre épistémologique fournit une double approche de la dérivée, les prémices d'une dialectique outil-objet. Il convient dès lors d'effectuer un

[9] Ricardo Karam and others (2015)

parallélisme avec la situation actuelle conflictuelle autour de sa notation. Un concept, comme celui de dérivée ou de vitesse instantanée, est **outil** lorsque nous y recourons pour résoudre un problème (outil explicite) ou pour introduire un nouveau concept (outil implicite). Ces deux concepts sont intimement liés car l'un, la dérivée, est un outil constitutif du sens de l'autre, la vitesse instantanée. La dérivée, appartenant au domaine des mathématiques, permet de comprendre la signification du terme instantané du domaine de la physique.

> La dimension outil est constitutive du sens d'un concept. Dans la constitution du sens interviennent des relations développées dans le contexte avec d'autres concepts relevant du même domaine ou d'autres domaines.[10]

Ces mêmes concepts sont **objets** lorsqu'ils réfèrent à l'objet culturel ayant sa place dans l'édifice plus large que sont les savoirs des deux disciplines à un moment donné et reconnu socialement, par exemple, par les pairs. L'objet est défini indépendamment de ses différents usages et permet ainsi son réinvestissement dans de nouveaux contextes éventuellement très éloignés du contexte d'origine. L'outil devenu objet accroît l'ensemble des connaissances. C'est pourquoi, la dérivée est outil à la fois en mathématiques (c.a. de la tangente au graphique), en cinématique (vitesse instantanée) et en économie (coût marginal) et c'est pourquoi il faut que la vitesse instantanée se définisse indépendamment de l'outil mathématique pour avoir le statut d'objet de la physique. S'instaure ainsi une dialectique outil-objet-outil entre les deux disciplines scientifiques. Comme l'indique Douady (1987), la dialectique est créatrice de sens et au sein de ses différentes phases intervient le changement de cadre.

Un **cadre** *est constitué des objets d'une branche des mathématiques*, par exemple l'analyse, ou d'une branche de la physique, par exemple la cinématique, *des relations entre les objets, de leur formulation éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et ces relations. Ces images jouent un rôle essentiel dans le fonctionnement comme outil, des objets du cadre. Cela conduit à envisager la notion de cadre selon au moins trois dimensions : une dimension mathématique* ou physique, *une dimension socio-culturelle, une dimension individuelle chacune indexée par le temps (Douady, 1992).* Nous avons identifié deux cadres dans la construction du concept de dérivée. Nous les retrouvons dans la résolution de problèmes de cinématique (voir plus loin les tableaux de synthèse de la résolution des problèmes). Le premier se caractérise par le recours à des relations algébriques obtenues (**le cadre géométrico-algébrique**) soit en combinant des distances (aspect géométrique) soit en effectuant un rapport de quantités (t(s) = d(m)/v(m/s) ou t(s) = v(m/s)/a(m/s^2)). Le second s'appuie sur le recours aux fonctions « positions » (**le cadre analytique**). Il existe ainsi deux approches possibles des problèmes permettant le recours au changement de cadre, explicité par Douady (1992).

> Le changement de cadres est un moyen d'obtenir des formulations différentes d'un problème qui sans être nécessairement tout à fait équivalentes, permettent un nouvel accès aux difficultés rencontrées et la mise en œuvre d'outils et techniques qui ne s'imposaient pas dans la première formulation… L'intérêt réside dans une nouvelle approche des difficultés rencontrées et dans la mise en œuvre d'outils et de techniques qui n'avaient pas de raison d'être impliqués dans la première approche.

Il est également possible d'étudier la résolution des problèmes sous l'angle des fenêtres conceptuelles (Douady, 1992).

> Nous appelons fenêtre conceptuelle l'ensemble des objets, des outils et des relations mobilisées par quelqu'un, à un moment donné, pour analyser l'énoncé d'un problème ou de la situation, ou pour développer une stratégie de résolution, quels que soient les cadres dont ils relèvent…

[10] Régine Douady (1992)

> Ainsi, en mathématiques **ou en physique**, une fenêtre conceptuelle est un fragment de mathématiques **ou de la physique** attaché à un problème et à quelqu'un qui le cherche, ou attaché à une stratégie de résolution choisie et éventuellement mise en œuvre par le chercheur, indexé par le temps. Un cadre est une partie d'une branche des mathématiques **ou de la physique**, indexée par le temps. Les deux notions de cadre et de fenêtre sont complémentaires. **(Ajouté par nous)**

	CADRES			
	Géométrico-algébrique		Analytique	
FENETRES CONCEPTUELLES	Relation algébrique		Relation numérique	
	Vitesse relative		Fonction numérique	

Ainsi, une analyse de l'énoncé ou une stratégie de résolution des problèmes peut s'appuyer sur la recherche de relations entre les quantités, soit sous forme algébrique (représentation schématique de la situation en termes de distance et égalité de distances) soit sous forme numérique (représentation à partir de tableau ou de graphique), premier type de fenêtre. De même, en poussant plus avant dans la recherche des solutions, une nouvelle analyse ou une nouvelle stratégie peut être établie à partir d'un concept de la physique, la vitesse relative, ou d'un concept des mathématiques, la fonction numérique. Les notions de cadre et de fenêtre étant complémentaires, nous synthétisons l'ensemble sous forme d'un tableau à double entrée.

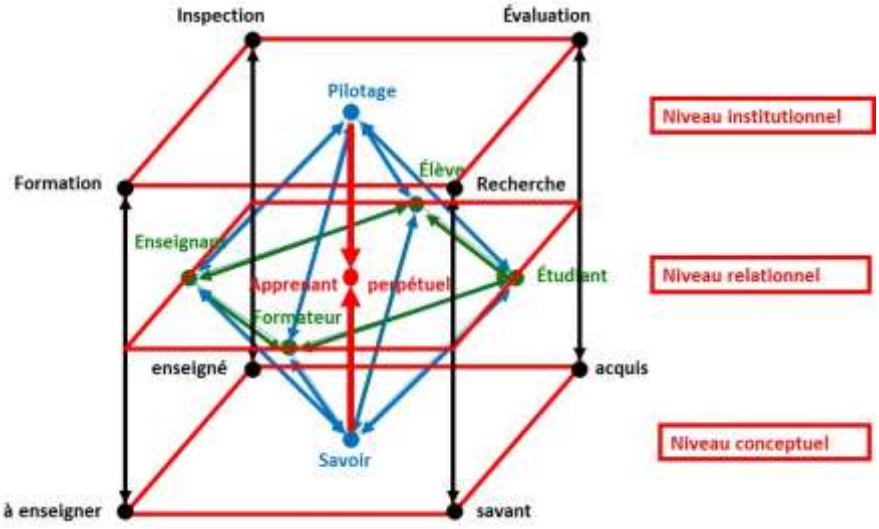
Ces différents concepts nous permettent une analyse sous l'angle de l'interdisciplinarité physico-mathématique montrant l'intérêt d'un tel recours, comme l'indique Douady (1984).

> Le jeu de cadres traduit l'intention d'exploiter le fait que la plupart des concepts peuvent intervenir dans divers domaines, divers cadres physique, géométrique, numérique, graphique ou autres… C'est ainsi que l'inter-disciplinarité peut jouer de façon efficace.

En conclusion, l'analyse des interviews et des questionnaires met en évidence des lacunes de notre carte qu'il convient d'éliminer en passant au modèle:

Lacunes de la carte	Solution pour le modèle
Place des parents trop importante	Les localiser dans l'environnement
Le pilotage et son influence pas assez détaillés et explicites	Recours à une hiérarchisation et à un découpage du pilotage
Découpage du savoir en deux pas suffisant	Partir du découpage du savoir en quatre savoirs
Amplifier le rôle central de l'enseignant, acteur clef du système par ses différentes postures	Positionner l'enseignant au centre du modèle par le recours à l'apprenant perpétuel
Manque de nœuds (9) et de connexions représentées (16)	Augmentation des nombres par un passage en trois dimensions

Dès lors, nous élaborons un modèle spatial du système scolaire jouant sur la dualité cube-octaèdre en trois niveaux hiérarchisés (Roland & Dedonder, 2018).



Ce modèle permet une nouvelle classification des obstacles.

Niveau	Obstacles	Exemples
Institutionnel	de type institutionnel	Poids des programmes, la multiplicité des réformes, les compétences transversales, les savoirs disciplinaires, …
	de type formatif ou cognitif	Professeur expert, formation continuée, formation initiale, connaissance des autres programmes et des matières, …
Relationnel	de type corporatiste	Défense de son territoire, mathématiques pures ou appliquées, abstrait-concret, …
	de type organisationnel	Collaboration entre enseignants, choix des dispositifs et des locaux, …
Conceptuel	de type langagier	Mathématisation de la physique, géométrisation de la physique, poids des mathématiques, notations différentes, …
	de type traditionnel	Position des différentes matières inamovibles (suite définie comme logique depuis de nombreuses années),…

3. Modélisation quantitative ou dynamique

Dans le champ des sciences humaines, nous pourrions nous contenter des trois points précédents comme l'indiquent G. Donnadieu et M. Karsky (2002).

> Toutes les fois où on le peut, cela suppose de pousser la démarche d'étude jusqu'au bout, c'est-à-dire au degré ultime de la modélisation dynamique et de la simulation. Mais comme il a déjà été noté, s'agissant du champ des sciences humaines, cet objectif n'est pas toujours réalisable. Il faut alors savoir limiter la démarche au stade de la modélisation qualitative, voire de la simple exploration systémique.

Le système scolaire possède une inertie non négligeable et des changements à différents niveaux sont sans doute nécessaires. Nous parlons donc de dynamique qui implique l'analyse des facteurs qui créent le changement, ou au contraire s'y opposent. Il faut comprendre les facteurs freinant le changement ainsi que leurs causes afin d'y remédier.

L'objectif est bien de fournir des pistes de dépassement des obstacles par une formulation en termes d'objectifs-obstacles[11].

Pour identifier ces facteurs et confirmer la classification des obstacles, nous construisons un questionnaire en ligne à destination des enseignants de physique et de mathématiques du troisième degré du secondaire (élèves de 17 à 18 ans). Ce questionnaire est élaboré à partir du modèle. Il a pour but de vérifier la pertinence de notre classification, de permettre l'éclosion de nouveaux obstacles non envisagés et de pointer les interconnexions du modèle faisant obstacle à l'interdisciplinarité.

Ces questionnaires sont en cours d'étude. Il est déjà intéressant de noter qu'il fut plus difficile de toucher les mathématiciens et d'obtenir des réponses sur ce sujet par eux. De même, nous avons aussi établi une distinction entre enseignants en fonction des cours enseignés depuis les 5 dernières années : enseigner des mathématiques sans le cours de physique, de la physique sans le cours de mathématiques, des mathématiques et de la physique. Nous les avons également interrogés sur trois problèmes soumis aux étudiants pour connaître leur avis sur leurs difficultés, sur le taux de réussite des étudiants. Toute l'analyse se basera sur les différentes composantes du modèle.

[11] Jean-Louis Matrinand (1986), Brigitte Peterfalvi (2001)

IV. PISTES POUR L'ENSEIGNEMENT, SIMULATION

Il reste à montrer la plus-value du recours à l'interdisciplinarité physico-mathématiques aux enseignants car on ne change pas l'École uniquement par décret.

Avant de finaliser des pistes d'ingénierie didactique interdisciplinaire, selon la définition de Michèle Artigue (1996), une étude approfondie des réponses des enseignants est nécessaire. Elle doit en outre être mise en parallèle avec notre étude épistémologique des concepts interdisciplinaires et avec des exemples issus de notre parcours curriculaire.

L'étude épistémologique autour de la naissance du calcul infinitésimal fournit des dualités à exploiter dans le cadre d'ingénierie, fonction-mouvement, dérivée-vitesse, EDO-loi fondamentale de la mécanique, … (Roland, 2018).

La dualité fonction-mouvement est idéale comme prémices à la modélisation. En effet, l'exploitation de mesures prises en laboratoire implique une représentation graphique et une méthode permettant de définir la meilleure fonction passant par un certain nombre de points. Les enseignants ont-ils la formation utile et nécessaire à l'exploitation de cette dualité ?

À la naissance du calcul infinitésimal, les concepts de fonction et de dérivée se sont développés en parallèle sous l'angle des mathématiques (la tangente), mais également en lien avec la compréhension de la mécanique et plus précisément des concepts de trajectoire, de mouvement, de vitesse instantanée,... Comme en témoigne Dugas dans l'introduction de son ouvrage, *le développement de l'analyse mathématique permet à la mécanique de prendre une forme qui a paru définitivement achevée et qui est encore en usage dans l'enseignement classique*. Les difficultés rencontrées par les étudiants dans la résolution de problèmes de cinématique démontrent l'intérêt d'envisager les problèmes sous différentes approches. De même, il est important de réconcilier les enseignants sur la notation de la dérivée en montrant les dangers d'une interprétation non réfléchie en termes de rapport de différentielles.

En outre, derrière ces différentes notions se cachent une autre dualité celle entre les EDO et la loi de la mécanique de Newton. Comment démontrer que le mouvement du pendule simple est un mouvement harmonique ?

V. CONCLUSION

L'élément central de notre recherche était de parvenir à conjuguer une grande variété de théories provenant de divers horizons. Vu la complexité du système scolaire rien que par l'action d'influence qu'un acteur (nœud) peut exercer sur un autre (nœud), il est apparu que la théorie de la systémique était une solution appropriée. Elle permet d'agencer les différentes théories et de servir de colonne vertébrale.

Le recours à la cartographie avant de passer à la modélisation a permis un éclairage plus précis de la problématique. La combinaison de cette cartographie avec le recueil d'informations a engendré la construction d'un modèle utile et prédictif du système scolaire fournissant la clef de l'analyse des différentes enquêtes. Finalement, ce modèle donne l'opportunité de réfléchir en termes d'objectifs-obstacles afin de mettre en place des pistes d'ingénieries permettant la remédiation des difficultés rencontrées dans la collaboration entre enseignants de mathématiques et de physique.

REFERENCES

Artigue M. (1996). Ingénierie didactique. *Didactique des mathématiques*, Delachaux et Niestlé, 243-274.

Artaud M. (1999). Conditions et contraintes de l'existence des mathématiques dans l'enseignement général. *Petit x*, 50, 23-38.

Astolfi J.-P. (1985). *Le nouvel « Aster »*. Institut national de recherche pédagogique, pp. 1-6.

Astolfi J.-P. (1993). Trois paradigmes pour les recherches en didactiques. *Revue française de pédagogie*, *103*, 5-18.

Astolfi J.-P. (2010, 2ème édition). *La saveur des savoirs*. ESF éditeur.

Bachelard G. (1949). *Le rationalisme appliqué*. Presses universitaires de France.

Bachelard G. (2002, 2e édition). *Études*. J. Vrin.

Beckers J. (1998). *Comprendre l'enseignement secondaire.* De Boeck Université.

Chevallard Y. (1991). *La transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné*. La Pensée Sauvage.

Chevallard Y. (2003). Quel avenir pour l'enseignement des mathématiques ? *L'enseignement des mathématiques du collège au premier cycle de l'université.* Metz, 9-24.

Crahay M. (2000). *L'école peut-elle être juste et efficace ? De l'égalité des chances à l'égalité des acquis.* De Boeck Université.

De Ketele J.-M., Roegiers, X. (2009). *Méthodologie du recueil d'informations*. De Boeck.

Diderot D. (1751). Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers, recueilli des meilleurs auteurs et particulièrement des dictionnaires anglois de Chambers, d'Harris, de Dyche, etc. par une société de gens de lettres, mis en ordre et publié par M. Diderot, et quant à la partie mathématique. 1751.

Donnadieu G., Karsky, M. (2002). *La systémique, penser et agir dans la complexité*. Liaisons.

Douady R. (1984). *Jeux de cadre et dialectique outil-objet*. (Thèse d'État). Université de Paris VII.

Douady R. (1992). Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. *Repères-IREM*, *6*,132-158.

Draelants H.,Dupriez, V., Maroy, C. (2011). *Le système scolaire en Communauté française*. Bruxelles, dossier 76, CRISP.

Grootaers D. (1998). *Histoire de l'enseignement en Belgique.* CRISP.

Karam R. & al. (2015). Introduction of the Thematic Issue on the Interplay of Physics and Mathematics. *Science & Education*, *Springer*, *24*, *Issue 5-6*, 487-805.

Lenoir Y., Sauvé L. (1998). De l'interdisciplinarité scolaire à l'interdisciplinarité dans la formation à l'enseignement : un état de la question. *Revue Française de pédagogie*, 124 et 125, 121-153 et 109-146.

Maingain A., Dufour B., Fourez, G. (2002). *Approches didactiques de l'interdisciplinarité*. Coll. Perspectives en Education et Formation, De Boeck Université.

Martinand J.-L. (1986). *Connaître et transformer la matière*. Peter Lang, Berne.

Maroy C. (2002). *L'enseignement secondaire et ses enseignants.* De Boeck Université.

Morin, A. Cardinal P.(2004). La recherche-action intégrale systémique. *Questions vives n°3 Lambesc*, p. 27-36

Peterfalvi B. (2001). *Obstacles et situations didactiques en sciences : processus intellectuels et confrontations ; l'exemple des transformations de la matière* (Thèse, Rouen).

Roland M. (2014). Vitesse instantanée, notion mathématique ou physique ? Approche épistémologique et didactique de la question. *Communication affichée*, Montpellier.
http://www.epistemologie.univ-montp2.fr/les-journees/les-journees/journee-2014

Roland M., Léonard P., Radelet P. (2014). Interdisciplinarité physico-mathématique : comparaison épistémologique et didactique de deux modélisations en mécanique.

Communication affichée, ARCD sur la modélisation des savoirs dans les analyses didactiques, Bruxelles, Belgique.

Roland M. (2016). Quelle synergie entre mathématiques et physique au sein de l'enseignement universitaire ? *First conference of International Network for Didactic Research in University Mathematics (INDRUM)*. Montpellier. https://hal.archives-ouvertes.fr/INDRUM2016/hal-01337876

Roland M.(2017). Vitesse instantanée, notion mathématique ou physique ? Approche épistémologique et didactique de la question. *Ouvrage collectif, Épistémologie et didactique*, Presses universitaires de Franche-Comté.

Roland M. (2018). What synergy between mathematics and physics is feasible or imaginable in education? *In Methods and Cognitive Modelling in the History of Science and Education, Special Issue of Transversal-International Journal for the Historiography of Science*, http://www.historiographyofscience.org/index.php/transversal/issue/view/10.

Roland M., Dedonder J. (2018). L'interdisciplinarité physico-mathématique du point de vue de l'élève au début de son parcours universitaire. Article soumis en attente d'avis.

LA PENSÉE ARITHMÉTICO-ALGÉBRIQUE COMME TRANSITION DU PRIMAIRE AU SECONDAIRE : DES SITUATIONS D'INVESTIGATION DANS LESQUELLES MODÉLISATION ET TECHNOLOGIE JOUENT UN RÔLE CENTRAL

SABOYA[*] Mireille – HITT[*] Fernando – QUIROZ[*] Samantha – ANTOUN[*] Zita

Résumé. Le mouvement *Early algebra* a donné lieu à un nouveau paradigme qui s'oppose à la rupture entre l'arithmétique et l'algèbre. Certains chercheurs se sont attardés à caractériser la pensée arithmétique et la pensée algébrique pour mieux comprendre l'introduction de l'algèbre au primaire. Notre position est sur la construction d'une pensée arithmético-algébrique, dans une idée de continuité, d'une articulation dynamique entre arithmétique et algèbre qui émerge lors de la résolution de *situations d'investigation*.

Mots-clefs : Early algebra, pensée arithmético-algébrique, généralisation, situations d'investigation, méthode ACODESA

Abstract. The Early algebra movement has given rise to a new paradigm that opposes the idea of rupture between arithmetic and algebra. Some scholars have focused on characterizing arithmetic and algebraic thinking to better understand the introduction of algebra in primary school. Our position is on the construction of an arithmetic-algebraic thought, to promote a dynamic articulation between arithmetic and algebra that emerges during the resolution of what we named situations of investigation.

Keywords: Early algebra, arithmetic-algebraic thinking, generalization, situation of investigation, ACODESA teaching method.

I. LE PROGRAMME DE FORMATION DE L'ÉCOLE QUÉBÉCOISE

L'approche par compétences du Québec (MELS, 2001 au primaire et 2004 au secondaire) a mis de l'avant la résolution de situations-problèmes (SP) comme première compétence disciplinaire en mathématiques[2]. Le ministère (MELS 2007) définit une SP comme suit :

> En mathématique, une situation-problème doit satisfaire à l'une ou l'autre des conditions suivantes :
>
> – la situation n'a pas été présentée antérieurement en cours d'apprentissage;
>
> – l'obtention d'une solution satisfaisante exige le recours à une combinaison non apprise de règles ou de principes dont l'élève a fait ou non l'apprentissage;
>
> – le produit, ou sa forme attendue n'a pas été présentée antérieurement. (p. 19)

S'appuyant sur cette définition et sur les suggestions du ministère de l'éducation autour de l'importance de contextualiser les situations, les auteurs des manuels scolaires débutent souvent chaque chapitre par une situation qui s'appuie sur les domaines généraux de formation[3]. Ainsi certaines situations sont liées aux problèmes environnementaux comme le manque d'eau dans certains pays (l'or bleu), la contamination dans le monde, l'abattage des

---

1 [*] GRUTEAM, Université du Québec à Montréal – Canada
hitt.fernando@uqam.ca, saboya.mireille@uqam.ca, samanthaq.rivera@gmail.com, antoun.zita@uqam.ca

2 Les deux autres composantes sont *Déployer un raisonnement mathématique* et *Communiquer à l'aide du langage mathématique* (récemment cette dernière a été incluse dans la 2e compétence suite aux problèmes rencontrés par les enseignants lors de l'évaluation de cette compétence).

3 Le programme de formation de l'école québécoise distingue cinq domaines généraux de formation. Ces domaines sont *Santé et bien-être; Orientation et entreprenariat; Environnement et consommation; Médias; Vivre-ensemble et citoyenneté*. Les domaines généraux de formation « permettent de cerner les apprentissages essentiels au développement d'un regard lucide sur les grandes composantes de la réalité » (MELS, 2007, p. 1), ils sont de plus « des leviers pour motiver les élèves, soutenir leurs apprentissages et guider leur éducation citoyenne » (p. 2).

forêts, etc. Un regard sur le traitement de ces situations montre l'importance de la modélisation mathématique ainsi que celle du traitement des données. On pourrait penser que le recours à la technologie, venant supporter la modélisation mathématique et le traitement des données, serait priorisé pour mener la résolution mais ce n'est pas le cas. Ceci peut s'expliquer par le fait qu'*Exploiter les technologies de l'information et de la communication* est une compétence transversale et non disciplinaire. Toutefois, en 2007, le ministère annonce la décision que les écoles du primaire et du secondaire doivent se munir de tableaux blancs interactifs (TBI) mettant ainsi de l'avant l'importance d'utiliser la technologie en classe.

Par ailleurs, si on analyse les exemples de SP que le ministère fournit aux enseignants, on peut remarquer que les énoncés sont longs (certainement un effet de la volonté de contextualiser les situations). Ces SP qui comptent un grand nombre d'informations contrastent avec les propositions de SP provenant des chercheurs (Brousseau 1987; Grenier et Payan 2003). En effet, ces chercheurs proposent des énoncés courts, les actions nécessaires menant à la résolution faisant ressortir la mathématique en jeu. Pour Brousseau, c'est la notion d'obstacle épistémologique qui est le principal facteur d'une SP. Grenier et Payan souhaitent recréer l'activité vécue par les mathématiciens à travers ce qu'ils nomment des situations de recherche. Dans les propositions de ces chercheurs, le contexte ne joue pas un rôle essentiel. Ce sont dans les travaux menés par l'école de Freudenthal que l'on retrouve des similarités avec la notion de SP du ministère du Québec.

En effet, l'école de Freudenthal propose comme approche la *Realistic mathematics Education* (RME) dans laquelle on retrouve des éléments liés à la modélisation mathématique ainsi que le recours à un contexte de la vie réelle. Toutefois, chez les auteurs qui s'inscrivent dans cette approche (comme Streefland, Doorman, Gravemeijer, Drijvers), les activités proposées ne possèdent pas nécessairement de longs énoncés et ne font pas appel à un grand nombre de données ce qui contraste avec la position prise par le ministère du Québec (voir tableau 1).

Elbers (2003, p. 83) – Courant RME	Exemple provenant du ministère de l'éducation du Québec (voir Annexe)
Élisa travaille chez un pharmacien. Elle prépare des médicaments prescrits par le docteur Sterk pour Mme Jansen. Pour Mme Jansen: 40 comprimés de prednison. 6 comprimés par jour pendant 2 jours; puis 5 comprimés par jour pendant 2 jours; puis 4 comprimés par jour pendant 2 jours; puis 3 comprimés par jour pendant 2 jours; puis 2 comprimés par jour pendant 2 jours; puis 1 comprimé par jour pendant 2 jours; Élisa pense: « Ce n'est pas correct! Le docteur a fait une erreur. » Qu'est-ce que tu penses? Est-ce que Élisa a-t-elle raison?	Titre : La lutte Présence de deux pages entières de texte qui présentent la situation On implique l'élève dans l'organisation de la discipline olympique de la lutte. Il doit prendre des décisions en prenant en considération un grand nombre de contraintes. La question finale est : Vous devez déterminer le prix de vente des billets, sans les taxes, pour assister aux compétitions de lutte en tenant compte des différentes contraintes.

Tableau 1 - *Exemple d'une situation issue de l'approche RME et exemple d'une SP provenant du Québec*

Dans la situation proposée par Elbert (RME), on peut procéder par un calcul mental afin de constater qu'il y a une contradiction entre l'ajout des comprimés pris tous les deux jours et le nombre total de comprimés prescrit. D'après notre interprétation, une des préoccupations de

ces chercheurs est de promouvoir une sensibilité à la contradiction ce qui rejoint le développement d'une action contrôlée sur l'activité mathématique (Saboya 2010; Saboya, Bernardz et Hitt 2015) qui devrait être privilégiée dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. En ce qui a trait à l'exemple proposé par une commission scolaire du Québec autour de l'achat d'un terrain, on fait appel à un prêt à la banque, au paiement des intérêts et à la construction d'un camping, ce qui requiert un lourd traitement comme l'utilisation d'identités trigonométriques et du calcul d'aires. L'organisation des données est une des activités principales. La résolution de cette SP pourrait être facilitée par la technologie (Excel ou GeoGebra par exemple). En effet, après une lecture attentive du texte, la technologie permet d'organiser les données et ainsi de dégager un chemin menant à la résolution.

Finalement, le Ministère de l'Éducation (MELS 2005) inscrit son programme par compétences sur un cadre théorique socioconstructiviste. Dans une conférence donnée par von Glasersfeld (2004), constructiviste radical, il donne son avis sur le socioconstructivisme en disant que celui-ci ne peut exister puisqu'il n'y a pas de cadre théorique pour le supporter. Il ne critique pas la pratique d'une approche constructiviste et un travail en collaboration. Il signale seulement qu'il n'y a pas un cadre théorique pour donner un support à cette approche pratique.

Confronté à la problématique ici explicitée, notre groupe de recherche suit un autre modèle pour favoriser le développement de compétences en mathématiques. Notre modèle s'appuie sur les distinctions entre les notions d'*exercice*, de *problème*, de *situation problème*, ce qui nous a amené au concept de « situation d'investigation » qui est lié au processus de modélisation mathématique. Les situations d'investigation s'appuient sur une méthode d'enseignement (ACODESA, Apprentissage COllaboratif, DEbat Scientifique et Autoréflexion) sous une approche socioculturelle de l'enseignement et de l'apprentissage.

II. LES SITUATIONS D'INVESTIGATION ET LA MÉTHODE D'ENSEIGNEMENT ACODESA

1. La tâche comme élément central dans l'activité mathématique

L'analyse des manuels scolaires et de certains cadres théoriques fait ressortir les différences entre les concepts d'*exercice*, de *problème fermé*, de *problème ouvert*, de *problème qui vise à surmonter un obstacle épistémologique*, de *problème de recherche* et de *situation problème*. L'activité cognitive liée à un *exercice* est associée à une application directe d'un algorithme (action automatique). Dans un *problème fermé*, le but est connu et il découle des informations données dans l'énoncé. Il n'y a pas de chemin direct qui mène à la résolution parce qu'un défi a été mis en place qui peut générer chez l'élève un conflit cognitif. Par contre, les *problèmes ouverts*, *les problèmes qui visent à surmonter un obstacle*, les *problèmes de recherche* et les SP mobilisent une pensée divergente, parce que l'élève ne perçoit pas le but. Des fois, un chemin est abandonné et l'élève doit revenir en arrière et prendre un autre chemin si lui/elle considère que la solution doit être cherché ailleurs.

Les enseignants au Québec font part de la difficulté qu'ils ressentent pour gérer en classe les SP que l'on trouve au début de chaque chapitre. Ainsi, ces situations ne sont pas toujours discutées avec les élèves, et les enseignants centrent leur enseignement sur la résolution de problèmes. Il nous semble donc que les attentes autour des SP ne sont pas atteintes. Se pose la question de savoir comment favoriser l'utilisation de situations qui déclenchent une pensée diversifiée et qui préparent à un contenu mathématique spécifique. Notre proposition se base sur une approche sociale de l'apprentissage. La situation devrait :

1. Être guidée. Elle ne doit pas être complètement isolée mais s'inscrire dans une séquence de plusieurs situations. L'organisation d'un contenu ou d'un concept mathématique à développer dans la classe devrait être lié à une chaîne d'activités mathématiques guidées (cette idée n'est pas tellement novatrice, Glaeser (1999) et Artigue (2002) ont déjà mis de l'avant cette idée).

2. La résolution de ces situations devrait être menée de façon organisée dans la classe de mathématiques à travers la mise en place d'une méthode d'enseignement. Nous avons choisi une approche d'apprentissage collaboratif, débat, processus d'autoréflexion et institutionnalisation (ACODESA, voir point 2).

3. Le travail autour de ces situations devrait promouvoir la modélisation mathématique et la construction d'une structure de contrôle en accord au contenu ou concept mathématique envisagé.

En considérant ces trois caractéristiques, nous présentons la *situation d'investigation* (SI), définie comme un ensemble de tâches enchainées dans un environnement d'apprentissage socioculturel et technologique. L'enchaînement de ces tâches s'appuie sur une méthode d'enseignement favorisant un apprentissage collaboratif et individuel et vise une approche par compétences (Hitt et Quiroz en préparation).

2. Une approche socioculturelle pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques (ACODESA)

Dans la résolution de situations complexes, le travail en équipe est fondamental. Toutefois, il faut bien penser la façon d'enseigner les mathématiques dans une perspective d'apprentissage collaboratif. Depuis quelques années, nous avons développé une méthode d'enseignement basée sur l'apprentissage collaboratif et par compétences, méthode que nous avons appelée ACODESA (Hitt 2007; Hitt et Gonzalez-Martin 2015; Hitt, Saboya et Cortes 2017). La méthodologie suit la démarche suivante :

- Travail individuel : Production de Représentations Fonctionnelles Spontanées pour comprendre la tâche.
- Travail en équipe sur la même tâche : Processus de discussion et validation. Raffinement des Représentations Fonctionnelles.
- Débat (qui peut devenir un débat scientifique dans le sens de Legrand, 1993) : Processus de discussion et validation (Raffinement des Représentations Fonctionnelles).
- Retour individuel sur la tâche : Reconstruction et auto-réflexion. (Production de Représentations Groupales).
- Institutionnalisation. Processus d'institutionnalisation et utilisation des représentations institutionnelles.

III. RUPTURE OU CONTINUITÉ DANS LA TRANSITION DE L'ARITHMÉTIQUE À L'ALGÈBRE

La transition de l'école primaire à l'école secondaire a été marquée par le problème du passage de l'arithmétique à l'algèbre. Des chercheurs se sont attardés à caractériser, d'un côté, la pensée arithmétique (Verschaffel et De Corte 1996) et de l'autre, la pensée algébrique (Kieran 2007). La recherche traditionnellement centrée sur la notion d'obstacle épistémologique a donné lieu à des postures liées à la notion de rupture par exemple avec

Vergnaud (1988, p. 189) : « une rupture épistémologique importante avec l'arithmétique » ou à la notion de coupure de Filloy et Rojano (1989) illustrée dans la Figure 1.

Dans les premières années de notre siècle, un nouveau paradigme est né, le mouvement « Early algebra », fortement dirigé par Kaput (1998, 2000) qui a remis en question l'approche classique de rupture. Ainsi, une nouvelle approche destinée à l'enseignement au primaire est proposée qui mise sur une introduction de l'algèbre dans ce niveau d'étude.



Figure 1 *- Approche classique de la problématique autour de l'apprentissage de l'algèbre*

Un groupe de chercheurs (Carraher et al. 2006 et Schliemann et al. 2012) attaché aux idées de Kaput, suggère d'introduire la notion de fonction au primaire, ce qui ne nous semble pas porteur (Hitt, Saboya et Cortés 2016, 2017). Nous proposons dans nos articles un exemple de situation de généralisation qui vise une continuité entre l'arithmétique et l'algèbre à travers la mise en place d'une pensée arithmético-algébrique.

En effet, Radford (2011) indique qu'une des conditions associées à la pensée algébrique est liée à la possibilité de généraliser. Il montre comment des élèves de 6-7 ans arrivent à généraliser dans une activité portant sur des patterns. Une autre condition est reliée au type de représentations, celles-ci ne reposent pas nécessairement sur l'utilisation de lettres et/ou d'inconnues tel que suggéré par Carraher et al. (2006) et Schliemann et al. (2012). Nos études précédemment citées vont dans ce même sens. Les élèves de 1ère année du secondaire sont capables de calculer n'importe quel nombre triangulaire et ils expriment les relations en mots (la langue naturelle a joué un rôle essentiel). Ainsi, dans le paradigme de l'*Early algebra,* nous proposons de penser le passage de l'arithmétique à l'algèbre comme une continuité au lieu de chercher à caractériser la pensée arithmétique et la pensée algébrique séparément. Nous misons ainsi sur l'émergence d'une pensée arithmético-algébrique. En nous appuyant sur le modèle de Kuzniak, nous proposons le modèle suivant (voir Hitt, Saboya, Cortés 2016).

Kuzniak (2011, p. 14) mentionne trois processus cognitifs impliqués dans l'activité géométrique. Dans notre modèle adapté d'après Kuzniak, au lieu de penser à des flèches pour montrer une interaction, c'est plutôt trois plans qui sont impliqués dans l'activité arithmético-algébrique.

- Un processus de Visualisation-Construction comme 1er plan, où nous allons utiliser l'approche de Zimmermann et Cunningham (1991, p. 4-5) qui définissent la visualisation mathématique comme étant un procédé qui consiste à former des images (mentalement, ou avec du papier-crayon, ou à l'aide de la technologie),
- Un processus Visualisation-Généralisation comme 2e plan, où l'activité visualisation-construction va déclencher une activité mathématique d'organisation de données vers la généralisation,
- Un processus de Construction-Généralisation comme 3e plan, où les deux activités liées aux autres plans vont déclencher avec l'aide de la technologie des processus de validation. Selon la méthode d'enseignement ACODESA, la validation entre pairs, discussion en grand groupe et le processus d'autoréflexion avec les deux autres plans, vont promouvoir l'activité cognitive d'articulation pour fortifier une pensée arithmético-algébrique.

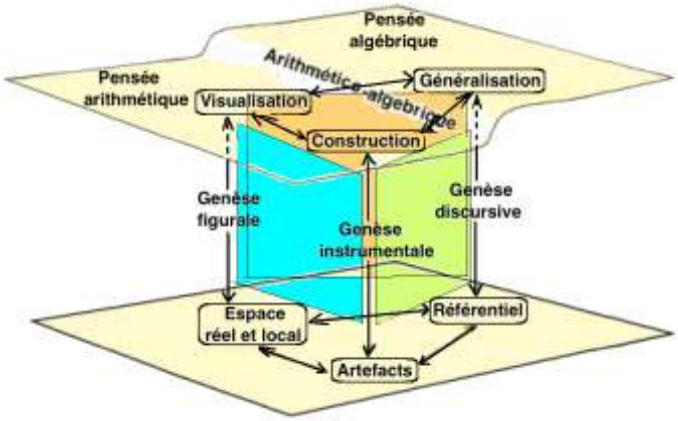


Figure 2 *- Adaptation du modèle de Kuzniak (2011).*

IV. SITUATIONS D'INVESTIGATION PORTANT SUR LA GÉNÉRALISATION ET LES REPRÉSENTATIONS DANS UNE APPROCHE DE LA PENSÉE ARITHMÉTICO-ALGÉBRIQUE

Notre équipe de recherche propose une séquence de 7 situations de généralisation. Certaines de ces situations sont en cours d'expérimentation en 6e année d'une école primaire au Mexique. Nous prévoyons également expérimenter au 1er cycle de l'école secondaire. Dans le cadre de l'EMF en 2018, nous souhaitons présenter les premiers résultats issus de l'expérimentation au primaire. Ainsi, la séquence de situations comprend : 1. Le restaurant, 2. La bijouterie *El Dorado*, 3. Les fenêtres, 4. Le jardin et les citrouilles, 5. Les rectangles et cercles, 6. Les nombres triangulaires, 7. Les nombres pentagonaux. Les premières 5 situations seront expérimentées à l'école primaire, et la séquence au complet sera proposée au début de l'école secondaire avant l'introduction formelle de l'algèbre. Les trois premières situations sont des situations bien connues dans la littérature, nous avons inventé les deux situations, celle des rectangles et des cercles et du jardin des citrouilles. Les situations des nombres triangulaires et des nombres pentagonaux sont également connues dans la littérature. Ces situations reposent sur l'analyse de patterns (voir tableaux 2 et 3), nous avons fait le choix de présenter les patterns de façon désordonnée. En effet, nous souhaitons privilégier l'émergence de différentes formules, ce qui ouvrira la porte vers un travail sur l'équivalence d'expressions algébriques (Denis, 1997). Ce n'est pas l'apprentissage des suites qui est ici visé avec le vocabulaire associé (rang, terme…) mais bien l'émergence d'un symbolisme naturel pour l'élève. C'est dans ce sens qu'ont été rédigées les questions qui accompagnent les situations (voir tableau 4, la situation du jardin et des citrouilles). Les quatre premières situations sont contextualisées.

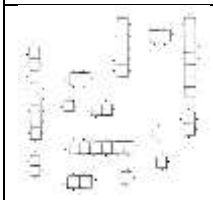
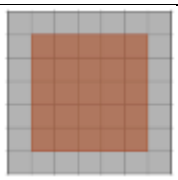
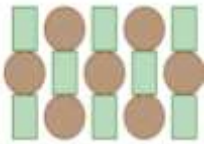
Le restaurant de Marcel	La bijouterie El Dorado	Les fenêtres	Le jardin et les citrouilles	Rectangles et cercles
				

Tableau 2 *– Situations prévues pour le primaire*

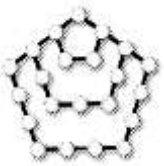
Les nombres triangulaires	Les nombres pentagonaux
	

Tableau 3 *– Situations qui s'ajoutent pour le secondaire*

Toutes les situations comprennent une composante technologique (dans notre cas l'Ipad). En effet, nous pensons qu'un appui numérique (comme celui présenté dans Hitt, Saboya et Cortés 2017) va favoriser chez les élèves une action contrôlée sur les conjectures émises, sur les argumentations et sur les processus de validation. Ainsi, l'enseignant n'est plus le seul responsable de la validation. Celui-ci est un guide, la technologie (dans notre cas l'iPad) apportant un rôle de soutien pour les conjectures émises par les élèves.

Le tableau 4 présente la situation du jardin de citrouilles. La première page qui n'est pas présentée ici donne des indications générales et demande de spécifier le nom de chaque équipier.

Page 2 (Travail individuel)

La Ville de Montréal se prépare pour son spectacle « Jardins de lumière » au Jardin botanique.

Le directeur, responsable du Jardin botanique, a pensé à un « Chemin de citrouilles » tel que présenté sur l'image ci-dessous. Celui-ci est balisé par un chemin sur lequel sont placées des citrouilles et des dalles vertes lumineuses qui montrent le chemin pendant la nuit. Des dalles marrons complètent le chemin.



Le directeur souhaite savoir le nombre de dalles lumineuses et de dalles marrons nécessaires pour construire un chemin quelle que soit sa longueur.

Peux-tu l'aider à trouver une façon de faire?

Pour cela, réponds aux questions qui suivent.

Voici des exemples de chemins possibles. Ils sont toujours construits de la même façon.

Les dalles lumineuses

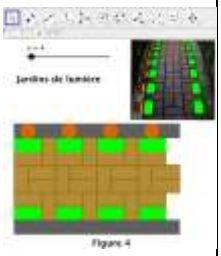
1) Quel est le nombre de dalles lumineuses sur un chemin composé de 3 citrouilles ?
2) Si on cherche le nombre de dalles lumineuses pour un chemin qui compte 4 citrouilles, as-tu besoin de dessiner ce chemin pour trouver ce nombre ? Explique comment tu procèdes.
3) Peux-tu trouver une stratégie pour calculer le nombre de dalles lumineuses pour un chemin composé de 17 citrouilles sans avoir à les compter une à une ?

Les dalles marrons

4) Quel est le nombre de dalles marrons pour un chemin composé de 3 citrouilles ?
5) Si on cherche le nombre de dalles marrons pour un chemin qui compte 4 citrouilles, as-tu besoin de dessiner ce chemin pour trouver ce nombre ? Explique comment tu procèdes.
6) Peux-tu trouver une stratégie pour calculer le nombre de dalles marrons pour un chemin composé de 17 citrouilles sans avoir les compter une à une ?

Page 3 (Travail en équipe)

7) En équipe, discutez des stratégies que vous avez trouvées précédemment pour calculer le nombre de dalles lumineuses et de dalles marrons nécessaires. Procédez-vous tous de la même façon ? Trouvez au moins 2 stratégies pour calculer à la fois le nombre de dalles lumineuses et le nombre de dalles marrons pour un chemin de 17 citrouilles.
8) Une fois que vous avez écrit les différentes stratégies et que vous avez décidé qu'elles sont correctes, utilisez chacune de ces stratégies pour calculer le nombre de dalles lumineuses et de dalles marrons nécessaires pour un chemin composé de 21 citrouilles et pour un chemin composé de 54 citrouilles.
9) L'application GeoGebra vous donne le nombre de dalles lumineuses et de dalles marrons pour n'importe quel chemin. Vous pouvez l'utiliser pour vérifier votre travail réalisé en 8.
10) Écrivez des messages en mots au directeur qui vont lui permettre de calculer le nombre de dalles lumineuses et de dalles marrons nécessaires pour n'importe quelle longueur de chemin et sans avoir à les compter une à une.
11) Les messages sont longs à lire. Le directeur est pressé, il souhaite que tu raccourcisses les messages en indiquant les opérations à faire pour que ça rentre dans un message texte. Écris ces messages simplifiés.



Page 4 Suite- Discussion en grand groupe animée par l'enseignante

Discussion de ce qui a été fait et recherche d'un consensus basé sur l'argumentation et la validation. Il sera demandé aux élèves d'essayer de comprendre les stratégies de leurs compagnons. L'enseignant écrit au tableau les différentes stratégies ressorties avec le visuel correspondant. Commencer si possible par les messages qui sont erronés pour que les élèves les valident en grand groupe. Toutes les productions des élèves sont collectées.

Page 5 (Travail individuel, autoréflexion)

Un nouveau questionnaire est utilisé par chaque élève pour travailler à la maison. Il s'agit de reconstruire les résultats qui permettent de résoudre la situation.

Ajouter la question : si le directeur veut calculer le total de dalles pour chaque figure, peux-tu calculer sans compter le nombre total de dalles et ce, pour n'importe quelle longueur de chemin ?

Page 6 (Processus d'institutionnalisation mené par l'enseignante)

L'enseignant effectue une analyse des productions des élèves sous l'angle de l'évolution des représentations spontanées ainsi que des possibles processus algébriques. Il présente aux élèves le processus algébrique en tant que processus de généralisation basé sur les processus numériques des élèves en construisant une expression algébrique qui permet le calcul demandé.

Tableau 4 *– Situation du jardin des citrouilles*

V. DISCUSSION

Une expérimentation a été menée dans le cadre d'un projet Québec-Mexique. Dix élèves de 6e année du primaire au Mexique classés en difficultés d'apprentissage (dans ce pays, l'école primaire s'étale sur 6 ans, les enfants ont 6 ans en rentrant en première année et ont 11 ans à la fin du primaire) ont résolu 5 situations. Un IPad leur a été distribué dans lequel ils ont pu vérifier les stratégies qu'ils ont construites (voir tableau 2, la page 3 de la situation). Nous pouvons partager à ce stade quelques résultats préliminaires :

- Les situations déclenchent chez les élèves des processus de généralisation comme nous l'avons prévu lors de l'*analyse a priori*.

- Le travail en équipe sous une méthodologie d'enseignement comme ACODESA semble donner de bons résultats pour promouvoir une réflexion approfondie de l'activité mathématique chez les élèves.
- L'utilisation de la technologie (IPad dans notre cas, avec les applets faits avec GeoGebra), semble jouer un rôle important, comme un moyen de contrôle numérique pour les prédictions faites par les élèves.

Nous pouvons souligner que les élèves utilisent différentes symbolisations pour répondre à la question « Les messages sont longs à lire. Le directeur est pressé, il souhaite que tu raccourcisses les messages en indiquant les opérations à faire pour que ça rentre dans un message texte. Écris ces messages simplifiés ». Au départ, les élèves sont amenés à écrire des messages en mots. La consigne qui leur demande d'écrire un message plus court (qui peut être justifié par la nécessité d'écrire un texto), amène les élèves à simplifier leur message en utilisant une symbolisation parlante pour eux. Nous avons ainsi remarqué une panoplie de différentes symbolisations utilisées par les élèves pour représenter leur générateur : un trait, un petit carré, un point d'interrogation, des lettres qui sont reliées en général avec la première lettre du générateur (exemple « t » pour désigner le nombre de *tables*), des dessins,... La situation du jardin et des citrouilles (voir figure 3) a fait émergé le recours à deux générateurs : le dessin d'un squelette qui permet de trouver le nombre de dalles vertes (désigné par « verdes » et « v »). Ces deux générateurs vont permettre de trouver le nombre de dalles marrons (désigné par m).

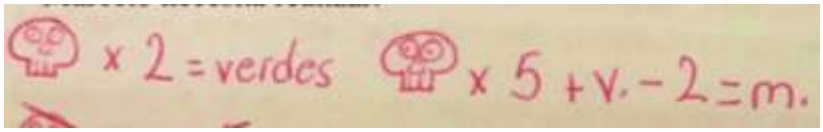


Figure 3 *– Situation du jardin et des citrouilles- Production d'un élève*

Ces situations présentent une richesse pour le développement de la pensée arithmético-algébrique.

RÉFÉRENCES

Artigue M. (2002) L'intégration de calculatrices symboliques à l'enseignement secondaire : les leçons de quelques ingénieries didactiques. In D. Guin et L. Trouche (Eds), *Calculatrices symboliques transformer un outil en un instrument du travail mathématique : un problème didactique* (p. 277-349), Grenoble : La Pensée Sauvage.

Brousseau G. (1998) Théorie des Situations Didactiques. Grenoble, La Pensée Sauvage.

Carraher D. W., Schliemann A. D., Brizuela B. M. et Earnest D. (2006) Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(2), 87-115.

Denis C. (1997) Une introduction à l'algèbre en secondaire 3 généralisation et construction de formules. Mémoire de maîtrise. Université du Québec à Montréal, Montréal, Québec.

Elbers E. (2003) Classroom interaction as reflextion: Learning and teaching in a community of inquiry. *Educational Studies in Mathematics*, 54, 77-99.

Filloy E. et Rojano T. (1989) Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics*, 9(2), 19-26.Glaeser (1999).

Grenier D. et Payan C. (2003) Situations de recherche en « classe », essai de caractérisation et proposition de modélisation. *Les cahiers du Laboratoire Leibniz, 92*.

Hitt F. (2007) Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d'une méthode d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'auto-réflexion. In M. Baron, D. Guin et L. Trouche (Éds.), *Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage. Conception et usages, regards croisés* (pp. 65-88). Paris : Hermès.

Hitt F. et González-Martín A.S. (2015) Covariation between variables in a modelling process: The ACODESA (Collaborative learning, Scientific debate and Self-reflexion) method. *Educational Studies in Mathematics*, *88*(2), 201-219.

Hitt F., Saboya M. et Cortés C. (2016) Arithmetic-algebraic work space to promote free transit between the arithmetic and algebraic thinking: triangular numbers. *ZDM Mathematics Education*. Dordretch: Springer. Hitt F., Saboya M. et Cortes C. (2017)

Hitt F. et Quiroz S. (en préparation) Evolution of a theoretical framework on activity theory, mathematical modeling and the role of non-institutional representations in the construction of knowledge. UQAM.

Kaput J. (1998) Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by 'algebrafying' the K-12 Curriculum. In *The nature and role of algebra in the K-14 curriculum* (pp. 25–26). Washington: NCTM and the Mathematical Sciences Education Board, National Research Council.

Kaput J. (2000) Transforming Algebra from an Engine of Inequity to an Engine of Mathematical Power By "Algebrafying" the K-12 Curriculum. Paper from National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science, Dartmouth, MA. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 441 664).

Kieran C. (2007) Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In F. K. Lester, Jr., (Ed.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 707-762). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Kuzniak A. (2011) L'espace de travail mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, Vol. 16, pp. 9-24.

Legrand M. (1993) Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse. *Repères*, no. 10, 123-159, janvier 1993.

Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport (2005) Cadre théorique. Curriculum de la formation générale de base. *Apprendre tout au long de la vie*.

Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport (2007) Programme de Formation, Deuxième Cycle du Secondaire.
http://www1.mels.gouv.qc.ca/sections/programmeFormation/secondaire2/index.asp?page=math. Acceced Sept 2015.

Radford L. (2011) Grade 2 students' non – symbolic algebraic thinking. In J. Cai & E. Knuth (eds.), *Early Algebrization, Advances in Mathematics Education* (pp. 303-322). Dordrecht: Kluwer.

Saboya M. (2010) *Élaboration et analyse d'une intervention didactique co-construite entre chercheur et enseignant, visant le développement d'un contrôle sur l'activité mathématique chez les élèves du secondaire*. Thèse de doctorat non publiée, Université du Québec à Montréal.

Saboya M., Bednarz N. et Hitt F. (2015) Le contrôle en algèbre: analyse de ses manifestations chez les élèves, éclairage sur sa conceptualisation. La résolution de problèmes. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. Vol. 20, 61-100.

Schliemann A., Carraher D. et Brizuela B. (2012) Algebra in elementary school. *Recherche en Didactique des Mathématiques*. Special issue. 107-122.

Vergnaud, G. (1988). Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algèbre. En: C. Laborde (Ed.) *Actes du Premier Colloque Franco-Allemand de Didactique des Mathématiques et de l'informatique*, (pp. 189-199), Grenoble: La Pensée Sauvage.

Verschaffel L. et De Corte E. (1996) Number and arithmetic. In A. J. Bishop et al. (Eds.), *International handbook of mathematical education* (p. 99-137). Dordretch: Kluwer Academic Publishers.

von Glasersfeld E. (2004) Questions et réponses au sujet du constructivisme radical. In P. Jonnaert et Masciotra D. (Eds.), *Constructivisme choix contemporains. Hommage à Ernst von Glasersfeld* (pp. 291-323). Presses de l'Université du Québec.

Zimmermann W. et Cunningham S. (1991) What is Mathematical Visualization ? Dans W. Zimmermann et S. Cunningham (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* (pp. 1-8). *19*, USA : MAA Series.

ANNEXE

CDI

LA LUTTE

Depuis 1896, la lutte est une discipline olympique. Le comité organisateur des Jeux veut que la vente des billets pour assister aux compétitions de lutte permette de recueillir suffisamment d'argent pour couvrir les dépenses liées à leur tenue.

Vous devez déterminer le prix de vente des billets pour assister aux compétitions de lutte.

Les renseignements nécessaires pour vos calculs sont présentés ci-dessous. Les coûts incluent les taxes.

Durée des compétitions

- Il y aura 7 jours de compétitions de lutte.

Les dépenses

Location et décoration du stade et location des panneaux d'affichage

- La location du stade coûte 10 000 $ par jour.
- La décoration du stade coûte 20 000 $ en tout.
- Des panneaux d'affichage doivent être loués pour la durée des compétitions. Ces panneaux indiqueront le classement des lutteurs ainsi que l'horaire des compétitions de la journée. La location de ces panneaux coûte 12 000 $ par jour.

Salaire des employés

- Chaque jour, 150 employés travaillent à la réalisation des compétitions de lutte. Le diagramme et le tableau suivants montrent la répartition de ces employés et leur salaire selon leur domaine de travail.

RÉPARTITION DES 150 EMPLOYÉS SELON LEUR DOMAINE DE TRAVAIL



SALAIRE DES EMPLOYÉS SELON LEUR DOMAINE DE TRAVAIL

Domaine de travail	Salaire ($ par jour)
Entretien	180
Guichet et sécurité	150
Officiels	600

Aménagement des plateformes

- À l'intérieur du stade, 3 aires de combat isométriques seront aménagées. Chaque aire de combat sera constituée d'une plateforme sur laquelle un tapis de lutte sera installé. L'illustration de la page 4 montre les aires de combat.
- Chaque plateforme est un prisme droit à base octogonale régulière. Le périmètre de la base est de 85,76 m. L'apothème de la base mesure 12,94 m. Le coût d'une plateforme est proportionnel à l'aire de sa base. La table de valeurs suivante présente l'aire de la base et le coût de deux plateformes de ce genre.

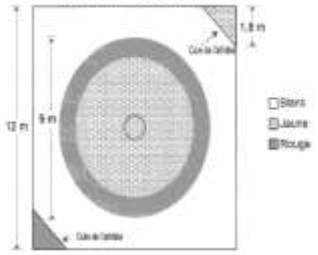
COÛT D'UNE PLATEFORME SELON L'AIRE DE SA BASE

Aire de la base	Coût de la plateforme
80 m^2	2 000 $
265 m^2	6 625 $

Achat des tapis

- On doit acheter 4 tapis de lutte : un pour chaque plateforme et un tapis supplémentaire en cas de bris.
- Le coût d'un tapis dépend de l'aire et de la couleur de ses différentes sections. Le coût de la section blanche est de 70 $ par m^2. Le coût des sections jaunes et rouges est de 74 $ par m^2.
- Le dessus de chaque tapis a la forme d'un carré dont chaque côté mesure 12 m.
- Les combats ont lieu dans une zone circulaire de 9 m de diamètre située au centre du tapis.
- Chaque athlète a un espace dans un coin du tapis. Cet espace a la forme d'un triangle rectangle isocèle dont les côtés formant l'angle droit mesurent 1,8 m.

DESSUS D'UN TAPIS DE LUTTE



Les revenus

- Il y a 2 000 sièges dans ce stade. Ces sièges sont répartis dans trois catégories : A, B et C.
  - Dans la catégorie B, il y a 600 sièges de plus que dans la catégorie A.
  - Le nombre de sièges de la catégorie C est le double de celui de la catégorie A.
- Pour chaque journée de compétition, un billet est mis en vente pour chaque siège.
- On prévoit que seulement les $\frac{3}{5}$ des billets mis en vente pour chaque catégorie seront vendus.
- Le prix minimum d'un billet est de 20 $.
- Le prix d'un billet de catégorie B doit être d'au moins 15 $ de plus que celui d'un billet de catégorie C.
- Le prix d'un billet de catégorie B doit être égal à la moitié de celui d'un billet de catégorie A.
- Le revenu provenant de la vente des billets ne doit pas représenter plus de 120 % des dépenses.

Vous devez déterminer le prix de vente des billets, sans les taxes, pour assister aux compétitions de lutte en tenant compte des différentes contraintes.

EST … M
ENSEIGNEMENT DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES … ET DES MATHEMATIQUES

SOUCHARD[*] Laurent

Résumé – L'enseignement des sciences et technologie en début de secondaire en France est maintenant conçu de façon globale en continuité avec la fin de l'enseignement primaire en intégrant les sciences physiques, les sciences de la vie et de la terre et la technologie. Une équipe d'un collège de Mayotte a intégré les mathématiques à ces trois disciplines et c'est le même enseignant qui enseigne toutes les sciences en classe de sixième. Une innovation majeure pour cette équipe d'enseignants scientifiques.

Mots-clefs : Interdisciplinarité, sciences, mathématiques, technologie, institution.

Abstract – The teaching of Sciences and Technology at the beginning of secondary education in France is now conceived in a global way in continuity with the end of primary education by integrating the physical sciences, the sciences of life and earth and technology. A team from a middle school in Mayotte has integrated mathematics into these three disciplines and it is the same teacher who teaches all sciences in this first class of secondary school. A major innovation for this team of science teachers.

Keywords: Interdisciplinarity, sciences, mathematics, technology, institution.

I. INTRODUCTION

La mise en place des cycles dans l'enseignement primaire et secondaire en France a bouleversé, sur le papier, l'enseignement des sciences au début du collège. La première classe du secondaire, la classe de sixième pour les enfants de 11 ou 12 ans, est maintenant la dernière année du cycle 3 de l'enseignement primaire et secondaire. Les deux premières années de ce cycle se déroulent donc dans le cadre de l'enseignement primaire. Le programme pour ces trois années est donc conçu à cheval sur l'enseignement primaire et l'enseignement secondaire. Ces référentiels exigent maintenant que ce soient les compétences des élèves qui soient évaluées au secondaire comme l'institution demande de le faire au primaire depuis plus de dix ans. Cette nécessité de prendre en compte la maitrise des compétences, scientifiques notamment, permet de remettre profondément en cause l'entrée exclusivement disciplinaire qui fut pendant longtemps la seule voie possible dans l'enseignement secondaire en France. Les programmes Sciences et technologie du cycle 3 sont découpés en quatre grands thèmes et même si ceux-ci sont assez marqués disciplinairement pour trois d'entre eux, c'est bien la construction des concepts scientifiques qui est mise en avant (B0 n°11, p. 186). Même si le titre de cette partie des référentiels du cycle 3, Sciences et technologie, ne reprend pas l'expression Enseignement intégré des Sciences et technologies, EIST, c'est bien le travail autour de l'interdisciplinarité des matières scientifiques qui a été fait dans de nombreux collèges depuis plus de dix ans qui en a inspiré la rédaction.

[1*] Vice rectorat de Mayotte - laurent.souchard@ac-mayotte.fr, laurent.souchard@dbmail.com

II. SCIENCES, TECHNOLOGIE ET MATHÉMATIQUES

1. L'EIST depuis 2006

Depuis 2006, de nombreux établissements scolaires français se sont lancés dans l'expérimentation de l'EIST avec, pour la plupart d'entre eux, des retours tout à fait positifs comme le précise l'inspection générale :

> À bien des égards, l'EIST est un succès (Perrot et al., 2009, p. 64)

La France se place dans un mouvement plus global que décrivent Coquidé, Fortin et Lasson dans un article présenté à l'Université de Genève en septembre 2010, lors du congrès de L'Actualité de la Recherche en Éducation et en Formation (AREF) :

> La recherche sur l'EIST s'inscrit dans une perspective générale de reconfiguration de l'enseignement des sciences, au niveau international. (…) En France, l'EIST interroge les nouvelles compétences professionnelles nécessaires ainsi que le changement de structuration des curricula scientifiques. (Coquidé, Fortin, Lasson, p. 9).

Cet article, le rapport de l'inspection générale française (Perrot et al., 2009) ainsi que le rapport des membres du Centre de Recherche Interdisciplinaire (Taddéi et al., 2017) font le point sur toutes ces expérimentations qui ont débouché en France sur les programmes de l'école et du collège en application depuis septembre 2016 qui permettent de penser l'enseignement des sciences de façon plus globale et plus interdisciplinaire et, donc, moins exclusivement disciplinaire.

2. Les nouveaux programmes de 2015

Les textes des programmes français du primaire et du collège de 2015 en application depuis septembre 2016 ne vont pas aussi loin que ce que l'EIST a pu laisser entrevoir mais l'ouverture est suffisante pour choisir un chemin aussi novateur que possible.

Par exemple, pour les Sciences et Technologie :

> La construction des concepts scientifiques s'appuie sur une démarche, qui exige des observations, des expériences, des mesures, etc. (…) La réalisation de mesures et l'utilisation de certains modèles font appel aux mathématiques et en retour leur donnent des objets de contextualisation. (B0 spécial n°11, p. 188)

Et pour les mathématiques :

> Croisements entre enseignements. L'utilisation des grands nombres entiers et des nombres décimaux permet d'appréhender et d'estimer des mesures de grandeur : approche de la mesure non entière de grandeurs continues, estimation de grandes distances, de populations, de durées, de périodes de l'histoire, de superficies, de prix, de mémoire informatique… Les élèves apprennent progressivement à résoudre des problèmes portant sur des contextes et des données issus des autres disciplines. En effet, les supports de prises d'informations variés (textes, tableaux, graphiques, plans) permettent de travailler avec des données réelles issues de différentes disciplines (histoire et géographie, sciences et technologie, éducation physique et sportive, arts plastiques). De plus, la lecture des données, les échanges oraux pour expliquer les démarches, et la production de réponses sous forme textuelle contribuent à travailler plusieurs composantes de la maitrise de la langue dans le cadre des mathématiques. Enfin, les contextes des situations de proportionnalité à explorer au cours du cycle peuvent être illustrés ou réinvestis dans d'autres disciplines : problèmes d'échelle, de vitesse, de pourcentage (histoire et géographie, éducation physique et sportive, sciences et technologie), problèmes d'agrandissement et de réduction (arts plastiques, sciences). (BO spécial n°11, p. 214)

La réflexion sur la mise en application des programmes de 2016 a conduit une partie de l'équipe pédagogique du collège Zakia Madi de Dembeni à Mayotte[2] à engager une remise en cause rapide des habitudes d'enseignement pour être capable d'appliquer ces référentiels. Comme le dit une des enseignantes de l'équipe « nous devons changer nos méthodes de travail et nous adapter afin de devenir encore plus polyvalent ». Enseigner les sciences et les technologies nécessite une entrée par thème et ne permet plus l'entrée exclusive par la discipline. Les changements de postures sont donc une obligation et une réflexion sur ce que peut être l'interdisciplinarité a été rapidement menée entre les membres de l'équipe. Les mathématiques se sont ajoutées aux trois autres disciplines scientifiques par le fait que deux enseignants de mathématiques du collège souhaitaient se poser le même type de question autour de l'évolution de l'enseignement des sciences en général. D'après les nouveaux textes du cycle 3, il est difficilement envisageable d'enseigner les mathématiques hors des problématiques des autres sciences. Cette expérience nous permet de réfléchir aux besoins en formation des enseignants pour répondre aux nouvelles exigences de l'enseignement de toutes les sciences.

La démarche dans l'élaboration des séances est décrite par un membre de l'équipe :

> Nous suivons une progression commune élaborée autour de trois thèmes : exploration spatiale, vivre sur Terre et vivre à Mayotte. Dans chacun des trois thèmes, il y a différents modules, tous accompagnés de questions scientifiques. Dans cette progression, nous avons inséré les parties du programme des différentes disciplines.
>
> A mon sens, une séance est bien élaborée lorsque toutes les disciplines s'y mélangent sans que l'on s'en rend compte, sans cloisonnement. Ces séances « idéales » sont malheureusement parfois très difficiles à préparer et à mettre en place. (Entretien groupe EISTM, 2017)

Ces difficultés que les enseignants rencontrent peuvent notamment provenir de l'absence de formation de tous ces enseignants à une « interdisciplinarité scolaire » (Lenoir et al., 1998) qui pourraient leur permettre de se libérer de leur vision de l'apprentissage qui provient pour chacun souvent exclusivement de sa propre discipline.

3. L'interdisciplinarité

En parallèle aux enseignements disciplinaires, les enseignants français peuvent mettre en place, depuis quelques années, des projets dans le cadre des EPI, les Enseignements Pratiques Interdisciplinaires. Les enseignants se regroupent par affinités et font réaliser le projet avec leurs élèves et leurs collègues. Les EPI sont en général réalisés par deux ou trois enseignants. Toutes les enseignantes et tous les enseignants n'ont pas profité de formations spécifiques pour comprendre les enjeux et les bases théoriques de l'interdisciplinarité. Nous trouvons par exemple la définition suivante sur un site ministériel :

> L'interdisciplinarité est une démarche dans laquelle deux disciplines vont croiser leurs compétences, leurs savoir-faire, vont interagir pour permettre aux élèves de comprendre une notion, apprendre cette notion ou construire un apprentissage. (Reveyaz, N., 2018)

Les essais de définitions sont nombreux et les propos de Lenoir et Sauvé sont, vingt ans après, toujours d'actualité :

> La plupart des auteurs déplorent un flou conceptuel, voire une confusion chez les acteurs de l'éducation en ce qui concerne le réseau notionnel de l'interdisciplinarité (intra-, multi-, inter-, trans-disciplinarité, intégration, etc.). Il apparaît que cette lacune nuit à la mise en œuvre adéquate de l'interdisciplinarité scolaire et de l'intégration (des matières, des apprentissages, des savoir, etc.) (Lenoir et al., 1998, p.20)

---

[2] Collège Zakia Madi de Dembeni, http://eistm.neowordpress.fr/, Consulté en mai 2018.

Pour les six enseignants du collège qui ont découvert cette année l'enseignement de trois autres disciplines, ces différences et définitions sont loin de leurs problématiques. A plusieurs reprises, nous avons eu l'occasion de décrire cette année 2017/18 comme une année de découverte et de formation, auto-formation et formation entre pairs. Elle doit permettre, nous l'espérons, une prise de conscience de chacun des enseignants de l'équipe des besoins individuels pour être capable de répondre aux exigences de l'institution et de ces nouveaux programmes. Du côté de l'encadrement des enseignants, direction du collège et inspection académique, nous essayons de suivre le conseil de Lenoir et Sauvé :

> Il importe d'aider les enseignants à se forger une véritable identité professionnelle interdisciplinaire, de façon à ce qu'ils ne ressentent pas de divorce entre leur pratique, leur système de référence théorique et ce qu'ils croient que le système attend d'eux. (Lenoir et al., 1998, p.23)

III. LE SUIVI DU PROJET

Le cadre dans lequel nous nous situons et dans lequel nous allons poser les problématiques d'analyse sont celui du travail de thèse de Souchard (2009) inspiré des travaux d'Yves Chevallard (2003) et du concept d'institution héritée des travaux de Mary Douglas (Douglas, 2004).

La question centrale qui nous guide est de décrire les caractéristiques de l'institution classe dans le cadre de l'EISTM.

1. La notion d'institution

Une institution est avant tout un groupement social mais qui peut être relativement réduit. Un groupe classe peut être vu comme une institution mais il faut que ce regroupement social ait les autres caractéristiques suivantes.

La durée dans le temps est une condition nécessaire.

La vérité en nature et en raison sont les aspects qui permettent de décrire une institution par sa nature et sa raison d'être. Une institution doit pouvoir être décrire par sa nature d'une part et par sa raison d'être d'autre part.

La dernière condition, souvent la plus délicate à analyser, est celle de la légitimité. Un groupement social qui existe dans le temps, qui a sa nature et sa raison d'être explicites, doit aussi pouvoir être légitimisée et il faut pour cela trouver une autorité légitimante, une autre institution généralement, même si certaines formes d'auto légitimation sont envisageables.

Dans le modèle de Chevallard, c'est par la mise en concurrence des institutions d'apprentissage accessibles à un apprenant que celui-ci peut réussir à construire son savoir à partir de la façon dont la connaissance est présentée dans chacune d'entre elles. La salle de classe est l'institution d'apprentissage type et incontournable dont il est nécessaire de comprendre au mieux les rouages pour espérer avoir accès à la compréhension de l'apprentissage des élèves. Une classe d'EISTM doit avoir un certain nombre de caractéristiques qu'il est donc nécessaire de découvrir pour savoir comment il est possible d'optimiser la formation des enseignants à la gestion de l'institution salle de classe d'EISTM. Notre projet sur les deux années d'analyses et de constats, en 2017 et 2018, et d'une année supplémentaire de conception de formation, en 2019, doit nous permettre, espérons-nous, d'arriver à découvrir ces caractéristiques.

Le projet a pris du retard en ce début d'année 2018 avec les deux mois de blocage que l'île de Mayotte a connu. Les séances n'ont pas pu être mise en place comme prévu. Nous avons pu cependant analyser une même séance ciblées sciences physiques réalisée par deux

enseignants, un de SVT et un de technologie, en novembre 2017. Nous allons présenter cette analyse, partielle pour l'instant, en indiquant les premières caractéristiques de ces deux institutions particulières :

- AM : la salle de classe enseignement de sciences physiques par un enseignant de SVT ;
- FC : la salle de classe enseignement de sciences physiques par un enseignant de technologie.

2. La séance masse et poids

Nous avons mis en annexe la première partie du texte de la séance ainsi que la visualisation de l'analyse de la séance réalisée avec le logiciel The Observer de chez Noldus. Nous avons construit un protocole d'analyse de la vidéo de la séance centré avant tout sur l'enseignant même si les élèves ont été pris en compte mais surtout dans leur rétroaction avec leur enseignant. Ce protocole comptabilise le temps de parole de l'enseignant, le nombre de question posées par l'enseignant, ses réponses, celles des élèves, les questions des élèves, le comportement de l'enseignant dans la classe, au tableau ou dans la classe, en position frontale ou plus participative. Les deux séances durent 107 et 96 minutes et comportent toutes les deux 30 et 25 minutes de manipulation des élèves pour peser des objets et matériaux avec des balances. Nous ne proposons pas dans cet article une analyse complète de ses séances car nous sommes toujours dans une phase exploratoire. Nous présentons ici un aspect qui nous a interpellé et qui, nous semble-t-il, doit être pris en compte en vue des prochaines formations pour un enseignement interdisciplinaire scolaire.

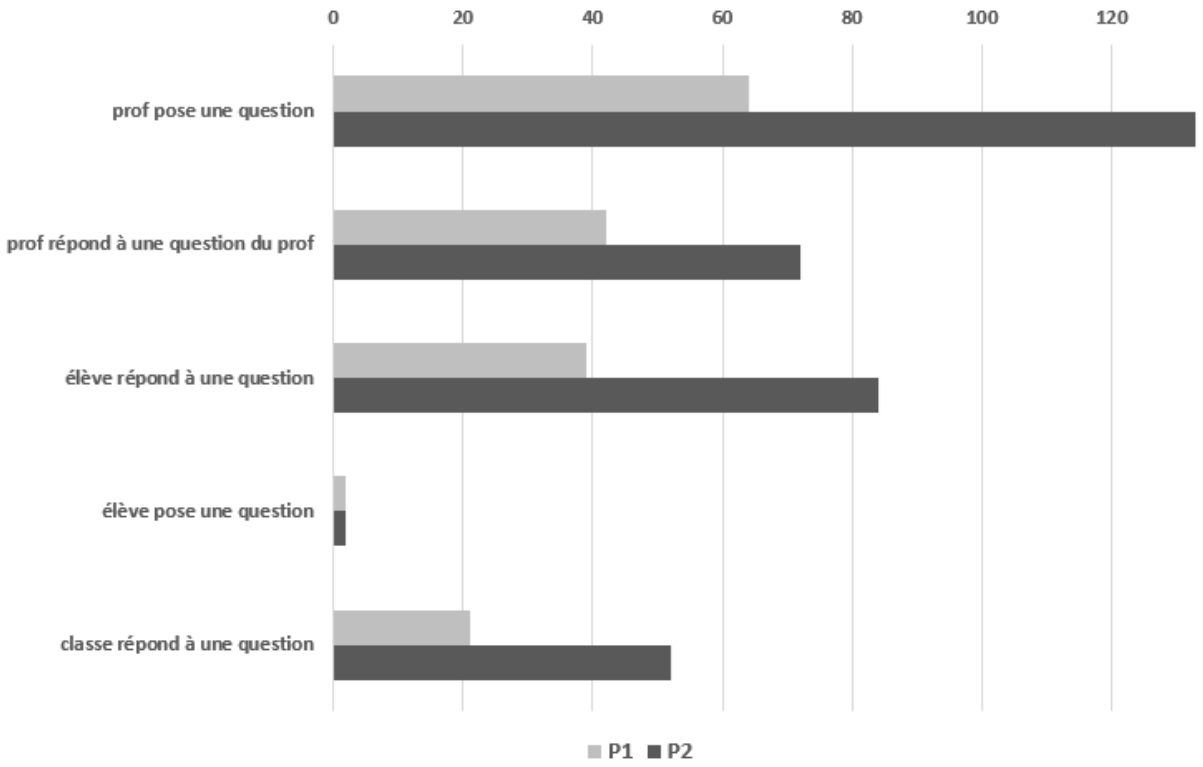


***Figure 1** : Nombre d'interactions profs/élèves, questions/réponses*

L'enseignant P1 pose une question par minute pendant toute la séance et l'enseignant P2 pose un peu plus de deux questions par minute, hors temps de manipulation des élèves. Même si l'enseignant P1 pose deux fois moins de questions que l'enseignant P2, l'absence de question posée par les élèves dans les deux cas, montre une accaparation de la parole par chacun des deux enseignants. Les deux enseignants font en sorte qu'aucune question qu'ils n'auraient pas pu prévoir ne vienne les perturber pour la réalisation de la séance comme ils l'ont souhaité. C'est à peu près ce que que confirme les enseignants lors d'un entretien ou nous leur avons présenté l'analyse de leurs séances. Ils ont mis en avant la nécessité pour eux de laisser le moins de liberté possible aux élèves pour ne pas se sentir trop vite remis en cause dans leur posture traditionnelle d'enseignant scientifique, comme ils en ont l'habitude dans leur discipline personnelle. Avec ce thème centré sur les sciences physiques, l'enseignant de SVT comme l'enseignant de technologie ne sentent pas à l'aise dans la gestion théorique et la présentation des connaissances, la masse et le poids. L'enseignant préfère alors monopoliser la façon dont il est possible d'avoir accès à cette connaissance et se construire son savoir. Même si ces deux enseignants sont capables dans l'environnement ordinaire de leur discipline de laisser chaque élève gérer la construction de son savoir, ils ont vite conscience dans ce cas de ne plus agir du tout de la même façon en proposant une vision extrêmement traditionnelle de l'apprentissage et de l'enseignement. Chacun de ses enseignant s'est construit à partir de « complexes assujettissements à une foule d'institutions » (Chevallard, 2000). Cela signifie que pour évoluer vers un enseignement dans le cadre de l'interdisciplinarité scolaire, il est nécessaire de les aider à prendre conscience au maximum de celles qui leur ont permis de construire leur savoir pour enseigner. Comme le dit à nouveau Yves Chevallard (2000), « toute formation sollicite vite une réforme personnelle. Se former, c'est toujours, peu ou prou, se réformer : la chose n'est pas anodine ». Ce qui signifie que cela commence par un travail sur soi pour comprendre et découvrir les leviers sur lesquels agir pour être capable de se former. Le travail de suivi que le groupe d'enseignants d'EISTM du collège de Dembeni a mis en place et la recherche que nous menons en parallèle devraient permettre à chacun de commencer ce travail d'introspection qui débouchera, nous l'espérons, sur des changements de pratiques profonds sur le moyen terme.

IV. CONCLUSION

Une réunion avec des enseignants de sciences dans un collège où l'enseignement des sciences et technologie en cycle trois a été abordé a rapidement tourné à une forme d'affrontement avec certains enseignants qui ne voulaient pas, semblaient-ils, sortir de leur discipline. L'enseignement des sciences et technologie dans ce collège est organisé par trimestre avec un enseignant de chaque discipline tour à tour, sciences physiques, technologie et sciences de la vie et de la terre. A y regarder de plus prêt et après quelques échanges avec un enseignant leader de la contestation, nous nous sommes aperçus que le problème venait plus d'une véritable angoisse à devoir entrer dans une démarche interdisciplinaire sans en comprendre les tenants et aboutissants, sans aucune formation ni références théoriques. L'équipe de Dembeni a eu une attitude plus novatrice en allant, par principe, vers l'inconnu et en essayant de comprendre tous ensemble les enjeux de cette démarche interdisciplinaire scolaire pour l'enseignement des sciences, de la technologie et des mathématiques en fin de cycle 3. Mais cette attitude n'a pas levé les questionnements, ni fait disparaître les absences de formation à l'interdisciplinarité scolaire. Cette première année doit nous permettre d'envisager des formations spécifiques dès le début de l'année scolaire prochaine avec les équipes qui vont s'engager elles aussi dans l'EISTM et qui concerne trois ou quatre autres collèges de Mayotte. Nous savons déjà que nous allons devoir faire un travail plus spécifique autour de la façon dont chaque enseignant doit être capable d'enseigner hors sa discipline de

formation. L'enseignement et l'apprentissage par projet va être valorisé et organisé en mettant en commun le travail de chaque équipe. Car, nous le savons, ce mode de travail demande beaucoup plus de concertation et de réflexion pour que chaque élève puisse construire les différents concepts scientifiques de ce début d'enseignement secondaire. L'enseignement des mathématiques va être au cœur de ce travail pour la deuxième année pour comprendre la façon dont celui-ci peut prendre sa place avec les trois autres disciplines scientifiques.

Entre EMF 2018 et ce jour, le nouveau baccalauréat français vient de voir le jour. Les élèves français vont commencer à le préparer dès la prochaine rentrée scolaire en 2019, notamment en classe de première. L'enseignement scientifique est un nouvel enseignement pour tous les élèves de la filière générale qui va dans le sens de cette vision globale de l'enseignement des sciences au début du collège et en cycle 3. Cet enseignement commun et obligatoire pour tous sort totalement de l'enseignement classique des matières scientifiques à ce niveau du lycée où le cloisonnement était totalement hermétique. Les sciences physiques, les sciences de la vie et de la terre mais aussi les mathématiques sont concernées. Il est organisé autour d'un « ensemble d'objectifs thématiques dont les contenus sont largement interdisciplinaires » (Projets de programmes de première générale). Nous entrons même au lycée dans cette nouvelle façon d'aborder les sciences où ce sont avant tout « la culture scientifique » et la « pratique autonome du raisonnement scientifique » qui sont valoriser sans avoir à se concentrer avant tout sur la présentation des cadres théoriques scientifiques. Un véritable changement de paradigme pour l'enseignement scientifique dans le lycée général français.

RÉFÉRENCES

BO spécial n°11 du 26 novembre 2015, Programmes pour les cycles 2, 3, 4, Ministère français de l'éducation nationale, Cycle 3, Sciences et techniques p. 181 – 196. Consulté en 2018 à l'adresse : http://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?pid_bo=33400.

Chevallard Y. (2000). La recherche en didactique et la formation des professeurs problématiques, concepts, problèmes. Actes de la Xe Ecole d'Eté de didactique des mathématiques (Houlgate 18-25 aout 1999), 98-112.

Chevallard Y. (2003) Approche anthropologique du rapport au savoir. Rapport au savoir et didactiques. Fabert. p. 81-104.

Coquidé M., Fortin C., Lasson C. (2010) Quelles reconfigurations curriculaires dans le cadre d'un enseignement intégré de science et de technologie ? Actes du congrès de l'Actualité de la recherche en éducation et en formation (AREF), Université de Genève.

Douglas M. (2004, 1986) Comment pensent les institutions ? La Découverte.

Entretien groupe EISTM, (2017), vidéos 1 et 2, 00:59:10 et 00:41:17 du 07 novembre 2017.

Lenoir Y., Sauvé L. (1998) *Introduction. L'interdisciplinarité et la formation à l'enseignement primaire et secondaire : quelle interdisciplinarité pour quelle formation ?* Revue des sciences de l'éducation n° 241, p. 3-29.

Perrot N., Pietryk G., Rojat D. (2009). L'enseignement intégré de science et technologie (EIST). Rapport IG - n° 2009-043. Inspection générale de l'Education nationale. Rapport à Monsieur le Ministre de l'Éducation nationale. http://cache.media.education.gouv.fr/file/2009/06/0/2009-043_-_IGEN_216060.pdf. Consulté en décembre 2017.

Projets de programme de première générale disponibles sur eduscol.education.fr : http://eduscol.education.fr/cid134825/consultation-sur-les-programmes-seconde-premiere.html.

Reveyaz N., (2018), Une définition de l'interdisciplinarité. Consulté en 2018 à l'adresse : https://www.reseau-canope.fr/notice/une-definition-de-linterdisciplinarite.html

Souchard L. (2009) Les logiciels tuteurs fermes : institutions d'apprentissage et d'enseignement des mathématiques ? le cas du début du secondaire. Education. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2009. <tel-00421836v2>

Taddei F., Becchetti-Bizot C., Houzel G. (2017), Rapport EIST, Vers une société apprenante, Rapport sur la recherche et développement de l'éducation tout au long de la vie, à l'attention de Madame la ministre de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche, Mars 2017. http://cache.media.education.gouv.fr/file/2017/40/3/Rapport_recherche_et_developpement_education_V2_756403.pdf consulté en mars 2018.

The Observer XT 14 (2017), www.noldus.com.

ANNEXES



Sciences

- Exploration spatiale -

Le poids et la masse

A – La masse

Définition : La masse correspond à la **quantité de matière** de quelque chose. Elle s'exprime en g, Kg, tonne…

Quel objet technique utilise-t-on pour mesurer une masse ? ……

Il en existe plusieurs sortes :

…… …… ……

…… …… ……

Mesure les masses des objets suivants, puis de ce que tu veux.

Objet	Moi	Un cartable	Une trousse	……	……	……	……
Masse							

Voici le tableau des unités de masse :

1 Tonne	1 Kg	1 g	1 mg
1 000 Kg	1 000 g	0,001 Kg	0,001 g

Relie la bonne masse au bon objet :

Un élève	x	x	500 millions de Kg
Un moustique	x	x	50 Kg
1 cuillère de sucre	x	x	450 000 millions de tonnes
Un nuage	x	x	1 Kg
Une montagne	x	x	15 mg
La planète Terre	x	x	2,5 tonnes
1 L de lait	x	x	5 g
Une voiture	x	x	6 Millions de milliards de milliards de Kg

Figure 2 : Séance le poids et la masse



Figure 3 : Visualisation de la séance

Liste des membres du groupe EISTM 2017/18 du collège Zakia Madi de Dembeni :

- Franck DEGUEURCE, enseignant technologie, franck.degue@orange.fr ;
- Alexis Moulin, enseignant SVT, alexis.moulin@gmail.com ;
- Marie Lischka, enseignante de mathématiques, Marie.Lischka@ac-mayotte.fr ;
- Ophélie Holleville, enseignante SVT, ophelie.holleville@gmail.com ;
- Cedrick Dellihr, enseignant mathématiques, ceddik.dellihr@wanadoo.fr ;
- Franck Chevallier, enseignant technologie, Franck.Chevalier@ac-mayotte.fr ;
- Christiane Polowykow, principale du collège, christiane.polowykow@ac-mayotte.fr ;
- Laurent Souchard, IA-IPR de mathématiques, laurent.souchard@ac-mayotte.fr.

LA LIGNE DROITE, UN OBJET PLURIDISCIPLINAIRE AU DÉBUT DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE : UNE ANALYSE INSTITUTIONNELLE DES MANUELS

TCHONANG YOUKAP* Patrick - NJOMGANG NGANSOP Judith - MEUKOA CHENKEP Emeline

Résumé - Le présent article porte sur l'introduction de la notion de « droite » dans les manuels de mathématiques au début de l'enseignement secondaire. Les données empiriques analysées dans cet article proviennent de quatre manuels de mathématiques de l'institution classe de sixième (âge des élèves 11 à 12 ans). Les résultats des analyses montrent que les manuels ne prennent pas toujours en compte le rapport entre la géométrie et la physique dans l'organisation des contenus sur les droites. Les problèmes de découverte ne sont pas pertinents pour le développement des connaissances et des compétences dans les manuels.

Mots-clés : Droite, objet géométrie, objet physique, définition.

Abstract - This article focuses on the introduction of the "straight line" concept in mathematics textbooks at the beginning of secondary school. The empirical data analyzed in this article come from four mathematics textbooks of form 1 (student ages 11 to 12 years). The results of analysis show that textbooks do not always take into account the relationship between geometry and physics in their content on straight line organization. Discovery problems are not appropriate for the development of knowledge and skills in textbooks.

Keywords : Right, object geometry, physical object, definition.

I. INTRODUCTION

L'interdisciplinarité fait partie des prescriptions des programmes des classes de sixième et de cinquième au Cameroun. Les activités de reconstruction des définitions par les élèves ne sont pas une recommandation des programmes au Cameroun. On peut donc craindre l'apparition de certains phénomènes dans la conceptualisation des objets étudiés tels que la droite ainsi que les relations entre les droites. La présente recherche vient mettre en lumière les phénomènes liés à l'introduction de la notion de droite dans les manuels de mathématiques, ce qui permettra par ailleurs d'identifier la prise en compte ou non des rapports entre les disciplines où elle intervient.

Des travaux existent en didactique des mathématiques sur le rapport entre les mathématiques et d'autres disciplines. Ils sont de nature épistémologique et/ou didactique (Cissé BA, 2005; Michelsen, 2015). Il ressort des travaux de BA (2005) que les élèves ont de nombreuses difficultés dans l'accomplissement des tâches. Ce qui nécessite la mobilisation conjointe des connaissances mathématiques et physiques. Ces difficultés montrent un réinvestissement inadéquat des connaissances acquises en calcul vectoriel dans des situations physiques. Cela est dû, d'après lui, au cloisonnement disciplinaire. Des travaux en didactique des mathématiques sur la définition des objets mathématiques caractérisent la définition en mathématiques, mettent en lumière les aspects cognitifs et didactiques de la définition d'un objet mathématique (De Villiers, 1998; Freudenthal, 2001; Shir & Zaslavsky, 2002). Toujours en rapport avec notre problématique, certains auteurs se sont intéressés à la problématique du dessin et de la figure ainsi qu'à leur rôle dans la résolution des problèmes, il en découle que les élèves éprouvent des difficultés à interpréter les dessins (Chaachoua, 2010; Gobert, 2007; Laborde, 1994). Le cloisonnement des champs de la physique et de la géométrie peut être

* Université de Yaoundé 1– Cameroun– patricktchonang@yahoo.fr

réduit, car la géométrie permet la modélisation des objets physiques ; la physique quant à elle inspire la géométrie. Il est opportun pour nous de questionner cette relation pour permettre une meilleure approche de la notion de droite au secondaire.

La question à laquelle nous voulons répondre dans cette étude est la suivante : comment le rapport entre la géométrie et la physique est-il pris en compte dans l'introduction de la ligne droite dans les manuels au début du secondaire ? Nous comptons à travers cet objectif déterminer la façon dont les manuels introduisent les objets géométriques en relation avec la droite, les éléments pouvant faire référence aux objets du monde sensible dans le traitement des contenus. Nous faisons l'hypothèse suivante : la prise en compte dans la conception des problèmes de découvertes des apports de la physique pourrait favoriser la construction de la notion de droite par les élèves de telle sorte qu'elle a un sens pour ces derniers.

Pour répondre à notre objectif, nous présentons dans les lignes qui suivent, quelques aspects épistémologiques de la ligne droite en mathématiques et en physique. Nous présentons le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) constituée des différents modèles qui nous aident à décrire et expliquer les phénomènes(Castela, 2008; Chaachoua, 2010; Chevallard, 1994). Nous exposons ensuite la méthodologie utilisée pour la collecte et l'analyse des données. Nous procèderons enfin aux analyses des manuels de notre corpus.

II. LA LIGNE DROITE : UN OBJET GÉOMÉTRIQUE ET UN OBJET DE LA PHYSIQUE

Michelsen dans ses travaux (Michelsen, 2015) montre la pertinence d'une approche interdisciplinaire dans l'apprentissage en mathématiques et en physique. Nous examinons dans cette partie quelques aspects épistémologiques de la ligne droite en mathématique et en physique.

1. La ligne droite en géométrie

La droite en géométrie est avant tout une figure. Les figures sont considérées par Laborde comme des domaines de réalité. Il s'agit, selon elle, des objets qui permettent de résoudre les problèmes que rencontrent les individus au quotidien (Laborde, 1994). De façon générale, la figure est représentée par un dessin qui offre une certaine lecture et une interprétation de cette figure. La notion de droite fait partie des objets géométriques définis par Euclide. Il s'agit d'une définition ontologique, dans la mesure où elle est censée décrire un objet qui existe au préalable. Elle est formulée ainsi *: « Une ligne droite est celle qui est placée de manière égale par rapport aux points qui sont sur elles »*[1]. Notons que chez Euclide, la ligne droite est un objet limité à ces bornes, et par conséquent, elle peut être entièrement représentée par un dessin sur un support graphique. Ce qui n'est plus le cas de nos jours. En effet, le dessin d'une droite sur un support est partiel. Tous les attributs de la droite ne peuvent pas être lus sur son dessin, par exemple le caractère illimité à ses extrémités. Plus tard, Legendre (Legendre, 1799-1844) définit la notion de ligne droite de la manière suivante : « *le plus court chemin d'un point à l'autre*. » Il faudrait pour cette définition que la notion de chemin soit connue d'avance par les élèves, ce qui de notre avis est le cas. Les élèves qui arrivent au collège ont au préalable une connaissance spéciale acquise dans les classes antérieures voire à la maison et nous pensons que la connaissance relative au chemin en fait partie. Toutefois, la définition

[1] *Euclide, Les éléments, Volume 1, p.154*

telle que proposée par Legendre pose le même problème que la définition euclidienne, à savoir l'absence de la propriété « être illimitée de part et d'autre ». Une telle définition de nos jours correspond à celle d'un segment. Définir une droite de la sorte pourrait induire un obstacle épistémologique qui serait dû à la difficulté de passer du dessin à la figure. Parmi les définitions qui ont émergé au cours du développement de la géométrie, on peut citer celle de Leibniz qui pense qu'il suffit de deux points pour parler d'une droite **: «** *la ligne droite est la ligne qui est déterminée par deux points donnés sans autre condition que celle-ci »***.** Bien que cette définition nous semble ambigüe, l'utilisation de l'objet point comme terme dans cette définition nous semble pertinente, cet objet est familier des élèves. Selon Leibniz, pour construire la notion de droite il faut considérer deux de ces points. Ce qui pour nous semble pertinent pour construire de façon empirique la définition de la ligne droite. Pour notre étude, nous nous limitons à la ligne droite dans le cadre de la géométrie élémentaire.

La ligne droite fait partie de la géométrie naturelle, et de la physique. Nous nous proposons à présent d'examiner ce que représente la ligne droite en physique.

2. La ligne droite : un objet de la physique

La ligne droite est un objet que l'on rencontre dans plusieurs domaines de la physique au secondaire. Parmi les contenus de la physique où elle intervient, nous avons l'optique géométrique, la mécanique classique.

La ligne droite est utilisée en optique pour décrire la trajectoire du rayon lumineux. En effet, la lumière est considérée comme un objet non matériel, elle se déplace et ce déplacement est appelé propagation de la lumière. Cette propagation dépend du milieu dans lequel elle a lieu. Dans un milieu transparent, elle se propage en ligne droite, on dit alors que sa trajectoire est rectiligne. La lumière fait partie des objets de la physique enseignés au début du secondaire. L'élève doit pouvoir découvrir la propagation rectiligne de la lumière.

En mécanique classique, un objet qui se déplace suit une certaine trajectoire. La trajectoire d'un point matériel est l'ensemble des positions successives occupées par ce point au cours du temps. La trajectoire est ici considérée comme domaine de réalité, le modèle qui la représente dépend du référentiel choisi. Lorsque la trajectoire d'un point matériel est une ligne droite, on dit qu'il s'agit d'une trajectoire rectiligne. La trajectoire d'un point peut également être comprise comme la ligne formée par l'ensemble des positions prises par un point au cours de son mouvement. Ainsi, l'un des objets en interrelation avec la ligne droite en physique est le mouvement rectiligne. En physique, l'on dit qu'un système possède un mouvement de translation rectiligne lorsqu'à chaque instant de ce mouvement, l'ensemble de ses points est caractérisé par des vitesses constantes. Si un système possède un mouvement de translation rectiligne alors tous ses points possèdent la même trajectoire.

Nos commentaires : la définition de la droite qui semble pertinente en géométrie naturelle est celle qui s'inspire à la fois de la géométrie euclidienne et de la physique. Un exemple de définition qui peut être reconstruit en salle de classe est la suivante : *« une droite est une ligne illimitée qui contient le plus court chemin entre-deux de ses points quelconques*. » Cette définition respecte les critères d'une définition (Shir & Zaslavsky, 2002). Les notions de chemin et de trajectoire sont beaucoup plus utilisées en physique.

Pour conclure, les observations ci-dessus montrent que la ligne droite est un objet pluridisciplinaire. Par ailleurs, de façon isolée, une discipline ne nous donne qu'une image restreinte d'un objet pluridisciplinaire. C'est une fois réuni c'est-à-dire en s'articulant que des disciplines donnent une vue d'ensemble de l'objet en question. Notre hypothèse est la

suivante : la prise en compte de l'interdisciplinarité, dans l'enseignement du concept de droite pourrait favoriser la construction de la notion de droite par les élèves.

III. CADRE THEORIQUE

Nos analyses des manuels au sujet de l'introduction du concept de droite suivent une approche institutionnelle. Nous souhaitons décrire les choix institutionnels et leur répercussion. Le rapport institutionnel à un objet est perçu par Chevallard (1994) comme l'ensemble des interactions possibles entre l'institution I et l'objet O. Il devrait y avoir une certaine conformité entre le rapport personnel des élèves et le rapport institutionnel à l'objet O. Le modèle de praxéologie est proposé par la théorie pour décrire le rapport institutionnel qui contraint le rapport personnel d'un sujet à l'objet de savoir (Chaachoua, 2010). Du point de vue de la TAD, toute activité humaine consiste à l'accomplissement d'une tâche « t » d'un certain type « T » au moyen d'une technique τ, justifiée par une technologie θ qui permet en même temps de la penser, voire de la produire. Cette technologie est à son tour justifiable par une théorie Θ. Selon Chevallard (1999), une organisation notée $[T/\tau/\theta/\Theta]$ est mise en œuvre dans toute activité humaine. L'organisation mathématique est dite ponctuelle lorsqu'elle est relative à une seule tâche. Dans le cadre de cette étude, cette organisation mathématique nous semble pertinente. Dans le cadre de la TAD, Castela (Castela, 2008) définit la notion de tâche prescrite à l'élève, il s'agit d'un couple constitué de l'énoncé et du contexte institutionnel de prescription : l'énoncé est une mise en texte du problème mathématique en ajoutant éventuellement des indications ou des questions qui prennent en charge partiellement ou complètement les étapes de la technique attendue. Le contexte institutionnel précise les éléments du contexte dans lequel la tâche est prescrite. Selon Chaachoua (Chaachoua, 2010) le choix d'une technique et sa mise en œuvre par l'élève dépendront des éléments de ce contexte. Toutefois dans une perspective d'un diagnostic automatique, elle propose un modèle qui intègre dans le contexte institutionnel des éléments relatifs à une classe génétique qui correspond au niveau donné. Il s'agit de ce qu'elle nomme une tâche mathématique. C'est un problème mathématique sans aucune indication sur la technique possible ou attendue et avec une formulation qui reste la plus neutre possible vis-à-vis de la technique. Ainsi, pour chaque problème de géométrie, il est de la responsabilité du chercheur de déterminer la tâche mathématique qui lui est associée.

IV. MÉTHODOLOGIE

Notre étude s'inscrit dans une approche qualitative, nous avons opté pour une étude exploratoire afin de répondre à notre premier objectif de recherche. Nous mentionnerons d'abord le corpus sur lequel porte l'étude, puis la collecte et l'analyse des données.

Les données proviennent de quelques manuels de mathématiques recommandés par le Ministère des Enseignements secondaires au Cameroun. Ce sont des manuels que l'on retrouve dans chaque région du Cameroun. Il s'agit des manuels les plus utilisés sur le territoire national.

Manuels	Titre	Auteurs	Éditeurs
M1	Majors en Mathématiques 6e (B)	Mvomo et al.	ASVA Education (2016)
M2	Excellence en Mathématiques 6e	Elandi et al.	ACIPEC (2016)
M3	CIAM Mathématiques 6e (B)	Touré et al.	EDICEF (2016)
M4	Cargo collection de Mathématiques 6e	Une équipe d'enseignants	Hachette International (2016)

Figure 1 *- corpus de manuel utilisé pour les analyses*

Les manuels scolaires ainsi présentés sont organisés en chapitres. Les chapitres de chaque manuel sont regroupés en deux parties : une partie intitulée « Activités numériques » et une partie intitulée « Activités géométriques ». Les chapitres des manuels sont organisés en deux rubriques : une première rubrique où l'on retrouve les différentes sections avec des thèmes précis et une seconde rubrique où l'on retrouve les exercices destinés aux élèves. Une section du chapitre peut être une leçon ou un ensemble de sous-sections qui sont des leçons. Les leçons sont pour la plupart, organisées en blocs : un bloc destiné aux « Activités découvertes » ; un bloc destiné aux « Énoncés institutionnalisés » et illustrations (définition, théorème, méthode, règles) et enfin un bloc destiné aux « Exercices d'application ». Les documents qui font partie de notre échantillon ont tous des leçons qui portent sur les droites du plan. Les apprenants sont susceptibles d'y avoir accès directement en salle de classe ou en dehors de la salle de classe. Notre étude porte exclusivement sur les leçons du chapitre intitulé : les droites du plan.

La collecte des données a fait intervenir une grille d'analyse des documents. Chacun des documents de notre corpus possède un chapitre intitulé : « Droites du plan ». Pour des raisons de nombre de pages, nous présenterons dans cette étude une grille à quatre sous parties : — les problèmes proposés dans les blocs ''Activités de découverte''. Il s'agit ici de déterminer les types de problèmes proposés dans les manuels pour découvrir les droites et les relations entre les droites ; — les modèles associés aux problèmes dans les blocs « Activités de découverte » : Il sera question dans cette partie de déterminer les fonctions des dessins dans les problèmes, les types de dessins que proposent les auteurs des manuels (Elia & Philippou, 2004); — les énoncés institutionnalisés dans les blocs « 'Institutionnalisation »' des différents manuels. Il s'agit de décrire la manière dont les énoncés sont formulés, l'adéquation des énoncés des définitions avec une définition formelle en mathématiques. On pourra également vérifier la congruence entre les schémas pour traduire les énoncés dans le registre graphique et ces mêmes énoncés.

Les données recueillies ont été décrites, puis interprétées à l'aide des travaux antérieurs et des modèles proposés comme cadre théorique.

V. RÉSULTATS

Dans les lignes qui suivent, nous rapportons une partie des résultats obtenus en raison de la restriction du nombre de pages.

1. Les problèmes présents dans les blocs « Activités de découverte »

L'objectif de cette partie est d'identifier le type de problèmes proposés par les auteurs des manuels pour découvrir les objets géométriques et les relations entre ces objets.

Les problèmes présents dans les blocs « Activités de découverte » des chapitres dans la plupart des manuels sont des tâches prescrites. En effet, les formulations des énoncés des problèmes ne sont pas neutres. Ces problèmes sont conçus dans une intention didactique, les indications sont fournies par l'énoncé du problème. Les indications se présentent sous les formes suivantes : les tâches intermédiaires qui orientent sur la technique à utiliser ; les éléments du contexte sont préalablement rappelés dans le préambule de la tâche et des dessins qui correspondent aux résultats de la tâche sont également associés aux problèmes dans certains cas. Le problème ci-dessous est un exemple de problème où le dessin qui représente le résultat de la tâche est associé à l'énoncé.

Marque deux points A et B distincts sur une page vierge de ton cahier.

Trace sur toute la page une droite qui passe entre les deux points.



Figure 2 *- Problème du manuel Excellence, page 31*

Dans ce problème, le dessin est donné en même temps que l'énoncé du problème. Pour exécuter cette tâche, l'élève pourra tout simplement reproduire le dessin associé à l'énoncé. Tout en étant prudent, l'on pourrait penser que les auteurs des manuels s'intéressent au résultat du problème et restent dans une approche behavioriste.

Les types de tâche que l'on retrouve dans les problèmes de chaque manuel appartiennent pour la plupart aux genres de tâche : construire, communiquer et interpréter. Les techniques de résolution des tâches font appel : à l'expérience par le biais de l'utilisation des instruments de géométrie ; à l'intuition par le biais de la perception visuelle. Les technologies qui justifient les techniques permettant de résoudre ces tâches sont supposées connues des élèves, car elles ont fait l'objet d'un apprentissage dans les classes antérieures.

Les manuels ne proposent pas toujours les problèmes décrivant des situations proches des réalités. L'unique manuel qui s'inspire des situations proches de la réalité est le manuel Cargo. Certains de ces problèmes font intervenir des objets tels que le chemin, la corde et la route qui sont des objets de la physique ou encore des objets matériels. Les problèmes des activités de découverte sont pour certains des problèmes qui conduisent à la formulation de la conjecture d'un énoncé. L'on observe ce genre de problèmes dans le manuel CIAM.

Pour terminer, nous notons l'absence dans les manuels des types de tâche conduisant à la reconstruction de la définition des objets géométriques et des relations entre ces objets.

Nos commentaires : le fait de proposer uniquement les tâches prescrites dans les manuels pourrait transformer les élèves en des automates, n'ayant à exécuter que des tâches intermédiaires dont ils ne saisissent pas la logique. Ce type de problème ne laisse pas à notre avis une part assez grande à l'initiative ; l'inventivité où la maitrise de la complexité. Les auteurs des manuels prennent en compte les modes de pensée de la géométrie naturelle, cela correspond bien à cette institution. Nous pouvons également relever le fait que les interrelations entre la géométrie et la physique ne sont pas suffisamment exploitées dans les problèmes. L'absence des tâches relatives à la reconstruction de la définition dans les différents manuels laisse supposer que les auteurs des manuels sont dans une approche axiomatique des définitions, cela pourrait avoir des conséquences sur les concepts images des élèves.

2. Les modèles graphiques présents dans les blocs « Activités »

Les modèles sont utilisés pour représenter les figures géométriques et les objets matériels dans les manuels.

L'exploration des modèles graphiques associés aux problèmes dans les blocs « Activités de découverte » a permis d'identifier les fonctions des différents dessins ainsi que leur type. Nous avons identifié les dessins ayant une fonction décorative : ce sont des dessins qui en dehors de leur nature ne fournissent aucune autre information en relation avec l'énoncé du problème ; on observe également des dessins ayant une fonction représentative : ces dessins sont sémantiquement congruents aux hypothèses du problème ; des dessins ayant une fonction informative : l'essentiel du problème est basé sur le dessin.

Enfin, les dessins ayant une fonction organisatrice : ces dessins orientent sur la résolution des problèmes auxquels ils sont associés. L'on a ainsi identifié des dessins qui traduisent des instructions successives dans la construction d'une configuration, ainsi que des dessins qui représentent le résultat final d'une tâche à exécuter.

Les dessins identifiés sont les dessins représentés avec des instruments de géométrie, qui respectent les propriétés qui déterminent la figure sans aucune mesure indiquée. La plupart de ces dessins sont des dessins qui représentent des objets géométriques. Seul le manuel Cargo propose des images représentant des objets physiques.

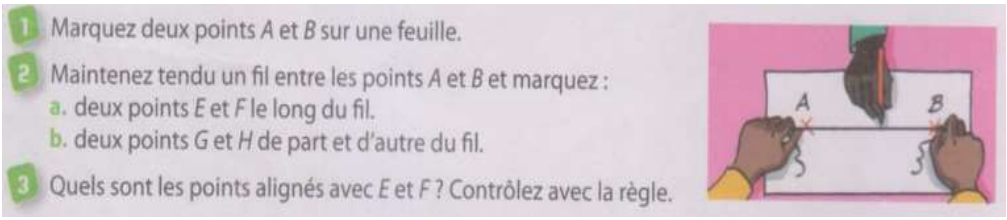


Figure 3 *- Problème du manuel Cargo, page 8*

Nos commentaires : la présence des dessins ayant une fonction organisatrice au côté des problèmes dans les blocs « Activités de découverte » constitue une aide dans la résolution du problème. Une tentative d'explication à cette approche pourrait provenir du fait que les auteurs ont du mal à se défaire de l'approche behavioriste. L'exploration des manuels permet également de remarquer que la plupart des manuels n'utilisent pas les dessins représentant des objets matériels dans les problèmes. Cela ne favorise pas le rapprochement entre la géométrie et la physique dans l'institution classe de sixième.

3. Les énoncés institutionnalisés et les illustrations

Les énoncés institutionnalisés dans les blocs institutionnalisations sont pour la plupart, les définitions des propriétés (théorèmes) des règles et des méthodes.

Nous constatons que les manuels des collections CIAM, Majors, et Excellence ne donnent pas de définition à la notion de droite. Les auteurs de ce manuel préfèrent énumérer les propriétés de la droite plutôt que de tenter d'en donner une définition. Le manuel CIAM ne définit pas la notion de droite perpendiculaire, il procède par une monstration. Les énoncés de définitions ne sont pas précédés des activités de reconstruction de la définition. Elles sont présentées de façon axiomatique. Nous observons que le manuel de la collection Cargo définit tous les objets et les relations présents dans le chapitre qui fait l'objet de notre étude.

D1 : « une droite est une ligne formée de points sans épaisseur et illimitée des deux côtés »
D2 : « deux droites sécantes sont deux droites qui ont un seul point en commun… »
D3 : « trois points sont alignés lorsqu'ils appartiennent à une même droite »
D4 : « deux droites perpendiculaires sont deux droites sécantes qui forment quatre angles droits »
D5 : « deux droites parallèles sont deux droites qui ne sont pas sécantes »

La définition D1 est une définition ambiguë, car l'expression « ligne sans épaisseur » n'a pas été préalablement définie dans le manuel. De plus, cette définition n'est pas correcte, car plusieurs objets du domaine de la géométrie naturelle peuvent satisfaire les propriétés présentes dans cette définition sans pour autant être des droites. Nous pensons que pour une définition acceptable il aurait fallu signifier qu'il s'agit de la plus courte ligne entre deux de ses points quelconques. Les définitions D2 et D3 sont considérées comme des définitions formelles. La définition D4 bien qu'elle satisfasse le critère de hiérarchie(Shir & Zaslavsky, 2002) n'est pas minimale. En effet, il suffit que deux droites se coupent en forment un angle droit pour conclure à la perpendicularité de deux droites. La définition D5 bien qu'elle soit une définition formelle peut induire des obstacles épistémologiques liés au mode de pensés

dans la géométrie axiomatique naturelle. La relation utilisée par les auteurs des manuels CIAM et Majors pour caractériser le parallélisme de deux droites est la perpendicularité à une même droite. Ces définitions sont opératoires, dans la mesure où elle peut servir de technologie justifiant une technique utilisée pour exécuter une tâche.

Les modèles qui illustrent les énoncés sont des dessins accompagnés d'un commentaire. Le dessin peut être considéré ici comme un cas particulier de traduction de l'énoncé en langage graphique. Les commentaires qui sont associés au dessin dans les manuels sont : une description des propriétés lues sur le dessin en langage mixte c'est à dire symbolique et naturelle ; un diagramme de déduction, il permet de montrer le schéma déductif partant des prémisses à la conclusion. Cette approche permet à notre avis de montrer l'opérationnalité de la propriété dans une tâche de construction et dans une tâche de preuve. Certaines de ces modèles sont des schémas indiquant le procédé de vérification les relations de parallélisme et de perpendicularité entre deux droites.

VI. CONCLUSION

Pour répondre à l'objectif de cette étude, nous avons opté pour une démarche exploratoire basée sur l'analyse de quatre manuels de mathématiques de la classe de sixième au Cameroun. Au terme de notre analyse, nous avons observé que les problèmes utilisés pour faire découvrir la ligne droite et les relations entre les droites sont des tâches prescrites qui ne favorisent pas l'esprit d'initiative et d'innovation chez les élèves. La plupart de ces problèmes ne font pas référence aux objets du monde sensible. Les dessins associés aux problèmes dans la plupart des manuels représentent des objets géométriques et non des objets matériels. Les définitions sont proposées de façons axiomatiques ce qui va à l'encontre des recommandations des chercheurs en didactique des mathématiques (De Villiers, 1998; Freudenthal, 2012). La définition de la ligne droite est quasi-absente des manuels de mathématiques, celle qui y est proposée par un des manuels est erronée. À la lumière des observations issues de cette étude, les suggestions logiques qui en émanent consistent à tenir compte des objets du monde sensible dans la conception des leçons sur la notion de droite par les auteurs des manuels. Il est un impératif, d'associer les élèves dans le processus de reconstruction de la définition des objets géométriques tels que la notion de droite et les relations entre les droites. Les problèmes de découverte doivent également donner l'opportunité aux élèves de prendre les initiatives et de développer des aptitudes heuristiques. Pour faire suite à cette étude, il serait intéressant d'étudier la façon dont les objets en relation avec la notion de droite en géométrie sont construits par les élèves en situation lorsque l'interdisciplinarité est exploitée dans la conception des situations d'apprentissages.

REFERENCES

Bonnel J. (1871) *Essai sur les définitions géométriques*. Paris: Delagrave.

Castela C. (2008) Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'enseignement. *Recherches En Didactique Des Mathématiques, 28*(83), 135-182.

Chaachoua H. (2010) *La praxéologie comme modèle didactique pour la problématique EIAH. Etude de cas: la modélisation des connaissances des élèves*. Université de Grenoble.

Chevallard Y. (1994) Les processus de transposition didactique et leur théorisation, In ARSAC, G. et al. (ed.). *La Transposition Didactique À L'épreuve*, (Grenoble : La Pensée sauvage), 135–180.

Cissé B. (2005) *Etude épistémologique et didactique de l'utilisation du vecteur en*

mathématiques et en physique – lien entre mouvement de translation et translation mathématique. Lyon: Universite Claude Bernard - Lyon 1.

Coppé S., Dorier J.-L., & Moreau V. (2005) Différents types de dessins dans les activités d'argumentation en classe de 5ème. *Petit x*, (68), 8–37.

De Villiers M. (1998) To teach definitions in geometry or teach to define? *Proceedings of the 22th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, vol. *2*, 248–255.

Elia I., & Philippou G. (2004). The Functions of Pictures in Problem Solving. *Proceedings 28th International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 2, 327-334.

Freudenthal H. (2012). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht : Springer.

Gobert S. (2007). Conditions nécessaires à l'usage des dessins en géométrie déductive. *Petit x*, *47*, 34–59.

Laborde C. (1994). Enseigner la géométrie : Permanence et révolution. *Bulletin APMEP*, 523–548.

Legendre A.-M. (n.d.). Éléments de Géométrie. *2e Édition.* Paris: Firmin-Didot.

Michelsen, C. (2015). Mathematical modeling is also physics—interdisciplinary teaching between mathematics and physics in Danish upper secondary education. *Physics Education*, *50*(4), 489–494. https://doi.org/10.1088/0031-9120/50/4/489

Shir K., & Zaslavsky O. (2002). Students' conceptions of an acceptable geometric definition. Proceedings 16th International Group for the Psychology of Mathematics Education, vol. 4, 4–201.

CONDITIONS INSTITUTIONNELLES DANS LA FORMATION A L'ENSEIGNEMENT DE LA MODELISATION : CAS FRANÇAIS.

CABASSUT* Richard

Résumé – Nous présentons deux exemples français de développement professionnel sur la modélisation et une enquête auprès d'enseignants français sur l'enseignement de la modélisation. Nous montrerons qu'il est nécessaire de prendre en compte le cadre de la politique éducative française. Nous utiliserons le cadre théorique de la théorie anthropologique du didactique et de la double approche.

Mots-clefs : modélisation, formation, France, enseignant, difficulté

Abstract – We present two French examples of professional development on modeling and a survey of French teachers on the teaching of modeling. We will show that it is necessary to take into account the framework of the French educational policy. We will use the theoretical framework of the anthropological theory of didactics and the double approach.

Keywords: modeling, training, France, teacher, difficulty

I. EXEMPLE D'UN COURS SUR LA MODELISATION DESTINE AUX FUTURS ENSEIGNANTS DU SECONDAIRE

Ce cours de modélisation mathématique s'adresse aux professeurs stagiaires de mathématiques en lycée professionnel français. Pour ce cours, les stagiaires doivent concevoir une activité de modélisation et l'implanter dans une classe de leur stage. La priorité des stagiaires est d'être prêts à enseigner et à résoudre les problèmes qu'ils rencontrent en classe. La plupart des formations sont utiles pour cette priorité à court terme et sont organisées au niveau d'un institut de formation indépendant pour mettre en place le contenu, même si un cadre national précise des tendances communes. Le cours de modélisation actuel tente d'équilibrer les objectifs à long terme et à court terme. Les connaissances liées à la modélisation sont présentées par l'analyse des tâches de modélisation : notions d'expérience, simulation et modélisation en probabilité, cycle de modélisation, conception, implémentation et analyse des tâches de modélisation. Pour aider à analyser la conception des séquences de classes, nous utilisons la dévolution et le contrat didactique de la théorie des situations didactiques ou des praxéologies et des niveaux de co-détermination didactique de la théorie anthropologique. Les contenus didactiques sont la plupart du temps présentés comme une réponse à un besoin exprimé par les stagiaires lors des sessions de conception ou d'évaluation ; il est parfois prévu d'effectuer des tâches de formation basées sur des situations d'homologie ou d'analyse de vidéos. Dans (Cabassut 2017), nous observons de nombreuses conditions et contraintes du contexte institutionnel, en dehors des mathématiques, qui influencent le développement du cours. Dans la conception de l'implantation en classe, les compétences didactiques sont dominantes bien que dans la phase réflexive après l'implantation, les compétences extra-didactiques dominent.

II. EXEMPLE DE FORMATION CONTINUE DES ENSEIGNANTS DU PRIMAIRE SUR LA MODELISATION

Un stage de formation continue doit remplir les contraintes institutionnelles suivantes. Une formation est proposée dans le cadre régional de formation des enseignants organisé par l'autorité régionale de l'éducation et respecte les critères de la politique éducative régionale et nationale L'enseignant prend note des informations sur la formation et devrait enregistrer le cours via une application web institutionnelle entre septembre et octobre. L'enseignant doit être autorisé à assister à cette formation par l'institution locale (le directeur de l'école

* Université de Strasbourg – LISEC EA 2310 – France – richard.cabassut@unistra.fr

secondaire ou l'inspecteur responsable du district de l'école primaire). Les enseignants du primaire sont remplacés par d'autres enseignants pour la durée de la formation. Le cours est annulé s'il n'y a pas assez d'enseignants pour y assister. Il est également intéressant de noter qu'il est difficile d'obtenir une formation de cinq jours au secondaire contrairement à l'école primaire : d'abord, les enseignants sont rarement remplacés, et ensuite les enseignants ne sont souvent autorisés à participer qu'à trois jours de formation par an. Au dernier moment, l'institution a limité la participation à la formation à des enseignants en charge des classes de grade 1 et 2 (CP, CE1) , soit 5 à 8 ans. Cela impliquait des changements dans le contenu de la formation pour s'adapter d'abord aux enseignants du primaire et ensuite des tâches pour les élèves qui commencent tout juste à apprendre à lire et à écrire. (Cabassut & al. 2009) souligne le rôle des différents niveaux de détermination didactique dans la modélisation.

III. ENQUETE AUPRES D'ENSEIGNANTS FRANÇAIS SUR L'ENSEIGNEMENT DE LA MODELISATION

Dans une recherche franco-espagnole sur les conceptions des enseignants en français sur la modélisation (Cabassut & al., 2017b), l'hétérogénéité a été mise en évidence en ce qui concerne la position sur la modélisation et les difficultés à enseigner la modélisation. Une majorité d'enseignants est positive à propos de la modélisation. Certaines difficultés de modélisation peuvent être expliquées plus généralement par des difficultés d'enseignement mathématique. Pour certains enseignants, les difficultés sont spécifiques à la modélisation, en particulier celles liées au temps, à l'implication des élèves et à leurs ressources. Il est également possible d'identifier les aspects positifs liés à l'évaluation, l'organisation des cours et le soutien ou la promotion des étudiants. Pour intensifier le développement professionnel sur la modélisation, différentes conditions doivent être prises en compte. Tout d'abord, la formation et les ressources doivent offrir des solutions aux difficultés exprimées par les enseignants, notamment des difficultés de temps. Quand les ingrédients pour construire des modèles sont présentés pour la première fois? Quand sont-ils entraînés ? Comment construire à long terme un parcours d'étude et de recherche conforme au programme officiel et impliquant la modélisation? La formation et les ressources doivent répondre aux priorités exprimées par la politique éducative nationale.

REFERENCES

Cabassut R. (2017). Formation initiale de professeurs stagiaires : regards sur la modélisation mathématique en classe. In Braconne-Michoux, A, Gibel, P. & Oliveira, I. (Dir.), *Étude de différentes formes d'interactions entre recherches en didactique des mathématiques et formations professionnelles des enseignants*, (pp.122-139). Québec: Livres en ligne du CRIRES.

Cabassut R., Mousoulides, N. (2009). Theoretical considerations on designing and implementing a teacher training course on mathematical modeling: Insights from a French-Cypriot Comparison. In Gagatsis, A., Kuzniak, A., Deliyianni, E. , Vivier, L. (Eds.), Cyprus and France research in mathematics education. *(pp.*141-153). Lefkosia: University of Cyprus.

Cabassut R., Ferrando, I. (2017). Difficulties to teach modelling: a French-Spanish exploration. In Stillman, G.-A., Blum, W., Kaiser, G. (Eds.), *Mathematical Modelling and Applications. Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education,* (pp. 223-232). Cham: Springer.

L'ANALYSE DE L'ACTIVITE CEREBRALE ASSOCIEE A LA REALISATION DE TACHES MATHEMATIQUES

LARA-MELGOZA [*] Rodrigo – MORALES-MORENO[**] Lorena F., ROMO-VÁZQUEZ [***] Avenilde, ROMO-VÁZQUEZ [****] Rebeca et VÉLEZ-PÉREZ [*****] Hugo.

Résumé – Dans cette affiche nous présentons une recherche en cours dont l'objectif est d'analyser l'activité cérébrale associée à la réalisation de tâches mathématiques par de futurs ingénieurs. L'enregistrement de l'activité cérébrale a été fait à l'aide d'électroencéphalographies (EEG) avant et après une intervention didactique encadrée dans le paradigme du questionnement du monde (Chevallard, 2013). Les analyses des EEG ont permis de mesurer l'apprentissage des étudiants.

Mots-clefs : activité mathématique, étude de connectivité, activité cérébrale, apprentissage, futurs ingénieurs

Abstract – In this poster we present a research in progress about the analysis of the brain activity associated with the performance of mathematical tasks by future engineers. The recording of brain activity was done with electroencephalography (EEG) before and after a didactic intervention framed in the paradigm of questioning the world (Chevallard, 2013). EEG analyses measured student learning

Keywords: mathematical activity, brain connectivity, cerebral activity, learning, engineer's students

I. TACHES DE MODELISATION MATHEMATIQUE POUR MESURER L'APPRENTISSAGE

Cette recherche en cours, réalisée dans l'objectif d'analyser l'activité cérébrale associée à la réalisation des tâches de modélisation mathématique, a suivi trois grandes phases : 1) Conception et application d'un pré-test et enregistrement de l'activité cérébrale associé ; 2) L'intervention didactique : mise en place des tâches de modélisation mathématique avec des futurs ingénieurs et 3) Conception et application d'un posttest et enregistrement de l'activité cérébrale associée. Nous avons travaillé avec 25 futurs ingénieurs, des différentes filières de l'Université de Guadalajara, qui étaient en troisième année d'une formation de 4 à 5 ans. Ces étudiants étaient volontaires et ils ont accepté de répondre au test d'intelligence IQ, de réaliser différentes tâches de modélisation mathématique, proposées dans le cadre d'une intervention didactique où leur activité était enregistrée, et de répondre à deux tests, un avant et l'autre après l'intervention.

L'intervention didactique s'est inspirée du travail fait par Tolentino (2015), qui met en évidence le fort usage du « Principe de Pareto » dans une industrie productrice de bière. La distribution de Pareto est le modèle mathématique qui est à la base de ce principe : « environ 80% des effets sont produits par le 20 % de causes ». Cette intervention a été

[1] [*] Institut Polytechnique National et Université Autonome du Baja California – Mexique – rodrigo.lara@uabc.edu.mx

[2] [**] Université de Guadalajara – Mexique – fery.93@hotmail.com

[3] [***] Institut Polytehnique National – Mexique– aromov@ipn.mx

[4] [****] Université de Guadalajara – Mexique – rebeca.romovazquez@gmail.com

[5] [*****] Université de Guadalajara – Mexique – hugo.velezperez@gmail.com

proposée dans le cadre du *paradigme du questionnement du monde* (Chevallard, 2013), dans deux séances présentielles d'environ 2 heures chacune. Entre ces deux séances les étudiants ont fait un travail en équipe et ont produit un report qu'ils ont envoyé par mail. Dans la première séance nous leur avons proposé une activité ouverte qui s'approche d'un PER (Parcours d'Étude et de Recherche) et dans laquelle un contexte industriel a été simulé : des données sur les défauts affectant différentes lignes de production ont été fournies sous forme des tableaux et les étudiants devaient proposer une manière d'utiliser un budget limité qui obligeait à choisir les défauts à régler. Ils devaient proposer alors une manière « optimale » de dépenser le budget, et pour cela le principe de Pareto était nécessaire. La deuxième séance a été consacrée à réaliser différentes tâches du même type : trouver une manière optimale de régler des situations industrielles pour lesquelles il fallait identifier les causes / défauts les plus importants. Une analyse didactique des PER'S s'est réalisée, en montrant différents parcours suivis par les équipes des étudiants et des modèles mathématiques utilisés.

Les deux tests (pré et post) appliqués avec un mois de différence -pour éviter la mémorisation- permettent de mesurer l'apprentissage construit dans le cadre de l'intervention didactique, à travers d'une étude de connectivité sur des signaux cérébrales. Les tests comportaient deux parties : 2 tâches de préparation et 18 questions à choix multiple appartenant au même type de tâche. Les tâches de préparation avaient par but que les étudiants se familiarisent avec le système de choix multiple qui avait trois étapes : 1) Lire et réaliser la tâche proposée ; 2) Cliquer la barre espace de l'ordinateur pour afficher le répertoire des réponses et 3) Cliquer pour enregistrer la réponse choisie ayant un temps limite de dix secondes pour cette dernière. Une première analyse de fréquence (dans la bande delta) que nous avons appelée fenêtre 3 et qui correspond à l'activité des étudiants une seconde avant de cliquer sur la réponse choisie apparaît dans la figure 1. C'est un résultat préliminaire mais a priori il est possible de voir la charge d'énergie (en rouge) de manière plus importante avant l'intervention didactique qu'après. De la même manière, les temps de réponse du 51.05 % au 71.57 % et la quantité des réponses correctes ont augmentés après l'intervention didactique (voir figure 2).

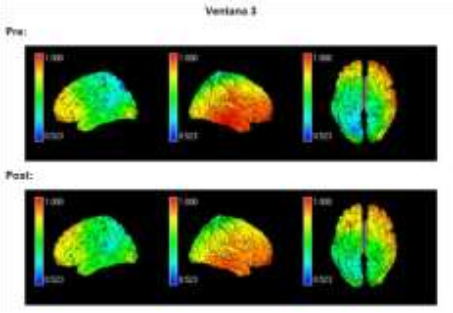




Figure 1 *– Activité cérébrale des étudiants dans la fenêtre 3* ***Figure 2*** *– Temps de réponse des sujets*

Cette fenêtre est obtenue à partir de la moyenne de cinq fenêtres de réponses correctes des dix sujets. D'autres analyses doivent être faites pour mieux comprendre cette activité cérébrale et ses implications pour l'enseignement aux futurs ingénieurs.

REFERENCES

Chevallard Y. (2013). Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a Favor de un Contraparadigma Emergente. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2(2), 161 -182. doi: 1 0.4471 /redimat.201 3.26.

Tolentino O. (2015) *Uso del principio de Pareto en la industria cervecera y su posible vinculación con la enseñanza de las matemáticas.* (Tesis de maestría). CICATA-IPN, Ciudad de México, México.

ÉCHEC DES ELEVES DES SERIES C ET D AU NIVEAU DE L'EXERCICE DE MECANIQUE EN SCIENCES PHYSIQUES AU BACCALAUREAT EN COTE D'IVOIRE. LE CAS DES ELEVES DE LA REGION DE LA ME.

N'GBO* Yapo Appolinaire

Résumé-Cette recherche analyse les causes des mauvaises notes obtenues par les élèves des séries C et D au baccalauréat sur l'exercice de mécanique en sciences physiques chaque année. Nous avons examiné les copies des élèves lors des corrections des épreuves de sciences physiques de 2017. Nous avons constaté que la plupart des élèves réussissent moins bien l'exercice de mécanique que les trois autres exercices qui portent sur l'électricité, la chimie générale et la chimie organique. Les résultats ont montré que les difficultés de ces élèves sont surtout liées à l'utilisation correcte des formules mathématiques qui interviennent dans la résolution des problèmes en mécanique.

Mots-clefs : Mécanique, physique, modélisation mathématique, difficultés des élèves.

Abstract-This research analyzes the causes of poor grades obtained by students in the C and D series at the bachelor's level in mechanical engineering in the physical sciences each year. We reviewed students 'copies of the 2017 physical science exams. We found that most students perform less well in mechanical practice than the other three exercises in electrical, general chemistry and organic chemistry. The results showed the difficulties of these students are mostly related to the correct use of mathematical formulas that intervene in solving problems in mechanics.

Keywords : Mechanics, physics, mathematical modeling, students' difficulties.

I. ENQUETE SUR LES NOTES DES ELEVES CONCERNANT L'EXERCICE DE MECANIQUE AU BACCALAUREAT 2017

En Côte d'Ivoire, l'épreuve de sciences physiques au baccalauréat comprend quatre types d'exercices notés chacun sur cinq et l'ensemble est noté sur vingt. Parmi ces exercices, il y a celui de la mécanique qui peut porter sur un ou deux des chapitres suivants : la cinématique du point matériel (séries C et D), le mouvement du centre d'inertie d'un solide (séries C et D),le champ gravitationnel (série C), le mouvement dans un champ uniforme d'un projectile (séries C et D) et les oscillations mécaniques libres non amorties (série C et D). Pendant l'enquête, nous avons relevé les notes sur 5 de 450 candidats au hasard sur un total de 1270 candidats au baccalauréat session 2017de la région de la Mé. Sur le total de 1270 candidats, il y a 203 candidats de la série C- et 1067 candidats de la série D. L'âge des élèves varie entre seize (16) et vingt-deux (22) ans. Parmi les 450 notes relevées, il y a 50 notes de la série C- et 400 notes de la série D. Les résultats sont regroupés dans le tableau ci-dessous.

Notes (N) des candidats sur 5	Série C		Série D		TOTAL	
	Nombre de candidats	Pourcentage	Nombre de candidats	Pourcentage	Nombre de candidats	Pourcentage
N = 0	5	10%	50	12,5%	55	12,22%
N =1	15	30%	105	26,25%	120	26,67%
N = 2	21	42%	156	39%	177	39,33%
N = 3	5	10%	78	19,5%	83	18,45%

* Laboratoire de Recherche en Didactique, ENS, Abidjan - Côte d'Ivoire - ngboappo@gmail.com

N = 4	4	8%	11	2,75%	15	3,33%
N = 5	00	00%	00	00%	00	00%
Total	50	100%	400	100%	450	100%

***Tableau** : les notes des candidats des séries C et D au baccalauréat session 2017.*

La grande majorité des candidats ont des notes inférieures ou égales à deux. Une minorité de ces personnes ont les notes supérieures ou égales à trois. Les élèves ont des difficultés pour résoudre les exercices de mécanique. Il y a donc des problèmes dans la transmission du savoir. C'est en cela que Nebout (2008) signale que : « La construction des savoirs scolaires est une opération complexe qui demande -une grande compétence de l'enseignant. Il doit préciser les éléments qui permettent la construction des savoirs, à savoir les objets et les tâches ». Il s'agit également de prendre les représentations des élèves (modèles mentaux des élèves) comme base explicite d'un processus de modélisation et instaurer par là un débat scientifique dans la classe permettant aux élèves de donner du sens au savoir et au maître de provoquer un changement conceptuel (-Martinand, 1992 ; Joshua et Dupin, 1989).

II. METHODE DE RECHERCHE DES CAUSES DES MAUVAISES NOTES OBTENUES EN MECANIQUE AUPRES DES PROFESSEURS ET DES ELEVES EUX-MEMES

Notre terrain de recherche concerne la Direction Régionale de l'Education Nationale (DREN) d'Adzopé. Les professeurs de sciences physiques intervenant dans les classes de terminale C et D et leurs élèves constituent notre population cible. Pour l'échantillonnage, nous avons interrogé au hasard treize professeurs venus pour la correction des copies des candidats au lycée moderne d'Adzopé qui est le centre de correction de la région de la Mé par un questionnaire. Nous avons aussi interrogé au hasard 200 candidats de la région de la Mé par un autre questionnaire.

III. RESULTATS DE LA RECHERCHE

1. Le questionnaire adressé aux professeurs de sciences physiques concernés.
Il y a dix-huit professeurs de sciences physiques qui ont reçu le questionnaire qui leur est adressé et treize parmi eux ont donné leurs réponses.

-Sur l'item 1 : après la correction de l'épreuve de sciences physiques, les candidats de la série C rencontrent-ils les mêmes difficultés que ceux de la série D sur la résolution de l'exercice de mécanique ? Onze professeurs de sciences physiques affirment que les candidats de la série C ont les mêmes difficultés que ceux de la série D sur la résolution de l'exercice de mécanique soit 84,62%. Deux parmi eux disent le contraire.

-Sur l'item 2 : si oui, quelles sont ces difficultés ? Neuf professeurs disent que les élèves ne maitrisent pas les notions et formules de mathématique, soit 69,23%. Quatre professeurs disent que les élèves ont des problèmes pour appliquer les mathématiques en sciences physiques (car les notations de la mathématique changent en sciences physiques) soit 30,77%.

-Sur l'item 3 : proposez des solutions pour améliorer les résultats des élèves en mécanique.

Douze professeurs disent que les élèves doivent faire des efforts en mathématique pour connaitre les notions telles que : dérivée et primitive d'une fonction, étude et représentation de fonction polynôme, coordonnées d'un vecteur, représentation des vecteurs dans le plan, résolution d'équation du second degré utilisant le discriminant, soit 92,31%. Un professeur dit que les élèves doivent payer des documents (livres et annales) pour étudier à la maison.

2. Le questionnaire adressé aux élèves des classes de Terminale C et D. Il y a au total 270 - élèves de terminale qui ont reçu le questionnaire qui leur est adressé et 200 parmi eux ont donné leurs réponses.

-Sur l'item 1 : quelles sont vos difficultés au cours de la résolution des exercices de mécanique ? -148 élèves, soit 74% disent que le premier chapitre de mécanique (cinématique du point) utilise beaucoup de notions mathématiques qu'ils n'ont pas vues en mathématique en classe de première ou qu'ils doivent réviser avant ce cours. 52 élèves soit 26% affirment que la compréhension des autres chapitres de la mécanique dépend de celle de la cinématique du point.

-Sur l'item 2 : que doit faire ton professeur de sciences physiques pour t'aider à comprendre les cours de mécanique en classe ? - 160 élèves soit 80% souhaitent que le chapitre sur les dérivées et les primitives des fonctions en mathématique se fasse au même moment que celui du premier chapitre de la mécanique (cinématique du point). 40 - élèves soit 20% disent qu'ils ont besoins de cours de renforcement en mathématique et en sciences physiques.

REFERENCES

Johsua S., Dupin J.J. (1989) *Représentations et modélisations : le "débat" scientifique dans la classe et l'apprentissage de la physique*. Berne : Peter Lang.

Martinand J.L. (dir.) (1992) *Enseignement et apprentissage de la modélisation en sciences*. Paris : INRP.

Nebout-Arkhurst P. (2008) Opération de construction de savoirs scolaires en débat. Pour quels éclairages didactiques ? Téléchargé le 5/04/19 sur : http://www.ltml.ci/files/revue/Operations%20de%20construction.pdf

QU'EST-CE QU'IL SE PASSE QUAND UNE FIGURE GEOMETRIQUE RENCONTRE *FLATLAND* ?

PAVLOPOULOU [*] Kalliopi –PATRONIS[**] Tasos

Résumé – Cette affiche présente une partie autonome d'une recherche plus vaste sur les relations entre la littérature et la géométrie à plusieurs dimensions. Il s'agit d'un projet réalisé par des élèves du collège à Athènes, dont le produit final était l'écriture d'une suite du roman *Flatland* (E. Abbott, 1884). On a demandé aux élèves, après avoir lu le roman, de penser aux diverses sections d'un plan infini par une droite, un plan, une sphère, un cylindre, un cône, un cube, et dessiner ces sections. Ici on présente les produits de cette activité.

Mots-clefs : interdisciplinarité, géométrie, plusieurs dimensions, littérature, *Flatland*.

Abstract – This poster presents a self-contained part of a wider research on the relationship between literature and geometry in many dimensions. This is a project realised with 12 to 15 years old students in Athens, in which the final task for students was the writing of a sequel of the novel *Flatland* (E. Abbott, 1884). After having red the novel, we asked students to think about different sections of an infinite plane by a line, a plane, a sphere, a cylinder, a cone and a cube, and draw these sections. Here we present the products of this activity.

Keywords: interdisciplinarity, geometry, many dimensions, literature, *Flatland*.

I. LECTURE ET DISCUSSION DU ROMAN DANS LA CLASSE

1. Notre approche

On rencontre souvent aujourd'hui, dans les écoles grecques, des activités de lecture de textes littéraires qui ont un rapport aux mathématiques. *Flatland* (*Le Pays Plat,* Edwin Abbott 1992), ainsi que *Le théorème du perroquet* (Denis Guedj, 1998) sont des exemples assez communs dans cette direction. Mais, le plus souvent, on reste au niveau d'une lecture superficielle, sans discussion ni du contenu mathématique ni du contexte social de l'époque auquel le texte se réfère. En général, selon Raymond Duval (Duval R., 1995), il y a une difficulté au passage du registre de la langue naturelle au registre géométrique. Dans notre approche, après avoir fait une discussion historique du contexte de *Flatland* dans la classe, nous avons posé aux élèves des questions mathématiques relatives au texte du roman (Pavlopoulou K., Patronis T., Andrikopoulou M., 2014). Le but final était l'écriture collaborative d'une suite de l'histoire originale, par les élèves, de façon que leur perception du texte et leurs interactions créatrices soient apparentes.

2. Les étapes réalisées dans la classe

Pendant l'année scolaire 2016-17 nous avons travaillé avec un groupe de 23 élèves d'un collège d'Athènes (de 12 à 15 ans) sur la relation « Fiction et Mathématiques». Dans ce groupe, aucune élève n'a étudié dans sa vie scolaire précédente la géométrie à trois dimensions (stéréométrie).

---

[*] Université Nationale de Technologie d'Athènes, Département des Mathématiques, Ecole des Mathématiques Appliquées et Physique – Grèce – pavlopoulou@math.ntua.gr

[**] Université de Patras, Département des Mathématiques – Grèce – valdemar@math.upatras.gr

Ainsi, nous avons choisi le roman *Flatland* (*Le Pays Plat*, Abbott 1884) parce que son auteur exprime d'une façon explicite son intention d'introduire le lecteur à la notion d'espace à plusieurs dimensions. Les élèves se sont partagés eux-mêmes en sous-groupes. Chaque sous-groupe travaillait indépendamment pendant chaque activité proposée par le professeur et présentait ses résultats aux autres. Ayant comme but final la lecture critique et la création de textes par les élèves, ainsi que l'introduction de notions mathématiques par une façon popularisée, nous avons essayé de conduire les élèves à des activités créatives comme l'écriture collaborative.

Les questions suivantes illustrent les différentes étapes suivies avant de commencer l'écriture collaborative:

a) Comment imaginez-vous *Flatland*? (question posée aux élèves avant la lecture complète du texte).

b) Pouvez-vous présenter aux autres groupes le contenu du chapitre que vous avez lu ? (question posée à tous les groupes d'élèves).

c) Qu'est-ce qui se passe quand une figure géométrique (une droite, un plan, une sphère, un cylindre, un cône, un cube) qui représente un visiteur extérieur rencontre *Flatland* ? Pouvez-vous dessiner cette «rencontre» ? (questions posées à tous les groupes d'élèves).

Ici nous présentons les réactions des élèves à la troisième question ci-dessus.

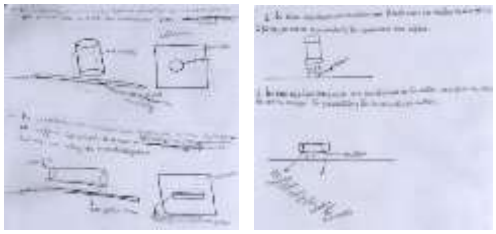


Figure 1 *– Rencontre d'un cylindre avec un plan*

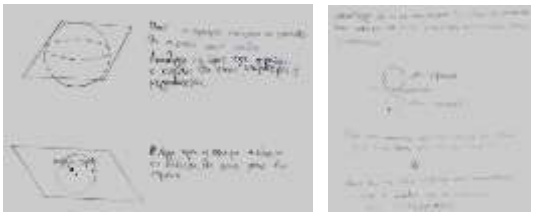


Figure 2 *– Rencontre d'une sphère avec un plan*

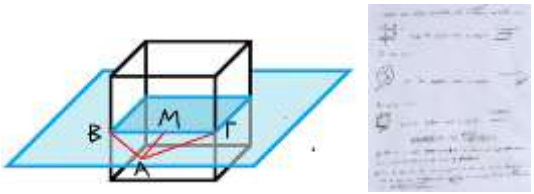


Figure 3 *– Rencontre d'un cube avec un plan*

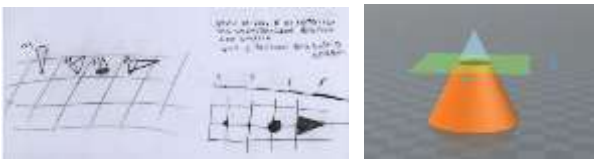


Figure 4 *– Rencontre d'un cône avec un plan*

II. PERSPECTIVES

L'étape suivante sera d'étudier toutes les sections possibles du plan avec les figures géométriques précédentes.

REFERENCES

Abbott E. (1992) *Flatland*. London, Dover Publications (first published 1884).

Duval R. (1995) Sémiosis et pensée humaine. Peter Lang, Neuchâtel.

Guedj D. (1998) Le Théorème du Perroquet. Seuil, Paris.

Pavlopoulou K., Patronis T., Andrikopoulou M. (2014) 7th grades' reactions to an « unusual» mathematical scenario, CIEAEM66-Mathématiques et réalites, Lyon, France, juillet 21-25, Actes de la conférence CEAEM 66, *Quaderni di Ricerca in didattica*, 24(1), http://math.unipa.it/~grim/quaderno24_suppl_1.htm, ch.4, pp.139-141. [ISSN 1592-4424].

Groupe de travail 5 (GT5) Mathématiques dans la pluralité des enseignements mathématiques

BILAN DU GROUPE DE TRAVAIL Nº 5

MATHEMATIQUES DANS LA PLURALITE DES ENSEIGNEMENTS MATHEMATIQUES

Responsables

GONZÁLEZ-MARTÍN[*] Alejandro S. – DE VLEESCHOUWER[**] Martine – HAUSBERGER[***] Thomas

Correspondante CS

GHEDAMSI[****] Imène

I. PRÉSENTATION

Les activités du groupe de travail ont été organisées dans un esprit de continuité avec les groupes de travail sur l'enseignement des mathématiques aux niveaux postsecondaire et universitaire lors des manifestations précédentes de EMF à Sherbrooke (2006 – GT6), à Dakar (2009 – GT7), à Genève (2012 – GT7) et à Alger (2015 – GT7). En particulier, et en continuité avec les discussions menées au sein du Groupe de Travail nº7 « Enseignement des mathématiques aux niveaux postsecondaire et supérieur » lors du colloque EMF2015 (González-Martín, Bridoux, Ghedamsi, & Grenier-Boley, 2015), notre appel à contributions identifiait trois axes prioritaires :

- Les difficultés liées à l'apprentissage de certains contenus mathématiques ; les organisations mathématiques dans ces niveaux et leurs conséquences sur l'apprentissage ; les difficultés liées au raisonnement, au formalisme et au symbolisme ;
- Les difficultés liées à la transition dans un sens large : transition entre des niveaux d'enseignement, transition entre des domaines mathématiques, transition d'un cours de mathématiques vers des sections non-mathématiques etc. ;
- Les difficultés liées aux pratiques des enseignants, par exemple le fait qu'elles prennent en partie pour référence les pratiques « expertes » des mathématiciens professionnels, cette référence n'étant toutefois ni explicite, ni tout à fait analogue d'un enseignant à l'autre.

Les sujets énumérés ci-dessus se trouvaient, d'une façon ou d'une autre, dans les douze articles (dont dix sont présents dans ces actes) et les trois posters qui ont été présentés lors du colloque. Cela nous a permis de les organiser sous trois thèmes principaux, qui reprennent en partie nos trois axes prioritaires :

TH-1 : Le rôle des mathématiques dans des sections non-mathématiques et problèmes de transition entre les mathématiques et les cours professionnels et le lieu de travail.

TH-2 : L'apprentissage de contenus spécifiques et pratiques des étudiants.

[*] Département de Didactique – Université de Montréal – Canada – a.gonzalez-martin@umontreal.ca
[**] Département de Mathématique – - IRDENa – Université de Namur – Belgique – mdv@math.unamur.be
[***] IMAG – Université de Montpellier & CNRS – France – thomas.hausberger@umontpellier.fr
[****] Département de Mathématiques – Université de Tunis – Tunisie – ighedamsi@yahoo.fr

TH-3 : Les enseignants universitaires de mathématiques : formation, nouvelles approches, contraintes et identité.

Dans ce qui suit, nous présentons une brève synthèse des discussions dans chacun de ces trois thèmes.

II. TRAVAUX PRESENTES DANS LE GROUPE

1. Thème 1 : rôle des mathématiques dans des sections non-mathématiques et problèmes de transition entre les mathématiques et les cours professionnels et le lieu de travail.

En plus d'être en adéquation avec la thématique du colloque EMF2018 « *Mathématiques en scène, des ponts entre les disciplines* », nous permettant de discuter du rôle des mathématiques dans la formation d'experts dans d'autres disciplines, ce thème s'inscrit aussi dans une des perspectives énoncées dans le compte-rendu du GT7 de EMF2015 :

> Nous avons aussi souligné plus haut l'émergence de tout un champ de recherche sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques dans des facultés autres que celle de mathématiques. Quelles mathématiques sont nécessaires pour former de futurs professionnels, quelles notions peuvent être utilisées sans être formalisées, quel serait le rôle de la modélisation…? Ce sont des questions qu'il paraît nécessaire de traiter en recherche pour guider les prises de décisions institutionnelles, étant donnés le nombre croissant d'étudiants qui s'inscrivent dans des facultés professionnelles, ainsi que les taux élevés d'abandon et ce, depuis les années 80. (González-Martín et al., 2015, p.646)

Les travaux de Bloch, Khaloufi-Mouha et Quéré présentés dans notre groupe de travail s'inscrivent directement dans ce thème : pour le premier, dans un enseignement articulant mathématiques et physique ; pour le deuxième, dans un cours de mathématiques à destination d'étudiants de biologie ; et pour le dernier, en s'intéressant à l'articulation entre la formation mathématique des ingénieurs en France et à son utilisation sur leur lieu de travail.

Bloch regarde pour sa part l'articulation entre mathématiques et physique, en s'intéressant plus particulièrement à un cours intitulé « Mathématiques du mouvement » qui aborde des notions mathématiques dans le cadre de problèmes de modélisation du mouvement, faisant intervenir des courbes paramétrées. Par le biais de la théorie des signes et des milieux, Bloch met en œuvre des outils d'identification des connaissances des élèves qui permettent de déceler certaines incapacités des étudiants à finaliser un raisonnement mathématique. L'étude conclut que la référence au mouvement ne semble pas avoir aidé les étudiants. L'article met en avant deux difficultés pouvant expliquer ce phénomène : d'une part une présence insuffisante dans l'enseignement de « vraies » situations de physique et d'autre part une contrainte temporelle empêchant les étudiants d'être placés en situation de recherche de problèmes. Ces difficultés ont aussi été mises en avant dans les discussions ayant suivi cette présentation et celle de Khalloufi-Mouha. Nous y reviendrons plus loin.

Khalloufi-Mouha s'intéresse quant à elle à l'enseignement des mathématiques en biologie. La théorie commognitive sert de cadre d'analyse aux propos et écrits de trois étudiantes travaillant à la résolution d'un problème énoncé en français sur l'évaluation d'un risque de trisomie 21, sans intervention d'un enseignant. L'article relève que l'étape la plus problématique dans la tâche soumise aux étudiants semble être le passage de l'énoncé du problème décrit en langue naturelle vers le modèle mathématique qui permettra de le résoudre. De nombreux échanges ont eu lieu dans le groupe de travail sur l'utilité de cette illustration de la théorie commognitive. Vise-t-elle à évaluer, favoriser ou améliorer l'apprentissage des étudiants ? Servira-t-elle à un enseignant lors de la construction d'un cours sur les notions en jeu ? Quoi qu'il en soit, le problème soumis aux étudiants semble ici

répondre au qualificatif de « vraie » situation, en référence à ce qui avait été soulevé lors des discussions suite à la contribution de Bloch.

La contribution de Quéré s'intéresse aux liens entre les mathématiques enseignées aux futurs ingénieurs et celles utilisées dans le monde du travail, à travers la caractérisation des praxéologies dans les institutions respectives. Il ressort que les praxéologies sont différentes dans la formation initiale et sur le lieu de travail ; et que dans le monde du travail, les praxéologies peuvent être classifiées en deux types : spécifiques (en lien direct avec le métier) et transversales (dont les technologies sont constituées de « bases » mathématiques, mais aussi de rigueur, de raisonnement et de logique). Cependant, de l'avis même des ingénieurs interrogés, certaines « bases » acquises lors de leur formation pourraient difficilement l'être autrement que par la manière qui leur a été proposée lors de la formation initiale.

Des discussions lors de cette session, il ressort tout d'abord une difficulté de qualifier un problème de modélisation de situation « naturelle », c'est-à-dire en lien avec le « monde réel », par opposition à une situation prévue pour l'enseignement. Ensuite, les contributions semblent indiquer que l'introduction de la modélisation n'aide pas nécessairement les étudiants à mieux comprendre les notions mises en jeu. Les erreurs dites « de base » sont régulièrement un frein à l'apprentissage. Des allers-retours plus nombreux entre les notions mathématiques et leurs interprétations, le travail de techniques et des moments de recherche sur des problèmes pourraient constituer des pistes de solution pour rendre plus efficace l'articulation entre mathématiques et d'autres disciplines (y compris le monde du travail).

2. Thème 2 : l'apprentissage de contenus spécifiques et pratiques des étudiants.

Quatre papiers ont été présentés durant le colloque pendant la session dédiée à ce thème. Nous nous limiterons dans cette synthèse aux contributions qui figurent dans les actes du congrès, c'est-à-dire à trois papiers sur les quatre. Ces trois papiers illustrent la diversité des contextes de l'enseignement des mathématiques dans le supérieur (ou à la transition avec le secondaire), à différents niveaux, et couvrent différents domaines des mathématiques (géométrie, algèbre, analyse).

Nihoul souligne l'importance des changements de cadre (Douady, 1986) et de point de vue (Rogalski, 1991) dans l'enseignement-apprentissage des notions de droite et de plan dans l'espace, ainsi que les conversions entre registres de représentations sémiotiques (Duval, 1993) par lesquels ces changements se traduisent. Les deux cadres dont il est question sont ceux de la géométrie synthétique à la Euclide et de la géométrie analytique héritée de Descartes, laquelle inclut différents points de vue sur les équations de droite (vectoriel, paramétrique ou cartésien). Les résultats obtenus indiquent que le cadre analytique est travaillé avec très peu de liens avec le synthétique et avec des changements de points de vue limités à la démarche permettant d'établir les équations, laquelle est peu détaillée. Nihoul en conclut que les occasions de « proximités horizontales » sont nombreuses pour « combler les manques des manuels, notamment au niveau des justifications, reformulations, explications des calculs et des méthodes ». Ceci ouvre de larges perspectives d'observation en classe et d'intervention. En définitive, le cas d'étude présenté par Nihoul a permis de réactualiser le questionnement sur le manque de prérequis en géométrie à l'entrée de l'université ainsi que sur les conditions et contraintes au développement de la flexibilité requise pour une bonne poursuite d'études dans le supérieur.

Hoppenot se place à l'entrée de l'université, mais avec un public bien spécifique : les étudiants des instituts universitaires technologiques dont le niveau est globalement assez faible, ce qui nécessite une remise à niveau. Sont repris des contenus du secondaire, par exemple les techniques de manipulation des expressions algébriques et de résolution des

équations. Sur ce thème, l'étude présentée par Hoppenot vise à évaluer l'apport d'une approche mettant en avant la dimension outil (Douady, 1986) par rapport à la dimension objet. La méthodologie employée est quantitative : une analyse statistique est appliquée aux données recueillies à l'aide d'un questionnaire portant sur le rapport des étudiants aux mathématiques (intérêt et perception de leur utilité) ainsi que sur la perception qu'ils ont des apports d'un tel travail à leur compréhension des mathématiques. Les résultats des études statistiques montrent des liens forts entre le type de bac, le niveau en algèbre et l'intérêt pour les mathématiques, avec la gradation que l'on imagine culminant avec les sections scientifiques (bac S). Globalement, les étudiants les plus faibles ne perçoivent pas l'utilité des mathématiques et un grand nombre d'entre eux pense que les situations réelles n'aident pas à mieux comprendre les mathématiques. L'interprétation de ce résultat préoccupant, apparemment contraire à ce que prévoit la dialectique outil-objet, a fait l'objet de discussions au sein du groupe. Un facteur explicatif, soulevé sous forme d'hypothèse à tester, serait que la dimension pratique des problèmes n'est pas perçue en tant que telle par les étudiants.

Le public de l'expérimentation de Lecorre et Ghedamsi est très différent, puisqu'il s'agit d'étudiants de mathématiques préparant une thèse de doctorat. Pour autant, ces derniers s'avéreront déstabilisés par la situation proposée de la « balle rebondissante », laquelle engage également des connaissances de mécanique. La balle s'arrêtera-t-elle de rebondir ? La possibilité d'un temps fini pour une infinité de rebonds fait écho aux paradoxes de Zénon, en d'autres termes à la conceptualisation d'un infini actuel en tant qu'aboutissement d'un processus infini, ce qui ne va pas de soi si l'on se réfère aux difficultés récurrentes mises en évidence dans les études didactiques. Ce phénomène est formalisé en mathématiques par le concept de limite (finie en l'infini) pour lequel les auteurs recherchent en fait des situations fondamentales (Brousseau, 1998) en s'appuyant sur la mesure des grandeurs, en accord avec le cheminement historique. Cette expérimentation a suscité des débats très riches dans notre groupe : il s'est agi d'une part d'interpréter la stagnation dans les rationalités empiriques et pragmatiques, alors que les connaissances mathématiques sur la limite sont bien entendu disponibles. Est-ce dû à la présence d'un obstacle épistémologique ou bien aux difficultés de modélisation suscitées par la rencontre de différentes épistémologies (dans la réalité, le nombre de rebonds est fini) ? D'autre part, le rôle de la définition formelle de la limite a fait également débat : est-ce un passage obligé pour résoudre le paradoxe ? Si c'est le cas, comment organiser le milieu ? Comme le soulignent les auteurs, « la dialectique fini/infini constitue manifestement un défi encore actuel pour l'enseignement ».

3. Thème 3 : les enseignants universitaires de mathématiques : formation, nouvelles approches, contraintes et identité.

Ce thème, réputé pour être un levier de l'action didactique, voit le jour pour la première fois depuis la création à EMF du groupe de travail sur l'enseignement des mathématiques aux niveaux postsecondaire et universitaire. Les travaux qui ont été présentés touchent à des questions vives de l'enseignement des mathématiques à l'université dont les dispositifs pédagogiques, les contraintes institutionnelles et l'identité professionnelle des enseignants.

L'étude de Hausberger et Roy est centrée sur l'intégration de l'approche didactique et philosophique en mathématiques (ADPM) à un cours de didactique et épistémologie des mathématiques. L'expérimentation qui a été entreprise avec des étudiants de master en éducation se structure autour d'une discussion pédagogique à visée philosophique (DPVP), avec une mise en perspective de différentes preuves du théorème de Pythagore. Dans le cadre de cet article, l'analyse a ciblé le contenu des discours d'étudiants présentant des niveaux de réflexivité contrastés (*a-réflexif*, *non réflexif*, *pré réflexif* et *quasi-réflexif*). Les résultats mettent l'accent sur les possibilités de cette DPVP à structurer, chez certains étudiants, la

compréhension des énoncés mathématiques à travers la question du rôle de la preuve en mathématiques. Comme l'ont indiqué les auteurs, la DPVP pourrait « offrir un nouveau rapport au savoir mathématique pour les futurs enseignants en mathématiques » mais des études complémentaires sont nécessaires « afin d'examiner l'impact réel sur la formation ».

Bridoux s'appuie sur l'expérience d'une classe inversée en première année universitaire sur les suites numériques, pour des étudiants en informatique, afin d'analyser les divers moments de cours et penser une organisation alternative qui permettrait d'optimiser ce dispositif pédagogique. Les moments de cours sont modélisés, en fonction du *relief* de la notion en jeu (sa nature, sa transposition et les difficultés potentielles qu'elle génère du point de vue de l'apprentissage), à travers le concept de *proximité* qui qualifie les moments de rapprochement de l'enseignant avec les étudiants (Robert & Vandebrouck, 2014). Les résultats ont montré qu'en l'absence de contrat clairement instauré dans le cadre cette approche, il est difficile de conclure sur les potentialités qu'elle peut apporter sur le plan des apprentissages. Une alternative serait de faire précéder la classe inversée par un cours classique introductif de manière à optimiser les occasions de *proximités* tout en gardant toute l'essence de cette approche pédagogique.

Le travail de Gonzalez-Martin s'inscrit dans un projet plus large d'étude de déterminants (personnels, institutionnels, sociaux, etc.) qui conditionnent les pratiques des enseignants universitaires de mathématiques lors de la préparation de leurs cours. Dans cette étude, l'appui sur la hiérarchie des niveaux de codétermination de Chevallard articulé aux études suivant la double approche sur les régularités et les variations des pratiques a permis de poser la question des contraintes auxquelles seraient soumis les enseignants universitaires pour préparer leurs cours. L'expérimentation, sous forme d'entretiens, a été conduite auprès d'enseignants du cours préparatoire au Calcul (dans le sens de *Calculus*) exerçant soit dans des écoles d'ingénieries soit à l'université. Les premiers résultats mettent l'accent sur un invariant partagé par l'ensemble des participants lié à la contrainte imposée par le coordonnateur du cours et qui conduit à la difficulté d'avoir des marges de manœuvre personnelles. L'étude a de plus montré l'existence d'un certain nombre de variations liées à la nature des institutions notamment en ce qui concerne le nombre d'étudiants en classe et leurs profils. Comme l'a indiqué l'auteur, ce travail préliminaire nécessite des analyses complémentaires afin de mieux cerner ces contraintes ainsi que les enjeux des pratiques des enseignants universitaires lorsqu'ils sont confrontés à ces contraintes.

L'étude de Bridoux et al. porte sur la question générale de l'identité professionnelle des enseignants chercheurs (EC) et traite de l'impact de la discipline, en lien avec les activités de recherche des EC, sur les pratiques d'enseignement à l'université. Des entretiens semi-directifs ont permis d'analyser et de contraster certains éléments caractéristiques de l'identité professionnelle des EC de trois disciplines connexes (mathématiques, physique et chimie). Les premiers résultats de cette étude mettent l'accent sur l'existence d'une empreinte de la discipline sur les pratiques d'enseignement à l'université qui se manifeste notamment à travers des tensions « généralement reliées aux dispositifs organisationnels qui contraignent les EC ». Si les tensions liées aux formes d'évaluations sont transversales aux trois disciplines, les différences liées aux aspects épistémologiques de ces disciplines imposent aux EC de mathématiques de gérer l'écart entre les mathématiques fondamentales et les mathématiques enseignées. Pour avancer dans la problématique de la pédagogie universitaire, les auteurs ambitionnent d'élargir la représentativité des EC et de mettre en place une méthodologie qui permet « de renvoyer aux EC un miroir de leurs propres pratiques ».

III. PISTES POUR LA RECHERCHE A VENIR

Les discussions menées dans le groupe ont permis de dégager plusieurs perspectives de recherches. Si nous les regroupons selon les trois thèmes :

Les liens entre la formation mathématique et la formation professionnelle des étudiants à l'université sont encore à approfondir. En particulier, la construction d'activités de modélisation proches de la réalité professionnelle des étudiants et/ou signifiantes pour ces derniers pose encore des nombreux défis. Par ailleurs, le transfert de connaissances mathématiques dans d'autres contextes n'est pas immédiat pour les étudiants. Si les parcours d'étude et de recherche se présentent comme une voie prometteuse, ils posent également des défis importants au niveau institutionnel.

Par rapport à l'apprentissage de contenus spécifiques, des études portant sur une variété de niveaux scolaires et de thèmes ont été présentés, dont certains niveaux (comme les étudiants en doctorat) et thèmes (telle la géométrie à trois dimensions) peu explorés jusqu'à présent dans la littérature. Ces présentations appellent à poursuivre de telles recherches sur des sujets peu abordés, qui sont nombreux si l'on pense aux contenus mathématiques de fin de Licence ou au-delà. En lien avec le thème précédent, les études documentent souvent le cas des filières de mathématiques (Artigue, 2016), de sorte que l'ouverture au contexte d'autres programmes de formation permet d'envisager de nombreux développements.

Enfin, les recherches sur les enseignants, leurs pratiques, leur identité professionnelle et les contraintes auxquelles ils sont soumis, sont encore relativement rares au niveau postsecondaire. Les quatre articles discutés cette année dans ce thème abordent des sujets peu présents dans la littérature, mais qui ont un impact très important sur l'enseignement. Ce thème, nouveau cette année, mérite certainement plus de recherches dans les conférences à venir.

Nous espérons que les prochains colloques EMF nous permettront d'aborder certaines de ces questions, tout en approfondissant les sujets abordés dans cette conférence.

RÉFÉRENCES

Artigue, M. (2016). Mathematics education research at university level: achievements and challenges. In E. Nardi, C. Winsløw & T. Hausberger (Eds.), *Proceedings of the First Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics: INDRUM 2016* (pp. 11-27). Montpellier, France: University of Montpellier and INDRUM.

Brousseau, G. (1998) *Théorie des situations didactiques : didactique des mathématiques 1970-1990*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil/objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(2), 5-31.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5*, 37-65.

González-Martín, A. S., Bridoux, S., Ghedamsi, I., & Grenier-Boley, N. (2015). Enseignement des mathématiques aux niveaux post-secondaire et supérieur - Compte-rendu du Groupe de Travail nº7. In L. Theis (Ed.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage – Actes du colloque EMF2015 – GT7* (pp. 640-649). Alger, Algérie: Université d'Alger.

Robert, A., & Vandebrouck, F. (2014). Proximités-en-acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves: analyses de séances sur des tâches complexes. *Cahier du laboratoire de didactique André Revuz, 10*, Université Paris Diderot.

Rogalski M. (1991). Un enseignement de l'algèbre linéaire en DEUG A première année, *Cahier de DIDIREM* (Université Paris 7). Repéré le 5 avril 2019 de : http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/publications/IPS97074.pdf

ANNEXE

LISTE DES TEXTES DU GT5 PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE DU PREMIER AUTEUR.

BLOCH, I.

L'adaptation des signes et techniques dans la transition secondaire/supérieur. La modélisation est-elle une aide ? Analyse des difficultés des étudiants

BRIDOUX, S.

Classe inversée pour introduire les suites numériques : une expérience en première année universitaire

BRIDOUX, S., DE VLEESCHOUWER, M., GRENIER-BOLEY, N., KHANFOUR-ARMALÉ, R., LEBRUN, N., MESNIL, Z., & NIHOUL, C.

L'identité professionnelle des enseignants-chercheurs en mathématiques, chimie et physique

GONZÁLEZ-MARTÍN, A. S.

Les cours préparatoires de Calcul à l'université, au Québec : the same, but different ?

HAUSBERGER, T. & ROY, A.

L'interdisciplinarité mathématiques-philosophie : un levier pour la formation des enseignants

HOPPENOT, P.

L'outil mathématique à l'université – Qu'en disent des étudiants de première année universitaire ?

KHALOUFI-MOUHA, F.

Rôle des médiateurs visuels et du vocabulaire utilisé dans l'établissement d'une communication efficace lors de la résolution d'un problème de mathématique appliquée

LECORRE, T. & GHEDAMSI, I.

Rationalités et infini dans le calcul de grandeurs finies

NIHOUL, C.

Les équations de droites dans l'espace : une étude des proximités discursives dans les manuels de l'enseignement secondaire belge

QUÉRÉ, P.-V.

À la frontière des institutions : quelles mathématiques par et pour les ingénieurs ?

AFFICHES

AKROUTI, I.

Les difficultés liées à l'apprentissage de l'intégrale définie à l'entrée en classe préparatoire

BELHAJ AMOR, F.

Le processus de transposition didactique de l'objet développement limité

CANDY, J.

Une étude praxéologique montrant les choix de transposition d'un enseignant d'algèbre abstraite

L'ADAPTATION DES SIGNES ET TECHNIQUES DANS LA TRANSITION SECONDAIRE/SUPÉRIEUR

La modélisation est-elle une aide ? Analyse des difficultés des étudiants

BLOCH* Isabelle

Résumé – Au début de l'enseignement supérieur, le statut des objets mathématiques et les outils de validation se trouvent profondément bouleversés. Nous avions étudié ce basculement épistémologique selon le statut des variables macro-didactiques de cette transition ; avec un outil d'analyse des signes et des milieux, nous analysons la production de solutions d'étudiants de licence sur le traitement d'une courbe paramétrée dans un problème de mouvement. Nous montrons que le fait d'avoir recours à une modélisation physique ne suffit pas à aider les étudiants dans leur appréhension du problème.

Mots-clefs : statut des concepts, outils du travail mathématique, signes et milieux dans un problème de modélisation.

Abstract – At the beginning of University studies, the status of mathematical objects and validation tools experience great changes. We had previously studies this epistemological shift according to the status of the macro-didactic variables of this transition. Using an analysis tool of signs and milieu, we analyse undergraduate students' productions in a problem concerning a parametric curve in a movement problem. We show that the modelling of a physical situation reveals to be ineffective in helping students to solve the problem.

Keywords: status of the concepts, tools of mathematical work, signs and milieu in a modelling problem.

I. INTRODUCTION

Dans Bloch (2012) nous avions pointé les principales variables macro-didactiques dans la transition secondaire/supérieur. Dans la poursuite de nos recherches sur la façon dont les étudiants se saisissent des situations proposées en licence, nous avons enquêté sur de nouvelles questions : à l'UPPA[1] une unité d'enseignement de licence tente d'articuler mathématiques et physique et se nomme 'Mathématiques du mouvement'. Cette articulation permet-elle aux étudiants de mieux saisir les outils mathématiques en jeu ? Tenter de contextualiser les connaissances mathématiques dans des situations relatives à la mécanique des corps permet-il aux étudiants de mieux comprendre les savoirs sous-jacents ? Et cette contextualisation s'avère-t-elle effective dans le cours proposé ?

En effet, à ce niveau certains concepts mathématiques subissent une transformation telle que leur statut et leur mode de fonctionnement s'en trouvent complètement bouleversés. Dans la transition secondaire/supérieur, ce décalage épistémologique est accentué par la configuration actuelle des contenus des programmes du secondaire : nous avons montré (Bloch, 2018) que les objets y sont étudiés de façon descriptive et non relativement à leur nécessité et leur rôle d'outil dans la construction de situations mathématiques ; c'est aussi le cas pour la fonction exponentielle par exemple, ou les équations différentielles. De plus, les procédures de résolution visées au supérieur sont beaucoup plus complexes et peuvent faire appel à des techniques de divers champs mathématiques ; les étudiants doivent identifier ces changements de cadres de façon autonome et savoir s'extraire du champ initial, ainsi que nous l'avions exposé dans Bloch & Gibel (2016).

Dans ce texte nous rappelons d'abord les variables macro-didactiques identifiées et le changement massif de leurs valeurs à l'entrée à l'université ; nous en donnons quelques

* Lab-E3D, Université de Bordeaux – France – isabelle.bloch@u-bordeaux.fr

[1] Université de Pau et des Pays de l'Adour.

exemples. Nous explicitons ensuite le modèle d'analyse permettant d'identifier le niveau de conceptualisation auquel les étudiants parviennent dans la résolution d'un problème. Enfin nous appliquons ce modèle à la résolution par des étudiants en fin de première année de Licence d'un problème de courbe paramétrée, et nous regardons si le contexte « mécanique du mouvement » les aide à concevoir la courbe attendue.

II. LES VARIABLES MACRO-DIDACTIQUES DE LA TRANSITION

1. Les variables et leur fonction

Le travail de Ghedamsi (2008) a mis en évidence des variables macro-didactiques dans la transition lycée/université, relativement à une organisation globale de l'enseignement (et non une situation locale d'enseignement d'un nouveau savoir). Pour analyser la dimension locale, nous utiliserons le modèle de signes et milieux que nous avons introduit (Bloch & Gibel, 2011, nous donnons des précisions au §III ci-dessous). Remarquons que ce modèle de variables macro-didactiques permet de voir la nature épistémologique de l'enseignement donné, au niveau secondaire ou universitaire, et l'adéquation du travail des étudiants aux spécificités de ce niveau.

Les variables finalement retenues sont au nombre de onze ; les six premières variables (VD0 à VD5) concernent le statut des savoirs ; les variables VD6 à VD10 s'attachent à mesurer la façon dont les savoirs interviennent dans les pratiques mathématiques institutionnelles.

	Secondaire	***Début de Université***
Nature des objets		
0. Introduction d'un concept	Métaphore	Définition
1. Degré de formalisation	Faible	Elevé
2. Registre de validation	Algèbre	Analyse
3. Degré de généralisation	Aucun	Elevé
4. Introduction de notions nouvelles	Importante (*sans* outils spécifiques de validation)	Importante (*avec* des outils de validation)
5. Type de tâches	Algorithmes, graphiques	Démonstration
Travail mathématique		
6. Choix des techniques	Transparent, une seule technique en jeu	Amalgame de techniques
7. Degré d'autonomie sollicité	Routines	Peu de routine
8. Identification d'une notion	Processus	Objet
9. Conversions entre registres	Algébrique/Graphique – un seul registre indiqué dans la tâche	Alg/Analytique – et appel autonome à différents registres
10. Statut des énoncés d'exercices	Application, instanciation	Théorème, énoncé général

Tableau 1 *– Variables macro-didactiques*

La première variable VD0 définit le mode d'introduction des notions : ainsi la notion de continuité est introduite en fin de secondaire par des représentations graphiques et un appel à l'intuition, de même par exemple que le théorème des accroissements finis (comment doit se comporter la fonction pour que l'on soit sûr que la valeur zéro est atteinte ?).

Les autres variables de 1 à 5 quantifient les modalités sous lesquelles apparaissent les objets mathématiques, et les variables suivantes de 6 à 10 visent à paramétrer la façon dont les notions sont travaillées en classe, du point de vue des techniques, de l'autonomie requise des étudiants, et de leur degré de responsabilité dans le savoir.

On peut considérer que ces variables décrivent de façon pertinente les modifications des praxéologies entre les institutions secondaire et supérieur ; même si ce cadre d'analyse est également applicable dans d'autres contextes, le fait de le coupler avec le modèle des signes et des milieux (explicité ci-dessous) permet de bien cibler les connaissances des étudiants. Remarquons que nos constatations sur les décalages entre le secondaire et le supérieur rejoignent les observations de Bosch, Fonseca et Gascon (2004). Vandebrouck (2011) a aussi pointé le saut existant entre l'étude des fonctions au secondaire et à l'université : les élèves du secondaire ne savent manipuler que des fonctions définies par une formule algébrique, et manquent d'outils pour traiter d'autres fonctions – exponentielles, logarithmes, fonctions trigonométriques même – qui exigent d'autres méthodes, par exemple des encadrements et approximations. Il s'ensuit également que les étudiants ne prennent que peu en compte le fait que l'étude des fonctions implique des calculs et raisonnements à différents niveaux, soit ponctuel, global, local, ce dernier point de vue étant celui qui se trouve le moins investi. De ce fait l'étude locale des tangentes, notamment, est un exercice nouveau pour les étudiants.

On peut aussi remarquer que l'absence quasi systématique de validation formelle au secondaire rend les étudiants peu aptes à envisager ces validations dans des problèmes plus complexes ; ils se bornent donc à tenter une solution dans un modèle iconique[2], que l'on pourrait par exemple se représenter comme : « J'ai rencontré des fonctions de tel type (croissante, continue, etc.) donc je vais répondre en référence à ces exemples ».

2. Exemples de décalage entre le secondaire et le supérieur : les réponses 'iconiques'

Dans Bloch (2012) nous avions ainsi donné l'exemple d'une question sur la continuité. Un professeur en classe préparatoire demande l'étude de la fonction définie par :

Si $x \neq 0$, $f(x) = \frac{|x|}{x}\sqrt{|x|}$, *et* $f(0) = 0$

Sont demandés sa continuité, son sens de variations, et une fonction réciproque. Les étudiants considèrent majoritairement que *f* est définie en zéro donc continue en zéro (contrat didactique de l'enseignement secondaire). De plus la formule donnant la fonction pose manifestement problème à certains étudiants : si $x > 0$, les étudiants pensent que $f(x)$ est égal à $\sqrt{x}$, mais si $x < 0$, ils l'écrivent $-\sqrt{x}$. Pour ces étudiants, comme l'exprime l'un d'eux : "$|x|$ ça ne peut pas être $-x$". Le professeur rectifie en $-\sqrt{-x}$ mais manifestement certains des étudiants utilisent encore le signe 'moins' arithmétique : 'moins' signifiant 'négatif' et non 'opposé'. Les étudiants pensent ensuite que *f* est continue en zéro car sûrement dérivable, si bien que le professeur est amené à prendre position sur le fait qu'une fonction de ce type n'est pas, ou du moins pas de façon certaine, dérivable. Il s'agit là encore d'une réponse que l'on peut qualifier d'iconique : l'étudiant a déjà vu des fonctions dérivables et donc continues…

Le professeur propose en tant qu'aide de regarder la question suivante : on demande de montrer que la fonction est monotone sur $\mathbb{R}$. Des étudiants annoncent alors que *f* est décroissante sur $]-\infty, 0[$, car $x \longmapsto -x$ est décroissante et racine carrée croissante ; à quoi le professeur répond que c'est ennuyeux, car, vue la formulation de la question, *f* doit être

[2] Iconique est utilisé au sens de la sémiotique de Peirce (voir Bloch & Gibel 2011), i.e. c'est une réponse qui réfère à une image, ici par exemple une représentation graphique de fonction continue et dérivable.

monotone, et *f* est croissante sur]0, +∞[! Le professeur aura beaucoup de mal à dévoluer la question de la continuité de *f* en zéro. Les étudiants affirment ensuite que, si une fonction est continue sur une réunion d'intervalles, alors elle est continue sur l'intervalle entier… Les icônes de fonctions rencontrées au secondaire ne comportaient pas de discontinuités ! Dans le bref extrait qui est ici présenté, on peut faire l'hypothèse que le professeur chemine vers la résolution de son exercice par réfutations successives de propositions incorrectes basées sur les conceptions antérieures des étudiants, et contre lesquelles il peine à construire un milieu efficace, qui amorcerait une modification du statut des objets.

Les étudiants montrent ici une conception « iconique algébrique » de la continuité, conception liée à leur perception des fonctions comme ne présentant pas d'« accidents de parcours ». Rappelons que l'interprétation iconique des signes mathématiques est celle qui se borne à considérer une image – ici une image de fonction continue rencontrée dans l'enseignement secondaire, comme une parabole par exemple. L'étudiant qui privilégie cette façon de raisonner ne construit pas de nouveau savoir en lien avec les ostensifs, il se réfère à des connaissances antérieures inappropriées.

On peut aussi voir dans cet épisode un passage délicat de la pensée algébrique à la pensée analytique, avec également une remise en jeu problématique des connaissances sur les nombres (Bloch 2018).

III. OUTILS D'ANALYSE DES PRODUCTIONS D'ETUDIANTS SELON LES SIGNES ET LES MILIEUX

Face à ces enjeux, nous utilisons le modèle décrit dans Bloch & Gibel (2011) pour mieux analyser ces difficultés, et pour proposer des outils – des situations – permettant de faire accéder les étudiants aux techniques et technologies du supérieur.

	Milieu M-2	**Milieu M-1**	**Milieu M0**
Fonctions des raisonnements	R1.1 SEM - Intuition sur un dessin - Décision de calcul - Moyen heuristique - Exhibition d'un exemple ou d'un contre-exemple	R1.2 SYNT/SEM - Calculs génériques - Formulation de conjectures étayées - Décision sur un objet math.	R1.3 SYNT - Formalisation des preuves dans la théorie mathématique requise (avec aide du professeur éventuellement)
Niveaux d'utilisation des symboles	R2.1 SEM Icônes ou indices dépendant du contexte (schémas, intuitions…)	R2.2 SYNT/SEM Arguments 'locaux' ou génériques : indices, calculs	R2.3 SYNT Arguments formels spécifiques
Niveau d'actualisation du répertoire	R3.1 SYNT/SEM - Utilisation ponctuelle de connaissances anciennes - Enrichissement au niveau heuristique : calculs, conjectures ponctuelles	R3.2 SYNT/SEM Enrichissement au niveau argumentaire : - des énoncés - du système organisateur	R3.3 SYNT - Formalisation des preuves - Ostensifs organisés - Intégration des éléments théoriques
Nature du raisonnement	Abductif Inductif, Déductif	Inductif Déductif	Déductif

Tableau 2 *– Le modèle milieux/répertoire/symboles*

Afin de pouvoir analyser les dimensions locales du travail des étudiants (utilisation de techniques appropriées et maîtrise de ces outils, recours à des connaissances d'autres domaines, accès au savoir formalisé, etc.), nous avons produit ce modèle, qui permet de situer le travail observé à un niveau de milieu adapté, en analysant les signes produits par les

étudiants et leur adéquation à la preuve cherchée. Le modèle a été complété par Lalaude-Labayle (2016), qui a ajouté au tableau initial une ligne sur le mode de raisonnement : abductif, inductif ou déductif. Rappelons que SYNT signifie 'syntaxique' et SEM 'sémantique'. On peut voir dans le tableau la cohérence des milieux, des signes et des raisonnements : ainsi un raisonnement uniquement intuitif, dans M-2, sera associé à des signes iconiques et des calculs ponctuels, ainsi qu'à un raisonnement par exemple inductif ; lorsque l'étudiant progresse dans la validation, il utilisera des signes plus génériques (des formules générales vérifiées par exemple) et son raisonnement se rapprochera du déductif.

Dans des situations qui ne sont pas nécessairement adidactiques, ou seulement partiellement, il est fondamental de savoir si les concepts en jeu ont été compris, sont accessibles, et si les signes les représentant sont acquis – ou si les étudiants sont restés au niveau iconique, comme exemplifié pour les fonctions et la continuité dans l'extrait de la section I. Ainsi que nous le disions dans Bloch (2016) :

> Les signes mathématiques sont utilisés avec des règles qui peuvent être nouvelles pour les étudiants car cela comporte un protocole strict de validité ; et ils vont donc prendre, à ce niveau, une importance considérable. Une difficulté majeure de l'apprentissage des mathématiques au niveau supérieur est la traduction du *sens* des propriétés, théorèmes… en énoncés formels, autrement dit, l'articulation sémantique/syntaxique, comme cela a été pointé dans les travaux notamment de Barrier (2008). Il s'ensuit que la transformation inverse – partir d'un énoncé formel et l'associer aux objets concernés – pose aussi fortement problème.

L'articulation des dimensions syntaxique et sémantique est essentielle pour la conceptualisation des objets mathématiques, et elle est trop rarement prise en compte, notamment dans l'enseignement supérieur. Les enseignants de l'université de Pau ont tenté d'introduire cette dimension sémantique par un lien entre problèmes de mouvement – en mécanique donc – et le cours sur les équations différentielles et courbes paramétrées. Nous pouvons noter que Rogalski (2008) prône aussi ce rapprochement afin de faire travailler sur le sens des objets en jeu. Notre questionnement porte sur l'efficacité de ce dispositif, via l'analyse de productions d'étudiants.

IV. LA MODELISATION DE SITUATIONS DE MOUVEMENT, UNE AIDE POUR COMPRENDRE LES COURBES PARAMETREES ?

La licence de mathématiques à l'UPPA comporte en 2014, 2015 et 2016 une unité d'enseignement de Licence 1 intitulée : *Mathématiques du mouvement*. Le programme de cette unité inclut les équations différentielles, les courbes paramétrées, et de façon générale, des connaissances sur les fonctions, les dérivées, les intégrales, les séries… appliquées à des problèmes de modélisation du mouvement, avec une variable *t* supposée représenter le temps.

1. Le cours "Mathématiques du mouvement"

Le cours introduit les notions de coordonnées polaires et coordonnées sphériques, puis les notions cinématiques fondamentales : vitesse, mouvement rectiligne, mouvement plan, mouvement central. Les sujets traités sont ensuite les courbes paramétrées, l'abscisse curviligne, le repère de Frenet. Il est à noter que la notion de repère de Frenet pour étudier les courbes paramétrées a été au moins abordée en physique en Terminale S. Le cours traite ensuite les notions de vitesse et accélération dans le repère de Frenet, les points d'inflexion,

les points de rebroussement de 1ère et 2ème espèce. Les points de rebroussement sont notamment caractérisés en fonction de la parité de la première dérivée non nulle[3].

Notons que l'ensemble du cours est très bien structuré, mais deux obstacles nous semblent devoir être pointés ;

- les situations 'réelles' de physique sont peu présentes et il nous semble peu probable que les étudiants soient en mesure de faire le lien avec des situations de mouvement déjà rencontrées, voire avec les concepts de trajectoire, de vitesse, d'accélération, etc.
- les horaires de cette UE de Licence 1 ne laissent que peu de place à la possibilité de mettre les étudiants en situation de recherche de problèmes – ce qui leur permettrait certainement de mieux saisir les concepts en jeu. Le cours comporte d'ailleurs des définitions et théorèmes, mais peu d'exemples d'étude de mouvements dans un contexte de sciences physiques. En nous référant au modèle des variables macro-didactiques, on peut dire que ce cours cible des définitions (VD0), un degré élevé de formalisation (VD1), une introduction formelle de nouvelles notions (VD4) mais propose peu de mise en activité des étudiants sur ces niveaux de variables.

2. Analyse a priori du problème 'courbe paramétrée'

Une notion importante de ce cours est celle de courbe paramétrée. Une courbe paramétrée fait intervenir deux fonctions $x = f(t)$ et $y = g(t)$ à étudier. Les étudiants doivent comprendre que l'objectif final est de trouver une courbe rendant compte des variations de y par rapport à x, donc de la trajectoire du mobile concerné. Et donc l'étude des fonctions f et g (et le calcul de leurs dérivées) n'est qu'une étape – de type R1.2 en se référant au tableau 2 – pour aboutir à cette courbe. Le tracé de la courbe nécessite cependant de donner des valeurs à t, afin d'être sûr d'avoir la totalité de la trajectoire ; on peut aussi chercher à éliminer t, mais cela risque parfois de ne pas être simple. Il semble, d'après ce que notre lecture du cours final distribué aux étudiants a pu nous révéler, que ce cours n'insiste que peu sur le lien à faire entre courbe paramétrée et trajectoire du mobile. En clair, ceci est laissé en grande partie à la responsabilité des étudiants.

Une difficulté vient aussi de la nature des tangentes : contrairement aux courbes algébriques, les courbes paramétrées peuvent avoir deux tangentes au même point, lequel est dans ce cas un point singulier – or les étudiants n'en ont pas rencontré dans le secondaire. Certes ils ont étudié la fonction valeur absolue, qui a bien deux tangentes au point zéro… mais cette propriété fait rarement l'objet d'une définition spécifique par les professeurs du niveau secondaire.

Ils sont supposés cependant identifier la nature de ce point, par exemple un point de rebroussement. Ceci suppose de constater d'abord que $x'(t) = 0$ et $y'(t) = 0$, puis de calculer les dérivées successives : ceci est du niveau R2.3 ou R3.2 au moins, car cela implique des interprétations spécifiques sur le résultat des calculs et donc le passage à un niveau argumentaire. On peut voir aussi dans cette étape la mise en œuvre des variables macro-didactiques VD4, VD5 et VD6 : introduction de nouvelles notions, avec nécessité de démonstration ; sont aussi sollicitéesVD8 et VD9, avec l'identification des objets et le recours à différents registres de façon autonome.

Nous avons étudié les copies d'un examen de 2014 comportant quatre exercices : deux sur les courbes paramétrées, un sur des coordonnées polaires et un sur une équation différentielle

[3] Pour plus de détails, on peut consulter le site http://serge.mehl.free.fr/anx/Rebroussement.html

linéaire du premier ordre. L'énoncé du premier exercice sur les courbes paramétrées (dont nous donnons ici les résultats) était le suivant :

> Etudier la courbe paramétrée définie par : $x(t) = a\ t^2/(1+t^2)$, $y(t) = a\ t^3/(1+t^2)$ avec $t \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il suffit de l'étudier pour $t \geq 0$; comment obtient-on ensuite la courbe sur $]-\infty, 0[$? Déterminer ses variations et prouver que la courbe possède une asymptote et un point singulier pour $t = 0$. Montrer que l'équation cartésienne de la courbe est $y^2 = x^3/(a - x)$.

Les étudiants devaient donc calculer $x(-t)$ et $y(-t)$ et conclure sur la symétrie ; calculer les dérivées, faire le tableau de variations et ne pas oublier les limites ; il fallait ensuite interpréter ces calculs. La courbe a un point singulier, il faut déterminer ses coordonnées et sa nature (point de rebroussement) : le cours a traité la façon de procéder dans ce cas. L'asymptote peut aussi donner lieu à des erreurs, car quand $t \to +\infty$ alors $x \to a$ et $y \to +\infty$ *;* donc elle est verticale, mais $t \to +\infty$ ce qui peut troubler car, dans le cas d'une courbe algébrique, lorsque la variable tend vers l'infini l'asymptote est horizontale. Ceci met donc en jeu les variables macro-didactiques répertoriées plus haut : VD5, VD6, VD7.

3. Analyse des productions des étudiants

Nous avons classé les productions des étudiants par ordre décroissant de réussite de S1 à S14. Les trois premières copies réussissent complètement l'examen (notes de 19 à 20). Sept étudiants ont la moyenne, et les sept dernières productions sont insuffisantes, les notes allant de 8, à 2 pour S14. Ainsi S11 confond le signe de t et ceux de x et y ; la moitié des étudiants ont un problème avec la symétrie et ne savent pas l'identifier ; on observe de nombreuses erreurs de signes dans les calculs, et des erreurs dans le calcul de la dérivée d'une fonction – bien que ceci ait été traité au lycée. Sur les quatorze copies on a le bilan suivant, qui atteste du peu de réussite globale des quatorze étudiants concernés, et du contraste très fort entre les meilleurs étudiants, qui réussissent la majeure partie du problème, et ceux qui ne maîtrisent que très peu les concepts et techniques en jeu :

Dérivées	***Symétrie correcte***	***Asymptote x = a***	***Point singulier***	***Courbe***
Calcul correct 12	7	Limites : 6 $x = a$: 4	Dérivées nulles : 6 Nature : 4	7 - en accord avec la symétrie

Tableau 3 *– Bilan des difficultés des étudiants*

Seule l'étudiante S1 résout complètement l'exercice : elle calcule les dérivées, décode l'aspect de la courbe, trace le graphe avec l'asymptote et détermine le point singulier – ce qui nécessite de calculer $x^{(3)}(t)$ et $y^{(3)}(t)$ pour $t = 0$. S1 atteint le niveau R2.3 : elle formalise les preuves attendues dans la théorie. L'étudiant S14 ne réussit aucun calcul ni conclusion. Cinq autres étudiants rencontrent des difficultés pour calculer les dérivées et interpréter le sens de variations, la symétrie et le point singulier. Un étudiant dit que a doit être un paramètre, mais il ne précise pas de quoi. Une étudiante déclare que l'équation de la courbe doit être $x(t)+y(t)$, où l'on peut voir une difficulté manifeste à envisager qu'une courbe n'a pas *une* équation.

Ainsi nous voyons que même au niveau M-2 (en référence au tableau 2 des milieux et signes), certains étudiants ne se montrent pas aptes à entreprendre les calculs pertinents, ou à les interpréter – car certains ne réalisent pas que le problème n'est pas celui d'une fonction d'une variable. Seulement six étudiants calculent les limites et concluent sur la nature de l'asymptote, atteignant ainsi le niveau R2.2 ; mais parmi ces six, deux écrivent y = a pour l'équation de l'asymptote… Certains étudiants font aussi des erreurs dans le calcul des dérivées et primitives ; de nombreux étudiants sont déstabilisés par la recherche du point

singulier et ne réussissent pas à trouver sa tangente. Par exemple S6 essaie de le déterminer en calculant $x(t) = 0$ et $y(t) = 0$ au lieu des dérivées. S2, qui par ailleurs réussit assez bien l'ensemble du devoir, écrit : « si $t = 0$, tout vecteur non colinéaire à la courbe est tangent à la courbe » (?).

V. CONCLUSION

L'étude que nous avons menée dans le cadre de cette Unité d'Enseignement fait donc apparaître de nombreuses difficultés : confusions sur ce qu'est un paramètre, échecs dans la recherche d'une asymptote. Trouver un point singulier et identifier sa nature, et sa ou ses tangentes, se révèle également très problématique, et ceci même si les étudiants maîtrisent le calcul des dérivées successives : certains peinent à appliquer la règle $x'(t)=0$, $y'(t)=0$, et d'autres à se retrouver ensuite dans le calcul des dérivées successives pour trouver la tangente. Nous pouvons voir que certains étudiants calculent correctement (dérivées, limites…) mais ne réussissent pas à interpréter ces calculs, restant bloqués aux niveaux R2.1 ou R2.2. Nous observons aussi les changements de nature – attendus – des variables macro-didactiques dans la transition.

De cette analyse des solutions rendues par les étudiants nous concluons que la référence au mouvement ne semble pas les avoir aidés à comprendre le 'fonctionnement' d'une courbe paramétrée ; nous pensons qu'un travail dans ce cadre peut être productif, mais à la condition d'inclure des allers-retours nombreux entre calculs mathématiques et interprétations dans le modèle physique, et en travaillant les techniques et leur explication de façon plus soutenue. Il serait aussi important que les étudiants aient des moments de recherche sur des situations articulant mathématiques et phénomènes physiques.

Les enseignants de cette UE ont-ils cru qu'une simple évocation du contexte « mouvement » suffirait à aider les étudiants à comprendre les courbes paramétrées, et n'ont-ils pas eu assez de temps pour travailler des techniques qui s'avèrent nouvelles et déstabilisantes pour leurs étudiants ? C'est une hypothèse assez vraisemblable, au vu des résultats. Néanmoins, sur les sept étudiants ayant validé l'UE en question, trois étudiants réussissent très bien l'examen, et deux autres ont une note satisfaisante à l'exercice sur les courbes paramétrées ; on peut penser aussi que des dispositifs d'aide au travail personnel, tels que ceux détaillés par Jaworski (2016), seraient nécessaires pour aider ceux qui en ont le plus besoin. Les considérations développées par Rogalski (2008) nous paraissent également complètement adaptées à ces problèmes de transition. Un dispositif du type de l'unité "Mathématiques du mouvement" pourrait être prometteur du point de vue épistémologique : il consisterait à articuler mathématiques et sciences physiques pour mieux comprendre les mathématiques, mais ne pourrait s'avérer productif qu'avec une analyse didactique préalable, menée rigoureusement, qui établirait les liens précis entre les difficultés mathématiques et la possibilité du contexte physique d'éclairer ces difficultés spécifiques, et de poser la question de *la raison d'être* des savoirs mathématiques. Il faudrait donc inclure dans l'enseignement des situations élaborées dans ce but, et aussi afin de travailler l'articulation sémantique/ syntaxique, articulation qui est l'une des clés de la compréhension des concepts mathématiques en jeu, et à laquelle la physique peut contribuer, par exemple en introduisant l'usage de logiciels permettant de visualiser le mouvement.

Notre travail de recherche s'oriente vers cette construction d'ingénieries. Des propositions existent déjà, voir par exemple la commission université sur le portail des IREM (notamment Brochure limites, 2017, sur les notions d'analyse). Actuellement nous travaillons avec des collègues du département de mathématiques de l'UPPA sur un dispositif méthodologique

d'aide aux étudiants de Licence première année, afin d'aider ces étudiants à saisir le sens des concepts mathématiques en jeu dans l'étude des fonctions (continuité, dérivée, intégrale, etc.). L'articulation des concepts avec des situations de physique fait partie de nos pistes de recherche.

REFERENCES

Bloch I. (2012) Rôle et statut des savoirs dans la pratique mathématique : l'exemple d'un basculement épistémologique dans l'enseignement de l'analyse. In J.-L. Dorier & S. Coutat (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (pp. 392–403). Disponible sur : http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Bloch I. (2016) L'enseignement de l'analyse, de la limite a la dérivée et aux équations différentielles : questions épistémologiques et didactiques. In Y. Matheron et al. (Eds.), *Enjeux et débats en didactique des mathématiques* (67-92). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Bloch I. (2018) Connaissances sur les nombres des élèves de fin de secondaire et adaptation à l'université. *Petit x*, 106, 65-77.

Bloch I., & Gibel P. (2011). Un modèle d'analyse des raisonnements dans les situations didactiques: étude des niveaux de preuves dans une situation d'enseignement de la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *31*(2), 191-227.

Bloch I., & Gibel P. (2016) A model to analyse the complexity of calculus knowledge at the beginning of University course. In E. Nardi, C. Winsløw & T. Hausberger (Eds.), *Proceedings of the First Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics (INDRUM 2016)* (pp. 43-52). Montpellier, France: University of Montpellier and INDRUM.

Bosch M., Fonseca C., & Gascon J. (2004) Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 24*(2.3), 205-250.

Brochure limites (2017) : Bloch I., Bridoux S., Durand-Guerrier V., Grenier D., Frétigné P., Mac Aleese J., Madec G., Menini C., Rogalski M., Sénéchaud P., Vandebrouck F. *Limites de suites réelles et de fonctions numériques d'une variable réelle : constats, pistes pour les enseigner*. Commission Inter-IREM Université, IREM de Paris. 160 pages. Documents en ligne sur : www.univ-irem.fr/spip.php?rubrique26

Ghedamsi I. (2008) *Enseignement du début de l'analyse réelle à l'entrée à l'université.* Thèse, Université Bordeaux 2.

Jaworski B. (2016) Supporting students in learning mathematics at University level: practices and issues. *Séminaire ARDM*, Université Paris Diderot. *http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/articles/videos_du_colloquium_cfem-ardm/*

Lalaude-Labayle M. (2016) *L'enseignement de l'algèbre linéaire au niveau universitaire. Analyse didactique et épistémologique.* Thèse, Université de Pau et des Pays de l'Adour.

Rogalski M. (2008) *Faut-il proposer un socle commun pour la licence de mathématiques des universités françaises ?* educmath.ens-lyon.fr/Educmath/en-debat/math-universite/reponse-de-marc-rogalski

Vandebrouck F. (2011) Perspectives et domaines de travail pour l'étude des fonctions. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, *16*, 149-185.

CLASSE INVERSEE POUR INTRODUIRE LES SUITES NUMERIQUES : UNE EXPERIENCE EN PREMIERE ANNEE UNIVERSITAIRE

BRIDOUX[1*] Stéphanie

Résumé – Dans cette communication, nous présentons une expérience de classe inversée en première année universitaire qui mène à des constats négatifs du point de vue de l'enseignant. Pour le didacticien, cette expérience montre cependant l'intérêt d'étudier les moments de cours, et l'analyse des questions posées par les étudiants après avoir visionné la vidéo du cours permet de plus de réfléchir à une organisation plus positive de ce type d'expérience.

Mots-clefs : classe inversée, capsules, moments de cours, proximités discursives, suites numériques

Abstract – In this contribution, we present a flipped classroom experiment in first year university that leads to negative results for the teacher. However, for the didactic researcher, this experiment shows the importance of studying the telling moments of knowledge exposure and the analysis of the questions asked by students after watching the video leads to rethink a more positive organization of this kind of experiment.

Keywords: flipped classroom, video clips, telling moments of knowledge exposure, discursive proximities, numerical sequences

I. PROBLEMATIQUE

Plusieurs rapports internationaux (European Schoolnet[2] ou CBMS[3] par exemple) préconisent l'intégration de pratiques innovantes (classe inversée, utilisation des clickers,…) dans l'enseignement des sciences et des mathématiques pour rendre les étudiants davantage acteurs de leurs apprentissages. Selon Dumont et Berthiaume (2016), les méthodes d'enseignement de type transmissif ne sont d'ailleurs plus adaptées au public actuel. Cependant, force est de constater que l'organisation classique « cours magistraux – travaux dirigés » reste prédominante dans l'enseignement universitaire belge. Dans cette communication, nous nous intéressons à la pratique de la classe inversée dans l'enseignement universitaire. Cette pédagogie consiste à faire travailler le cours aux étudiants à la maison par le biais de documents ou de vidéos (capsules) pour consacrer le temps en classe à faire des exercices. L'inversion de la nature des activités d'apprentissage par rapport à un cours classique aurait pour effets positifs de mieux respecter les rythmes individuels et de rendre les étudiants plus autonomes. Des exemples positifs sont en effet décrits dans plusieurs recherches (Braun, Bremser, Duval, Lockwood & White, 2017 ; Love, Hodge, Grandgenett & Swift, 2014).

Nous décrivons ici une expérience de classe inversée organisée en 2015 en première année universitaire dans un de nos cours de mathématiques pour des étudiants en informatique. Celle-ci visait le tout premier chapitre du cours qui traite des suites numériques. Précisons d'emblée qu'il s'agissait d'une première expérience de ce type de pédagogie à la fois pour l'enseignant-chercheur que nous sommes et pour ses 31 étudiants.

Plusieurs raisons nous ont poussée à expérimenter la classe inversée. Tout d'abord, cette pratique prend de l'ampleur dans l'enseignement secondaire belge. Les enseignants ont accès à des formations sur cette thématique, ce qui signifie que les étudiants qui entreront à l'université dans les prochaines années sont susceptibles d'avoir été formés avec cette pédagogie. Nous nous sommes donc demandé ce qu'ils retireront d'une séance de cours magistral à l'université de plus d'une heure alors qu'ils auront été habitués à prendre

1 * LDAR (EA4434) UMONS – Belgique – stephanie.bridoux@umons.ac.be

2 http://www.eun.org/resources/country-reports

3 http://www.cbmsweb.org/Statements/Active_Learning_Statement.pdf

connaissance du cours avec des capsules dont la durée est en général de l'ordre de 10 minutes. D'autre part, beaucoup de notions enseignées en première année d'université, en analyse et en algèbre linéaire notamment, sont des notions formalisatrices, unificatrices et généralisatrices (notions FUG, au sens de Robert, 1998). Ces notions introduisent de la généralité en unifiant des connaissances antérieures grâce à un nouveau formalisme. Ces notions sont souvent difficiles à introduire avec un problème où elles apparaitraient comme l'outil optimal de résolution. De plus, le caractère formalisateur de ces notions est tel qu'il est souvent difficile d'en comprendre instantanément le sens. Il y a donc un intérêt à essayer d'apprécier comment les étudiants peuvent donner du sens à ces notions et ce qu'ils retirent d'un cours qu'ils apprennent en visionnant une capsule seuls.

Dans ce contexte, notre problématique de recherche vise à étudier comment la mise en place d'un nouveau dispositif d'apprentissage, ici la classe inversée pour introduire les suites numériques, influence les premiers apprentissages des étudiants et les pratiques de l'enseignant lorsque les étudiants reviennent en classe après écoute de la capsule. Après avoir présenté quelques outils d'analyse sur l'étude des cours magistraux, nous décrivons et analysons notre expérience avec ces outils. Par le biais d'un questionnaire, nous retirons ensuite quelques éléments partiels et limités sur les apprentissages de nos étudiants.

II. L'ETUDE DES MOMENTS DE COURS

Notre inscription dans la Théorie de l'Activité (Vandebrouck, 2008) nous amène à postuler que les activités des élèves sont déterminantes pour leurs apprentissages, même si cela reste partiel. Cependant, notre problématique porte sur les moments où l'enseignant expose des connaissances qui constituent le « cours ». C'est ce que nous appelons des moments d'exposition des connaissances, pendant lesquels les activités des étudiants sont encore moins observables que durant les phases d'exercices où ils sont plus actifs. Nous nous centrons donc dans ce cas sur le discours de l'enseignant pour percevoir ce qui est en jeu, y compris les commentaires qu'il peut ajouter au strict contenu mathématique ou sur le travail mathématique attendu. Précisons notre propos en présentant brièvement les outils utilisés pour mener cette étude. Une présentation détaillée en est donnée dans (Bridoux, Grenier-Boley, Hache & Robert, 2016).

Un moment de cours est l'occasion pour l'enseignant de présenter aux étudiants des concepts (du moins perçus comme tels par l'enseignant) avec des mots, des formules,… au sein d'un certain environnement éventuellement (histoire, commentaires, questions,…) mais en sachant que ce ne sont pas encore des concepts pour les étudiants. Nous voyons ici une analogie avec les notions de « concept image » et de « concept definition » (Tall & Vinner, 1981). Selon ces auteurs, l'enseignant peut en effet jouer un rôle important dans le développement du « concept image » chez l'étudiant car il suggère volontairement ou involontairement des associations que les étudiants pourront s'approprier. Ainsi, l'enjeu des moments de cours est que cela participe aux acquisitions visées. Nous faisons l'hypothèse qu'une des manières développables par les enseignants pour y arriver est de tenir un discours aussi « proche » que possible des connaissances et savoir-faire déjà-là des étudiants, notamment grâce à l'activation de connexions entre ces mots, ces formules, associés à ce qui est visé… et ce qu'ils savent ou ont déjà fait. Pour caractériser ces rapprochements, Robert & Vandebrouck (2014) introduisent la notion de *proximité-en-acte* qui qualifie ce qui, dans les discours ou même dans les décisions des enseignants pendant les déroulements des séances, peut être interprété par les chercheurs comme une tentative de rapprochement avec les élèves. Ces proximités peuvent être d'ordre cognitif ou non, et concernent ou non tous les élèves. Dans (Bridoux et al., 2016), nous avons distingué dans le discours des enseignants trois types

de proximités discursives de nature cognitive. Il s'agit de fragments de discours de l'enseignant, éventuellement accompagnés de gestes ostensifs, dont nous supposons qu'ils peuvent[4] contribuer à la compréhension des étudiants. Ces proximités peuvent relever :

- soit de la généralisation d'un exercice qui aboutit à l'expression, la définition, voire la démonstration d'une propriété générale (*proximité ascendante*) ;
- soit de la manière dont on peut utiliser dans un exercice, voire dans une démonstration, une propriété (ou définition) générale (*proximité descendante*) ;
- soit du travail local sur une formule par exemple ou sur le sens d'un théorème, qui n'amène pas de changement de niveau de généralité (*proximités horizontales* plus ou moins générales). De plus, les proximités peuvent être spontanées, ou provoquées par des réponses d'élèves à des questions de l'enseignant, ou bien amorcées par des questions d'élèves.

Des exemples sont donnés par la suite. Se pose alors la question de la référence à utiliser pour repérer les éléments importants des cours, qui remplacerait l'analyse *a priori* des tâches proposées effectuée pour les moments d'exercices, et en déduire des occasions de proximités, qui seront tentées ou non, à différents moments des déroulements. Nous nous basons sur l'étude de ce que nous appelons le « relief » de la notion. Cette étude se fait selon trois dimensions imbriquées : épistémologique (nature des notions), curriculaire (institution, programmes) et cognitive (difficultés des élèves). À partir du relief, le chercheur distingue des occasions de proximités (*a priori*) et, dans le discours tenu, des proximités possibles – ou inexistantes (*a posteriori*). Il peut y avoir des proximités possibles imprévues. Toutes restent seulement possibles, nous y insistons, tout comme les activités des élèves d'ailleurs.

En ce qui concerne les capsules, étudiées à différents niveaux d'enseignement (Allard, Asius, Bridoux, Chappet-Pariès, Pilorge & Robert, 2015), les analyses menées ont montré que, sans doute compte tenu de la brièveté visée (moins de 8 minutes), les contenus présentés dans les capsules sont souvent isolés, il n'y a pas de lien avec ce qui précède ni avec ce qui suit. Il y a peu de tentatives de proximités horizontales et celles rencontrées prennent souvent la forme de commentaires ou d'explications sur le développement des calculs ou sur les manipulations algébriques. Enfin, le vocabulaire utilisé est souvent familier et pas toujours rigoureux. Les capsules contiennent donc en général beaucoup d'implicites et d'omissions par rapport à un « vrai » cours. Mais leur utilisation peut sembler motivante et moins ardue pour les élèves que le cours en classe et, argument souvent mis en avant, permet de dégager du temps pour travailler les exercices en classe avec les élèves.

À partir d'éléments de relief relatifs à la description de notre cours, nous montrons ensuite comment l'étude des proximités nous a permis d'analyser le matériel utilisé dans notre expérience (dont une capsule) en comparaison du cours « classique » (ainsi nommé dans toute la suite) que nous donnons traditionnellement et de mieux comprendre ce qui s'est passé en classe après que les étudiants aient visionné la capsule.

III. QUELQUES ELEMENTS DE RELIEF SUR LES SUITES NUMERIQUES

Dans le cours « classique » que nous donnons depuis plusieurs années maintenant, le chapitre sur les suites est peu volumineux (3 heures en cours magistral et 6 heures en travaux dirigés). De plus, les suites ont été étudiées dans l'enseignement secondaire. Cependant, l'aspect fonctionnel de cette notion y est peu mis en évidence. L'accent est mis sur l'étude des suites arithmétiques et géométriques et la monotonie de ces suites est établie sous la forme d'un

4 Cela reste potentiel, nous n'avons pas d'éléments pour vérifier que l'effet présumé a eu lieu.

résultat à retenir en fonction de la raison de la suite. Les définitions sont donc très peu utilisées et il y a peu de liens entre les notions. Dans notre cours, nous verrons que l'enseignant introduit la définition d'une suite numérique en prenant appui sur des exemples de suites donnés par les étudiants pour formaliser petit à petit la notion en termes de fonction. Ces moments sont l'occasion de tenter des proximités ascendantes (en partant d'exemples) accompagnées de proximités horizontales (commentaires sur les dessins par exemple). La représentation graphique d'une suite numérique est aussi abordée. La monotonie d'une suite est ensuite étudiée puis viennent les notions de suite majorée, minorée et bornée. Des liens entre les notions sont démontrés à partir des définitions, comme par exemple le fait qu'une suite positive est minorée par 0 ou le fait qu'une suite constante est à la fois croissante et décroissante. L'enseignant donne également des exemples et des contre-exemples pour toutes les notions. Les phases de démonstrations et de productions d'exemples sont l'occasion de tenter des proximités horizontales, par exemple sur l'utilisation des quantificateurs présents dans les définitions et leur négation. Ce sont sans doute ces aspects qui distinguent les activités mathématiques des étudiants de celles qu'ils ont pu réaliser dans l'enseignement secondaire sur les mêmes notions. Dans notre cours, ce chapitre pose en général peu de difficultés aux étudiants. Une étude détaillée du relief[5] sur les notions visées intégrant de manière plus approfondie les dimensions épistémologique, curriculaire et cognitive est actuellement en cours.

1. Le matériel

Le matériel fourni aux étudiants est constitué d'une vidéo de cours provenant du site Exo7[6](https://www.youtube.com/watch?v=eKWRb_wLczo&index=1&list=PL20E5F69BB88FEDEE) et du polycopié correspondant (http://exo7.emath.fr/cours/ch_suites.pdf). La capsule s'intitule « Suites – partie 1 : définitions » et dure 7'54''. Dans le poly, les trois premières pages portent sur les notions enseignées dans le cours « classique ». La capsule et le poly sont très proches, ils abordent les mêmes notions, présentent les mêmes définitions, propriétés et exemples. Il y a dans la capsule quelques commentaires supplémentaires par rapport au poly mais ceux-ci sont peu nombreux et restent seulement oraux. Comme la capsule et le poly traitent peu d'exemples, nous avons complété ce matériel en rédigeant nous-même une liste d'exercices d'entraînement ainsi que leur correction, telle qu'elle serait attendue par l'enseignant en termes de rigueur mathématique. Ces premières tâches, simples et immédiates, sont précisément des exemples que nous traitons habituellement dans le cours « classique ».

Une première différence entre ce matériel et notre cours donné en amphi est le temps « consacré » au chapitre : de l'ordre de 8 minutes pour la capsule pour environ trois heures de cours magistral alors que les contenus abordés sont identiques. Ce n'est pas la seule différence. La capsule démarre par la définition d'une suite numérique. La définition est lue par l'enseignant. Il présente alors des exemples de suites et des explications sont données à l'oral uniquement sur la manière de calculer les premiers termes des suites. Rien n'est dit sur le fait que chaque relation est bien une fonction, comme le précise la définition. Ainsi, vu ce choix d'introduction, il y a dans la capsule des proximités descendantes possibles mais celles-ci restent très locales et liées à des aspects calculatoires. De plus, elles ne sont pas

5 Des exemples d'études de relief sur les fonctions et les limites sont présentés dans (Bridoux et al., 2016).

6 Ce choix tient au fait que ce site couvre de nombreux contenus enseignés à l'université et a de plus une certaine renommée.

accompagnées de proximités horizontales qui permettraient à l'étudiant de comprendre comment les cas particuliers s'inscrivent effectivement dans le cas général.

Dans le cours « classique », l'enseignant demande aux étudiants de donner des exemples de suites. Il profite ainsi du fait qu'ils en ont déjà rencontrés dans le secondaire. L'enseignant complète cette première liste avec des exemples plus compliqués et amène ensuite l'idée de trouver une formule pour le terme correspondant à un indice donné. La notion de fonction et du domaine associé émergent donc assez naturellement et l'enseignant peut alors construire la définition d'une suite numérique avec les étudiants. Des exemples de relations sont ensuite proposés par l'enseignant et il justifie avec les étudiants s'il s'agit ou non de suites. Il y a donc un travail long de formalisation pour définir la notion de suite durant lequel l'enseignant prend appui sur les connaissances antérieures des étudiants. Ce cheminement est l'occasion de repérer des proximités ascendantes dans le discours de l'enseignant accompagnées de proximités horizontales pour commenter les exemples traités. D'autres différences entre la capsule et le cours « classique » sont décrites dans Allard & al. (2015).

2. Déroulement de l'expérience

Une réunion a été planifiée par l'enseignant avec les étudiants où il leur a expliqué que pour le premier chapitre du cours, ils travailleraient seuls la partie théorique à partir d'un matériel mis à leur disposition sur la plateforme de cours en ligne. Un délai d'une semaine a été donné pour s'approprier le contenu du chapitre. Aucun commentaire sur la manière d'utiliser le matériel proposé n'a été donné par l'enseignant, estimant qu'au deuxième semestre de cours, les étudiants devaient être habitués aux exigences de l'enseignant et avoir développé une certaine autonomie dans le travail personnel. Il a également été spécifié aux étudiants que la séance prévue la semaine suivante serait un TD sur les notions visées. En réalité, l'enseignant a prévu, lors de cette séance de TD, d'être présent[7] et de d'abord demander aux étudiants s'ils ont des questions sur le matériel utilisé. Nous analysons ici une phase du déroulement en classe à partir d'une question posée par les étudiants au début de cette séance :

Question 2 : Dans l'exercice où on montre que (n^2) n'est pas majorée, je n'ai pas compris ce qu'était une suite non majorée. Pouvez-vous réexpliquer ?

Début de la solution proposée dans le corrigé : La suite (n^2)est minorée par 0 car c'est une suite positive. Elle n'est pas majorée, c'est-à-dire $\forall m \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, n^2 > m$.

L'enseignant demande d'abord aux étudiants ce qu'est une suite majorée avant d'aborder la négation de la définition correspondante. Pour ce faire, il leur suggère de l'expliquer « avec leurs mots », il n'attend donc pas dans un premier temps la définition formelle mais bien la représentation intuitive que les étudiants ont pu se construire avec le matériel. Cette démarche est totalement différente de celle du cours « classique » où l'enseignant part d'une caractérisation intuitive et montre que ce type de représentation est en général insuffisant pour justifier un argument. Cela conduit les étudiants à la nécessité de formaliser le concept. Ici, celui-ci a été formalisé dans le poly et la vidéo et il faut revenir à une représentation intuitive. Ceci va amener l'enseignant à introduire la représentation graphique d'une suite, élément qui n'est pas introduit dans le poly et la vidéo. Pourtant, des suites y sont représentées graphiquement sans explication pour illustrer la notion de suite majorée et expliquer l'idée de « pallier » évoquée dans la vidéo. L'enseignant est confronté à une véritable déstructuration de l'ordre qu'il suit habituellement et ce sont d'autres proximités qui sont actionnées.

7 Le titulaire d'un cours n'est en général pas présent pendant les TD puisque ceux-ci sont assurés par un doctorant.

Cette première partie de la séance consacrée à répondre aux questions des étudiants a duré environ une heure et est détaillée dans (Allard & al., 2015). L'enseignant propose ensuite un exercice classique qui consiste à donner une liste de suites et à en demander le domaine et les premiers éléments. Les étudiants ont travaillé seuls pendant une quinzaine de minutes. L'enseignant s'engage alors dans la correction au tableau à partir d'un travail collectif avec les étudiants. Par un jeu de petites questions, il en profite pour aller un peu plus loin pour certaines suites en demandant si elles sont croissantes ou non, en évoquant des liens possibles entre la croissance et le caractère majoré d'une suite ou encore de produire d'autres exemples. Les questions de l'enseignant, bien que restant seulement orales, provoquent des sous-activités chez les étudiants liées à la reconnaissance des définitions et à des mises en relation entre les notions. Il est alors frappant pour l'enseignant de constater que les étudiants ne sont pas capables de produire d'autres exemples que ceux rencontrés dans le matériel et un nombre important d'étudiants pensent qu'une suite croissante ne peut pas être majorée. Des compléments sur le cours théorique sont de nouveau ajoutés ici par l'enseignant.

Ainsi, durant cette séance, des difficultés récurrentes et peu présentes dans le cours « classique » sont repérées par l'enseignant : le fait qu'une suite est une fonction est absent chez un grand nombre d'étudiants, les notations ne sont pas du tout installées (oubli des parenthèses pour écrire une suite), le répertoire d'exemples que les étudiants se sont construits est très pauvre et des conceptions erronées sont présentes chez beaucoup d'étudiants. De plus, l'enseignant a été amené à reprendre une grande partie du cours « classique » mais dans un ordre différent et en allant probablement moins loin dans les liens tissés habituellement puisqu'il s'agissait d'apporter des réponses précises aux questions des étudiants. Ce moment de cours « forcé » par les questions des étudiants a donc été complètement déstructuré par rapport au cours « classique ». Toutefois, l'analyse de ce déroulement montre la présence de nouvelles proximités dans le discours de l'enseignant par rapport au cours « classique ». Celles-ci sont initiées par les questions des étudiants, l'élément nouveau étant un besoin de clarification provoqué par les étudiants. Elles visent donc à lever toute une série d'implicites (insister sur le sens d'une notion, construire un lien non développé dans la capsule). En ce sens, l'étude des proximités permet d'apprécier l'intérêt des interactions avec les étudiants et montre bien qu'il y a des implicites que les étudiants ne peuvent pas lever seuls.

De notre point de vue d'enseignant, cette manière de procéder pour ce chapitre n'a pas du tout favorisé l'autonomie des étudiants. Ils semblent ne pas être allés au-delà de ce qui est écrit ou dit dans le matériel, contrairement à ce qui est favorisé dans le cours « classique » (trouver de nouveaux exemples, contre-exemples, utiliser les quantificateurs, tisser des liens,…) par le discours de l'enseignant. Néanmoins, pour mieux comprendre ce que les étudiants ont acquis durant l'expérience, un questionnaire leur a été proposé au début de la séance suivante.

IV. LES PREMIERS APPRENTISSAGES DES ETUDIANTS

La durée du travail sur le questionnaire proposé à l'issue de la reprise du cours est de 30 minutes. Ce questionnaire contient principalement des tâches d'entrainement : représenter graphiquement une suite, étudier la croissance d'une suite, donner une définition. Il y a aussi une question portant sur les liens entre les notions. Nous sommes consciente que ceux-ci ont été peu travaillés dans le cours visionné (ou lu) (contrairement au cours « classique ») et qu'en ce sens il ne s'agit pas d'un questionnaire basique mais, comme nous l'avons expliqué, la capacité à tisser des liens et à produire des exemples est une compétence attendue de l'enseignant et fait partie de la « philosophie » des cours de mathématiques suivis par les étudiants depuis leur entrée à l'université. C'est donc l'occasion de tester si ce réflexe est

installé chez les étudiants lorsque cela n'est pas rappelé par l'enseignant. L'énoncé de cette question est le suivant :

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez votre réponse.

- *Une suite peut être à la fois croissante et décroissante.*
- *Toute suite croissante n'est pas bornée.*
- *Toute suite minorée ne peut pas être décroissante.*
- *Il existe une suite qui est à la fois majorée par 1 et par 2.*
- *Toute suite minorée par 1 est aussi minorée par 2.*

Le dépouillement des copies révèle que les définitions utilisées par les étudiants dans leurs réponses sont souvent erronées et formulées de manière intuitive avec des mots du langage courant. Les quantificateurs en sont aussi presque toujours absents. Nombreux sont aussi les étudiants qui confondent les expressions « à la fois croissante et décroissante » et « ni croissante ni décroissante ». La production d'exemples pose elle aussi des difficultés : plusieurs étudiants pensent que la suite $\left(\frac{-1}{n}\right)_{n\geq 1}$ est bornée[8] par -1, que la suite $(n)_{n\in N}$ est constante ou que la suite $(2^n)_{n\in N}$ est bornée. Enfin, les justifications sont peu présentes et celles qui sont données sont incomplètes ou restent intuitives. Ces erreurs sont d'autant plus frappantes qu'elles ne sont, dans notre souvenir, jamais apparues dans le cours « classique ».

Le questionnaire contenait également des questions plus générales pour mieux comprendre comment les étudiants avaient travaillé avec le matériel qui leur a été fourni. Nous leur avons notamment demandé combien de temps ils ont passé sur chaque support. La réponse majoritairement donnée est « de l'ordre de 15 minutes » (rappelons que la capsule dure environ 7 minutes). La question se pose donc de savoir si le travail se réduit à la simple écoute de la vidéo et si les étudiants ont pris des notes, d'autant qu'ils complètent souvent leur réponse avec des propos tels que « *j'ai lu deux fois le poly* » ou « *j'ai regardé deux fois la vidéo* ».

Nous avons également recueilli l'avis des étudiants sur ce mode d'enseignement. Nous leur avons donc demandé, sous la forme d'une question ouverte, de dégager les points positifs et les points négatifs de l'expérience. Ainsi, pour les aspects positifs, 32% des étudiants ont apprécié de pouvoir apprendre par eux-mêmes, 42% y ont trouvé une liberté d'organisation que ne permet pas forcément le cours « classique ». Ils l'expriment par exemple sous la forme « on peut regarder la vidéo quand on veut » et 19% ont apprécié la possibilité de pouvoir revenir plusieurs fois sur un support. Ces étudiants estiment avoir mieux compris le cours en travaillant de cette manière. Il nous semble important de dire ici que ces réponses ont été apportées par les étudiants faibles, qui sont déjà en difficulté dans les autres cours de mathématiques, donnés au premier semestre et qui servent de base au cours visé dans cette expérience. Nous redoutons donc que cette manière de procéder leur donne une vision erronée de la qualité et de la profondeur de leur compréhension du cours. Les points négatifs qui ont été relevés par les étudiants dans cette expérience sont les suivants : 61% des étudiants regrettent le manque d'interaction avec l'enseignant car ils apprécient de pouvoir poser des questions et échanger avec celui-ci pendant le cours. 16% pensent que ce type de pédagogie fonctionnerait moins bien sur un sujet plus compliqué que celui choisi ici. Enfin, 19% des étudiants ont trouvé qu'ils étaient plus distraits que pendant le cours « classique ». Ils ont par exemple tendance à faire autre chose en même temps qu'ils visionnent la capsule. Il est frappant de remarquer que ces arguments sont donnés par les bons étudiants.

8 Une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est bornée si $\exists C > 0, \forall n \in N, |x_n| \leq C$. Une suite ne peut donc pas être bornée par1

V. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

En tant qu'enseignante, notre première réaction au terme de l'expérience décrite ici a été un sentiment de déception principalement lié au fait que de voir que des réflexes que nous tentons de développer chez nos étudiants depuis le début de l'année dans nos propres cours ne s'étaient pas « naturellement » transposés dans le contexte de la classe inversée. En tant que chercheur, l'expérience montre qu'en l'absence d'un contrat, les étudiants ne savent pas tout seuls bénéficier des capsules. Il nous semble donc nécessaire de passer du temps à leur montrer comment travailler à la maison avec ce matériel, en les incitant par exemple à prendre des notes de manière à rester actifs pendant le visionnage de la capsule ou en rappelant que le fait d'apprendre le cours avec une capsule ne modifie pas les exigences de l'enseignant dans les productions des étudiants.

L'analyse du déroulement en classe révèle tout de même un aspect positif de l'expérience, à savoir la présence des questions posées par les étudiants, qui permet selon nous d'entrevoir une utilisation plus « positive » des capsules. D'après nous, une manière appropriée de penser le cours pourrait être de faire le cours « classique » et de donner ensuite la capsule à visionner, comme nous l'avons suggéré ci-dessus. Au retour en amphi, il y aurait peut-être ainsi un renouvellement des occasions de proximités ascendantes qui aurait un effet positif sur les difficultés observées ici.

Nous sommes bien entendu consciente que cette expérience reste très limitée puisque nous nous sommes restreinte à analyser la partie « cours ». Nous ne pouvons donc pas savoir si certaines difficultés observées dans l'expérience seraient surmontées par les étudiants durant les TD, en fonction des tâches proposées et des proximités développées. Aussi, on peut se demander si le fait d'enseigner régulièrement en classe inversée ne permet pas de dépasser certains constats négatifs relatés ici. Par exemple, Love & al. (2014) ont enseigné en classe inversée dans un cours complet d'algèbre linéaire et ils expliquent que les performances des étudiants aux évaluations se sont améliorées au fur et à mesure de l'expérience et des chapitres étudiés. Notre expérience a donc des limites évidentes qui amènent à minorer ces premiers constats négatifs tout en ouvrant la voie à des perspectives positives pour la renouveler.

REFERENCES

Allard C., Asius L., Bridoux S., Chappet-Pariès M., Pilorge F. & Robert A. (2016) Quelques réflexions sur les moments d'exposition des connaissances et les capsules pour des classes inversées. *Cahier du Laboratoire de Didactique André Revuz,* 16, Université Paris Diderot.

Braun B., Bremser P., Duval Art M., Lockwood E. & White D. (2017) What Does Active Learning Mean For Mathematicians? *Notices for AMS,* 64(2)**,** 125-129.

Bridoux S., Grenier-Boley N., Hache C. & Robert A. (2016) Les moments d'exposition des connaissances en mathématiques ; analyses et exemples. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* 21, 187-234.

Dumont A., Berthiaume D. (2016) *La pédagogie inversée, Enseigner autrement dans le supérieur avec la classe inversée.* De Boeck Supérieur.

Love B., Hodge A., Grandgenett N. & Swift A. (2014) Student learning and perceptions in a flipped linear algebra course. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* 45(3), 317-324.

Robert A. (1998) Outils d'analyses des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 18(2), 139-190.

Robert A., Vandebrouck F. (2014) Proximités-en-acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves : analyses de séances sur des tâches complexes. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 34(2-3), 239-285.

Tall D., Vinner S. (1981) Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics,* 12, 151-169.

Vandebrouck F. (Dir.) (2008) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants.* Toulouse : Octarès.

L'IDENTITÉ PROFESSIONNELLE DES ENSEIGNANTS-CHERCHEURS EN MATHÉMATIQUES, CHIMIE ET PHYSIQUE

Stéphanie Bridoux[1], Martine De Vleeschouwer[2], Nicolas Grenier-Boley[3], Rita Khanfour-Armalé[4], Nathalie Lebrun[5], Zoé Mesnil[6], and Céline Nihoul[7]

Résumé – Nous présentons les premiers résultats d'une recherche visant à étudier l'impact de la discipline de recherche des enseignants-chercheurs (EC) sur leurs pratiques enseignantes. Nous nous intéressons au concept d'identité professionnelle qui est au cœur de notre problématique de recherche. Nous exposons notre méthodologie et illustrons quelques résultats par des extraits d'entretiens effectués auprès d'EC de plusieurs disciplines dans diverses institutions en France et en Belgique.

Mots-clefs : enseignants-chercheurs, identité professionnelle, pratiques, tensions, valeurs

Abstract – We present the first results of a research project whose purpose is to investigate the impact of the research discipline of teacher-researchers (TRs) on their teaching practices. We are interested in the concept of professional identity in order to clarify our research problem. We present our methodology and illustrate some of the results with excerpts from interviews conducted with TRs of various disciplines and institutions in France and Belgium.

Keywords: teachers-researchers, professional identity, practices, tensions, values

I. INTRODUCTION

Cette dernière décennie, de nombreuses universités françaises ont créé des structures de développement professionnel des enseignants-chercheurs (EC) du supérieur dans une optique de « transformations pédagogiques » afin de répondre, en particulier, à la diversité du public étudiant (Endrizzi, 2011). La recherche accompagne ces changements, et dès 2004, Annoot et Fave-Bonnet coordonnaient l'une des premières synthèses des questions associées à l'étude des pratiques pédagogiques à l'université. Cependant, très peu de chercheurs s'y sont intéressés par une approche disciplinaire en lien avec les activités de recherche des EC (Henkel, 2004 ; Neumann, 2001). La discipline apparaît pourtant comme un élément essentiel des pratiques enseignantes des enseignants-chercheurs (Becher, 1994) et de nombreuses recherches en appellent au développement de recherches sur ces pratiques qui prennent en compte la dimension disciplinaire (Poteaux, 2013 ; Trede, Macklin & Bridges, 2012). C'est dans ce contexte que nous avons mené la recherche présentée ici basée sur trois disciplines académiques que sont les mathématiques, la physique et la chimie. L'objectif de notre recherche est de mieux connaître le cœur du métier des enseignants-chercheurs d'une discipline, c'est-à-dire d'étudier l'identité professionnelle avec un regard didactique, particulièrement attentif aux éléments liés aux savoirs en jeu. Sans négliger les contraintes institutionnelles, les résultats d'une telle étude pourraient permettre de construire des formations à l'enseignement répondant aux valeurs et qualités mises en exergue. Nous présentons ici quelques résultats sur l'identité professionnelle des EC montrant des régularités mais aussi des différences entre les trois disciplines visées.

---

[1] LDAR, UMONS, UA UCP UPD URN UPEC- Belgique- stephanie.bridoux@umons.ac.be
[2] IRDENa, UNamur – Belgique- mdv@math.unamur.be
[3] LDAR, Université Rouen Normandie, UA UCP UPD UPEC – France- nicolas.grenier-boley@univ-rouen.fr
[4] LDAR, Université Cergy Pontoise, UA UPD URN UPEC – France - rita.khanfour-armale@u-cergy.fr
[5] LDAR, Université Lille 1, UA UCP UPD URN UPEC -France- nathalie.lebrun@univ-lille1.fr
[6] LDAR, Université Paris Est Créteil, UA UCP UPD URN – France- zoe.mesnil@u-pec.fr
[7] LDAR, UMONS, UA UCP UPD URN UPEC –Belgique- celine.nihoul@umons.ac.be

II. CADRE THÉORIQUE ET PROBLÉMATIQUE

Le concept d'identité professionnelle, très complexe, est appréhendé dans la littérature sous différentes approches. Du point de vue de la sociologie du travail, l'identité professionnelle se définit comme « un ensemble d'éléments particuliers de représentations professionnelles, spécifiquement activé en fonction de la situation d'interaction et pour répondre à une visée d'identification / différenciation avec des groupes sociétaux ou professionnels » (Blin, 1997). Ce rapport à la communauté se retrouve dans la notion d'identité professionnelle enseignante de Cattonar (2001) qui souligne que « ce sont les caractéristiques qui l'identifient en tant qu'enseignant et que l'enseignant partage, qu'il a en commun avec d'autres enseignants du fait d'appartenir au même groupe professionnel ». En tant que didacticiens, c'est d'une part cette dimension enseignante de l'identité professionnelle des EC qui nous intéresse particulièrement, et c'est d'autre part avec une attention particulière aux savoirs en jeu, liés à la discipline de recherche, que nous l'abordons.

De nombreuses recherches montrent une caractéristique importante de l'identité professionnelle des EC : ils sont avant tout chercheurs avant d'être enseignants (Fave-Bonnet, 1999 ; Norton, Richardson, Hartley, Newstead & Mayes, 2005 ; Musselin, 2008 ; Becerra Labra, Gras-Marti, Hernández, Montoya Vargas, Osorio Gómez, & Sanchos Vinuesa, 2012 ; van Lankveld, Schoonenboom, Volman, Croiset & Beishuizen, 2017). Cependant, dans leur revue de recherches, van Lankveld et al. (2017) identifient différents équilibres entre les dimensions recherche et enseignante du métier : certains EC se voient plutôt comme des « intellectuels », d'autres allient enseignement et recherche soit en tant que chercheur qui enseigne soit en tant que « blended professionnals » conjuguant enseignement et recherche dans une « quête d'apprentissage ». Dans cette même revue, les auteurs identifient plusieurs facteurs contextuels qui renforcent ou contraignent l'identité professionnelle. Par exemple, un environnement de travail collégial et encourageant est plus bénéfique pour les enseignants alors qu'un contexte compétitif a des effets négatifs sur l'identité professionnelle renforçant la dimension recherche au détriment de la dimension enseignante du métier.

C'est dans ce contexte que de Hosson, Décamp, Morand et Robert (2015) ont retenu trois dimensions pour leur étude de l'identité professionnelle d'EC de physique, les règles du métier, ses valeurs et les qualités et compétences nécessaires à son exercice, auxquelles ils ont rajouté une dimension didactique « afin d'éclairer certains aspects du rapport que les EC entretiennent, non pas au savoir en général mais à la physique en particulier » (p. 166). Ils constatent que « l'identité professionnelle des enseignants-chercheurs de physique […] interrogés apparaît fortement marquée par des tensions […] qui se révèlent parfois sous la forme "je sais qu'il faudrait faire ceci et pourtant je fais le contraire" » (p. 180), tensions généralement reliées aux dispositifs organisationnels qui contraignent les EC. Ce résultat confirme ceux de Drucker-Godard, Fouque, Gollety et Le Flanchec (2013) qui ont montré que les EC des universités françaises ressentaient aujourd'hui « un conflit entre des valeurs d'adhésion initiale (liberté, indépendance, autonomie, service public) et l'émergence de nouvelles valeurs issues des réformes récentes du système universitaire (productivité scientifique, efficacité, efficience, individualisation de la carrière, équité et non égalité de traitement et d'estime) » (p.19). Ce conflit ressenti semble être commun à bon nombre d'EC, quelle que soit leur discipline de recherche et d'enseignement. Nous pouvons cependant nous demander s'il y a une empreinte de la discipline sur les valeurs, et donc sur ces tensions, que ce soit au niveau des valeurs publiques, parce que l'épistémologie propre à chaque discipline amène des croyances et des organisations éventuellement différentes, ou au niveau des valeurs individuelles, qui peuvent influencer chaque EC dans le choix de sa discipline d'exercice. D'autres études montrent effectivement que les EC s'identifient fortement à leur discipline de

recherche (Becher, 1994 ; Henkel, 2004). Ainsi, quand Endrizzi (2011) souligne par exemple que « les enseignants-chercheurs sont physiciens avant d'être enseignants de physique », ou que de Hosson et al. (2012) concluent de façon légèrement différente qu'« un bon enseignant est avant tout un bon physicien », nous pouvons aussi nous demander comment la physique marque ces positionnements. Notre recherche s'inscrit dans l'étude de cette large question que nous formulons finalement ainsi : quelle est l'empreinte de la discipline sur les pratiques d'enseignement à l'université ?

Les éléments de réponse que nous présentons ici sont étayés par les propos d'EC recueillis lors d'entretiens semi-directifs. En les interrogeant sur différents aspects de leur métier, mêlant leurs pratiques et leurs idéaux, nous accédons à leur identité professionnelle enseignante, que nous décrivons à travers les même composantes que de Hosson et al. (2015). En croisant les régularités et les différences obtenues avec les disciplines de EC interrogés, nous pouvons ainsi déterminer comment la discipline marque l'identité professionnelle.

III. MÉTHODOLOGIE

Nos données sont issues des transcriptions anonymées de 29 entretiens individuels semi-directifs (12 en mathématiques, 8 en physique et 9 en chimie). Ces entretiens ont été conduits auprès d'EC qui partagent très souvent les mêmes espaces de formation, la première année universitaire étant souvent transversale à plusieurs disciplines. Les interviewés volontaires ont des expériences d'enseignement universitaires plus ou moins longues et sont issus de sept universités[8] dont deux sont basées en Belgique. Le protocole d'entretien a été construit à partir de celui proposé par de Hosson et al. (2015) en le rendant pluridisciplinaire par des questions liées à la discipline dans une perspective de comparaison. Le protocole a aussi été élaboré de telle sorte que nous puissions dégager les normes, qualités et valeurs assignées par l'EC à ses pratiques d'enseignement afin de remonter aux caractéristiques de son identité professionnelle enseignante (Cattonar, 2001). Lors des entretiens, nous avons ainsi abordé différents aspects du métier : l'organisation actuelle des enseignements, les pratiques innovantes, les difficultés de leurs étudiants, l'évaluation de leurs étudiants, la formation à l'enseignement des EC, le métier d'EC ainsi que des questions de didactique (objectif et contenu d'un cours). Ils étaient abordés à la fois sous l'angle des pratiques déclarées (par exemple, est-ce que l'EC met en place des pratiques innovantes) et à la fois sous l'angle des idéaux (par exemple, quelle serait la modalité idéale d'enseignement).

Nous avons procédé à une catégorisation empirique qui consiste à repérer des extraits de verbatim qui nous semblaient pertinents pour répondre à notre question de recherche. Nous considérons un extrait de verbatim comme une unité de signification (Bardin, 1977), pouvant relever de plusieurs catégories de la discipline académique de l'EC interviewé et des attributs de son activité de recherche. Nous avons ainsi pu repérer des régularités et des variabilités entre les différentes disciplines. Parmi les différents axes identifiés grâce au cadre théorique, nous avons plus spécifiquement cherché les verbatims témoignant de l'influence du métier de chercheur sur celui d'enseignant, l'évaluation des étudiants et la formation des enseignants. Nous avons ainsi essayé de dégager des éléments de posture de chercheur dans les pratiques enseignantes (créativité, liberté, collégialité, évaluation et apprentissage par les pairs) et de transposition d'éléments méthodologiques de recherche aux activités proposées aux étudiants

[8] Université de Cergy-Pontoise, Université Paris-Diderot, Université Rouen Normandie, Université Lille 1, UMONS, UNamur, Université Paris 13.

(résolution de problèmes, réflexivité, exposés d'étudiants, travaux de groupe…). Nous nous sommes aussi attachés à relever des éléments de tensions (de Hosson et al., 2015) souvent issus de facteurs contextuels (institution, rapport aux étudiants, formation à l'enseignement).

IV. RÉSULTATS

1. L'influence du métier de chercheur sur le métier d'enseignant

Suite à la question « qu'est-ce qu'un bon cours dans votre discipline ? », on relève des entretiens que la majorité des EC des 3 disciplines considère qu'un bon enseignant possède plusieurs caractéristiques : il sait « montrer » sa discipline, donner envie d'en savoir plus et voudrait montrer ce qu'est la recherche dans sa discipline. L'extrait suivant illustre cela.

P1: Un cours qui donne envie aux étudiants de se poser des questions, d'aller chercher dans les livres […] il y a un aspect théâtral là-dedans qui t'emmène dans quelque chose qui après te donne envie de faire de la physique.

La plupart des EC des trois disciplines constate certaines difficultés récurrentes chez les étudiants : difficultés liées à l'abstraction, difficultés liées aux mathématiques (formalisme, calcul…). Ces difficultés entraînent des tensions plus ou moins fortes entre les cours idéaux décrits ci-dessus et ceux qu'ils font dans la réalité. D'une part en chimie et en physique une majorité des EC interrogés parvient malgré tout à mettre en valeur certains aspects liés à la recherche dans leur enseignement comme le montrent les extraits suivants :

C7: Il faut mettre des chercheurs [dans le L1[9]], parce qu'il faut leur montrer les perspectives quand on leur parle d'un truc on peut leur montrer une réelle application et une vraie problématique derrière mais la passion d'un bon chercheur se ressentira quand il fera cours.

P4: Moi ce que j'aime bien c'est aussi de montrer que la physique a un lien je dirais avec le réel, ce n'est pas une discipline désincarnée donc c'est pour ça l'innovation cherche un peu à développer effectivement cette approche du réel avec soit expérimental soit des aspects un peu théorique. Bon je leur montre aussi que les connaissances progressent et qu'ils peuvent aussi en apprécier parfois la connaissance parce que ça tombe pile poil sur le programme.

D'autre part la plupart des EC en mathématiques déclare ne pas pouvoir montrer ce qu'est leur discipline de recherche lorsqu'ils enseignent au début de l'université :

M4: […] quand on fait du L1, L2, L3 on est très très loin, en fait c'est vraiment des maths très anciennes qui n'ont vraiment rien à voir avec ce qu'on fait en recherche. Ce qui n'est pas le cas dans d'autres disciplines [...]

Les EC en mathématiques soulignent que certaines pratiques mathématiques du secondaire leur apparaissent comme autant de facteurs bloquants pour « faire des mathématiques » à l'université : privilégier des recettes à une compréhension des concepts, avoir une compréhension locale d'un cours et pas une vision globale. L'extrait suivant en témoigne :

[9] L1, L2, L3 correspondent aux trois années de Licence, premier diplôme universitaire.

M8: Je pense qu'on a énormément d'étudiants qui ne savent pas ce que c'est que faire des maths et qui sont dans cette espèce d'attitude où ils vont essayer d'apprendre des choses un peu algorithmiques des méthodes toutes faites qui vont reproduire dans un contexte très similaire sans aucune réflexion sur le fond.

2. Sur les pratiques d'évaluation

Les pratiques déclarées d'évaluation des EC sont assez diverses. L'évaluation peut consister en un examen écrit et/ou oral ou en un contrôle continu suivi d'un examen écrit. Elle peut concerner des questions de cours, des exercices proches de ceux réalisés en TD, des problèmes nouveaux ou bien un panachage de ces possibilités. Même si les pratiques diffèrent d'un EC à l'autre, nous identifions une similarité entre les EC de mathématiques et de physique. Ils ne sont généralement pas satisfaits de leur manière d'évaluer les étudiants, comme l'illustrent les extraits suivants :

M5: Après, j'aimerais bien les évaluer sur leur capacité à chercher un petit peu, poser des questions beaucoup plus ouvertes que ce que je pose effectivement en examen où ils chercheraient, ils réfléchiraient etc et on n'a pas le temps de faire ça. L'examen est trop court.

P6: On les évalue avec des notes sur des exercices bien particuliers mais en même temps on n'évalue pas s'ils ont vraiment compris la matière. Il faudrait qu'on passe 2 heures avec chaque étudiant pour pouvoir lui poser plein de questions, lui demander de résoudre un petit morceau de problème. Je pense qu'après la masse fait que c'est pas l'idéal mais est-ce qu'on peut faire autrement ?

Ainsi les EC de mathématiques et de physique souhaiteraient tester la capacité des étudiants à réfléchir sur un problème nouveau, ce qu'ils ne proposent pas actuellement. Pour une grande majorité d'entre eux, l'objectif principal de l'évaluation est de savoir si les étudiants ont une compréhension approfondie des cours. C'est pourquoi, nombreux sont ceux qui veulent évaluer cette compréhension notamment par le biais de problèmes dans un contexte différent de celui des TD, mais ils n'y parviennent pas par manque de temps, de personnel ou parce que cela demande un trop grand investissement de leur part au détriment de la recherche. Nous repérons donc dans l'analyse des entretiens deux hiatus : un entre ce qui est valorisé et ce qui est évalué en examen et un autre entre la compréhension et la réussite des étudiants.

Nous ne pouvons pas attester de tensions similaires dans les entretiens avec les EC en chimie qui évoquent juste le manque de temps pour évaluer l'intégralité d'un cours donné.

3. Sur la formation des enseignants-chercheurs

Dans nos entretiens, il a été demandé aux EC s'ils estimaient souhaitable d'avoir accès à une formation continue et si oui, quelle forme celle-ci pourrait prendre. Un premier aspect frappant est que tous les EC s'accordent sur le fait que s'il y a une formation, celle-ci doit forcément être non disciplinaire. La maîtrise de la discipline, en tant que savoirs, est en effet considérée comme allant de soi dans le métier d'EC.

Ensuite, deux tendances émergent de l'analyse des entretiens. La première concerne les EC qui pensent que la formation des enseignants du supérieur n'est pas utile. Cela concerne environ la moitié du public interrogé en mathématiques, deux sur huit en physique et deux sur

neuf en chimie. Certains EC s'interrogent de plus sur ce que pourrait signifier « apprendre à enseigner », comme le montre l'extrait suivant :

M9: Il n'y a rien qui forme à l'enseignement au sens strict. En même temps, je crois que dans un contexte universitaire, ce n'est pas vraiment nécessaire...quand quelqu'un connaît bien son domaine et… passe du temps à préparer son cours… c'est très rare qu'il fasse mal son cours en fait.

L'autre tendance concerne les EC qui ne sont pas opposés à une formation continue, à condition qu'elle revête des aspects pratiques qui prennent plusieurs formes dans leurs propos : elle pourrait par exemple porter sur des aspects non forcément disciplinaires comme la gestion d'un groupe d'étudiants, la manière de les amener à travailler plus efficacement.

M10: Je pense par exemple aux possibilités d'utiliser l'ENT, l'informatique, ce genre de choses, c'est un peu à chacun par exemple d'aller le découvrir par lui-même, il y a de temps en temps un cours un peu général sur le cadre informatique disons, mais rien de très précis pédagogiquement.

P3: Je vais souvent aux formations du CAPE proposées par des intervenants extérieurs, alors après j'ai pas forcément le temps de mettre tout en œuvre mais j'y réfléchi quand même un petit peu progressivement. Mais oui, le public change donc il faut aussi nous qu'on change et qu'on s'adapte et puis qu'on s'améliore à la façon de faire les cours [...] Je pense que ça serait bien qu'on ait un peu plus de formation, je pense que ça serait bien pendant le doctorat et puis peut être en première et en deuxième année quoi, pour ceux qui ont fait des thèses un peu particulières.

C1 moi je souffre de ne pas avoir eu de cours sur l'enseignement […] ça sera plus avec un groupe de travail, une équipe pédagogique, une sorte de formation qui peut être animée de temps en temps par un professionnel justement de cette discipline.

Quelques collègues évoquent la nécessité d'intégrer de la didactique dans ces formations, d'autres souhaiteraient rendre ces formations obligatoires.

C8 […] si ces formations sont souhaitables voire nécessaires il faut les rendre obligatoires. Tant qu'elles ne le seront pas, tant qu'il n'y aura pas une responsabilité associée à ça en tout cas il n'y aura pas de fréquentation.

Concernant les formes que pourraient revêtir ces formations, les EC interrogés donnent une importance aux échanges entre « pairs » comme le relèvent van Lankveld et al. (2017). Notons que certains EC de physique interrogés soulignent qu'il est de leur mission de former les futurs et nouveaux recrutés comme le souligne l'extrait suivant :

P1 […] des gens de ma génération, on a été formé sur le tas parce que on a appris l'enseignement en étant soi-même étudiant puis en devenant soi-même enseignant par le monitorat puis après on a été recruté et on apprenait sur le tas. De ça en moyenne je pense qu'il y a plutôt des bons enseignants qui sortent, de l'impression que j'ai […] maintenant,

> ce que j'ai pas aimé, ce que les jeunes ont encore c'est des espèces de pseudo-formations pédagogiques qui étaient pas bien faites

Cet effet de socialisation via l'apprentissage sur le tas dans le cadre d'une équipe pédagogique est d'autant plus prégnant chez les enseignants n'ayant pas reçu de formation initiale à l'enseignement (Goodson & Cole, 1994) ou ayant reçu une formation jugée inadéquate.

V. DISCUSSION ET PERSPECTIVES

Les premiers résultats de cette étude semblent indiquer une empreinte de la discipline sur les pratiques d'enseignement à l'université à divers niveaux. En particulier, concernant l'un des facteurs contextuels pointés par van Lankveld et al. (2017), à savoir le contexte général de l'enseignement supérieur, nos résultats en mathématiques et en physique montrent des tensions entre ce que les EC souhaiteraient évaluer et ce qu'ils évaluent, entre la compréhension et la réussite des étudiants. Ces tensions empêchent certaines formes d'évaluations (oral, questions ouvertes, etc).

En revanche, nous avons montré des différences dans la manière dont les enseignants de mathématique, de physique et de chimie tentent de « montrer leur discipline de recherche» au début de l'université dans leurs cours, ce qui est selon nous un marqueur fort de la discipline dans le métier d'enseignant. D'une part les EC de mathématiques déclarent qu'il y a un écart important entre les mathématiques enseignées et la recherche, ce qui ne leur permet pas de montrer des aspects de leur recherche aux étudiants. Les difficultés des étudiants ou certaines pratiques dont ils ont eu l'habitude dans le secondaire semblent empêcher les EC de mathématiques de « faire des maths » avec eux. D'autre part les EC de physique ou de chimie estiment qu'il est possible de mettre en valeur certains aspects de leur recherche (évolution des concepts, méthodologie…) dès le L1 malgré les difficultés des étudiants.

Une explication possible de ces différences pourrait tenir à l'épistémologie des trois disciplines. Si elles diffèrent sur des aspects cruciaux de leurs épistémologies, la physique et la chimie sont toutes deux au carrefour de plusieurs disciplines, théoriques et expérimentales (selon les domaines), souvent en lien avec des phénomènes observables y compris dans la vie quotidienne. Ces caractéristiques semblent permettre aux EC interrogés de « faire de la physique ou de la chimie » avec les étudiants. En mathématiques, l'acquisition des connaissances étant caractérisée par une progression hiérarchique et les résultats de recherche ne pouvant en général être « montrés » autrement que par leur énoncé ou leur preuve, la recherche est de fait très loin des mathématiques enseignées en début d'université. Aux yeux des EC de mathématiques, ces mathématiques de début d'université semblent déjà peu accessibles aux étudiants et ils ne parviennent pas à « faire des maths » avec eux : on observe alors une tension, dans leur posture entre « ce qu'ils souhaiteraient faire et ce qu'ils font » au niveau des pratiques d'enseignement (de Hosson et al., 2015).

Cette première étude devrait permettre de dégager suffisamment de variables afin de concevoir un questionnaire en ligne (réponses simples, multiples, voire textuelles simples) afin de confirmer ou d'infirmer nos résultats et tendre vers une représentativité statistique de la population des EC. Nous avons aussi l'objectif d'aller voir les pratiques *in situ* des EC afin de préciser nos résultats et de nous détacher du déclaratif (van Lankveld et al., 2017).

Enfin, les résultats présentés dans cette contribution sont également encourageants pour apporter des éléments de réponse à la problématique de la pédagogie universitaire mentionnée dans la motivation de cette étude. Nous pourrions rendre compte des résultats obtenus dans les universités où des entretiens ont eu lieu, voire lors de formations à la pédagogie

universitaire. L'objectif ici serait de renvoyer aux EC un miroir de leurs propres pratiques afin d'engager une discussion sur différents aspects qui pourrait permettre de mieux embrasser la complexité des pratiques. Là aussi, le côté disciplinaire est mis en évidence, notamment par l'envie émise par certains EC des 3 disciplines d'approfondir leurs connaissances didactiques.

REFERENCES

Annoot, E., & Fave-Bonnet, M.F. (2004). *Pratiques pédagogiques dans l'enseignement supérieur: enseigner, apprendre, évaluer.* Paris: L'Harmattan.

Bardin, L. (1977). *L'analyse de contenu.* Paris: Presses universitaires de France.

Becerra Labra, C., Gras-Marti, A., Hernández, C., Montoya Vargas, J., Osorio Gómez, L.A., & Sanchos Vinuesa, T. (2012). Renovación de la Enseñenza Universitaria Basada en Evidencias (REUBE): Una metodología de acción flexible, *Perfiles educativos*, 34(135), 62-77.

Becher, T. (1994). The signifiance of disciplinary differences. *Studies in Higher Education*, 19(2), 151-161.

Blin, J.F., (1997). Les représentations professionnelles: un outil d'analyse du travail. *Education permanente*, 132, 159-170.

Cattonar, B. (2001). Les identités professionnelles enseignantes. Ébauche d'un cadre d'analyse. *Cahiers de recherche du GIRSEF*, 10

Drucker-Godard, C., Fouque, T., Gollety, M., & Le Flanchec, A. (2013). Le ressenti des enseignants-chercheurs: un conflit de valeurs. *Gestion et management public*, 1(2), 4-22.

Endrizzi, L. (2011). Learning how to teach in higher education: a matter of excellence. *Dossier d'actualité Veille et Analyse*, 64.

Fave-Bonnet, M.F. (1999). Les enseignants chercheurs et l'enseignement. *Les Cahiers de l'ADMES*, 12, 87-94.

Goodson, I.F., & Cole, A. L. (1994). Exploring the teacher's professional knowledge: Constructiong identity and community. *Teacher Education Quarterly*, 85-105.

Henkel, M. (2004). La relation enseignement-recherche. *Politiques et gestion de l'enseignement supérieur,* 16(2), 21-36.

de Hosson, C., Décamp, D., Morand, E., & Robert, A. (2015). Approcher l'identité professionnelle d'enseignants universitaires de physique: un levier pour initier des changements de pratiques pédagogiques. *Recherches en Didactique des Sciences et des Technologies*, 11, 161-190.

Musselin, C. (2008). *Les universitaires*, Paris: La Découverte.

Neumann, R. (2001). Disciplinary Differences and University Teaching. *Studies in Higher Education*, 26(2), 135-146.

Norton, L., Richardson, T.E., Hartley, J., Newstead, S. & Mayes, J. (2005). Teachers'beliefs and intentions concerning teaching in higher education. *Higher Education*, 50(4), 537-571.

Poteaux, N. (2013). Pédagogie de l'enseignement supérieur en France: état de la question. *Distances et médiations des savoirs. Distance and Mediation of Knowledge*, *1*(4).

Trede, F., Macklin, R., & Bridges, D. (2012). Professional identity development: a review of the higher education literature. Studies in Higher Education, 37(3), 365-384.

van Lankveld, T., Schoonenboom, J., Volman, M., Croiset, G., & Beishuizen, J. (2017).Developing a teacher identity in the university context: A systematic review of the literature. *Higher Education Research & Development*, 36(2), 325-342.

LES COURS PRÉPARATOIRES DE CALCUL À L'UNIVERSITÉ, AU QUÉBEC : *THE SAME, BUT DIFFERENT* ?

GONZÁLEZ-MARTÍN[*] Alejandro S.

Résumé – Cet article présente des analyses préliminaires sur les contraintes ressenties par des enseignants universitaires de cours préparatoires de calcul au Québec. Bien qu'il s'agisse du « même » cours dans deux institutions différentes, nos données révèlent l'existence de certaines contraintes communes et d'autres plus spécifiques à chacune des institutions. Même si ces contraintes se situent au niveau hiérarchique *École*, cela motive les participants à opérer de petits changements au niveau *Sujet*.

Mots-clefs : cours préparatoires de calcul ; enseignants universitaires ; niveaux de codétermination ; contrainte ; double approche.

Abstract – This paper presents some preliminary analyses concerning constraints felt by university teachers of Calculus preparatory courses in Québec. Although we analyse "the same" course in two different institutions, our data indicate the existence of some common constraints, and some other constraints that seem specific to each institution. Although these constraints are situated at the hierarchic level *School*, they motivate the participants to make some changes at the *Subject* level.

Keywords: Calculus preparatory courses; university teachers; levels of codetermination; constraints; double approach.

I. INTRODUCTION ET PROBLÉMATIQUE

La recherche en didactique des mathématiques au niveau postsecondaire est un domaine qui n'a de cesse de s'élargir depuis les dernières années (González-Martín et al., 2017). Parmi les différents objets d'étude dans ce champ, les travaux centrés sur les enseignants universitaires se développent et attirent de plus en plus de chercheurs (Winsløw, Gueudet, Hochmuth, & Nardi, 2018). Ces travaux ont étudié différents aspects relatifs aux pratiques des enseignants : de l'enseignement en soi (par exemple, Speer, Smith, & Horvath, 2010) à l'utilisation des ressources (Gueudet, 2017).

Parmi les travaux analysant les pratiques des enseignants universitaires, à notre connaissance, peu ont étudié les différences possibles qui peuvent se présenter lorsque deux enseignants donnent le « même » cours. Nous utilisons ici les guillemets car, bien qu'il s'agisse officiellement du même titre de cours et de la même liste de contenus, parfois ce qui est fait – et la manière dont cela est fait – peuvent être très différents, résultant ainsi en des expériences très distinctes pour les étudiants. Ainsi, les travaux de Pinto (2013) et de Wagner et Keene (2014) montrent que deux enseignants universitaires (ayant ou non des profils semblables) peuvent avoir des pratiques dissemblables par rapport à un même contenu et ce, selon leur expérience ou leur interprétation des contenus à enseigner. Cependant, à notre connaissance, peu de travaux ont étudié les contraintes externes qui pourraient aussi influencer la pratique des enseignants universitaires, faisant en sorte que le « même cours » soit, en pratique, enseigné de manière distincte. Ces contraintes peuvent être assez fortes, induisant des invariants. Robert et Rogalski (2002), en travaillant avec des enseignants d'école, suggèrent que les variations dans les pratiques dépendent de facteurs autres que leur personnalité et stipulent que plusieurs contraintes externes, liées à l'exercice du métier, peuvent engendrer des régularités, laissant aussi la place à une marge de manœuvre. Néanmoins, cette proposition a été peu abordée au niveau universitaire.

[*] Département de Didactique – Université de Montréal – Canada – a.gonzalez-martin@umontreal.ca

L'étude présentée ici fait partie d'un projet de recherche plus vaste (CRSH – subvention 435-2016-0526) qui vise à identifier divers éléments (d'ordre personnel et d'ordre externe) qui peuvent influencer les choix et les décisions que prennent les enseignants universitaires de mathématiques pour préparer leurs cours. Dans cet article, nous cherchons à explorer quels sont les éléments d'ordre externe qui influencent le plus le travail des enseignants universitaires qui donnent un même cours. Nous nous plaçons donc du côté de certains chercheurs qui sont intéressés par les assujettissements divers auxquels sont soumis les enseignants (voir Robert & Rogalski, 2002, p. 506), en cherchant à mettre en évidence des contraintes externes liées (principalement mais non exclusivement) à l'institution. Pour cela, nous présentons des données recueillies auprès d'enseignants qui donnent un cours préparatoire de calcul (sous différents noms et dans différentes institutions), pour mieux connaître les facteurs qui produisent des variations importantes dans la prestation et l'organisation du cours.

Il est aussi pertinent de clarifier que, au Québec, il y a une différence entre les cours de *calcul* et d'*analyse*. Les cours de calcul apparaissent déjà dans la préparation à l'université (voir la section *Contexte*) et ce sont des cours centrés sur des techniques, des propriétés et des résultats. Dans ces cours, les démonstrations sont pour la plupart absentes. Ces démonstrations et une approche plus axiomatique sont présents dans les cours d'analyse, qui se trouvent dans certains programmes universitaires (tels que mathématiques et physique, mais pas en ingénierie, par exemple).

II. CADRE THÉORIQUE

Nous cherchons à mieux connaître les facteurs externes qui ont une influence importante sur ce que les enseignants de cours de calcul considèrent pouvoir faire dans leurs cours. Pour cela, nous utilisons des outils de la théorie anthropologique du didactique. En particulier, Chevallard (2002) a identifié une hiérarchie de niveaux de codétermination définie comme suit:

Civilisation ↔ Société ↔ École ↔ Pédagogie ↔ Discipline ↔ Domaine ↔ Secteur ↔ Thème ↔ Sujet[1]

Cette hiérarchisation identifie différents niveaux qui ont un impact sur ce qui se fait en pratique dans l'enseignement d'une notion donnée. Ainsi, le dernier niveau (le sujet ou les questions à répondre) est influencé par ce qui a été organisé dans le thème (où ce sujet se situe), mais aussi par l'organisation du contenu de la discipline en secteurs et en thèmes. Au niveau universitaire, les contenus mathématiques sont souvent organisés sous deux principaux domaines : le calcul et l'algèbre linéaire (Barquero, Bosch, & Gascón, 2011). Chaque domaine est subdivisé en secteurs. Les domaines et secteurs dépendent des contraintes et des visions qui viennent d'autres niveaux plus génériques comme l'école, les attentes de la société envers l'école et la civilisation.

Les niveaux supérieurs de la hiérarchie (Civilisation ↔ Société ↔ École ↔ Pédagogie) identifient des contraintes d'ordre plus général qui découlent de la façon dont la société, à travers l'école, organise l'étude des disciplines (au niveau pédagogique). Barquero et al. (2011) identifient certaines contraintes qui affectent ce que l'enseignant et les étudiants peuvent faire : le nombre d'heures accordées à l'enseignement d'une discipline, les façons de regrouper les étudiants (selon l'âge, le niveau scolaire, etc.), l'organisation de l'espace de

[1] Cette hiérarchie a été modifiée récemment par Chevallard (2016), qui propose les niveaux : Humanité ↔ Civilisation ↔ Société ↔ École ↔ Pédagogie ↔ Système didactique. Puisque dans nos analyses nous identifions des éléments qui touchent à l'ancien niveau *Sujet*, nous gardons dans ce travail l'ancienne hiérarchie.

l'école, etc. Chevallard (2002) se réfère au niveau de l'école comme « le niveau des contraintes et des points d'appui qui tiennent à l'institution scolaire elle-même » (p. 53). Ces éléments nous semblent tout à fait cohérents avec ce qui est proposé par les travaux de Robert (2008) sur la double approche. Dans ces travaux, le mot *pratiques* est utilisé pour « qualifier tout ce qui se rapporte à ce que l'enseignant pense, dit ou ne dit pas, fait ou ne fait pas, sur un temps long, que ce soit avant, pendant, après les séances de classe » (p. 59). Pour aborder ces pratiques, une double approche est proposée : prendre en compte à la fois les objectifs des enseignants (par exemple, les apprentissages des élèves) et les contraintes incontournables, non conjoncturelles qu'impose le métier d'enseignant de mathématiques. Ces objectifs sont observables surtout au niveau *Sujet*, tandis que les contraintes appartiennent principalement aux niveaux supérieurs (*Société, École, Pédagogie, Discipline, Domaine, Secteur, Thème*). Ces contraintes se déclinent en tenant compte, d'une part, des déterminants extérieurs à la classe (institutionnels, sociaux et personnels) et d'autre part des différentes échelles rendant compte du travail réel. Cette double approche permet d'identifier, entre autres, ce qui est variable dans les pratiques des enseignants et ce qui est partagé par plusieurs enseignants.

Dans cette perspective, ce que les enseignants peuvent (ou pensent pouvoir) faire dans leur salle de cours est forcément contraint par des choix qui proviennent des niveaux supérieurs et sur lesquels ils n'ont aucun (ou très peu de) contrôle. Notre objectif étant d'identifier certains éléments de nature externe qui influencent le travail des enseignants universitaires de mathématiques, nous nous proposons d'identifier, par une analyse de leur discours, les éléments qui se rapportent au niveau *École*.

III. CONTEXTE

Au Québec, l'éducation obligatoire s'organise en enseignement primaire (6 années de cursus : de l'âge de 5-6 ans à l'âge de 11-12 ans) et enseignement secondaire (5 années de cursus : de l'âge de 12-13 ans à 16-17 ans). Les étudiants désirant poursuivre des études universitaires doivent suivre deux ans d'études appelées *collégiales* (ou *Cégep*). C'est au *collégial* que les étudiants souhaitant suivre des études scientifiques ou techniques reçoivent leurs premiers cours de calcul (abordant le calcul différentiel et le calcul intégral).

Dans ce système, les étudiants faisant un retour aux études à l'âge adulte doivent, souvent, compléter certains cours de niveau *collégial* leur permettant d'être admis à l'université. C'est aussi le cas de nombreux étudiants étrangers qui souhaitent faire leurs études universitaires au Québec : un grand nombre de ces étudiants doivent suivre certains cours de niveau *collégial* pour pouvoir s'inscrire à leurs cours de niveau universitaire. Pour répondre à cette grande demande, les universités offrent souvent des cours préparatoires pour donner à ces deux types d'étudiants les préalables institutionnellement requis pour suivre leurs cours universitaires.

La recherche présentée ici s'intéresse donc à ces cours préparatoires, en particulier de calcul. Le contexte institutionnel est assez particulier : bien qu'il s'agisse de cours donnés à l'université, plusieurs approches suivent le fonctionnement du *collégial*. Par exemple, les cours sont organisés en suivant un manuel scolaire utilisé dans les institutions du *collégial*. Le niveau de rigueur est aussi compatible avec le *collégial*, ce qui implique qu'il y a très peu de démonstrations, et les contenus sont souvent réduits à des techniques. Finalement, il est aussi à noter que le système universitaire distingue, de façon générale, deux types d'enseignants : les professeurs (ayant un doctorat et ayant un poste permanent – ou menant à la permanence – avec des responsabilités d'enseignement, de recherche et administratives) et les chargés de cours (ayant au moins une maîtrise, souvent embauchés pour donner un certain nombre de cours par session).

IV. MÉTHODOLOGIE

Jusqu'en mai 2018 nous avons rencontré 20 enseignants universitaires. Cinq d'entre eux donnent des cours d'analyse et les 15 autres des cours préparatoires de calcul (deux d'entre eux donnant un cours de pré-calcul) dans différentes institutions à Montréal. Au moment d'écrire cet article, nous avons commencé les analyses de cinq de ces enseignants (E2, E3, E4, E5 et E6) et nous montrons ici certains résultats préliminaires.

Nous avons contacté les participants à la recherche en consultant, pour chaque semestre depuis l'automne 2016, la liste de cours de calcul et d'analyse offerts par les quatre universités situées à Montréal ainsi que par deux centres universitaires de formation en génie. Les participants ayant accepté d'être interviewés ont été rencontrés pour discuter de différents éléments liés à leur pratique et regroupés par thèmes : formation académique, expérience professionnelle, caractéristiques du cours donné, programme et profil des étudiants, utilisation de ressources pour préparer le cours, stratégies pédagogiques et principaux défis. Les entrevues ont duré de 45 minutes à 1h30. Pour cet article, nous nous concentrons sur les questions concernant les caractéristiques du cours, le programme et le profil des étudiants suivant le cours, ainsi que les principaux défis rencontrés par les participants.

Les profils des cinq participants analysés dans cet article sont les suivants :

Participant	**E2**	**E3**	**E4**	**E5**	**E6**
Profil académique	Licence, maîtrise et doctorat en ingénierie	Licence, maîtrise et doctorat en mathématiques	Licence et maîtrise en mathématiques	Licence et maîtrise en mathématiques. Doctorat en mathématiques d'ingénieur	Licence et maîtrise en mathématiques
Poste de travail	Chargé de cours et associé de recherche	Chargé de cours	Chargé de cours Enseignant au *collégial*	Chargé de cours	Chargé d'enseignement
Autre expérience professionnelle	Travail dans une compagnie d'ingénierie	Dans le passé, vacataire (TD) en France, préparation d'adultes.	Auxiliaire d'enseignement	Travaux dirigés	Enseignant au secondaire et au *collégial*
Institution	École d'ingénierie A	Université B	Université B	École d'ingénierie A	École d'ingénierie A
Cours[2]	Calcul intégral	Calcul différentiel	Calcul différentiel et calcul intégral	Calcul différentiel et calcul intégral	Calcul différentiel et calcul intégral
Caractéristiques du cours	Environ 65 étudiants par section – 2 ou 3 sections coordonnées	Environ 100 étudiants par section – 5 ou 6 sections coordonnées	80-100 étudiants par section – environ 4 sections coordonnées	40-45 étudiants par section – environ 3 sections coordonnées	Environ 60 étudiants par section – environ 3 sections coordonnées

Tableau 1 *– Profil des participants. Le masculin est utilisé pour tous, indépendamment de leur genre*

Chaque interview a été enregistrée et retranscrite verbatim. Les données ont été ensuite divisées en catégories distinctes selon les thèmes qui ont guidé les interviews. Pour cet article, les données sous les thèmes « caractéristiques du cours donné », « programme et profil des étudiants » et « principaux défis » ont été considérées à partir de mots-clés faisant référence à des contraintes externes ; ces mots-clés ont formé des catégories émergentes et ont été recherchés dans les autres transcriptions, nous permettant ainsi d'identifier les catégories principales de contraintes pour ces participants.

[2] Il s'agit dans tous les cas d'un cours préparatoire.

Il est à noter que les travaux utilisant la double approche partent de l'observation de déroulements de séances de classe (Robert, 2008 ; Robert & Rogalski, 2002), identifiant deux niveaux. Le premier niveau d'analyse focalise sur l'activité en classe et les apprentissages potentiels des élèves suivant deux composantes : une composante cognitive et une composante médiative. Un deuxième niveau prend en compte trois autres déterminants : une composante personnelle, une composante institutionnelle et une composante sociale. Par ailleurs, Robert (2008) souligne que « exercer un métier c'est aussi devoir respecter un certain nombre de contraintes qui peuvent même s'avérer plus ou moins contradictoires avec ce qu'on aurait envie de faire si on était tout seul » (p. 61) et, par ce fait, ces contraintes peuvent amener à des pratiques en partie communes en termes de composantes médiative et cognitive, même s'il reste des marges de manœuvre qui ne sont pas investies de la même façon (pp. 63-64). Par rapport à ces contraintes, Robert et Rogalski (2002) soulignent qu'elles sont des déterminants des pratiques qui dépassent la classe et qui peuvent limiter l'espace de liberté des enseignants. Puisque ce travail se concentre sur ces contraintes, nous avons interrogé nos participants par rapport à elles, sans observer le déroulement effectif de leur enseignement.

V. ANALYSE DE DONNÉES

Le tableau suivant synthétise les catégories principales que nous avons créées avec les contraintes influençant leur enseignement identifiées par les participants.

Contrainte	Participant	Extraits
Contenus et exercices déjà choisis / Beaucoup de groupes coordonnés	E2 E3 E4 E5 E6	« Parce qu'en fait, il a fallu qu'je respecte […] la matière du cours […] Les exercices, ils m'ont été donnés par des coordonnateurs » (E2) « L'ordre, c'est le coordonnateur qui l'oblige » (E2) « À l'université, […] c'est une façon différente d'enseigner, dans l'sens que j'arrive, j'enseigne, pis j'pars après. J'donne des exercices de TP. […] Tandis qu'avec mes étudiants [du *cégep*], j'ai un *feedback* continu. […] C'est moi qui leur fais faire des exercices. C'est moi qui sais c'est quoi leurs difficultés » (E4) « Je pense […] qu'on est un peu contraints à donner la même chose » (E5)
Certains étudiants ont déjà suivi le cours au *cégep* ou dans leur pays	E2 E4 E6	« Le problème majeur, en fait, […] c'est ce qu'on appelle le phénomène de déjà vu […] Ils pensent que « Ah, cette matière, je l'ai déjà vue au Maroc […] » (E2) « Dans ce public, par exemple, j'ai eu des médecins […] Et comme y peuvent pas aller faire médecine, et ben ils recommencent à zéro. Imaginez, un médecin. » (E3) « Parce que y'en a aussi qui viennent de d'autres pays pis qui se sont pas fait' reconnaître leurs cours […] Eux ont déjà fait l'cours, pis sont très bons […] C'est très, très hétérogène comme groupe » (E4) « Mon but c'est de préparer les étudiants [étrangers] au programme québécois » (E6)
Le nombre d'étudiants	E3 E4	« Depuis […] les restrictions budgétaires, depuis cinq-six ans, aussi, c'est des sections affreuses. Plus de cent étudiants » (E3) « À l'université, écoutez, on est quatre profs à enseigner à quatre cent cinquante étudiants. Avec les TP, on est dix TP. C'est en plus hétérogène […] On enseigne le mieux qu'on peut.» (E4)

Hétérogénéité des groupes	E3 E4	« Ce serait mieux des groupes homogènes, là. [Avec] un public homogène, on parle à une seule personne. On parle pas à différentes personnes le même langage » (E3) « On peut avoir des gens qui s'en vont en pharmacie, […] en médecine, en mathématiques, en physique, en bio, … […] Fait que… mes étudiants, ils sont dans tous les programmes » (E4) « C'est pas évident parce que quand on a des classes hétérogènes, c'est pas facile, tu sais » (E4) « Parce que, souvent, les clientèles à l'université, ça fait longtemps […] qu'y'ont pas fait' de maths. Ça fait dix ans qu'y'ont pas fait des maths, et cetera. Donc y'en a qui partent de très loin […] Donc, on a des étudiants très forts, qui sont probablement les étudiants qui ont déjà fait l'cours dans leur pays […] Pis on a les étudiants qui ont des parcours atypiques. […] Et, eux, y'ont beaucoup, beaucoup de difficulté » (E4)
La durée des cours et leur temps	E2 E4	« Les difficultés, en fait, c'est… quand c'est trois heures, ça, c'est sûr » (E2) « Trente-neuf heures, pis moi, j'en ai soixante-quinze au *cégep*. Pis c'est moi qui les donne, les soixante-quinze » (E4)
Le statut de chargé de cours	E3	« Mais ça renvoie à un autre statut. Le statut de chargé de cours et la précarité de l'emploi […] peut-être qu'on va pas trop chercher de ressources nouvelles parce qu'on va plus penser à enseigner un autre cours, un deuxième cours, un troisième cours… que de perdre du temps » (E3)
Public adulte	E3	« Et puis j'ai des femmes ou des hommes, parfois, dont la situation sociale […] semble difficile, par exemple des femmes enceintes, sur le point d'accoucher […] On fait un peu du social si vous voyez ce que je veux dire » (E3)
Contraintes physiques	E3	« J'aurais bien aimé, par exemple, disposer de deux tableaux. Par exemple, un tableau, je projette, et un autre, je peux écrire. Là, ça aurait été formidable. Mais la plupart des salles […] ça fonctionne pas comme ça. » (E3)

Tableau 2 *– Principales catégories de contraintes*

Les principales catégories identifiées nous indiquent que la première contrainte reconnue par les participants est le fait d'avoir peu de marge de manœuvre, car la plupart des éléments concernant le contenu sont déjà choisis par un coordonnateur. Cependant, malgré cette contrainte importante, les participants trouvent des moyens pour laisser leur empreinte et ce, au niveau *Sujet* :

- E2 déclare que, en tant qu'ingénieur, il aime ajouter des applications ou des récits issus de son expérience : « C'est comme… ils sont un peu assoiffés vers quelque chose de pratique ». Entre autres, il propose des exemples d'application concrets en ingénierie et se sert parfois de logiciels professionnels.
- E3 considère le manuel du cours médiocre et essaie de compenser avec d'autres : « Il existe d'excellents manuels qui sont traduits. Malheureusement […] sont peu utilisés ici ». Il se sert aussi de son expérience d'enseignement auprès des adultes : « c'est peut-être là que j'ai commencé à apprendre à communiquer avec des gens […] qui n'ont pas de formation » et demande souvent à ses étudiants d'exprimer dans leurs propres mots les notions abordées. Par ailleurs, il commence aussi à utiliser dans ses cours le logiciel GéoGébra : « Je vois très bien que ça a l'air […] de les attirer ».
- E4 ajoute aussi des ressources, en utilisant des vidéos et des ressources sur internet. Il cherche aussi des applications pour capter l'attention de ses étudiants, bien que le fait d'avoir une formation en mathématiques ne lui permette pas d'en connaître beaucoup. Il ajoute que son expérience d'enseignant au *Cégep* lui est aussi utile.
- E5 change de petites choses : « on change un peu la définition comme elle est donnée […] Je la simplifie ou je trouve que si je fais comme ça […] ils vont plus voir ça ». Il

change aussi les exemples, en ajoutant de nouveaux à ceux qui se trouvent dans le manuel. Il avoue aussi utiliser son expérience des mathématiques pour ingénieurs afin de donner quelques applications dans le cours.

Les participants indiquent donc que, bien qu'ils participent à un cours qui est organisé de sorte que toutes ses sections soient coordonnées, ils essaient tous, à leur façon, de faire de petites modifications à ce qui est donné, au niveau *Sujet*. Ceci est cohérent avec des résultats obtenus avec la double approche : malgré de fortes contraintes externes, « des alternatives plus personnelles, perceptibles en classe, sont à relier à des choix locaux, plus variés, qui se lisent à partir des composantes cognitive et médiative » (Robert & Rogalski, 2002, p. 519). De plus, bien que nous soyons encore en train de traiter les données pour les analyser, nous voyons un phénomène intéressant chez E2 et E5 : ayant de l'expérience en ingénierie et donnant un cours destiné à des futurs ingénieurs, ils se servent de cette expérience pour bonifier leur cours. Nous pensons que ces petites différences, bien qu'elles soient très locales et qu'elles n'aient probablement pas d'impact dans l'évaluation finale (dans les mots de E5 : « comme il y a un examen commun, les petites différences onva pas les voir »), qui est commune à toutes les sections, peuvent quand même avoir un impact important sur la façon dont les étudiants perçoivent le cours.

Un autre phénomène important apparaît dans les récits des participants, selon l'institution où ils travaillent. Le cours, qui est censé être « le même » dans les deux institutions, en pratique, semble fournir des expériences différentes aux étudiants. Dans l'institution A, les groupes sont moins nombreux et tous les étudiants vont entamer des études en ingénierie, ce qui facilite la recherche d'applications par les enseignants ; cependant, le fait qu'il y ait beaucoup d'étudiants étrangers ayant déjà suivi le cours dans leur pays présente des défis pour les enseignants. Par contre, dans l'institution B, les groupes sont très nombreux et les étudiants ont des profils très différents, ce qui rend difficile la gestion (des étudiants très forts versus des étudiants très faibles) et la recherche d'applications pour les intéresser.

VI. REMARQUES FINALES

D'abord, nous insistons sur le caractère préliminaire des données et des analyses présentées : nous n'avons pour l'instant que des analyses partielles d'un quart des participants (et nous cherchons à trouver d'autres participants). Cependant, les données que nous avons pour le moment permettent de dégager au moins deux phénomènes intéressants dans chacune des institutions considérées (d'autres institutions vont s'ajouter à nos analyses prochainement) qui opèrent au niveau hiérarchique *École*, mais qui génèrent des contraintes en ce qui concerne ce que les enseignants pensent pouvoir réaliser aux niveaux *Thèmes* et *Sujets* :

- Le fait que toutes les sections du cours qu'ils donnent soient coordonnées (parfois avec beaucoup de sections), bien qu'ayant pour but d'assurer que tous les étudiants reçoivent les mêmes contenus et évaluation, semble créer un sentiment de manque de marge de manœuvre. Cependant, les participants essaient tous, chacun à leur façon, de laisser leur empreinte sur les contenus (et quelquefois, dans l'organisation de ces contenus). Bien qu'ils soient conscients du faible impact de ces empreintes sur les évaluations, nous constatons un désir d'aider les étudiants, de rendre leur expérience et apprentissage plus signifiants.
- Le statut particulier de ces cours préparatoires fait en sorte que le profil des étudiants est assez différent lorsque comparé au « même » cours au *collégial* : il y a plusieurs étudiants étrangers ayant déjà suivi le cours dans leur pays et, surtout dans l'institution B, il y a des groupes très hétérogènes avec de grandes divergences entre les étudiants, ce qui crée des contraintes importantes au moment d'enseigner. Un élément qui ressort

dans les transcriptions des enseignants dans l'institution A, c'est leur prise de conscience d'avoir un grand nombre d'étudiants internationaux et leur souci de les aider à s'intégrer rapidement au système québécois ; de plus, le fait d'avoir de plus petits groupes leur permet de faire un suivi plus proche de ces étudiants.

Nos résultats, bien qu'au niveau universitaire, vont dans le même sens que plusieurs résultats obtenus avec la double approche au niveau scolaire : « les choix globaux qui se présentent aux enseignants […] sont fortement conditionnés par les contraintes externes, institutionnelles » (Robert & Rogalski, 2002, p. 519), laissant peu de marge de manœuvre en termes de choix de savoirs globaux et de formes de gestion générales. Nous comptons poursuivre nos analyses de données pour tous les participants, pour mieux documenter quelles sont les principales contraintes ressenties. Notre but ultime est de connaître plus en détail les interventions réalisées par les enseignants aux niveaux *Thème* et *Sujet*, pour documenter les stratégies et les contenus (applications, exemples…) utilisés par ces enseignants face à ces contraintes.

VII. REMERCIEMENTS

Ce travail est financé par le Conseil de recherches en sciences humaines du Canada (CRSH), subvention 435-2016-0526. Nous remercions tous les participants à ce projet de leur disponibilité qui a rendu ce projet possible.

RÉFÉRENCES

Barquero, B., Bosch, M., & Gascón, J. (2011). 'Applicationism' as the dominant epistemology at university level. In M. Pytlak, T. Rowland & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1938-1948). Rzeszów: University of Rzeszów.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. 3. Écologie & Régulation. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R., Floris (Eds.), *Actes de la 11ème École d'Été de Didactique des Mathématiques* (pp. 41-56). Corps, France: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (2016). Praxeological issues in the development, reception and use of ATD. *5° Congreso Internacional sobre la Teoría Antropológica de lo Didáctico*. Madrid, Spain. Retrived March 15, 2018 from, http://www.atd-tad.org/wp-content/uploads/2016/03/Chevallard_TAD-5_TexteCoference_EN.pdf

González-Martín, A. S., Biza, I., Cooper, J., Ghedamsi, I., Hausberger, T., Pinto, A., Vandebrouck, F., & Viirman, O. (2017). Introduction to the papers of TWG14 : University mathematics education. In T. Dooley & G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the 10th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME10) (pp. 1953-1960). Dublin, Ireland: DCU Institute of Education and ERME.

Gueudet, G. (2017). University teachers' resources systems and documents. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 3*(1), 198–224.

Pinto, A. (2013). Variability in university mathematics teaching: a tale of two instructors. In B. Ubuz, Ç. Haser & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2416–2425). Antalya, Turkey: Middle East Technical University.

Robert, A. (2008). La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques d'enseignants de mathématiques. In F. Vandebrouk (Ed.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp. 31-68). Toulouse : Octares.

Robert, A., & Rogalski, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques: Une double approche. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 2*(4), 505-528.

Speer, N. M., Smith, J. P., & Horvath, A. (2010). Collegiate mathematics teaching: An unexamined practice. *The Journal of Mathematical Behavior, 29*(2), 99–114.

Wagner, J., & Keene, K. (2014). Exploring differences in teaching practice when two mathematics instructors enact the same lesson. In T. Fukawa-Connolly, G. Karakok, K. Keene, & M. Zandieh (Eds.), *Proceedings of the 17th Research in Undergraduate Mathematics Annual Conference.* (pp. 322-335). Denver. CO**.**

Winsløw, C., Gueudet, G., Hochmuth, R., & Nardi, E. (2018). Research on University Mathematics Education. In T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger, & K. Ruthven (Eds.), *Developing research in mathematics education – Twenty years of communication, cooperation and collaboration in Europe* (pp. 60-74). Oxon: Routledge – ERME series.

L'INTERDISCIPLINARITE MATHEMATIQUES-PHILOSOPHIE : UN LEVIER POUR LA FORMATION DES ENSEIGNANTS

HAUSBERGER[1*], Thomas – ROY[2**], Anne

Résumé - Comment l'approche didactique et philosophique en mathématiques, dispositif interdisciplinaire de formation des enseignants du secondaire, peut-elle contribuer à l'innovation pédagogique à l'université et développer la réflexivité des étudiants ? Nous présentons dans cette communication notre dispositif et les résultats obtenus, dans le cadre d'une séquence pédagogique portant sur la didactique et l'épistémologie de la preuve. Notamment, cette séquence vise à développer chez les étudiants des représentations cohérentes avec la pratique mathématique contemporaine, en lien avec les questions d'enseignement-apprentissage.

Mots-clefs : Formation des enseignants, didactique et épistémologie de la preuve mathématique, discussion en communauté de recherche philosophique, réflexivité sur l'objet mathématique à enseigner.

Abstract – How can the didactic and philosophical approach in mathematics, an interdisciplinary device for the training of secondary school teachers, contribute to pedagogical innovation in higher education and develop students' reflexivity? We present in this paper our device and the results obtained, in the case of a pedagogical sequence on the didactic and the epistemology of the proof. In particular, this sequence aims to develop in students representations consistent with contemporary mathematical practice, in connection with the questions of teaching and learning.

Keywords: Teacher training, didactics and epistemology of mathematical proof, discussion in philosophical research community, reflexivity on the mathematical object to be taught

I. INTRODUCTION

Dans les milieux scolaires, la vision des savoirs demeure encore celle d'un savoir « vrai » à transmettre plutôt qu'un savoir construit et négocié par une communauté scientifique. Les membres du personnel enseignant du secondaire se perçoivent « trop souvent comme des techniciens de l'enseignement chargés de transmettre des contenus préétablis » (Menassier et Guertin, 2011, p. 9). Cette vision se reflète massivement dans les représentations qu'ont les futurs enseignants des savoirs mathématiques (Adihou et al., 2012). Il importe donc d'offrir dans les cours en formation à l'enseignement des occasions de questionner leur vision des savoirs mathématiques et de se réapproprier des pratiques professionnelles « signifiantes » en mathématiques (Bednarz et al., 2012).

La discussion pédagogique à visée philosophique (DPVP) en communauté de recherche est l'élément central du dispositif de formation que nous avons expérimenté. Elle fait partie de l'approche didactique et philosophique en mathématiques (ADPM), laquelle s'inspire des fondements socioconstructivistes et pragmatistes de l'approche « Philosophie pour enfants adaptée aux mathématiques » mise au point par une équipe de chercheurs du Québec (Daniel et al., 1996). L'ADPM vise notamment l'engagement dans la formation par un dialogue philosophique et une réflexion didactique sur des questions qui ont été posées par les futurs enseignants à propos de savoirs mathématiques liés à des pratiques enseignantes.

Les étudiants qui ont suivi notre dispositif expérimental sont en première année de master Métiers de l'Enseignement, de l'Education et de la Formation à l'Université de Montpellier. L'expérimentation a eu lieu au sein d'un cours de didactique et d'épistémologie des mathématiques, après un travail sur la démonstration mathématique ayant permis d'aborder

1*. IMAG, Univ. Montpellier & CNRS – France – thomas.hausberger@umontpellier.fr
2**. LIIPTIC, Université du Québec à Trois-Rivières – Canada – Anne.Roy@uqtr.ca

l'origine de la démonstration dans l'histoire des mathématiques et ses caractéristiques par rapport aux autres formes d'argumentation et de preuve (notamment à travers l'étude de sources historiques). Dans la continuité, nous leur avons proposé une séquence pédagogique mettant en œuvre l'ADPM sur le thème de la preuve, autour d'un texte d'épistémologie des mathématiques rédigé par un mathématicien contemporain (Thurston, 1995). Notre but est de favoriser chez les futurs enseignants le développement de représentations sur la preuve qui, d'une part, soient cohérentes avec la pratique mathématique contemporaine et, d'autre part, contribuent à nourrir les pratiques professionnelles enseignantes.

L'ADPM, intégrée à un cours de didactique et épistémologie des mathématiques, peut-elle favoriser la réflexivité des étudiants et l'évolution de leurs conceptions sur les mathématiques et leur enseignement ? Nous présentons dans cette communication notre dispositif et les résultats obtenus, autour du thème de la preuve dont nous venons également souligner les enjeux épistémologiques et didactique, pour l'enseignement et la formation.

II. DIDACTIQUE ET ÉPISTEMOLOGIE DE LA PREUVE

Hanna (2000) souligne, dans la littérature de recherche en éducation mathématique, une recrudescence d'articles sur la preuve au tournant du 21^{e} s. Ces articles mettent l'accent sur les « raisons d'être » de la preuve, suite à des développements récents, à la fois en mathématiques et en éducation, qui questionnent le rôle de la preuve. Nous allons rendre compte de ce questionnement dans lequel s'inscrira la DPVP proposée aux étudiants.

1. Le point de vue de Thurston

En particulier, l'article du mathématicien Thurston (1995) est l'une des sources de Hanna (2000). Thurston structure son essai en plusieurs points, dont les suivants (avec la numérotation de loc. cit.) qui ont été proposés à la DVPV : 1. Que font les mathématiciens ? 2. Comment les gens comprennent-ils les mathématiques ? 4. Qu'est-ce qu'une preuve ? Il s'agit donc d'une réflexion épistémologique sur la nature de l'activité mathématiques, tenant compte des dimensions logiques, psychologiques et sociales, les deux dernières étant « essentielles dans un modèle correct du progrès mathématiques » (ibid. p. 7). En effet, Thurston soutient la thèse que le progrès mathématique ne consiste pas à « prouver des théorèmes » mais plutôt à « faire avancer la *compréhension* des mathématiques ». D'une part, le modèle « définition-théorème-preuve » de la pratique mathématique, centré sur la déduction logique, « n'explique pas l'origine des questions », il n'inclut pas la part spéculative et heuristique de l'activité mathématique. D'autre part, la compréhension, dans ses dimensions psychologiques et cognitives, passe par des images mentales, elle s'appuie sur l'intuition de l'espace et du temps, sur les fonctions du langage et la pensée analogique. De ce fait, les preuves ne se communiquent ni ne se vérifient avec la rigueur formelle des ordinateurs, la « sûreté » des théorèmes provient davantage de la capacité des mathématiciens à étudier « soigneusement et de façon critique les idées mathématiques », donc de la dimension conceptuelle des preuves. En pratique, les preuves publiées sont souvent incomplètes, mais les mathématiciens sont capables de fournir les détails à qui en ferait la demande. Ainsi « la compréhension d'un sujet est immergée dans les cerveaux et le tissu social de la communauté qui réfléchit sur ce sujet » (ibid. p. 16), ce qui renvoie à des dimensions épistémiques, pragmatistes et sociales de la preuve.

2. Philosophie et éducation mathématique : regards croisés sur la preuve

L'accent mis par Thurston sur la compréhension plutôt que sur la vérification rentre directement en résonance avec les questions didactiques : « But in the classroom the key role of proof is the promotion of mathematical understanding, and thus our most important challenge is to find more effective ways of using proof for this purpose » (Hanna, 2000, p. 5-6). La fonction explicative des preuves (relative au sens, au « pourquoi », par rapport au « comment » que donne à voir les enchaînements logiques) comporte différents aspects : d'une part, une preuve explicative met en regard des causes et des effets de façon à éclairer la nécessité logique que le théorème énonce ; d'autre part, elle véhicule tout un contexte incluant les actions sur les objets que l'énoncé stipule, lesquelles sont fondamentales pour le processus de conceptualisation. D'un point de vue plus strictement épistémologique, le philosophe Rav a bien perçu les fonctions des preuves au-delà du rôle assigné de justification, lesquelles sont porteuses de connaissances : « *proofs rather than the statement-form of theorems are the bearers of mathematical knowledge*. [...] The whole arsenal of mathematical methodologies, concepts, strategies and techniques for solving problems, the establishment of interconnections between theories, the systematisation of results » (Rav, 1999, p. 20). Cela inspirera d'autres travaux d'Hanna, dans des regards croisés entre philosophie et éducation mathématiques : « This paper aims to show that proofs [...] have the potential to convey to students "methods, tools, strategies and concepts for *solving problems"* » (Hanna & Barbeau, 2010, p. 85). Toutes ces dimensions participent de la compréhension du théorème : les preuves contiennent les situations et les invariants opératoires relatifs aux concepts étudiés.

3. L'exemple du théorème de Pythagore

Qu'est-ce que comprendre un théorème mathématique ? Il est nécessaire de prendre un exemple pour approfondir cette question philosophique difficile. Le théorème de Pythagore, qui est bien connu et dont l'on dénombre plus de 200 preuves dont certaines sont publiées dans des manuels à différents niveaux de la scolarité (du primaire à l'université), est pour ces raisons un bon exemple pour notre étude et pour une activité en classe avec nos étudiants.

Selon Dhombres (2009), les commentateurs d'Euclide se sont penchés sur la « signification de la preuve d'une propriété de Pythagore au sein même de la construction axiomatique. Autrement dit, ils ont cherché le principe de ce théorème, auquel la démonstration ne pourvoyait pas un accès évident, et de ce principe ils ont fait une cause » (p. 64). Ainsi la première preuve d'Euclide (livre I) apparaît-elle comme la mise en œuvre de la procédure « d'application des aires » : on montre que le carré ABHG et le rectangle AKLF ont même aire (de même pour BCJI et KCEL) en découpant chacun en deux triangles et en montrant une succession d'égalités d'aires triangulaires (AGB, AGC, ABF, AKF), fig.1. Par contraste, la seconde preuve d'Euclide (livre VI) établit une autre cause : la similitude des figures, qui s'exprime par le fameux théorème de Thalès. En effet, le triangle rectangle ABC peut être découpé en deux parties selon la hauteur BK, et les trois triangles rectangles obtenus sont semblables. Leurs aires sont donc l'une par rapport à l'autre dans le carré du rapport des côtés homologues ; comme le triangle de départ est l'union des deux autres, on obtient l'égalité algébrique recherchée $a^2=b^2+c^2$. Selon Dhombres, cette preuve fait aujourd'hui « la mémoire la plus commune du théorème de Pythagore », et certains y voient « l'essence profonde de la pythagoricité ». La connotation psychologique est reprise de Bachelard, pour lequel « dans un résultat subsiste la mémoire non seulement de ce qui l'a prouvé, mais encore de l'histoire par laquelle il fut à la fois trouvé et prouvé pour la première fois, ce qui suppose un travail, au sens de travail d'enfantement par l'invention, même quand elle est renouvelée par celui qui apprend des mathématiques » (Dhombres, 2009, p. 68). Si Bachelard, selon

Dhombres, préférerait sans doute la preuve du livre VI, car plus conceptuelle, générale (le théorème se généralise à toutes les figures régulières que l'on peut construire sur les côtés du triangle rectangle) et évitant l'arbitraire du découpage selon le segment KL (fig. 1), la preuve du livre I n'en est pas moins importante. En effet, la figure qu'elle emploie fonde le caractère géométrique du théorème en tant que relation entre des grandeurs (à la différence d'une relation algébrique avec des puissances), celle des aires des carrés construits sur les côtés.

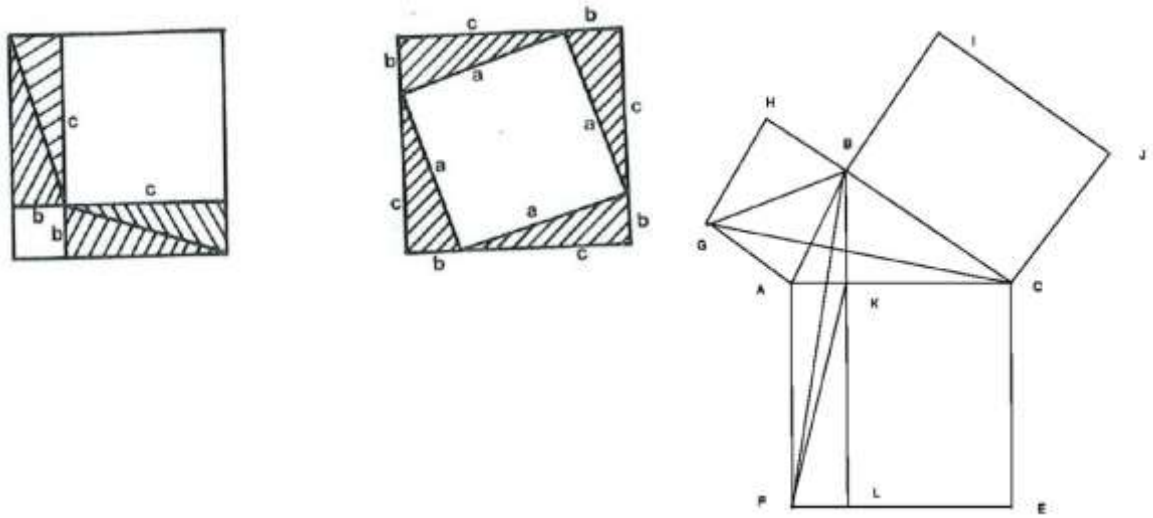


Figure 1 *– Deux figures pour démontrer Pythagore : à gauche, Simpson (1766) ; à droite, Euclide (~ -300)*

Cet aspect transparaît moins nettement dans la preuve de Simpson (fig. 1, gauche), que l'on retrouve dans des manuels du début du secondaire. Cette preuve procède aussi du principe d'application des aires, de façon plus élémentaire qu'Euclide, plus astucieuse peut-être mais moins à même de systématiser une pratique géométrique démonstrative.

Les étudiants rencontrent à l'université le théorème de Pythagore dans un contexte plus général, celui des espaces dits euclidiens. En effet, soit *E* un espace vectoriel muni d'un produit scalaire < , > ; la propriété de Pythagore est : deux vecteurs X et Y sont orthogonaux si et seulement si $||X+Y||^2 = ||X||^2 + ||Y||^2$, la preuve se réduisant au calcul élémentaire $<X+Y, X+Y> = ||X||^2 + ||Y||^2 + 2 <X, Y>$. Où est passée l'essence de la pythagoricité ? Elucider cette question nécessite de comprendre le renversement qui s'opère à l'université lors de la refondation de la géométrie sur les nombres réels : les angles et les distances sont définis à partir du produit scalaire (et non l'inverse). Or les représentations géométriques de l'algèbre linéaire sont fondées sur les dimensions deux et trois. Comme on le démontre lors de l'introduction de la géométrie vectorielle dans le plan, c'est le théorème de Pythagore qui garantit que la norme définie par le produit scalaire usuel mesure bien la longueur des segments représentant les vecteurs. La pythagoricité au sens géométrique est donc à retrouver dans la cohérence du formalisme avec nos représentations géométriques, où elle se dissimule. Ces différentes preuves illustrent bien l'idée, citée par Dhombres (ibid. p. 71) à la suite de Comte, que « le fait que peut représenter un théorème comme celui de Pythagore [est pluriel et] n'a de sens qu'en fonction du niveau de connaissances par lequel on y accède ». Ce niveau est une « construction de l'histoire » et inclut les perspectives de la géométrie déductive à la suite d'Euclide, de la géométrie analytique (cas étudié par Comte), ou encore des espaces affines euclidiens.

4. Enseignement de la preuve et formation des enseignants

Selon Lin et al. (2012), la formation professionnelle des enseignants de mathématiques à l'argumentation et la preuve cible trois composantes principales : les connaissances, la

pratique et les croyances des enseignants sur la preuve. Sur l'exemple du raisonnement par récurrence, ces auteurs montrent que la pratique d'enseignement est directement influencée par ces composantes. De ce fait, il apparaît essentiel que les représentations épistémologiques des futurs enseignants sur la preuve soient cohérentes avec la pratique mathématique et prenne en compte, comme le souligne Hanna (2000), les différentes dimensions logiques, psycho-cognitives et sociales que mettent en avant Thurston, Rav et Dhombres. C'est à cette condition que ces futurs enseignants pourront comprendre les enjeux des questions méta-mathématiques que posent Durand-Guerrier et al. (2012) : « Why do we prove ? », « What does it mean to have proved something ? ».

La compréhension fine des enjeux de la preuve est fondamentale pour pouvoir construire des situations d'argumentation et de preuve et pour les analyser. La recherche en didactique a montré que la discussion en classe de telles situations avec les élèves constitue un levier précieux pour l'apprentissage de la preuve. C'est pourquoi nous proposons, comme partie d'un dispositif de formation initiale des enseignants sur la preuve, une DPVP sur un extrait du texte de Thurston, suivie d'une activité mathématique pendant laquelle les étudiants sont amenés à mettre en perspective les différentes preuves du théorème de Pythagore présentées ci-dessus (sauf la 2^{ième} preuve d'Euclide, qui n'a pas été donnée par manque de temps didactique).

III. MÉTHODOLOGIE

Dans cette section, nous présentons respectivement des informations sur le protocole de l'ADPM, les participants et la collecte de données, enfin le contexte de la DPVP.

Le protocole de l'ADPM. Durant l'expérimentation, voici les étapes suivies : 1: Formulation d'une question individuellement ; 2: Choix d'une question ; 3: Réflexion écrite sur la question; 4: DPVP; 5: Réflexion écrite n°2; 6: Activité mathématique; 7: Réflexion écrite n°3.

Les participants et la collecte des données. Un groupe de 28 étudiants a participé à la recherche. La collecte de données s'est faite à l'aide de l'enregistrement vidéo de la DPVP et des réflexions écrites. Cependant, nous présenterons uniquement ici le travail de quatre étudiants, choisis pour illustrer quatre styles de réflexivité mis en évidence par Roy (2008a, 2008b). La typologie des habiletés réflexives apporte notamment des informations sur la manière de concevoir l'objet à enseigner : le style *a-réflexif* (resp. *non réflexif, pré réflexif* et *quasi-réflexif*) se manifeste par des énoncés affirmatifs (resp. descriptifs, explicatifs et justificatifs). Cette typologie, qui se fonde sur analyse de la forme du discours, nous a servi à examiner la réflexivité par rapport à l'objet à enseigner. Nous faisons l'hypothèse que le contenu du discours des futurs enseignants est plus ou moins corrélé à leur niveau de réflexivité, au sens où les étudiants présentant des habiletés réflexives avancées sont les plus à mêmes à faire évoluer leurs conceptions sur la preuve, grâce aux différents éléments du dispositif. Nous souhaitons vérifier cette hypothèse dans des travaux futurs et nous nous contentons de présenter ici, sur des exemples, nos analyses du contenu des discours d'étudiants présentant des niveaux de réflexivité contrastés.

Le contexte de la DPVP. Pour débuter le cours, nous avons demandé à chaque étudiant de formuler une question qu'a suscité la lecture du texte de Thurston. Toutes ces questions ont été écrites au tableau. Ensuite, le groupe a voté pour le choix d'une question pour la DPVP. La question retenue s'énonce comme suit : « Une preuve est-elle nécessaire et suffisante pour comprendre un résultat? ». Avant la DPVP, plusieurs membres du groupe jugent bon d'arriver d'abord à un consensus sur la compréhension en mathématiques. Nous demandons alors à l'auteur de la question choisie ce que signifie pour lui cette question. Voici sa réponse :

« C'est lorsque je prends un cas particulier pour comprendre un résultat mathématique. Est-ce que la preuve est nécessaire et suffisante ou seulement nécessaire ou seulement suffisante, car parfois j'arrive à un résultat et je regarde la preuve et je ne comprends pas le résultat, dans ce cas-là, la preuve n'est pas suffisante pour comprendre le résultat ».

IV. ANALYSE DES DISCUSSIONS ET TRACES DES TRAVAUX D'ETUDIANTS

Ainsi que nous l'avons expliqué ci-dessus, nous avons analysé les données selon la double dimension de la forme et du contenu, en mettant en regard les niveaux de réflexivité observés avec les conceptions sur la preuve qu'expriment les étudiants.

1. Analyse de la forme

Pour faire l'analyse de la réflexivité au niveau de la forme du discours, nous avons effectué une analyse langagière du discours des étudiants. Nous illustrons ci-dessous les quatre styles de pensée à travers l'analyse des productions des quatre étudiants sélectionnés.

Le style *a-réflexif*. Anaïs affirme que la compréhension résulte de l'intuition. Elle dit : « Un jour, j'étais en classe et le prof était en train de faire une preuve. Je lui ai demandé : monsieur, comment prouver ça ? Il m'a dit c'est de l'intuition donc pour faire une preuve, il faut de l'intuition ». Ici, l'étudiante se fie uniquement à une autorité pour affirmer ses croyances et elle utilise uniquement des énoncés *affirmatifs* pour communiquer son point de vue.

Le style *non-réflexif.* Pour répondre à la question posée, Bob énonce : « Il y a certains énoncés mathématiques qui sont compris par les mathématiciens dont ils ne retrouvent pas encore la preuve, et parfois, on a des énoncés mathématiques et la preuve ne nous aide pas plus à comprendre l'énoncé ». Dans cet extrait, l'étudiant apporte uniquement son point de vue à l'aide d'exemples. En fait, il donne une *description*.

Le style *pré-réflexif.* Lors des échanges, Cyril parle d'adapter la preuve selon le niveau scolaire. Il dit alors : « Pour comprendre un énoncé, on a besoin d'une preuve. Est-ce qu'elle suffit pour comprendre l'énoncé ? Je pense que si elle est bien faite et adressée aux bonnes personnes, oui. C'est même le but d'une preuve mathématique. Une fois qu'elle est lue, elle doit être suffisante pour qu'on puisse comprendre l'énoncé et suffisante pour que l'énoncé soit vrai ». Ici, Cyril utilise des *énoncés explicatifs* pour expliquer son point de vue.

Le style *quasi-réflexif*. Sur le rôle de la compréhension dans la preuve, David conclut : « Sur la partie comprendre, il y a deux choses qu'on peut dégager. On va pouvoir raisonner sur l'énoncé sans la preuve et comprendre pourquoi l'énoncé est vrai, la preuve va être nécessaire ». Ici, David *justifie* son idée, il ne donne pas seulement une explication.

2. Analyse sur le contenu

La DPVP a permis de dégager différents sens ou degrés de compréhension : comprendre l'énoncé, au sens de pouvoir l'appliquer, indépendamment de la connaissance d'une preuve, et comprendre la nécessité logique qu'exprime l'énoncé, ce qui nécessite la preuve et apporte la « fiabilité » (fonction de justification de la preuve). Les étudiants ont également repéré le rôle de l'intuition et des connaissances mathématiques dans la compréhension de l'énoncé et des preuves. Cependant, la dimension explicative d'une preuve demeure à préciser : David parle du « pourquoi » (les causes) tandis qu'une autre étudiante mentionne le « comment » (l'enchaînement des raisons) sans que les distinctions soient opérées. Le travail mathématique sur des preuves concrètes apparaît en définitive nécessaire pour approfondir cette notion, de

façon à fournir un substrat suffisamment riche pour poursuivre la réflexion épistémologique autour de ces catégories philosophiques. Enfin, les dimensions sociales de la preuve ne sont pas mises en avant par les étudiants.

L'analyse des données montrent que les étudiants essentiellement a-réflexifs tels que Anaïs affirment en général une nécessité éventuelle de la preuve, selon les cas. On peut faire l'hypothèse qu'ils répètent, sans en comprendre les raisons, la parole du professeur qui requiert de ses élèves l'apprentissage de certaines preuves et en omet d'autres. Un étudiant non-réflexif tel que Bob (tableau 1) montre une réflexion davantage personnelle, mais les difficultés à expliquer et justifier son point de vue se traduisent par un discours superficiel n'identifiant pas les apports de la preuve à la compréhension. Son interprétation problématique (incorrecte) de la réception des travaux de Perelman par les mathématiciens va de pair avec une conception de la compréhension réduite à la construction de représentations intuitives sur lesquelles il est difficile d'avoir prise. De telles conceptions sont peu propices à l'action didactique. Par contraste, les étudiants manifestant des habiletés de pensée pré-réflexives (Cyril, par exemple) ou quasi-réflexives (David) sont en général capables de mobiliser les dimensions logiques, pragmatistes et cognitives de la compréhension des énoncés mathématiques, en distinguant différents sens. Cyril exige des preuves de susciter la compréhension, sur des critères de clarté et de conviction des preuves, tandis que David discute les obstacles à la compréhension des preuves.

Alors que l'apport des preuves à la compréhension des énoncés se réduit essentiellement, à l'issue de la DPVP, à l'éclairage du « tissu » logique dans lequel le résultat s'insère, la réalisation de l'activité mathématique provoque chez ces étudiants suffisamment réflexifs une prise de conscience nouvelle : se dessinent des critères d'une preuve explicative. Ainsi Cyril évoque-t-il des éléments historiques et une contextualisation du questionnement, pour enrichir les preuves, alors que David distingue la compréhension de la véracité (fonction justificative) de celle des « tenants et aboutissants » à même de « remettre l'énoncé dans son contexte » (fonction explicative). Visiblement, les étudiants se sont retrouvés dans la posture des commentateurs d'Euclide, à mal de percevoir des principes éclairants derrière les enchaînements logiques de la première preuve d'Euclide.

Réflexion no 2	Réflexion no 3
Anaïs : Ca dépend du résultat mathématique, parfois on a pas besoin d'une preuve pour comprendre le résultat. Si c'était nécessaire et suffisant, dans ce cas il y aura pas d'axiome. Bob : Une preuve n'est ni nécessaire ni suffisante pour comprendre un résultat mathématique, car quand Perelman en 2002 a démontré la conjecture de Poincaré, il l'avait comprise à la base. Mais les mathématiciens qui ont lu cette démonstration ont mis au moins 4 ans pour la comprendre et certains mathématiciens aujourd'hui ne le comprendraient pas et ne comprendraient même pas la conjecture de départ, avec ou sans preuve. Pour moi comprendre c'est « intuiter « c'est-à-dire être capable de se représenter une image de la situation dans laquelle figure cette proposition dans le cerveau (comme le disait A. Connes dans une interview). Cyril : Pour chaque résultat qui nous est donné, on cherche d'abord à la comprendre en tant qu'énoncé. C'est un premier degré de compréhension, qui est suffisant pour appliquer ce résultat dans un exercice par exemple. Une fois les termes appropriés, on peut se demander d'où vient cet énoncé; comment a-t-il été obtenu ? À cette question,	Anaïs : Comprendre un résultat ce n'est pas forcément comprendre la preuve dans certains cas et dans d'autres cas, on a besoin de la preuve pour comprendre le résultat. Bob : Une preuve n'est ni nécessaire ni suffisante pour comprendre un résultat mathématique, car comme je le disais dans la feuille no 2, on peut comprendre un énoncé sans preuve et on peut ne rien comprendre avec la meilleure preuve du monde ! Pour moi comprendre c'est avoir l'intuition toutefois une preuve peut aider certains à se représenter une image plus précise de l'énonce pour finir par comprendre. En résumé, le maillon principal entre la preuve et la compréhension est l'intuition et ça dépendant des capacités innées et acquise de chacun. Cyril : Pour compléter ma réflexion sur les degrés de compréhension d'un énoncé, j'ajouterais à mes déclarations précédentes que si une preuve est nécessaire et doit se rendre suffisante pour comprendre un énoncé pleinement, elle devrait comporter des éléments

la preuve est une réponse efficace. Elle suit un raisonnement logique qui part des hypothèses et arrive à la conclusion. Si on veut comprendre un énoncé sans passer par la preuve donnée, on va implicitement devoir démontrer cet énoncé et donc en faire une preuve. Le but d'une preuve est d'être suffisamment claire et convaincante pour être suffisante à la compréhension de l'énoncé qu'elle démontre. La question de départ doit être posée chaque fois qu'on démontre un énoncé : Ma preuve est-elle nécessaire et suffisante pour comprendre mon énoncé ?	historiques et contextualiser le questionnement qui a mené à cet énoncé mathématique. Les preuves telles qu'elles sont, ne suffisent donc pas à comprendre la totalité d'un énoncé mathématique. Cependant elles pourraient le devenir en étant complétées par un contexte.
David : Comprendre dans le sens de pouvoir utiliser l'énoncé. Non une preuve n'est ni nécessaire, ni suffisante pour qu'un élève s'approprie l'énoncé. Comprendre dans le sens de connaître le cheminement logique concernant l'énoncé. Oui, la preuve est nécessaire en partant de bases communes de mathématiques, l'élève aura une plus grande facilité à comprendre l'énoncé. Mais est-elle suffisante ? Pas toujours, cela dépend des lacunes (ou non) de l'élève sur ces bases mathématiques. Mais aussi tout élève va raisonner de façon différente et il peut s'heurter à un raisonnement trop différent du sien.	David : Elle est nécessaire mais selon la preuve. on va comprendre, soit la véracité de l'énoncé, soit les tenants et les aboutissants et remettre l'énoncé dans son contexte. Elle n'est pas suffisante pour les mêmes raisons, les deux premières activités nous donnent bien une preuve mais elle n'est pas suffisante pour comprendre. En somme, on comprend mais est-ce qu'on a compris ?

Tableau 1 *– Exemples de productions d'étudiants présentant des niveaux de réflexivité différents*

V. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Lorsque ce type de questionnement émerge (sous les plumes de Cyril et David), nous considérons que notre dispositif a atteint son objectif de formation : en posant le problème de la compréhension, notre dispositif a permis d'articuler points de vue logique et cognitif à travers la discussion du caractère explicatif des preuves, que l'on souhaite favoriser en contexte d'enseignement-apprentissage. La porte est ainsi ouverte à l'étude, avec les étudiants, des écrits de Dhombres sur la pythagoricité (approfondissement épistémologique) ou des situations de preuve construites par Hanna pour mettre en avant le savoir-faire que recèlent les preuves (approfondissement didactique).

L'intégration d'un tel dispositif dans la formation professionnelle à l'enseignement des mathématiques exige nécessairement un temps d'appropriation. Sur le plan méthodologique, il faudrait reprendre des recherches sur une plus longue durée afin d'examiner l'impact réel sur la formation, notamment le gain sur la réflexivité et les liens entre la réflexivité et l'évolution des conceptions des étudiants. Néanmoins, la DPVP offre un nouveau rapport au savoir mathématique pour les futurs enseignants en mathématiques, ce qui donne l'occasion de favoriser le renouvellement de la pratique enseignante en mathématiques, au même titre que notre dispositif participe à l'innovation pédagogique à l'université, à travers l'interdisciplinarité mathématiques-philosophie dans la formation en didactique et épistémologie des professeurs stagiaires.

REFERENCES

Adihou A., Arsenault C., & Marchand, P. (2012) Dispositif de formation mathématique pour les futurs maîtres. *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone*. Genève, Suisse.

Bednarz N., Maheux J.-F., & Proulx, J. (2012) Design curriculaire et vision des mathématiques au Québec. *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone.* Genève, Suisse.

Daniel M.-F., Lafortune L., Pallascio R., & Sykes, P. (1996) *Philosopher sur les mathématiques et les sciences*. Québec, Canada : Le loup de gouttière.

Dhombres J. (2009) La preuve mathématique en tant qu'elle est épreuve de mémoire. *Communications* 84, 59-84.

Durand-Guerrier V. et al. (2012) Argumentation and Proof in the Mathematics Classroom. In G. Hanna, & M. de Villiers (Éds.), *Proof and Proving in Mathematics Education :The 19th ICMI Study* (pp. 349-367). Springer.

Hanna G., & Barbeau E. (2010) Proof as bearer of mathematical knwoledge. In G. Hanna, H. N. Jahnke, & H. Pulte (Dirs.). *Explanation and Proof in Mathematics : Philosophical and Educational Perspectives* (pp. 85-100). Springer.

Hanna G. (2000) Proof, explanation and exploration : an overview. *Educational Studies in Mathematics* 44, 5–23.

Lin F.-L. et al. (2012) Teachers' Professional Learning of Teaching Proof and Proving. In G. Hanna, & M. de Villiers (Éds.), *Proof and Proving in Mathematics Education :The 19th ICMI Study* (pp. 349-367). Springer.

Menassier E., & Guertin D. (2011) Persévérance scolaire et mission éducative : l'histoire pour mieux comprendre l'évolution du système éducatif au Québec : Entrevue avec Mme Céline Saint-Pierre. *Vie Pédagogique* 159, 6-9.

Rav Y. (1999) Why Do We Prove Theorems? *Philosophia Mathematica* 7(1), 5-41.

Roy A. (2008a) « Philosopher en mathématiques avec des futurs enseignantes et enseignants au primaire ». *For the learning of mathematics* 28(3), 36-41.

Roy A. (2008b) « Différents types de pensée pour résoudre un problème mathématique». *Envol : Groupe des responsables en mathématique au secondaire* 143, 9-17.

Thurston W.P. (1995) Preuve et progrès en mathématiques. *Repères-IREM* 21, 7-26.

L'OUTIL MATHEMATIQUE A L'UNIVERSITE – QU'EN DISENT DES ETUDIANTS DE PREMIERE ANNEE UNIVERSITAIRE ?

HOPPENOT Philippe*

Résumé – Cette étude a été réalisée en première année universitaire, deux années universitaires consécutives (2015 à 2017) au département QLIO[1] de l'IUT[2] d'Evry, sur l'enseignement des mathématiques à un public non mathématicien. Elle analyse le ressenti des étudiants face à une approche outil des mathématiques, qui peut sembler naturelle dans ce contexte. Les résultats montrent que si l'approche outil a des effets positifs, une marge de progression est encore possible, même pour des notions déjà enseignées dans le secondaire.
Mots-clefs : enseignement universitaire, dimension outil, Dialectique Outil-Objet, ressenti des étudiants

Abstract – This article presents a study carried out over two academic years (from 2015 to 2017) in QLIO department of Evry's IUT. It deals with mathematic teaching to non-mathematician students in the first year of the university. It analyses students' feelings about a mathematical tool approach, which may seem natural in this context. The results show that while the tool approach has positive effects, it should not hide the object dimension, even for concepts already taught in secondary education.
Keywords: university teaching, tool dimension of mathematics, dialectic tool-object, felt of students

I. INTRODUCTION

Les étudiants qui s'inscrivent en première année universitaire dans un département d'IUT QLIO ont obtenu un bac général Scientifique (S, 25%) ou Economique et Social (ES, 35%), un bac technologique STMG[3] (15%) ou STI2D[4] (25%) ou même parfois un bac Professionnel. Les divers domaines de compétence couverts par cette formation nécessitent l'utilisation de nombreux modèles mathématiques. Chaque département d'IUT possède un Programme Pédagogique National. Dans le département QLIO, pendant leur première année de formation les étudiants suivent deux modules de mathématiques en algèbre et analyse, deux autres en probabilités en statistiques. Concernant l'algèbre, le Programme Pédagogique National (2013) fait explicitement référence aux notions suivantes : (1) "*développement et factorisation*" et (2) "*équations et inéquations linéaires, systèmes*". Les étudiants ont parfois beaucoup de mal à transformer des expressions algébriques, résoudre des équations du premier degré ou montrer l'équivalence entre deux programmes de calcul. Le constat récurrent de ces difficultés amène à se demander comment aider les étudiants à les surmonter. Une première question de recherche peut être formulée comme suit : " Est-ce que (re)donner une raison d'être à l'algèbre à travers la résolution de problèmes est une piste intéressante pour aider les étudiants à mieux maitriser le calcul algébrique élémentaire ?"

II. ASPECTS EPISTEMOLOGIQUES ET DIDATIQUES DE L'ALGEBRE

De même qu'il est clairement fait référence à l'algèbre élémentaire dans le Programme Pédagogique National, la question de la modélisation de problèmes y est explicite : "*Modéliser et résoudre des problèmes de gestion de production à l'aide d'équations et d'inéquations linéaires*". Douady (1986), dans sa dialectique outil-objet, propose un processus en six phases qui amène les élèves à mettre en jeu un outil implicite (phases *a* et *b*) que l'enseignant installe ensuite comme un objet d'étude (phases *c*, *d* et *e*) afin qu'il devienne un

* UEVE Paris Saclay – LDAR EA4434, Paris Diderot, Université d'Artois, Université de Rouen, Université Paris Créteil Val de Marne, Université Cergy-Pontoise – F0rance – p.hoppenot@iut.univ-evry.fr
[1] Qualité Logistique Industrielle et Organisation
[2] Institut Universitaire de Technologique
[3] Sciences et Technologies du Management et de la Gestion
[4] Sciences et Technologies de l'Industrie et du Développement Durable

outil explicite (phase *f*) mobilisable pour résoudre de nouveaux problèmes. Chevallard (1989) constate que "*La manipulation des expressions algébriques au cours du premier apprentissage organisé au collège, en effet, n'est tendue vers aucun but (mathématique) extérieur au calcul algébrique, lequel doit alors trouver en lui-même la source de ses propres exigences. Aussi les «règles» de cette manipulation sont-elles immotivées, purement formelles, s'exprimant par des consignes elles-mêmes standardisées (développer, factoriser, etc.)*" (p. 47). Dans notre contexte, les concepts mathématiques mis en jeu dans le processus comme base pour en développer de nouveaux sont anciens : ils ont déjà été largement étudiés dans l'enseignement secondaire. Larguier (2012) introduit la notion de *reprise* consistant à convoquer des savoirs institutionnalisés précédemment pour la résolution d'une tâche ne portant pas directement sur ces savoirs. On est dans ce cas-là lorsque l'on traite d'algèbre élémentaire en début de cycle universitaire. Les premières phases du cycle de Douady consistent alors en une mise en situation légitimant de revenir sur la phase d'étude de l'objet mathématique visé.

Nous avons commencé par analyser le contenu du cours qui leur était effectivement dispensé lors du premier semestre universitaire. Le Programme Pédagogique National pour le DUT QLIO porte sur des notions d'algèbre et d'analyse élémentaires. Nous nous sommes focalisé sur les aspects liés à l'algèbre. Nous avons étudié le document de cours distribué aux étudiants d'Evry en utilisant la notion de praxéologie définie par Chevallard (1999) dans le cadre de la TAD. Nous avons utilisé les trois Organisations Mathématiques Locales (OM locales ou praxéologies) du domaine de l'algèbre des expressions algébriques proposées dans la thèse de Pilet (2012) pour l'analyse en fin de collège (élèves de 14-15 ans). La première d'entre elles (OM1), "génération des expressions algébriques" à partir d'un problème énoncé en langue naturelle, permet d'analyser la dimension de modélisation et porte donc sur la dimension outil de l'algèbre (au sens de Douady). Les deux autres, "équivalence des expressions algébriques" (OM2) et "algèbre des polynômes" (OM3), permettent d'analyser la dimension de résolution en elle-même et portent donc sur la dimension objet de l'algèbre. Afin de prendre en compte des notions un peu plus complexes, présentes à l'IUT mais pas encore en fin de collège, il a fallu aller au-delà de ces trois OM. Nous avons utilisé une OM sur les équations (OM4), développée par Sirejacob (2014) et nous avons proposé une OM sur les inéquations (OM5) et une autre sur les systèmes d'équations (OM6). Ces trois OM comprennent des tâches de génération (ou de modélisation), d'équivalence et de résolution. Elles s'appuient sur les trois premières et contiennent à la fois une dimension outil et une dimension objet. La description détaillée de ces OM dépasse le cadre de cet article qui se concentre sur l'expérimentation effectuée et ce qu'en disent les étudiants. On pourra se reporter à Pilet (2012) et Sirejacob (2014) pour une revue détaillée de l'articulation des tâches, techniques, technologies et théories associés à ces OM, en référence à Chevallard (1999). L'analyse du cours grâce à ces OM permet de mesurer qu'aucune tâche d'équivalence n'est présente, que des tâches de type modélisation sont peu nombreuses et seulement présentes dans les exercices (et donc qu'il n'y a probablement pas d'institutionnalisation qui leur soit liée) et que les tâches de type résolution sont de loin les plus nombreuses.

Ce constat a guidé la mise en place de l'expérimentation. En effet, le nombre restreint de tâches de modélisation montre que l'aspect outil des mathématiques n'est que peu présent, alors qu'on pourrait s'attendre à ce qu'il soit prépondérant dans ce type de formation. L'absence de tâches d'équivalence est aussi à prendre en compte. Il serait possible de les introduire à partir de problèmes concrets, soit par la dimension outil de l'algèbre. C'est la démarche proposée par Douady (1986, p.23) avec son jeu de cible : "*Proposer aux élèves une situation très simple, qui a du sens pour eux, et dans laquelle se présente déjà le phénomène*". Ce qui amène à se poser la question suivante : La mise en place de séances de production et

de résolution d'(in)équations ou de systèmes d'équations linaires à partir de problèmes décrits en langage naturel est-elle de nature à favoriser une évolution du rapport personnel des étudiants à l'algèbre vers un rapport idoine à l'algèbre ? La notion de rapport idoine à l'algèbre est celle donnée par Pilet (2012, p.33. note 16) : "*Ce terme est introduit par Chevallard (1989) : le rapport personnel d'un élève à l'algèbre peut être adapté au rapport institutionnel attendu, sans être pour autant idoine aux emplois effectifs de l'algèbre : « Vous pourrez douter, en revanche, que le rapport officiellement imposé se révèle bien adapté ou, comme nous dirons, idoine, à certains emplois effectifs que vous avez en tête (par exemple factoriser un polynôme P(c) du troisième degré, afin de résoudre l'équation P(x) = 0). »*"

Afin de permettre au processus décrit par Douady de s'enclencher, des problèmes concrets ont été proposés aux étudiants. Certains portent sur le cœur de leur formation en qualité et logistique. D'autres sont liés à la vie courante. Ils débouchent sur des modélisations mettant en jeu des équations/inéquations algébriques du premier et du second degré ainsi que des problèmes de généralisation et de preuve. Le problème du prestidigitateur (problème P.2 repris en annexe) illustre ce dernier cas: "*la propriété numérique étant vraie, on attend, à ce niveau, une preuve intellectuelle. Il est donc nécessaire de recourir aux techniques associées, c'est-à-dire utiliser l'outil algébrique pour formuler puis pour prouver une propriété numérique*" (Grugeon, 1997, p 182).

III. METHODOLOGIE ET ANALYSE

1. Evaluation du niveau initial des étudiants

Il était intéressant d'avoir une mesure du niveau initial des étudiants en algèbre élémentaire. L'évaluation diagnostique Pépite, développée pour analyser le niveau de maitrise en algèbre élémentaire des élèves de début de seconde (élèves de 15 ans), nous a permis de prendre la mesure des difficultés encore rencontrées par les étudiants à l'entrée à l'université. Cette évaluation d'algèbre élémentaire (Chenevotot-Quentin F., Grugeon-Allys B., Pilet J., Delozanne E., & Prévit D. 2015) porte sur le contenu du programme de troisième et donne une synthèse d'évaluation sur une échelle allant de A+ à C-. La lettre mesure le niveau de calcul algébrique lui-même (Pilet, 2012, p.189). Il s'agit de la dimension objet de l'algèbre, exprimant la dextérité de l'étudiant dans le traitement et la transformation des expressions algébriques. Le signe, + ou -, mesure le niveau d'usage de l'algèbre de l'étudiant. Il représente la dimension outil de l'algèbre, exprimant la capacité des étudiants à mobiliser l'algèbre pour résoudre les problèmes auxquels ils sont confrontés. Pilet (2012, p.193) fait l'hypothèse que "*certaines combinaisons semblent improbables*" : les groupes A- (très bon niveau en calcul algébrique sans capacité de mobilisation de l'algèbre) et C+ (niveau très faible en calcul algébrique et très bonne capacité de mobilisation de l'algèbre). Elle est confirmée dans les résultats présentés dans sa thèse.

Les étudiants concernés par cette étude ont effectué un diagnostic individuel en début de premier semestre universitaire. Leur répartition dans les catégories était à peu près identique sur les deux années de l'étude (29 étudiants en 2015-2016 et 37 étudiants en 2016-2017) : 21% en A+, 16% en B+, 38% en B- et 25% en C-. On retrouve l'absence d'étudiants dans les catégories A- et C+, comme en fin de collège (élèves de 15 ans). Le nombre important d'étudiants dans les catégories B- et C- confirme le sentiment initial d'une grande difficulté de certains étudiants en algèbre élémentaire.

2. Expérimentation proprement dite

En parallèle de leur enseignement classique, les étudiants ont travaillé sur des problèmes à modéliser puis à résoudre. Certains de ces problèmes sont tirés de la vie quotidienne, d'autres ont directement trait à la spécialité QLIO suivie par les étudiants. Par exemple, la résolution du problème P.1 donné en annexe nécessite de mobiliser des tâches de type modélisation de chacun des forfaits de téléphone. La forme de la question, trop ouverte pour obtenir une réponse simple (le forfait numéro 2, par exemple), doit être précisée pour pouvoir obtenir une réponse cohérente, ce qui oblige les étudiants à se poser des questions sur la preuve et la généralisation (au sens de Grugeon, 1997). Les autres problèmes sont donnés en annexe. Les tâches de résolution associées sont traitées entièrement afin de permettre aux étudiants de faire le lien entre les aspects objet (mesurés par la lettre de Pépite) et les aspects outil (mesuré par le signe + ou – de Pépite). Ces problèmes sont travaillés en classe, les étudiants ayant la possibilité d'échanger entre eux. Plusieurs solutions sont synthétisées au tableau par l'enseignant. On retrouve ici les différentes phases de la dialectique outil-objet décrites par Douady (1986). L'ancien de la phase *a* correspond à l'arithmétique et la manipulation des opérations. Il faut noter que bien que le nouveau implicite de la phase *b* de cette dialectique n'est pas réellement nouveau puisque les étudiants ont déjà abordé les notions d'algèbre élémentaire, il peut être considéré comme tel puisque beaucoup d'entre eux sont encore très loin de maitriser leur résolution. Les phases *c* et *d* d'explicitation et d'institutionnalisation sont l'occasion pour eux de revenir sur ces notions. Le fait d'étudier plusieurs problèmes, de complexité croissante, donne l'occasion aux étudiants de se familiariser avec la notion (phase *e*) et de s'engager dans des résolutions de plus en plus complexes (phase *f*).

Afin de mesurer l'impact du traitement collectif de ces problèmes sur chaque étudiant travaillant seul, nous avons demandé aux étudiants de résoudre seul un problème. Le type de problème choisi était de complexité moyenne, se rapprochant d'un problème traité en classe. Il mettait en œuvre des tâches de type modélisation et résolution.

3. Synthèse des analyses

Deux types de problèmes ont été choisis. Les uns étaient solubles arithmétiquement (sans faire appel à l'algèbre, une technique algébrique étant tout de même plus efficace qu'une technique purement arithmétique, par exemple P3 donné en annexe) et les autres non, en référence à la notion de problèmes connectés et déconnectés (Bednarz, N., Kieran, C., & Lee, L., 1996, p. 124). Des exemples sont donnés en annexe. Cette différence a permis de mettre en évidence un premier résultat : dans les deux cas, un tiers des étudiants (appartenant aux catégories B- et C- de Pépite) choisissent une technique arithmétique. Ces étudiants, très peu à l'aise avec l'algèbre élémentaire, continuent à mettre en œuvre une technique arithmétique quelle que soit la forme du problème. Les techniques algébriques ne sont pas suffisamment disponibles pour eux pour qu'ils y fassent appel. Si l'on se réfère aux résultats de Pépite, plus de 60% (B- et C-) ne faisaient pas appel à l'algèbre en début de semestre : la moitié d'entre eux y fait appel en fin de semestre. C'est un progrès.

Une analyse un peu plus détaillée des résultats précédents montre que, pour les étudiants des groupes A+ et B+, les tâches de modélisation algébrique et de résolution sont très bien menées : ils sont efficacement entrés dans la démarche algébrique. Sur cet aspect, il est intéressant de noter que le profil moyen des étudiants en B+ n'est pas différent de celui des A+. Néanmoins, la plupart, A+ et B+, utilisent encore très majoritairement une écriture pas à pas séparée ("si on exprime les résultats intermédiaires" par opposition à "écriture linéaire globale parenthésée si on exprime le résultat final" (Grugeon, 1997, p. 202), ce qui suggère que l'aspect structural des expressions algébriques (au sens de Sfard, 1991) n'est pas encore

bien maîtrisé ou au moins que son utilisation n'est pas plus privilégiée que celle de l'aspect procédural. Il leur reste une marge de progression.

IV. CE QU'EN DISENT LES ETUDIANTS

Il nous a semblé intéressant de mesurer ce que disent les étudiants de la séquence d'étude décrite ci-dessus. Un questionnaire anonyme est proposé aux étudiants à la fin de la dernière séance de cours du premier semestre. Les étudiants commencent par indiquer leur bac d'origine et le groupe dans lequel ils se situent au regard de l'évaluation diagnostique Pépite. La première partie porte sur des questions générales :

1.a. Quel intérêt portez-vous aux mathématiques ?

1.b. Les mathématiques vous semblent-elles utiles ?

La seconde partie porte sur la séquence d'étude proprement dite :

2.a. Que pensez-vous de travailler sous la forme de problèmes pratiques ?

2.b. Cela vous a-t-il aidé à mieux comprendre les mathématiques ?

Les questions 1.a et 2.a font référence à la dimension objet des mathématiques : elles abordent les mathématiques pour elles-mêmes (sont-elles intéressantes, comment les travailler). "*Par objet, nous entendons l'objet culturel ayant sa place dans un édifice plus large qui est le savoir savant*" (Douady, 1986, p. 9). On parle ici de l'intérêt pour le savoir mathématique.

Les questions 1.b et 2.b font référence à la dimension outil des mathématiques : elles portent sur l'utilité et la capacité à les mettre en œuvre. Il est demandé aux étudiants de donner une évaluation sur une échelle de 1 à 4 (1 très faible à 4 très important) ainsi qu'un commentaire s'ils le souhaitent.

1. Analyse statistique classique

Les réponses à ces questionnaires des années universitaires (2015-2016 et 2016-2017) sont analysées. 77 étudiants[5] y ont répondu. Pour l'analyse, les réponses 1 et 2 (très faible et faible) sont regroupées ainsi que les réponses 3 et 4 (important et très important). A la question 1.a, 61% des étudiants disent avoir un fort intérêt pour les mathématiques et 39% un faible intérêt. La différence n'est pas tout à fait significative ($p=0.08$ avec un test de Fisher). Les réponses par groupe de bac fournissent des résultats intéressants. En effet, 81% des étudiants ayant obtenu un bac S et 83% des étudiants ayant obtenu un bac STI2D portent un fort intérêt aux mathématiques, les deux étant significativement différents de 50% ($p=0.0024$ et $p=0.039$)[6]. En revanche, 91% des étudiants ayant obtenu un bac STMG portent un intérêt faible aux mathématiques, significativement différents de 50% ($p=0.012$). Quant aux étudiants ayant obtenu un bac ES, l'intérêt qu'ils portent, en moyenne, aux mathématiques n'est pas significativement différent de 50%. La prise en compte du groupe d'appartenance suite à l'évaluation diagnostic Pépite montre que seuls les étudiants du groupe B ont un intérêt significativement fort pour les mathématiques (70%, $p=0.043$), ce qui n'est pas tout à fait vrai pour les étudiants du groupe A (75%, $p=0.077$) ni du groupe C (31% de fort intérêt, $p=0.21$). Ces dernières significativités s'expliquent par le nombre assez faible d'étudiants dans ces groupes. On conserve donc le résultat d'une forte prévalence du type de bac sur l'intérêt porté aux mathématiques, plus que du niveau réel des étudiants, cela malgré l'apport du travail autour de la modélisation et de la preuve réalisé pendant le semestre.

[5] Certains étudiants qui ont répondu au questionnaire n'avaient pas fait le test Pépite

[6] Le seuil de significativité est classiquement fixé à 0.05.

Concernant l'utilité des mathématiques (question 1.b), 77% des étudiants déclarent qu'elle est forte ($p=3\ 10^{-6}$). Les arguments les plus avancés pour justifier ce choix sont "il y a des mathématiques partout" et "l'avenir professionnel". Ainsi, beaucoup d'étudiants mesurent l'utilité des mathématiques. On peut espérer s'appuyer sur cet élément pour les motiver à progresser. Une analyse détaillée révèle de très fortes disparités. En effet, les étudiants ayant obtenu un bac STMG ne jugent les mathématiques utiles que dans 54% des cas, soit tout juste un sur deux. Pour tous les autres, l'utilité des mathématiques est jugée bien supérieure à 50%. Plus clairs encore sont les résultats en fonction du groupe Pépite : A (94%, p=0.00052), B (84%, p=0.00011) et C (50%, p=1). Les étudiants faibles en algèbre (ils représentent 25% des étudiants) déclarent ne pas voir d'utilité aux mathématiques.

La seconde partie du questionnaire a porté sur les problèmes concrets eux-mêmes. A la question 2.a, les étudiants ont un avis mitigé : 41% (p=0.16) des étudiants trouvent cette approche intéressante. Ce pourcentage n'est pas significatif. On aurait pu penser que la confrontation à des problèmes concrets en les amenant à travailler sur des types tâches peu présentes initialement dans l'enseignement comme la modélisation et la preuve, aurait été de nature à susciter un intérêt significatif et donc à donner à chercher une meilleure maitrise de l'outil mathématique par un travail sur la dimension objet des mathématiques en incluant des types de tâches suffisamment variés, modélisation et preuve en particulier. A la question 2.b, les étudiants répondent à 74% (p=0.0138) que cette approche ne leur permet pas de mieux comprendre les mathématiques. Les résultats sont de même nature avec une analyse par type de bac ou une analyse en fonction du niveau en algèbre élémentaire. L'objectif visé d'aider les étudiants à mieux comprendre les mathématiques n'est pas ressenti comme tel par les étudiants.

2. Analyse statistique implicative

Au-delà de ces analyses portant sur une réponse en fonction d'un facteur ou d'un autre, il est intéressant d'identifier s'il existe des liens d'implication entre différents éléments. Les statistiques implicatives permettent de mettre à jour ces liens. Un lien implicatif de A vers B est avéré s'il y a significativement peu de contre-exemples. L'implication obtenue n'est donc pas toujours vraie au sens strict de la logique mathématique, mais elle est rarement mise en défaut. Cette vision est intéressante pour analyser des relations de cause à effet probables, voire très probables. Le logiciel CHIC, développé depuis plus de vingt ans (Gras R., & Larher A, 1992), offre la possibilité d'extraire ces implications. Nous avons utilisé ici des graphes implicatifs, permettant "*d'obtenir un graphe sur lequel les variables qui possèdent une intensité d'implication supérieure à un certain seuil sont reliées par une flèche représentant l'implication*" (Couturier, & Gras R., 2005, p. 681). Les variables que nous avons prises en compte sont les suivantes :

- Le baccalauréat obtenu par les étudiants (S, ES, STI2D, STMG, Pro)
- Les groupes A, B et C issus de l'évaluation diagnostic Pépite
- L'intérêt porté aux mathématiques (MCIM12 pour faible et MCIM34 pour fort)
- L'utilité ressentie des mathématiques (MCUM12 pour faible et MCUM34 pour forte)
- L'avis sur le travail sur des problèmes (ASR12 pas intéressant et ASR34 intéressant)
- L'avis sur le fait que les situations réelles aident à mieux comprendre les mathématiques (SRAMCM12 pour non et SRAMCM34 oui)

La Figure 1 est un graphe montrant les liens d'implication entre les baccalauréats des étudiants et leurs groupes issus de l'évaluation diagnostique Pépite. Rappelons que ce diagnostic porte sur l'algèbre élémentaire de fin de troisième. Premier constat : les étudiants

ayant obtenu un bac STI2D n'apparaissent pas dans ces graphes. On voit aussi clairement trois groupes apparaitre. Il est frappant de voir une telle catégorisation encore apparente sur des notions introduites trois années plus tôt. Une analyse un peu plus fine montre plus précisément que les étudiants ayant obtenu un bac ES se retrouvent dans le groupe B (Pépite) et que les étudiants de STMG ou de bac pro se retrouvent dans le groupe C. On apprend aussi que les étudiants du groupe A viennent très probablement du bac S. Mais on ne peut pas dire qu'un étudiant ayant obtenu un bac S sera probablement dans le groupe A : on aurait pourtant pu le penser. Si on prend en compte les variables liées à l'intérêt pour les mathématiques et l'utilité ressentie des mathématiques, on voit que des étudiants ayant un bac S trouvent un intérêt dans les mathématiques (MCIM34), alors que ce n'est pas le cas des bacs STMG et Pro (MCIM12). Les étudiants ayant un bac ES n'ont pas de position consensuelle sur cette question. On retrouve aussi le résultat indiqué précédemment que les étudiants les plus faibles en algèbre élémentaire (C) voient une faible utilité des mathématiques (MCUM12) alors que les étudiants les plus à l'aise (A) pensent que les mathématiques ont une utilité forte (MCUM34). De plus, cette même figure montre qu'une utilité jugée faible par les étudiants (MCUM12) implique un intérêt faible de ces mêmes étudiants pour les mathématiques (MCIM21).



Figure 1. *Graphe implicatif entre baccalauréat, groupe Pépite et travail classique*

La Figure 2 montre les liens entre type de bac, groupe Pépite et travail sur les situations réelles. Le type de bac a une influence sur l'avis du travail sur les problèmes concrets (ASR) pour les étudiants ayant un bac S (intéressant) et ceux ayant un bac ES ou STMG (pas intéressant). Ainsi les étudiants provenant de ces bacs non scientifiques ont un avis négatif sur le travail sur les situations réelles. On aurait pu penser que le travail sur des tâches de modélisation (et de preuve dans certains cas), venant combler les lacunes de l'enseignement initial, serait de nature à les amener à avoir un effet positif sur leur compréhension des mathématiques. Quant à savoir si ce travail sur des situations réelles les aide à mieux comprendre les mathématiques (SRAMCM), le bac d'origine n'a pas d'implication directe et seule l'appartenance au groupe B de Pépite préjuge d'une aide non efficace.

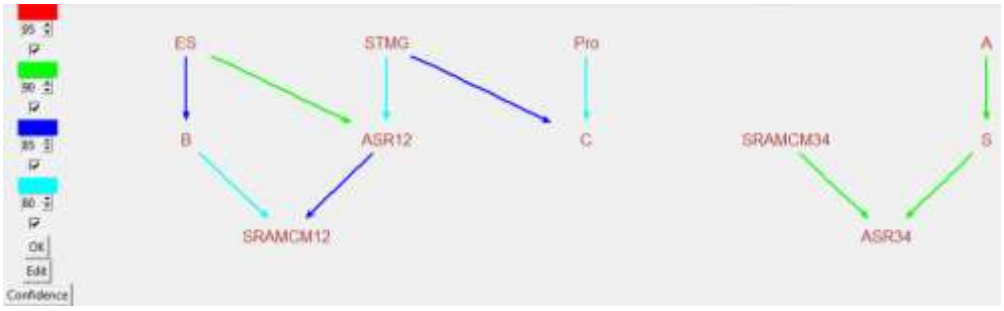


Figure 2. *Graphe implicatif entre baccalauréat, groupe Pépite et situations réelles*

3. Bilan

Des analyses présentées ci-dessus, on peut tirer plusieurs enseignements. Le premier est que l'intérêt que portent les étudiants aux mathématiques est très fortement lié à leur bac d'origine : positif pour les bacs scientifiques, neutre pour les bacs ES et faible pour les bacs STMG. Ce n'est pas étonnant. Les liens forts entre type de bac et niveau en algèbre élémentaire est un second enseignement, préoccupant. Les élèves provenant de STMG ont une forte propension à avoir un niveau très faible en algèbre élémentaire (groupe C de Pépite) et ceux de ES n'ont qu'un niveau moyen (groupe B). Pour ces formations, après trois années de lycée, des lacunes importantes persistent sur le programme de 3ème (élèves de 15 ans). De plus, l'obtention d'un bac S n'est pas une condition quasi-suffisante (au sens des statistiques implicatives) pour avoir un bon niveau en algèbre élémentaire. Le troisième enseignement porte sur l'utilité ressentie des mathématiques. Si elle est globalement forte, les étudiants de STMG et les étudiants les plus faibles en algèbre élémentaire ne sont pas de cet avis. Il semblerait que l'utilité des mathématiques soit évaluée par les étudiants en fonction de leur propre niveau. La Figure 1 montre aussi qu'une utilité des mathématiques ressentie comme faible implique un intérêt faible pour les mathématiques. Jouer sur le sentiment d'utilité est donc de nature à éliminer une cause de manque d'intérêt et, on peut l'espérer, à susciter une motivation plus importante. On peut donc penser que renforcer l'aspect outil des mathématiques est de nature à influencer l'intérêt porté aux mathématiques. Le quatrième enseignement a trait à l'avis donné par les étudiants sur le travail à partir de problèmes concrets. Il est globalement mitigé. On mesure là encore que la provenance des étudiants est un facteur qui influence fortement cet avis, les non scientifiques trouvant ce travail peu intéressant contrairement aux étudiants scientifiques. Les résultats de la Figure 2 montrent qu'il reste un nombre important d'étudiants moyens (groupe B) qui pensent que le travail sur les situations réelles n'aide pas à mieux comprendre les mathématiques. Des informations recueillies auprès des étudiants pendant les cours éclairent ce fait : les difficultés rencontrées en mathématiques sont évoquées comme un frein à les utiliser pour des situations réelles. Cette affirmation plaide pour renforcer aussi un travail avec une approche objet des mathématiques.

V. CONCLUSIONS ET PESPECTIVES

Ce travail a porté sur l'analyse de l'avis des étudiants sur une séquence d'enseignement pendant un semestre en IUT QLIO. L'hypothèse initiale était que le travail sur la dimension outil des mathématiques, en confrontant les étudiants à des situations réelles portant sur leur cœur de formation et la vie courante, serait de nature à faire progresser leur intérêt pour les mathématiques. Cette étude donne des éléments en faveur de cette hypothèse. Mais d'autres éléments plaident en faveur d'un renforcement de l'aspect objet des mathématiques. En effet, les étudiants les plus faibles ont du mal à percevoir *a priori* l'utilité des mathématiques. On retrouve la Dialectique Outil-Objet décrite par Douady (1986).

Pour mieux mesurer l'apport de cette séquence, il serait intéressant de questionner les étudiants avant et après la séquence de cours et de mesurer l'évolution de leurs réponses. Renforcer la dimension technologique (au sens de la TAD) afin de favoriser aussi le développement de la dimension objet des mathématiques est une autre piste à explorer. En effet, la référence à cette dimension technologique semble bien souvent absente dans le travail des étudiants qui peinent à justifier leurs résultats. La difficulté est alors de ne pas rebuter ces étudiants pour qui les mathématiques sont une discipline difficile et parfois redoutée.

ANNEXES

Exemples de problèmes concrets travaillés en classe

Deux problèmes faisant intervenir des preuves

P.1. Un opérateur téléphonique propose trois forfaits : F1 à 30 euros, appels illimités, F2 à 15 euros pour 4 heures, puis 5 centimes par minute et F3 à 2 euros pour 2 heures, puis 8 centimes par minute. Quel est le meilleur forfait ?

P.2. Lors de la fête de fin d'année, le BDE de l'IUT invite un prestidigitateur. Pendant la soirée, ce dernier demande à Fabrice : "Prends un nombre, ajoute 5 puis multiplie par 2. Ca va ? OK. Maintenant, tu ajoutes le nombre initial et tu ajoutes 2. Ca va toujours ? Très bien. Puis tu divises par 3 et retranches ton nombre initial. OK ?... Tu as trouvé… 4 !".
Fabrice, au premier abord impressionné, réfléchit… et découvre le pot aux roses.

Un problème connecté (au sens de Bednarz (1996))

P.3. Un éleveur possède un troupeau de vaches laitières. Dans son champ, il a un abreuvoir rempli d'eau. Le premier jour, le troupeau boit 1500 litres et le soir le fermier rajoute 1000 litres. Le même scénario se déroule le lendemain. A peine vient-il de finir que son voisin lui demande s'il peut prendre de l'eau dans l'abreuvoir. Il l'autorise à prendre la moitié de son contenu. Le même scénario que le premier jour se répète les jours suivants et lorsque le fermier arrive dans son champ le $4^{ème}$ soir l'abreuvoir est vide. Quelle était la quantité d'eau initiale dans l'abreuvoir ?
Une modélisation arithmétique attendue

(1500 + 1500-1000)*2 +1500-1000+1500-1000 = 5000

Une modélisation algébrique attendue (x étant le volume cherché)

(x-1500+1000-1500+1000)/2 - 1500+1000 - 1500 = 0

Des problèmes déconnectés (au sens de Bednarz (1996))

P.4. Un vendeur de fuel domestique vient d'acquérir une nouvelle cuve de stockage de 100 m^3 qu'il peut faire remplir le samedi pour honorer ses commandes de la semaine suivante. Son objectif est de livrer chaque jour ses clients réguliers et de réapprovisionner son stock chaque soir avec au maximum 20 m^3 de fuel.

1. Quel volume maximum de fuel peut-il livrer chaque jour de la semaine (du lundi au vendredi) sachant que cette quantité est la même chaque jour ?
2. Il souhaite pouvoir faire face à une commande extraordinaire par semaine. Il estime qu'un bon client peut lui demander jusqu'à la moitié de son stock le mercredi matin, à livrer le jour même, en plus des commandes habituelles. Quelle est alors la nouvelle quantité de fuel qu'il peut s'engager à livrer pour ses commandes habituelles sans se trouver en rupture de stock ?

Une modélisation attendue pour la question 1 : 100 - x +20 - x +20 - x +20 - x +20 - x = 0
Une modélisation attendue pour la question 2 : (100 - x +20 - x +20)/2 - x +20 - x +20 - x = 0

P.5. Franck travaille dans un entrepôt de produits toxiques nécessitant des niveaux de sécurité allant de 0 (très faible) à 5 (très important). Son responsable l'appelle pour lui demander de délimiter en urgence une zone de niveau 0 de 90 m² au sol. Ce type de zone, rectangulaire, est adossé contre un mur et délimitée au sol par un ruban adhésif jaune et noir. Franck dispose de 25 m de ruban adhésif. Pourra-t-il délimiter la zone demandée ?

Problèmes concrets travaillés seuls

P'.4. Un vendeur de matériaux de construction vient d'acquérir une nouvelle capacité de stockage de sable de 100 m^3 qu'il peut remplir le samedi pour honorer ses commandes de la

semaine suivante. Son objectif est de livrer chaque jour ses clients réguliers et de réapprovisionner son stock chaque soir avec au maximum 20 m^3 de sable.

1. Quel volume maximum de sable peut-il livrer chaque jour de la semaine (du lundi au vendredi) sachant que cette quantité est la même chaque jour ?
2. Il souhaite pouvoir faire face à une commande extraordinaire par semaine. Il estime qu'un bon client peut lui demander jusqu'à la moitié de son stock le mercredi matin, à livrer le jour même, en plus des commandes habituelles. Quelle est alors la nouvelle quantité de sable qu'il peut s'engager à livrer pour ses commandes habituelles sans se trouver en rupture de stock ?

P''.4. Une chaine de boulangerie demande aux grands moulins de Corbeil-Essonnes de se fournir en farine pour tout le département de l'Essonne, à raison d'une livraison par jour. Afin de pouvoir honorer cette commande, Alain, le responsable des stocks des grands moulins peut dégager un silo de 8 tonnes de farine qui peut être rempli en fin de semaine pour les livraisons de la semaine suivante. Chaque soir, il peut rajouter au maximum 1,6 tonne de farine dans son silo.

1. Quelle quantité maximum de farine peut-il livrer chaque jour de la semaine (du lundi au vendredi) sachant que cette quantité est la même chaque jour ?
2. Alain souhaite pouvoir faire face à une commande extraordinaire par semaine. Il estime qu'un bon client peut lui demander la moitié de son stock le mercredi matin, à livrer le jour même, en plus des commandes habituelles. Quelle est alors la nouvelle quantité de farine qu'il peut s'engager à livrer pour ses commandes habituelles sans se trouver en rupture de stock ?

REFERENCES

Bednarz, N., Kieran, C., & Lee, L. (1996). *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching* (Vol. 18). Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Chenevotot-Quentin F., Grugeon-Allys B., Pilet J., Delozanne E., & Prévit D. (2015). Transfert du diagnostic PEPITE à différents niveaux scolaires : tests diagnostiques pour les élèves et leurs usages pas les enseignants. Dans L. Theis (dir.), *Actes du colloque EMF2015* (GT6, 566-583). Coutat S. (Eds.).

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathéatiques au collège - Partie 2 - Perspectives curriculaires : la notion de modélisation, *Petit x, Vol. n°19, 43-72.*

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en didactique de mathématiques, 19 (2),* 221-265.

Couturier R., & Gras R. (2005). CHIC : traitement de données avec l'analyse implicative, *Revue des nouvelles technologies de l'information, Vol n°3*, 679-684

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil/objet, *Recherches en didactique de mathématiques*, 7 (2), 5-32.

Gras R., & Larher A (1992). L'implication statistique, une nouvelle méthode d'analyse de données, *Mathématiques et sciences humaines, tome 120,* 5-31

Grugeon B. (1997). Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire, *Recherches en didactique des mathématiques, 17.2, 167-210.*

Larguier, M. (2012). La recherche des différents types de nombres: un problème de la profession en seconde, *Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 32, n°1*, 101-144.

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche. (2013). Diplôme Universitaire de Technologie - QUALITE, LOGISTIQUE INDUSTRIELLE ET ORGANISATION - Programme Pédagogique National. http://cache.media.enseignementsup-recherche.gouv.fr/file/25/09/9/PPN_QLIO_256099.pdf

Pilet, J.(2012). Parcours d'enseignement différencié appuyé sur un diagnostic en algèbre élémentaire à la fin de la scolarité obligatoire : modélisation, implémentation dans une plateforme en ligne et évaluation, *Paris Diderot, Thèse de doctorat.*

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin, *Educational Studies in Mathematics, 22* , 1-36.

Sirejacob, S. (2014). Les équations en classe de troisième générale, *Paris Diderot Mémoire de Master de Didactique des Mathématiques.*

ROLE DES MEDIATEURS VISUELS ET DU VOCABULAIRE UTILISE DANS L'ETABLISSEMENT D'UNE COMMUNICATION EFFICACE LORS DE LA RESOLUTION D'UN PROBLEME DE MATHEMATIQUE APPLIQUEE

KHALLOUFI-MOUHA[*] Faten

Résumé – Des recherches attestent que les étudiants trouvent des difficultés à mettre en œuvre d'une façon spontanée leurs connaissances mathématiques dans des problèmes de biologie. En nous plaçant dans le cadre de la théorie commognitive, nous analysons comment l'utilisation de médiateurs visuels et d'un vocabulaire mathématique associé permet aux étudiants d'établir une communication efficace et de mettre en œuvre leurs connaissances mathématiques.

Mots-clefs : communication efficace, projet focal, médiateurs visuels, vocabulaire mathématique.

Abstract – Research shows that students face difficulties to spontaneously use their mathematical knowledge in biology problems. Using the commognitive framework, this paper analyses how the use of visual mediators and an associated mathematic vocabulary allow students establishing an effective communication, as well as activating their mathematical knowledge.

Key words: effective communication, focal project, visual mediators, mathematical vocabulary.

I. INTRODUCTION

La volonté institutionnelle de mettre en place un enseignement interdisciplinaire prend de plus en plus d'importance. Dans un contexte éducatif, l'interdisciplinarité implique que les approches monodisciplinaires encore dominantes soient remplacées par des approches permettant plus de liens avec les connaissances existantes et conduisant ainsi à un apprentissage plus profond et plus intégré. Dans le cas de l'enseignement des mathématiques en biologie, plusieurs auteurs (par exemple, Brewer & Smith, 2011 ; Michelsen, 2017 ; Osman, Hiong & Vebrianto, 2012) suggèrent une plus grande intégration des mathématiques et de la biologie dans le curriculum. Dans le même contexte, Hester, Buxner, Elfring & Nagy (2014) mettent en évidence à travers une étude expérimentale que les étudiants en biologie trouvent des difficultés à transférer d'une façon spontanée leurs connaissances mathématiques dans les problèmes de biologie. Les problèmes de modélisation et de mathématique appliquée à la biologie constituent un champ adéquat pour satisfaire une telle demande des programmes puisqu'ils permettent de faire le lien entre les deux disciplines. Muller et Burkhardt (2007) affirment que la modélisation mathématique, basée sur l'utilisation d'un contexte du monde réel, fournit le cadre idéal pour articuler le contenu et le processus de manière à mettre en œuvre les connaissances mathématiques pour résoudre ces problèmes. Plusieurs travaux soulignent l'importance d'associer l'intégration des problèmes de modélisation et de mathématique appliquée à la biologie à une organisation de séances de travail en petits groupes. L'importance des discussions en groupe dans le développement et la mise en œuvre des connaissances mathématiques a suscité l'intérêt de plusieurs chercheurs (Kieran, 2001 ; Nilsson & Ryve, 2010…). Dans leurs travaux, Sfard (2001) et Ryve (2006) ont mis en évidence que les étudiants travaillant en groupes éprouvent des difficultés à aboutir à une discussion efficace. Dans notre travail nous nous intéressons essentiellement à comment les étudiants peuvent arriver à établir une discussion efficace lors de la résolution d'un problème de mathématique appliquée à la biologie. Les éclairages fournis par cette étude sont susceptibles de contribuer à une meilleure planification de la mise en place de situations

[*] Université de Carthage. Faculté des sciences de Bizerte – Tunisie – fkhalloufi@yahoo.fr

donnant aux étudiants l'opportunité d'établir une communication efficace lors de la résolution des problèmes de modélisation et d'application des mathématiques.

Notre analyse se place dans le cadre de la théorie commognitive (Sfard, 2008) et adopte l'approche analytique proposée par Nilsson et Ryve (2010) et reprise par Ryve, Nilsson et Pettersson (2013) afin d'apporter des éléments de réponse à la question de recherche : « Comment l'utilisation des médiateurs visuels et d'un vocabulaire mathématique spécifique permet aux étudiants de mettre en place une discussion efficace lors de la résolution d'un problème de mathématique appliquée à la biologie ? »

II. CADRE THEORIQUE

La notion de communication efficace (effective communication) a été introduite par Sfard et Kieran (2001). Elle est identifiée lorsque « The different utterances of the interlocutors evoke responses that are in tune with the speakers meta-discursive expectations » (p.49). Cette notion a été utilisée par Nilsson et Ryve (2010) en focalisant sur la manière dont les projets individuels des étudiants constituent une composante importante dans leur collaboration dans le cadre d'un travail en groupe. Nilsson et Ryve (2010) proposent une approche analytique centrée sur l'analyse des projets focaux (PF) des interlocuteurs et leur contextualisation, qui permet la conceptualisation et l'analyse d'une communication mathématiquement efficace. S'appuyant sur les résultats de Nilsson et Ryve (2010), Ryve et al. (2013) ont étudié la communication efficace dans un contexte universitaire et plus particulièrement dans le contexte de la résolution de problèmes en petits groupes. Ce travail a contribué à éclairer comment les étudiants lors d'une discussion collective arrivent à établir des focus intéractonaux communs (*common interactional foci*) et expliquer comment certains types d'utilisation des termes techniques et des médiateurs visuels aboutissent à la co-construction d'une communication efficace. Dans l'analyse des discussions, Ryve et al. (2013), identifient les PF individuels des étudiants du groupe. Le PF d'un étudiant fait référence au problème ou au projet dans lequel l'étudiant s'engage et qu'il interprète comme son obligation pour avancer dans son travail. Cependant, un projet peut être traité de différentes manières et la façon dont un individu choisit de faire face à son PF dépend de la façon dont il contextualise ce projet; c'est-à-dire, dans quel contexte personnel et mental l'individu travaille afin de développer une compréhension du projet (Nilsson & Ryve, 2010)

Pour l'analyse des discussions lors du travail par groupe, l'approche commognitive élaborée par Sfard (2008) fournit des concepts théoriques permettant l'étude du processus de développement de projets interpersonnels étroitement liés et établir une discussion efficace. La théorie commognitive (TCM) (Sfard, 2008) est une approche discursive qui définit les mathématiques comme un discours particulier, comme une activité de communication (Sfard, 2012). L'apprentissage des mathématiques est défini comme un développement du discours, comme une modification dans l'activité discursive. Selon la TCM, le discours mathématique, comme tout autre discours est caractérisé par :

- **Un vocabulaire spécifique** relatif à l'utilisation de la terminologie mathématique (comme la « topologie ») ainsi que des mots ordinaires avec un sens spécifique en mathématiques (comme « limite », « ouvert », « continu » et « groupe »).
- **Les médiateurs visuels** tels que les graphiques, les diagrammes et les symboles algébriques et numériques.
- **Les récits validés** qui comprennent des textes écrits ou oraux décrivant les objets et les processus ainsi que les relations entre eux et qui sont soumis à la validation, à la

modification ou au rejet selon des règles définies par la communauté (définitions, théorèmes et preuves).

- **Les routines** comprennent les pratiques régulièrement utilisées et bien définies par la communauté (telles que la définition, la conjecture, la preuve, l'estimation, la généralisation et l'abstraction). Sfard (2008) élabore trois types de routines: les actions (*deeds*), les explorations (*explorations*) et les rituels (*rituals*) (pp. 223-245).

Selon la TCM, le discours mathématique comporte une infinité de transitions entre un signifié mathématique et ses différentes réalisations. Ces réalisations sont des entités perceptibles qui peuvent être vocales ou visuelles (symboles, mots, …) et qui renvoient au signifié mathématique. Nous pouvons citer comme exemple le signifié mathématique « fonction » et ses différentes réalisations "graphe", "formule algébrique"… Sfard (2008) souligne l'importance des images d'objets mathématiques pour permettre aux étudiants de développer des projets interpersonnels étroitement liés. Elle considère que dans le discours mathématique, les médiateurs visuels sont des artefacts symboliques qui constituent le discours (tels que des expressions algébriques, des tableaux, etc.). Dans notre étude, nous cherchons à identifier la façon dont les médiateurs visuels affectent la communication à partir du rôle qu'ils jouent dans le développement de projets focaux communs lors du travail de groupe.

D'autre part, Sfard (2008) souligne que le même médiateur visuel peut être scanné de différentes manières par différents individus. Dans une telle perspective, l'utilisation de termes techniques pour attirer l'attention des étudiants sur les caractéristiques critiques est soulignée comme étant cruciale (par exemple, Ryve, Nilsson & Mason, 2012 ; Wertsch, 2007 ; Wertsch & Kazak, 2011). Un terme technique fait référence à un terme qui appartient généralement à un discours spécifique, tel que le discours mathématique. En particulier, nous étudions comment les étudiants contextualisent les médiateurs visuels en utilisant un vocabulaire mathématique spécifique et comment cela affecte l'établissement d'une communication efficace.

III. PRESENTATION DE LA SITUATION

La situation « l'évaluation d'un risque de trisomie 21 » est extraite de Biau, Droniou et Herzlich (2010) et développée dans Khalloufi-Mouha (2015). Elle est basée sur l'hypothèse que le développement d'une maladie génétique comme la trisomie 21 semble relever du hasard. Une évaluation du risque nécessite l'utilisation d'un modèle mathématique qui prend en compte la nature incontrôlable du phénomène étudié. Il s'agit ainsi de faire appel à une théorie permettant non pas d'expliquer les causes de la maladie mais plutôt capable de prédire avec un degré de fiabilité raisonnable les conséquences éventuelles des observations. La théorie en question est la probabilité et le modèle mathématique visé est celui de la probabilité conditionnelle. Le problème se présente sous forme d'un texte ne comportant pas de formules mathématiques (voir Annexe) et présentant certaines données provenant d'une étude médicale précisant les différents tests utilisés pour évaluer le risque de la trisomie 21. Les étudiants sont ainsi amenés à comprendre d'abord la situation proposée, puis à procéder à une interprétation mathématique des données. A ce niveau les stratégies de lecture du texte et la capacité de comprendre les différents termes utilisés et les formulations proposées jouent un rôle important dans le processus de résolution et influencent l'identification du modèle mathématique adéquat pour la résolution de la tache proposée.

La tâche des étudiants consiste à identifier les données du problème et à les interpréter en termes d'évènements et de probabilité. La difficulté consiste essentiellement à identifier les

relations entre les évènements lors de l'interprétation de la situation réelle en termes du modèle mathématique de probabilité.

Les évènements à identifier sont (nous utilisons les mêmes notations adoptées par le groupe dont nous analysons la discussion)

S : « le fœtus est atteint du syndrome de Down »

T : « le taux repéré lors du test sanguin de la mère est anormal »

$$p(S) = \frac{1}{700}, p(T/S) = \frac{1}{4} \text{ et } p(T/\bar{S}) = \frac{1}{100}$$

La question proposée aux étudiants requiert de calculer $p(S/T)$ en appliquant la formule de Bayes.

Le problème a été proposé à dix-huit étudiants de 1ère année de l'enseignement supérieur tunisien section SVT (Sciences de la Vie et de la Terre) ayant déjà suivi pendant un semestre un cours de statistique et probabilités. Les étudiants ont été répartis en six groupes de trois. Il leur a été demandé de produire une réponse commune pour chaque groupe. La séquence expérimentale a eu lieu en dehors des séances ordinaires et les étudiants participants sont des volontaires. Les discussions des six groupes ont été enregistrées et les durées des discussions ont varié entre 1h et 2h. Les données recueillies sont les enregistrements vidéo du travail de chaque groupe, les productions intermédiaires (brouillons) et les productions finales des groupes.

Dans ce travail nous nous limitions à l'analyse de la discussion d'un seul groupe d'étudiants. Un groupe formé par trois étudiantes ayant l'habitude de travailler ensemble (Sahar - Amal - Hayfa)

IV. ANALYSE DE LA DISCUSSION

Pour des raisons de l'espace réduit dans cet article nous centrons l'analyse de la discussion du groupe sur deux extraits qui permettent de montrer comment les trois étudiantes arrivent à travers l'utilisation de médiateurs visuels et d'un vocabulaire appartenant au domaine de la probabilité à mettre en place des projets personnels étroitement liés et à établir ainsi une discussion efficace.

1. Rôle des médiateurs visuels et du vocabulaire mathématique dans la mise en place d'un projet focal commun relatif à l'identification du modèle mathématique adéquat.

L'extrait suivant est relatif à la phase de la transition de la situation réelle proposée dans le texte du problème vers l'identification du modèle mathématique adéquat pour la résolution de la tache proposée. L'extrait commence à 18 minutes et 40 secondes du début de l'enregistrement. Dans cette étape les étudiantes sont entrain de lire le texte et cherchent à identifier les données pertinentes et à comprendre la tâche proposée. L'extrait montre que l'utilisation de la production écrite par Amal est un nouveau médiateur visuel qui a permis aux autres étudiantes de suivre et de participer à un PF collectif.

33. *Hayfa : On essaye de résumer. On a 1/4 ont des taux anormaux et le syndrome et 1/100 ont des taux anormaux et ils n'ont pas le syndrome. On va appeler S l'évènement avoir le syndrome et ça $\bar{S}$ et on va mettre T pour les dosages anormaux et après……..* Amal commence par écrire ça : [l'évènement S « atteint du syndrome »]

34. *Amal [écrit] : Soit S l'évènement : atteint par le syndrome et $\bar{S}$?*

35. *Hayfa : $\bar{S}$ c'est l'évènement contraire et T lorsqu'il y a des taux anormaux. Ça c'est les données.*

36. *Amal : c'est-à-dire nous allons utiliser « sachant T » ?*
37. *Hayfa : le test s'il donne des taux anormaux, il faut chercher le risque qu'il y a la maladie c'est-à-dire on va chercher ça le S*
38. *Amal : il faut utiliser « sachant T »*
39. *Hayfa : oui on a des taux anormaux et il y a ceux qui ont le syndrome et ceux non. Nous on va chercher le S, la probabilité de S*
40. *Amal : oui voilà. On a p*
41. *Hayfa : probabilité*
42. *Amal : p(S)… non* $p(S/T) = 0{,}25$ *c'est* $\frac{1}{4}$ *l'autre* $p(\bar{S}/T) = 0{,}01 = \frac{1}{100}$ *maintenant on cherche la probabilité de S.*

Dans la première intervention, Hayfa explicite son projet focal qui consiste à interpréter les données de l'énoncé du problème en termes d'événements. Hayfa introduit un nouveau terme mathématique «événement» qui n'est pas évoqué dans le texte du problème et utilise de nouveaux médiateurs visuels « l'événement *S* », « *S* » et « *T* ». Cela sert de point de départ pour établir un contexte commun qui est le modèle mathématique de probabilité. Dans [34], Amal exprime son engagement dans le projet de Hayfa en utilisant les mêmes médiateurs visuels « l'événement *S* », « *S* » et « *T* ». Le passage d'un discours contextualisé lié au texte du problème à un vocabulaire probabiliste et aux médiateurs visuels connexes de Hayfa, a permis aux deux autres étudiants de participer à son projet focal. Cela confirme l'affirmation de Sfard (2008) relative à l'importance des représentants des objets mathématiques (*the images of mathematical objects*) pour aider les élèves à établir des projets interpersonnels étroitement liés.

Dans les interventions [36] et [38], nous notons qu'Amal passe à un contexte local en introduisant le nouveau terme « sachant que » utilisé dans la probabilité conditionnelle afin de calculer la probabilité d'un événement étant donné qu'un autre événement s'est produit. Cela atteste qu'Amal passe à une analyse de la relation entre les différents événements identifiés à partir des données du problème. Les interventions [37] et [39] de Hayfa font référence à l'interprétation de l'événement *S* comme « avoir le syndrome de Down étant donné que, dans le test, les taux sont anormalement élevés ». C'est pourquoi elle propose de calculer $p(S)$. Cependant, l'intervention de Amal fait apparaitre que son utilisation du terme « l'événement *S* » réfère à « avoir le syndrome de Down ». Cela atteste que les deux étudiantes utilisent deux interprétations mathématiques différentes pour le même médiateur visuel « l'événement *S* ». Ceci est cohérent avec l'idée de Sfard (2008) selon laquelle un même médiateur visuel peut être scanné de différentes manières par différentes personnes.

Dans [42], Amal introduit un nouveau médiateur visuel $p(S/T)$ relatif à la probabilité conditionnelle. Mais son intervention fait apparaitre l'existence de difficultés relatives à l'interprétation mathématique des données du problème et en particulier la relation entre les deux événements S et T. En fait, selon les notations adoptées par les étudiantes, la phrase, issue du problème « Des études médicales ont montré qu'une trisomie sur quatre engendre des taux anormaux » est interprétée comme la probabilité de S sachant T ($p(S/T)$), alors qu'elle devrait les interpréter comme la probabilité de T sachant S ($p(T/S)$).

L'extrait suivant présente les différentes interprétations personnelles des étudiantes des données suivantes du problème « Des études médicales ont montré qu'une trisomie sur quatre engendre des taux anormaux, tandis qu'un taux hors norme se rencontre dans une grossesse sur cent ne présentant pas le syndrome. »

43. *Sahar : Je n'ai rien compris moi. C'est p(S) ou* $p(S/T)$ *qu'on doit calculer ?.*

44. *Amal : Bon, on a juste traduit les données. On a appelé S ceux ayant le syndrome et $\bar{S}$ ceux n'ayant pas le syndrome. Les deux évènements S et $\bar{S}$ ont en commun l'évènement T « les taux anormaux »…*
45. *Hayfa : parce qu'il y a ceux ayant des taux anormaux et ils ont la maladie et ceux ayant des taux anormaux sans être malade. Le $p(S)$ c'est donné c'est $\frac{1}{700}$ … $p(S) = \frac{1}{700}$*
46. *Sahar : et le $\frac{1}{4}$ c'est quoi ?*
47. *Hayfa : c'est par rapport au taux T. Là c'est $p(S)$ tout seul c'est donné et nous on doit chercher $p(S/T)$ sachant que dans le test les taux sont anormaux. Donc $p(S) = \frac{1}{700}$*

Pour la troisième étudiante Sahar, nous avons remarqué dès le début de la discussion qu'elle éprouvait des difficultés à s'impliquer dans le projet de ses collègues et qu'elle est restée attachée au modèle concret et n'arrive pas à passer au modèle mathématique. L'utilisation des médiateurs visuels relatifs aux évènements et du vocabulaire de probabilité lui a permis de participer au projet focal du groupe et d'exprimer son hésitation entre $p(S)$ et $p(S/T)$, ainsi que d'exprimer sa propre interprétation des données. Cela apparait également dans son intervention [46] « *Sahar : et le $\frac{1}{4}$ c'est quoi ?* » qui renvoie à la même interprétation qu'avait Hayfa relativement à l'évènement S « avoir le syndrome sachant que le test donne des taux anormalement élevés » et à ce niveau c'est cette dernière qui prend la charge de lui expliquer et d'exprimer son ajustement au niveau de la probabilité de l'évènement S puisqu'elle déclare que $p(S) = \frac{1}{700}$. La question de Sahar a constitué un point de départ pour un ajustement des différentes interprétations personnelles des données du problème pour s'accorder sur une même interprétation de la probabilité que le fœtus soit atteint par le syndrome est $p(S) = \frac{1}{700}$.

2. Ajustement de la relation entre les évènements.

L'extrait suivant est relatif à 33 minutes et 20 secondes de l'enregistrement de la discussion. Dans cette étape du travail en groupe les étudiantes on déjà identifié le modèle mathématique qu'elles vont utiliser pour résoudre la situation proposée. Elles s'engagent dans un nouveau projet focal relatif à l'identification des relations entre les évènements proposés.

65. *Hayfa : Regardez. On a un ensemble S et un ensemble T et on a $\bar{S}$ l'ensemble de ceux qui n'ont pas la maladie.*
66. *Amal : on doit trouver le risque d'avoir le syndrome si le test donne des valeurs anormales.*
67. *Hayfa : Donc on doit chercher S sachant T, c'est-à-dire la probabilité de ceux ayant le syndrome et les taux anormaux.*
68. *Amal : On va reprendre dès le départ. On a $p(S) = \frac{1}{700}$ d'accord ?*
69. *Sahar : et ça 1/4 c'est $p(S/T)$ et $p(\bar{S}/T) = \frac{1}{100}$*
70. *Hayfa : ce n'est p(T/S) ? Regardez, l'énoncé dit que « une trisomie sur quatre engendre des taux anormaux »*
71. *Amal : Ah oui c'est $p(T/S)$ sachant qu'il y a la maladie c'est la probabilité d'avoir des taux anormaux.*
72. *Hayfa : OK et nous on doit chercher $p(S/T)$.*
73. *Amal : On a $p(S/T) = \frac{p(S \cap T)}{p(T)}$*
74. *Sahar: $p(S \cap T) = p(T/S).p(S)$ et on peut calculer ça parce que c'est donné*

(*Les étudiantes s'engagent dans la tâche de détermination de la valeur de $p(S/T)$ à travers l'application de la formule de Bayes et le calcul de probabilité*)

Le projet focal global du groupe à cette étape est de répondre à la question de la détermination du risque d'avoir le syndrome si un test sanguin indique un dosage anormalement élevé. Ce PF est explicité dans l'intervention [66] de Amal qui reprend la même formulation proposée dans le texte du problème. Hayfa utilise un langage de probabilité et des médiateurs visuels relevant du même domaine pour exprimer sa participation à ce PF. À partir de l'intervention de Amal [68] les étudiantes s'engagent dans un nouveau PF plus local relatif à l'identification de la relation entre les évènements $S,\ T$ et $\bar{S}$.

La discussion du groupe fait apparaitre les difficultés des étudiantes à se mettre d'accord sur une même interprétation des données du problème. En fait, les interventions [69] et [70] montrent un retour sur l'interprétation mathématique de la donnée « une trisomie sur quatre engendre des taux anormaux ». Pour Sahar dans [69] l'interprétation est $p(S/T) = \frac{1}{4}$. Tandis que, pour Hayfa dans [70] c'est $p(T/S) = \frac{1}{4}$. Pour expliquer à Sahar et expliciter sa propore interprétation de cette donnée, Amal dans [71] utilise une autre formulation « *c'est* $p(T/S)$ *sachant qu'il y a la maladie c'est la probabilité d'avoir des taux anormaux.* » cette nouvelle formulation bien que exprimée dans un vocabulaire contextualisé, précise la relation entre les deux évènements.

Selon Galbraith, Stillman, Brown et Edwards (2007), cette étape de la discussion de groupe marque la transition du problème contextualisé vers le modèle mathématique. Cette étape marque également l'engagement des trois étudiantes dans un nouveau projet focal commun: élaboration d'une solution mathématique du problème. Les étudiantes utilisent les mêmes médiateurs visuels liés à la probabilité conditionnelle et aux connaissances mathématiques antérieures. Elles font appel à des théorèmes et des formules déjà étudiés en cours ce qui renvoie en termes de la TCM à l'utilisation des énoncés validés en cours de probabilité (*endorsed narratives*). Le groupe arrive à se mettre en accord sur une production finale validée et acceptée par les trois étudiantes et qui constitue une solution pour la tâche proposée.

V. CONCLUSION

Dans ce travail, l'analyse de la discussion mathématique d'un groupe de trois étudiantes lors de la résolution d'un problème de mathématiques appliqué à la biologie a pour objectif d'identifier ce qui rend cette discussion efficace. Se basant sur les travaux de Ryve et al. (2013), cette étude est un exemple d'application du cadre commognitif qui illustre le rôle des médiateurs visuels et du vocabulaire mathématique associé dans l'établissement d'une discussion efficace. Les analyses ont porté sur la façon dont les trois étudiantes utilisent les médiateurs visuels, événements S, T et $\bar{S}$ et les probabilités $p(S)$, $p(S/T)$ et $p(T/S)$ pour élaborer des projets de focaux communs et s'accorder sur la même interprétation des données du problème ce qui permet d'établir une communication efficace. Ces médiateurs visuels liés à la probabilité conditionnelle ont servi d'outil pour rendre explicites les projets focaux et ont également constitué un outil de communication lors de la discussion du groupe. Les analyses appuient l'hypothèse de Stillman (2015), que la transition de l'énoncé du problème (*the real word problem statement*) vers le modèle mathématique est l'étape la plus difficile du processus de résolution. Le passage de la forme contextualisée à la forme décontextualisée de la tâche était associé à l'introduction du vocabulaire lié à la probabilité des événements et aux médiateurs visuels associés. Ces médiateurs visuels fonctionnent comme un moyen d'établir un contexte commun pour la communication de groupe. En fait, l'utilisation du médiateur visuel $p(T/S)$ par Amal a orienté les trois étudiantes vers l'utilisation du modèle de la probabilité conditionnelle ce qui leur a permis d'établir un projet focal commun. Nos analyses illustrent bien l'importance de l'utilisation de médiateurs visuels et du vocabulaire associé à la probabilité conditionnelle pour rendre explicite le projet de focalisation personnelle et pour

harmoniser l'interprétation des données par les élèves et l'identification du modèle mathématique valable.

Notre analyse s'est limitée à la discussion d'un seul groupe où les étudiants ont utilisé un seul type de médiateur visuel. L'observation des autres groupes participant à l'expérience montre l'utilisation d'autres types de médiateurs visuels comme «arbre de choix» et «diagrammes». Nos prochaines analyses porteront sur la manière dont les étudiants articulent les différents types de médiateurs visuels pour établir une communication efficace. Nous supposons que l'utilisation de la même méthodologie dans le cas d'une discussion en classe entière mettra également en évidence le rôle de l'enseignant dans l'orientation des discussions vers l'efficacité visée et cela constitue à notre avis une piste de recherche importante.

REFERENCES

Biau, G, Droniou J., & Herzlich M. (2012). *Mathématiques et statistiques pour les sciences de la nature. Modéliser, comprendre et appliquer*. Paris : Collection Enseignement Supérieur EDP Sciences.

Brewer, C., & Smith, D. (Eds.) (2011). *Vision and Change in Undergraduate Biology Education: A Call to Action.* Washington: American Association for the Advancement of Science.

Galbraith, P. L., Stillman, G., Brown, J., & Edwards, I. (2007). Facilitating middle secondary modelling competencies. In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling: Education, engineering and economics* (pp. 130-140). Chichester, UK: Horwood.

Hester, S., Buxner, S., Elfring, L. & Nagy, L. (2014) Integrating quantitative thinking into an introductory biology course improves students' mathematical reasoning in biological contexts. *Life Sciences Education, 13*(1), 54-64.

Khalloufi-Mouha, F. (2015). Etude d'un problème de modélisation au niveau de la première année de l'enseignement universitaire. In Y. Matheron & G. Gueudet (Eds.), *Actes de la XVIIIe école d'été de didactique des mathématiques*. Brest (Bretagne).

Kieran, C. (2001). The mathematical discourse of 13-year-old partnered problem solving and its relation to the mathematics that emerges. *Educational Studies in Mathematics*. *46,* 187–228.

Michelsen, C. (2017). Linking Teaching in Mathematics and the Subjects of Natural Science. *Global Journal of Human-Social Science: G, 17*(6-G), 35-46. https://doi.org/10.17406/GJHSS.

Muller, E. & Burkhardt, H. (2007). Applications and modelling for mathematics — Overview. In W. Blum, P. L. Galbraith, H. W. Henn HW & M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education*. *The 14th ICMI Study Series* (pp. 267-274). Boston, MA: Springer.

Nilsson, P., & Ryve, A. (2010). Focal event, contextualization, and effective communication in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 74,* 241–258.

Osman, K., Hiong, L. C, & Vebrianto, R. (2012). 21st century biology: an interdisciplinary approach of biology, technology, engineering and mathematics education. *Procedia – Social and Behavioral Sciences, 102*(22), 188-194.

Ryve, A. (2006). Making explicit the analysis of students' mathematical discourses: Revisiting a newly developed methodological framework. *Educational Studies in Mathematics, 62,* 191–210.

Ryve, A., Nilsson, P., & Mason, J. (2012). Establishing mathematics for teaching within classroom interactions in teacher education. *Educational Studies in Mathematics, 81*(1), 1–14.

Ryve, A., Nilsson, P., & Pettersson, K. (2013). Analyzing effective communication in mathematics group work: The role of visual mediators and technical terms. *Educational Studies in Mathematics, 82*, 497‑514.

Sfard, A. (2001). There is more to the discourse than meets the ears: Looking at thinking as communication to learn more about mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics, 46,* 13**–**57.

Sfard, A., & Kieran, C. (2001). Cognition as communication: Rethinking learning-by-talking through multi-faceted analysis of students' mathematical interactions. *Mind, Culture, and Activity, 8*, 42–76.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, development of discourses, and mathematizing*. New York, NY: Cambridge University Press.

Sfard, A. (2012). Introduction: Developing mathematical discourse—Some insights from communicational research. *International Journal of Educational Research,* 51–52, 1-9.

Stillman G. A. (2015). Applications and Modelling Research in Secondary Classrooms: What Have We Learnt? In S. Cho S. (Ed.), *Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 791-805). Cham: Springer.

Wertsch, J. V. (2007). Mediation. In H. Daniels, M. Cole, & J. V. Wertsch (Eds.), *The Cambridge companion to Vygotsky* (pp. 178–192). Cambridge: Cambridge University Press.

Wertsch, J. V., & Kazak, S. (2011). Saying more than you know in instructional settings. In T. Koschmann (Ed.), *Theorizing learning practice* (pp. 134–167). New York: Springer.

ANNEXE

ÉVALUATION D'UN RISQUE DE TRISOMIE 21

Pour évaluer le risque qu'un fœtus développe le syndrome dit de Down (trisomie 21) il existe des tests prénataux permettant de déceler si le fœtus est effectivement atteint par la maladie. Ces tests sont cependant effectués sur la base de prélèvements invasifs (analyse de cellules du trophoblaste, ponction du liquide amniotique) et peuvent en cas d'utilisation massive, provoquer davantage d'avortements qu'ils ne détectent le syndrome. Dans un tel contexte, il est donc essentiel d'être en mesure d'évaluer les risques de développement de la trisomie 21. La stratégie médicale consiste alors à n'effectuer un test plus poussé que pour les grossesses à risque et non pas systématiquement.

Le nombre moyen d'individus atteints par le syndrome de Down est en moyenne une naissance sur 700 si l'on choisit de ne pas tenir compte de l'âge de la future mère. La méthode la plus courante pour évaluer si une grossesse est à risque consiste alors à effectuer des dosages de certaines substances comme par exemple l'hormone H.C.G ou l'alpha-foetoproteine, via de simple prises du sang. En effet, la présence d'une trisomie 21 peut se traduire parfois par des taux anormalement élevés de ces substances dans le sang. Néanmoins, ce mécanisme n'est pas systématique et bien d'autres facteurs (liés au métabolisme de la mère ou du fœtus) peuvent aussi engendrer des taux anormaux.

Des études médicales ont montré qu'une trisomie sur quatre engendre des taux anormaux, tandis qu'un taux hors norme se rencontre dans une grossesse sur cent ne présentant pas le syndrome.

Dans de telles circonstances, quel est le risque d'avoir le syndrome si un test sanguin indique un dosage anormalement élevé?

RATIONALITES ET INFINI DANS LE CALCUL DE GRANDEURS FINIES

Lecorre[1*] Thomas – Ghedamsi[2**] Imène

Résumé – Dans cette étude, nous explorons, auprès d'un public de doctorants en sciences, les connaissances liées à la notion de limite finie de suite à travers la question du calcul de grandeurs finies par des processus infinis. Le dispositif présenté étudie ces connaissances lors de la résolution collective d'un problème et les analyse selon le modèle des rationalités (pragmatique, empirique, théorique).
Mots-clefs : limite, infini, modèle des rationalités, grandeurs.

Abstract – In this study, the knowledge of PhD students in sciences on the notion of finite limit of a mathematical sequence is explored through the question of computing the value of finite magnitudes by means of infinite processes. The experimental device investigates this knowledge in the context of a collective task of problem-solving and the data are analyzed by means of the model of rationalities (pragmatic, empirical, theoretical).
Keywords: limit, infinity, model of rationalities, magnitudes.

I. INTRODUCTION

L'axiome d'Archimède, dit axiome du continu depuis Hilbert, a permis de contourner les problèmes liés aux grandeurs divisibles à l'infini et a fondé la méthode d'exhaustion de calcul de ces grandeurs. Là où nous serions aujourd'hui passés au calcul de limites, les mathématiciens d'antan (Euclide, Archimède, etc.) utilisent un double raisonnement par l'absurde pour montrer que la grandeur en question n'est ni strictement supérieure ni strictement inférieure à cette « limite » (Burn, 2005). Dans l'analyse standard contemporaine, bien qu'épurée de ce qui pourrait renvoyer à l'infini et aux infinitésimaux, la définition formelle de la limite généralement introduite à l'entrée à l'université, n'a plus aucun lien explicite avec cet axiome ainsi qu'avec ses racines hormis le fait qu'il engendre la convergence formelle de la suite $(1/n)_n$[3]. Or, certains travaux ont montré que l'introduction de cette définition ne garantit pas aux élèves/étudiants de surmonter les difficultés inhérentes à la notion de limite dans divers contextes, mathématiques ou autres (Przenioslo, 2004). En particulier, ces travaux soulignent qu'en aval de la définition formelle de limite, le travail des élèves/étudiants dans de tels contextes pourrait être entravé par le resurgissement de phénomènes liés à l'infini et aux infinitésimaux. Ces phénomènes sont en général attribués aux conceptions fondamentalement dynamiques (Robert, 1982) que pourraient avoir formé les élèves/étudiants lors d'un premier enseignement informel de la limite.

Cette recherche aborde la question des manifestations de ces phénomènes auprès d'un public avancé en mathématiques (doctorants en sciences) et destiné à poursuivre une carrière professionnelle dans le champ des mathématiques ou de disciplines qui lui sont connexes. Nous partageons le point de vue selon lequel avoir le sens de la limite est synonyme d'une prise de conscience des raisons intrinsèques à ses racines ; ces raisons fondent à leur tour la structuration de l'édifice final. Cet édifice unifie, à travers le formalisme, l'ensemble des notions qui renvoient à l'infini et aux infinitésimaux en analyse réelle (un nombre réel comme limite d'une suite de rationnels, un nombre dérivé, un reste intégral, une différentielle, un équivalent, une suite de Cauchy, etc.). Une manière de tester qu'on a acquis ce sens, c'est de pouvoir faire fonctionner les significations de cet édifice dans ses divers contextes, notamment en dehors du cadre de l'Ecole et de la classe de mathématiques. Dans cette étude, notre objectif va au-delà d'un simple recensement ou catégorisation des différents symptômes

1 * Université Cergy-Pontoise – France – thomas.lecorre@u-cergy.fr
2 ** Université de Tunis – Tunisie – ighedamsi@yahoo.fr
3 Axiome d'Archimède : *Pour tout x et y > 0, il existe un entier n tel que y< n.x*. En prenant $x = \varepsilon$ et $y = 1$, on obtient la convergence vers *0* de la suite $(1/n)_n$.

liés aux questions de l'infini et de leurs origines. Notre recherche consiste à étudier les types de raisonnements qui composent le travail du public expérimenté ainsi que l'évolution des connaissances de ce public lorsqu'il est confronté à un problème d'infini et d'infinitésimaux résoluble par passage à la limite. Par conséquent, nous entreprenons cette recherche dans le cadre théorique des rationalités introduit par Lecorre (2016). Ce cadre donne une vision globale et cohérente des éléments fondateurs de l'activité mathématique, dont celle de définir, et de leurs différentes appréhensions compte tenu de la nature du raisonnement établi et de son développement. Le but de cette recherche est de mettre à jour des phénomènes liés à l'apprentissage de la définition de la limite et de les analyser, afin de pouvoir servir de fondation à des travaux ultérieurs qui traiteraient d'une renégociation de l'enseignement de la définition de la limite en réintroduisant des éléments spécifiques au principe fondamental de l'analyse, c'est-à-dire évaluer des grandeurs finies au moyen de processus infinis.

Cadre théorique

Conçu dans le cadre de la Théorie des Situations Didactiques (TSD), le modèle des rationalités de Lecorre (2016) part d'un questionnement des significations de l'hypothèse fondamentale « d'actant rationnel » de cette théorie. Cette hypothèse admet l'évolution du travail autonome des élèves/étudiants, ou tout autre individu engagé dans un processus de cognition, suivant les différents niveaux du milieu, cette autonomie est fondamentalement supportée par la robustesse de la situation mathématique, dite fondamentale, implémentée dans ce milieu (Brousseau, 1998). La conception de situations fondamentales dans le contexte d'apprentissage de notions mathématiques complexes, unificatrices et fortement formalisées (telle que celle de la limite) s'avère problématique (Bloch, 2005). Tout en préservant les principes de la TSD, notamment en termes d'optimisation des interactions au sein du milieu entre élèves/étudiants, professeur (médiateur) et situation mathématique, la modélisation de cette hypothèse permet de spécifier la nature du travail des élèves/étudiants ainsi que sa progression dans un tel contexte.

Une rationalité est définie comme étant un système de contrôle et de production de connaissances non contradictoires. On y distingue trois types issus de trois modes d'évaluation de la non-contradiction : la rationalité pragmatique, la rationalité empirique et la rationalité théorique. Ces différents types de rationalités caractérisent des niveaux d'accès aux savoirs complexes, cohérents avec les différents niveaux du milieu : 1) la rationalité *pragmatique* repose sur une appréhension première du réel, sur l'évidence immédiate et sur l'efficacité dans l'action ; 2) la rationalité *empirique* se décompose en deux sous types - *inductiviste* qui repose sur la recherche de généralités pour fonder des lois au travers de collections de cas et d'arguments leur donnant une plausibilité, et *réfutationniste* où une théorie n'est jamais vraie mais seulement non réfutée, et fausse quand elle est réfutée ; 3) la rationalité *théorique* recherche la vérité apodictique à partir de définitions, d'axiomes et de propriétés prouvées dans ce système. Le modèle de rationalités ne suppose pas un ordre particulier d'accès aux différents niveaux du savoir. L'évolution dans les apprentissages est alors analysée du point de vue des passages d'un type de rationalité à un autre, dits transitions de rationalités. L'étude a priori et a posteriori des conditions de réalisation de ces transitions de rationalités permet divers usages de ce modèle, notamment comme modèle de conception d'ingénieries mais aussi comme modèle exploratoire de phénomènes didactiques, soit tel que nous l'exploitons dans cette recherche.

Dans notre cas, la définition de la limite est déjà connue par le public visé, la situation d'expérimentation n'est donc pas fondamentale : son rôle essentiel est celui de déclencher des questions encourageant une réflexion profonde sur la signification de cette notion plutôt que de faire apparaître cette notion comme réponse optimale. Comme mentionné plus haut, une rationalité est non susceptible de produire des connaissances contradictoires, elle est

intrinsèquement stable. Cependant, lors du déroulement de la situation expérimentale, l'actant rationnel peut rencontrer un conflit de rationalité, c'est-à-dire prendre conscience d'une contradiction. Ce sont précisément ces conflits de rationalités, au sein d'une même rationalité (conflits intra-rationalité) ou bien entre deux rationalités distinctes (conflits inter-rationalités), qui déstabilisent l'actant rationnel et sont sources de transitions de rationalités. Ces transitions marquent alors une transformation des connaissances car elles impliquent l'exigence de conformité à un autre système de contrôle, et donc à une autre rationalité.

Trois caractéristiques essentielles définissent une rationalité : le mode d'existence des objets en jeu (objet défini, objet préconstruit, etc.), le type de logique (instanciation, causalité, logique classique, etc.), et le mode de validation (abduction, induction, déduction, argumentation, vérification, etc.). Ainsi, la stabilité d'une rationalité est assurée par une cohérence, du point de vue de la non-contradiction, des valeurs spécifiques prises par ces caractéristiques (Tableau 1). L'évolution du raisonnement peut être alors analysé en termes d'une évolution des rationalités qui rend compte de l'évolution de l'activité mathématique dans ses principaux aspects (définir, valider, « logiciser »).

	Pragmatique	**Empirique**		**Théorique**
Principe	**Action**	**Inductivisme**	**Réfutationisme**	**Théorie**
Existence des objets	Matérielle- Définition en acte	Définition intermédiaire	Définition en construction	Définition mathématique
Validation	Preuve en acte - Evidence perceptive - Vérification	Induction - Abduction - Argumentation	Contre-exemple Réfutation	Démonstration déductive
Logique	Instanciation	Causalité- Logique naturelle, classique	Logique classique	Logique classique

Tableau 1 *– Caractéristiques des différents types de rationalités*

A titre d'exemple, dans le cadre de notre recherche, les individus participant à l'expérimentation sont supposés disposer de connaissances théoriques concernant la notion de limite. Ils connaissent sa définition formelle, ont les moyens de démontrer la convergence, et savent a priori mobiliser la logique classique et ses outils (quantificateurs, négation, implication, etc.). Ils ont en outre de nombreuses connaissances sur les suites classiques et leurs convergences. Si on leur propose une situation qui désigne explicitement ces connaissances, ils devraient s'y référer sans difficulté. C'est pourquoi, nous choisissons une situation concrète dans laquelle ces connaissances jouent un rôle clef mais ne sont pas explicitement désignées. Dans ce cas, il est possible que des connaissances beaucoup plus « archaïques » réapparaissent. Par exemple, il est possible que la convergence soit beaucoup plus associée à un phénomène matériel (définition matérielle) ou à une conception dynamique (convergence perçue selon un mouvement) qu'à une définition mathématique, ou bien qu'une définition en acte soit utilisée, autrement-dit que l'objet questionné apparaisse dans le discours comme allant de soi, sans être vraiment défini. On pourra voir alors apparaître des preuves en actes, reposant donc sur l'évidence perceptive et sur une logique d'instanciation sur des cas particuliers. Tout cela relèverait d'une rationalité pragmatique. On pourra aussi avoir recours à une rationalité empirique inductiviste qui repose surtout sur l'évidence liée à la répétition des phénomènes et sur des définitions qui restent encore en construction. Ces différentes manières d'appréhender des phénomènes liés à l'infini, conçues dans une rationalité naturalisant l'infini en faisant référence à des évidences perceptives ou bien dans une rationalité qui cherche des lois générales dans la répétition des phénomènes, ou encore dans une rationalité qui formalise cet infini dans la définition de limite, peuvent conduire à des contradictions lorsqu'elles sont confrontées. Ces contradictions devraient alors produire

des doutes, des remises en cause, qui sont les symptômes de conflits de rationalités, et provoquer des transitions de rationalités.

Afin de rendre effective l'expression de ces connaissances, faire prendre conscience de ces contradictions et aboutir à des tentatives de résolutions, le type de situation mathématique proposée et le respect du rôle spécifique du médiateur sont essentiels. Dans le cadre du modèle de rationalité, cette situation est contrôlée par deux critères : 1) elle doit être porteuse des significations fondamentales d'un savoir, c'est-à-dire des significations principales issues d'une analyse épistémologique concernant ce savoir ; 2) elle doit être accessible rationnellement, autrement dit chacun doit pouvoir ébaucher une pensée rationnelle à son sujet et donc mobiliser des connaissances adaptées (selon le niveau de rationalité adopté). Le rôle du médiateur est alors de permettre l'expression de ces connaissances et leurs confrontations. Il ne donne pas son avis sur ces connaissances mais va mettre en relief celles qui portent des significations fondamentales du savoir concerné et ont la potentialité de déclencher des conflits de rationalités et provoquer des transitions de rationalités. Théoriquement, son rôle ne va pas jusqu'à imposer lui-même des transitions de rationalités, ce que l'on nommera effet de contrat de rationalités, car celles-ci seraient artificielles et ne témoigneraient plus d'une rationalité propre de l'individu. Si dans le cadre d'une expérimentation exploratoire (ce qui est le cas de cette recherche), ces effets de contrat de rationalités sont exclus dans la mesure où ils sont ainsi de nature à invalider les connaissances exprimées, dans le cadre d'une ingénierie, la pression de la finalité d'apprentissage peut contraindre le médiateur à des effets de contrat de rationalités.

II. METHODOLOGIE DE LA RECHERCHE

1. Contexte de l'expérimentation

Cette recherche pose la question de la manifestation de phénomènes liés à l'infini dans un contexte social où le public, ayant suivi un cursus académique avancé en mathématiques, est confronté à une situation sur la notion de limite qui est déconnectée du cadre de l'Ecole et qui répond à au moins deux objectifs : 1) susciter des réflexions sur le calcul de grandeurs finies en utilisant des processus infinis ; 2) favoriser le travail des individus dans diverses rationalités et à travers divers aspects de l'activité mathématique. La situation que nous mobilisons dans cet article appelée « balle rebondissante » a fait l'objet de plusieurs expérimentations durant plusieurs années auprès de divers publics dont des enseignants de mathématiques du cycle secondaire. Dans chacune de ces expérimentations, le premier auteur de cet article joue le rôle de médiateur, il présente la situation, lance le débat et intervient occasionnellement pour encourager le public à continuer d'échanger sur leurs idées et à essayer de se convaincre mutuellement. Ses interventions sont dictées par la nécessité de recueillir un maximum de données susceptibles de faire avancer les analyses selon la problématique fixée. La durée moyenne des expérimentations est d'une heure, ce qui est suffisamment long pour que chaque public puisse s'engager profondément dans le débat. Les expérimentations sont enregistrées, certaines sont transcrites. Le script que nous étudions ici est réalisé avec un public comportant vingt-et-un docteurs et doctorants en sciences lors d'une manifestation scientifique à laquelle ils participaient durant l'été 2015. Cette expérimentation a été accompagnée de débats consistants du point de vue de l'objectif de recherche que nous lui avons assigné.

2. Analyse a priori de la situation de la balle rebondissante

Le calcul de grandeurs finies à partir de processus infinis constitue potentiellement un terrain idéal pour construire une situation qui permette d'interroger les connaissances réelles

liées au traitement de l'infini et des infinitésimaux dans des contextes où le calcul de ces grandeurs renvoie à la convergence de suites ou de séries. En effet, dans une telle situation, surtout si elle est déconnectée du contexte institutionnel, deux types d'infinis peuvent être en jeu : infini potentiel quand le processus est appréhendé dans sa dimension constructive lorsque la situation n'est pas d'emblée mathématisée, et infini actuel quand le processus est appréhendé comme une globalité. La notion de limite finie en l'infini illustre cette articulation entre infini appréhendé comme potentiel, le processus est considéré comme n'ayant pas de fin, et infini actuel, on obtient une grandeur finie. Mais une telle situation devra aussi permettre d'analyser le travail du public, de permettre de le comprendre, en particulier dans son évolution. Elle devra donc favoriser le travail des individus dans diverses rationalités et à travers divers aspects de l'activité mathématique, autrement dit laisser un accès ouvert à la mobilisation de toute rationalité pour entrer dans un problème relatif au traitement de l'infini. La situation de la balle rebondissante correspond à l'un des paradoxes de Zénon d'Elée, elle a déjà fait l'objet d'autres études dans la littérature, notamment par Mamona-Downs (2001) qui l'a utilisée comme source de premières intuitions et compréhensions de la notion de limite.

Conformément aux objectifs que nous lui avons assignés, la question posée ici ne doit pas expliciter la nature des grandeurs en jeu afin de laisser davantage de possibilités d'accès au problème, mais également laisser la possibilité de réponses contradictoires et de confrontations de points de vue en fonction des choix de ces grandeurs. C'est pourquoi nous avons ouvert le questionnement de la manière suivante : une balle rebondit systématiquement exactement à la moitié de sa hauteur de chute ; quand on lâche cette balle d'une hauteur non nulle, s'arrête-t-elle de rebondir ? L'étude de cette question renvoie à l'étude d'une question implicite qui est au cœur de notre problématique : dans quelle mesure une balle peut-elle s'arrêter de rebondir alors qu'elle rebondit une infinité de fois ? Plus précisément, la question posée devrait déclencher des discussions qui porteront dans un premier temps sur le caractère physique (ou concret) du phénomène, puis progressivement vont s'enrichir de considérations mathématiques en modélisant le phénomène avec des suites indexées par le nombre de rebonds. Ceci suppose qu'à un moment du débat, il a été décidé de se placer dans un modèle mathématique où : 1) la balle devient un point qui a un mouvement rectiligne de hauteur chaque fois divisée exactement par deux (suite géométrique de raison *0.5*), dans tous les cas ce mouvement correspond à un phénomène amorti dû aux frottements ou à toute autre raison ; 2) le déplacement de ce point est attesté par la continuité des grandeurs (l'espace et le temps), qui sont divisibles à l'infini, et le nombre de rebonds est un moyen de matérialiser ce découpage.

A côté du nombre de rebonds (n), nous distinguons trois grandeurs susceptibles d'être prises en compte dans la modélisation du phénomène, donnant lieu chacune à une suite distincte (on suppose ici que la hauteur initiale de la balle est égale à 1) : la hauteur du rebond ($H_n = (0.5)^n$), la longueur parcourue par la balle depuis le lâcher ($L_n = 2(1 - (0.5)^n)$), la durée des rebonds[4] depuis le lâcher ($T_n = T_0 + 2T_0 \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$), où T_0est la durée de la première chute et T_n calculé selon les lois de la gravité universelle ; nous n'avons pas la place dans cet article d'établir cette formule). Dans cette situation, la modélisation mathématique du phénomène est basée sur les règles théoriques de la physique qui en relèvent. Ces règles fondent en partie la rationalité théorique, cette dernière ne peut donc pas se limiter aux aspects mathématiques du problème. Cette coexistence théorique peut se résumer en quatre points :1) choix de la grandeur physique à évaluer, 2) modélisation mathématique de cette grandeur, 3) résolution du modèle et 4) interprétation du résultat. Du point de vue des caractéristiques des rationalités, les deux premiers points renvoient au type de définition choisi tandis que les deux

4 Cf http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/meca/rebonds.html

derniers relèvent des types de validation et de logique utilisés. Théoriquement, au moins trois grandeurs peuvent être invoquées pour répondre à la question : H_n, L_n, T_n à partir des modélisations par les suites données précédemment. Dans ces conditions, le calcul de la limite de la suite considérée permet de conclure que la balle s'arrête. On pourrait par ailleurs s'attendre à l'émergence de conflits intra-rationalité au sein de cette rationalité théorique dès qu'on évoque la cohérence intrinsèque des résultats obtenus avec la question du temps, dans le cas où les suites utilisées sont $H_n et L_n$. Cette question pointe l'enjeu de la coexistence mathématiques/physique au sein de la rationalité théorique, et ne peut être éludée à moins d'avoir les connaissances de physiques requises pour la modéliser.

On pourrait, entres autres, s'interroger sur la possibilité que la durée totale des rebonds soit infinie : peut-on dire alors que la balle s'arrête ? Nous parions sur ces cas potentiels de contradictions au sein de la rationalité théorique pour transiter vers un travail d'exploration empirique, voire pragmatique, des phénomènes physiques, où le temps a une signification plus tangible et où les balles ont indéniablement l'habitude de s'arrêter. Dans les rationalités pragmatique et empirique, nous attendons surtout des définitions en acte ou matérielles, qui pourront être précisées à travers les arguments mobilisés pour valider les réponses ; le travail dans ces rationalités permet de mettre en évidence des questionnements sur la nature de l'infini, notamment s'il est question d'évaluer le mouvement de la balle à partir du nombre de rebonds qui, lui, est infini. La présence de ces contradictions induit la recherche d'une stabilité autre qu'empirique ou pragmatique, donc d'un retour vers le théorique. Nous soutenons que ceci ne peut être accompli sans que la signification donnée à l'infini et aux infinitésimaux ne soit appréhendée à travers la définition de limite. Autrement dit, pour échapper aux paradoxes associés au découpage infini d'une grandeur finie, il est essentiel de relier, dans la définition formelle de la limite, les nombres ε-N aux infinitésimaux-infini. Si la limite existe et n'est pas explicite (ce cas pourrait se présenter notamment en l'absence de modélisation qui débouche sur une prise de décision), alors l'axiome d'Archimède autorise le développement d'un raisonnement à ε-près « *fondé sur un critère d'égalité entre nombres par la petitesse arbitraire de leur écart, et avec l'analogue pour les inégalités* » (Rogalski, 2016, p.135). Cette démarche est en général tronquée par le physicien qui se suffit à des résultats approximatifs et choisit un epsilon a priori en invoquant un domaine de non pertinence des longueurs infinitésimales (Cf. Burn, 2005, pour plus de détails sur les assises mathématiques de cette démarche).

Nous synthétisons dans ce qui suit les diverses formes et éléments de la caractéristique *type de validation* selon les rationalités : 1) rationalité pragmatique (« ça se voit » ; « elle devient immobile » ; « on ne peut pas le voir mais la balle continue », etc.) ; 2) rationalité empirique (« mon expérience » ; « chaque fois que je lance » ; « ça n'existe pas une balle qui rebondit exactement » ; etc.) ; 3) rationalité théorique (calculs ; majoration ; théorie de la gravité ; etc.). Pour ce qui est du type de logique, la situation peut surtout faire apparaître des éléments concernant la quantification universelle et sa négation dans les différents niveaux de rationalités, c'est-à-dire sous forme naturalisée en rationalité pragmatique avec des expressions telles que « à chaque fois », et des formes plus formalisées en rationalité théorique.

3. Description des données

Parmi les vingt-et-un participants, treize prennent la parole pendant l'expérimentation. Le médiateur tient sa neutralité et conduit les participants à discuter les termes du problème selon toutes les rationalités. L'arrêt de la balle n'est jamais défini explicitement, mais les validations utilisées montrent l'éventail des rationalités mobilisées pour le mode d'existence des objets : certains se fondent sur le nombre de rebonds, d'autres font référence à leur

expérience des balles et enfin d'autres encore envisagent le temps de rebond. La longueur parcourue par la balle n'est pas du tout mobilisée, ni la limite de la suite des hauteurs de rebonds pour conclure sur l'arrêt. Comme prévu, les contradictions liées à un nombre infini de rebonds et à une durée totale des rebonds possiblement finie, provoquent des doutes et des conflits de rationalités mais peu de transitions de rationalités. Dans les résultats, nous ne reviendrons pas sur ce que l'analyse des transcriptions a montré comme étant conforme à l'analyse a priori, nous nous focalisons plutôt sur ce qui n'était pas prévu et qui nous a permis d'avancer dans le cadre de notre problématique. Nos résultats mettront en évidence les causes de stagnation dans les niveaux de rationalités, ce qui empêche, par exemple, la durée des rebonds d'être adoptée comme un critère décisif.

III. RESULTATS

Trois résultats fondamentaux émergent à l'issue de l'analyse de la situation expérimentale : 1) la difficulté d'investir la rationalité théorique pour résoudre un paradoxe sur l'infini et les infinitésimaux dont la notion de limite est la clef ; 2) la neutralité du médiateur n'est pas suffisante pour définir son rôle ; 3) le besoin de revenir sur la question du raisonnement à epsilon près pour introduire les phénomènes impliquant la limite. Nous exposons dans ce qui suit certains éléments révélateurs de chacun de ces résultats.

1. Le défi de la rationalité théorique pour la notion de limite

Contrairement à ce qui a été prévu, nous assistons essentiellement à une stagnation dans les rationalités pragmatiques et empiriques. Les participants ont soit mobilisé leur expérience des balles réelles, soit tablé sur le nombre infini de rebonds. Et même lorsque les suites modélisant l'espace et le temps, indexées par ce nombre de rebonds, sont évoquées, leurs limites ne sont pas identifiées comme décisives pour le problème posé :

> [>R1] : Du coup la réponse est non (elle ne s'arrête pas). Du coup la distance sol-bas de la balle diminue à chaque fois donc on a la distance qui tend vers zéro mais qui ne fait jamais zéro à chaque fois.

Dans cette intervention, l'infini évoqué dans une rationalité pragmatique (appelé infini potentiel dans certains travaux) freine l'exploitation de la limite de la suite des hauteurs, pourtant justement calculée, pour avancer dans la résolution du problème donné. Ceci s'applique aussi à la suite modélisant le temps de rebonds :

> [>R2] : Oui mais ce que je dis c'est qu'il y a infinité de rebonds, ça ne me dit pas que ça va rebondir pendant une infinité de temps, parce que je sais que je peux additionner une infinité d'intervalles de temps, si ces intervalles de temps sont deux fois plus petits que le précédent, je sais qu'il y a un temps que je ne vais jamais dépasser, et peut-être qu'elle va rebondir une infinité de fois dans un laps de temps fini...théoriquement...dans le modèle théorique...
>
> [>R12] : Le temps peut avoir une limite ?? C'est à dire ne pas dépasser une certaine valeur mais continuer à croître tout le temps ??? Non ? Je ne suis pas certaine de bien comprendre : le temps peut ne pas dépasser une certaine valeur mais ça peut quand même toujours augmenter ?

L'intervention de R2, pourtant révélatrice des potentialités théoriques de l'infini, ne trouve pas consensus et demeure sans suite :

> [>R1]: Du coup tout le ...c'est des jeux sur les termes, parce que moi l'ambiguïté elle est sûr de s'arrêter parce que ce que tu dis c'est que quelque part elle ne s'arrête jamais de rebondir mais à un moment elle a arrêté de rebondir.
>
> [>R7]: C'est ça qui est exceptionnel...
>
> [>R1]: Alors moi je ne sais pas comment c'est possible... (Rires)

Dans ce passage, on voit que la notion de découpage infini d'une grandeur finie, qui, à travers

le choix de epsilon, est au cœur de la définition formelle, n'est pas disponible pour rendre rationnel l'argument de R2 aux yeux de R1 ou de R7. La persistance, au niveau du groupe, de la conviction d'une balle qui ne s'arrête pas, après l'explication de R2, laisse penser qu'elle n'est pas disponible non plus au niveau collectif. D'ailleurs R2 en doute lui-même :

> [>R2]: Je n'ai pas dit que j'étais complètement cohérent... (Rires)

Le besoin de retourner sur la signification de la définition formelle de convergence semble absent. Cette définition, supposée largement investie par les participants, porte en elle à travers les différentes valeurs d'epsilon le sens des restes infinitésimaux dans le calcul d'une grandeur finie découpée à l'infini auxquels renvoient le choix de N et des rangs qui lui sont supérieurs. Le paradoxe de Xénon d'Elée, dans sa version modifiée via la balle rebondissante, n'est pas résolu par le public expérimenté en dépit de la disponibilité présumée de l'arsenal de savoirs qui faisait défaut à l'époque de sa formulation. On ne peut donc prétendre mettre en œuvre l'objet limite à travers la rationalité théorique lorsque l'infini, étroitement lié à sa raison intrinsèque, est abordé dans une toute autre rationalité.

2. Le rôle du médiateur

Le médiateur initie un échange fourni des participants en observant une stricte neutralité, il se contente le plus souvent de reformuler les propos et demande un complément d'explication lorsque cela est nécessaire. Mais cette neutralité le prive de mettre en relief les arguments qui correspondent particulièrement à la problématique de l'infini, et de souligner les désaccords. Par exemple, lorsque R7 met en évidence un paradoxe, le médiateur n'en profite pas pour renforcer le conflit apparent :

> [>R7]: Ah non moi j'ai répondu par rapport à la formulation de la question. C'est par rapport à mes conceptions si la balle...je sais que la balle va s'arrêter...Si je tiens compte de mon expérience personnelle je sais que la balle va s'arrêter. Mais eu égard à la formulation de la question, la balle, elle ne s'arrêtera pas.
>
> [>Le médiateur]: Donc tu dis: avec ton expérience, ça s'arrête...
>
> [>R7]: Voilà...

La stimulation du débat autour des enjeux forts de la situation, dans ce cas de figure liés à la notion de limite et d'infini, et la mise en évidence de contradictions permettent de centrer davantage le débat afin de déclencher un questionnement sur les notions fondamentales en jeu au niveau de la rationalité théorique. Cela pose évidemment deux difficultés au médiateur : identifier instantanément l'importance des arguments par rapport à la problématique alors que ceux-ci n'arrivent jamais dans l'ordre ni la forme prévue, et parvenir à contraster les arguments sans pour autant recourir aux effets de contrats. Cette expérimentation montre qu'en dépit du principe d'autonomie, souligné par le modèle des rationalités, dans les interactions intra-groupe des participants, la dimension socioculturelle que ce modèle porte s'incarne aussi à travers la posture méta du médiateur et sa capacité à s'en saisir en temps réel.

3. La définition formelle de limite

Deux critères importants ont été pris en considération pour la mise en place de cette expérimentation : 1) les participants doivent être avancés en mathématiques (docteurs ou doctorants es-sciences), 2) le choix de la situation doit tabler sur la construction de grandeurs finies à partir d'une infinité de calculs, une signification fondamentale de la limite qui est étroitement liée à l'axiome d'Archimède. La réalisation effective a montré un manque au niveau des connaissances de l'analyse réelle liées à la formalisation via la définition en ε-N de

l'adage infini-infinitésimaux au niveau de la rationalité théorique. Or ces connaissances correspondent précisément au raisonnement à ε-près qui distingue l'analyse de l'algèbre par la manière dont elle fonde l'égalité à partir d'une infinité d'inégalités. Conduire les étudiants à mobiliser des raisonnements en epsilon même lorsque ceux-ci ne sont pas explicitement désignés, leur permettre de mobiliser une rationalité théorique dès lors que la dialectique infini/fini est questionnée, constitue manifestement un défi encore actuel pour l'enseignement.

CONCLUSION

L'usage du modèle des rationalités pour investiguer le problème posé par cette recherche a d'abord permis de mettre en évidence ses potentialités à rendre compte des phénomènes de conceptualisation des objets mathématiques, dans ce cas celui de la limite, à travers les rationalités. Plus précisément, le paradoxe, lié au calcul de grandeurs finies divisibles à l'infini, que devrait résoudre le concept de limite, n'est pas résolu. Le modèle utilisé a montré que ce qui a entravé la résolution de ce paradoxe provient de la difficulté à mobiliser dans la rationalité théorique ce qui est au cœur de la formalisation de la limite : la signification mixant infinitésimaux et infini. Les résultats de l'expérimentation nous ont de plus incité à réinterroger les fondements théoriques du modèle et ont conduit à la nécessité de préciser davantage d'abord le rôle du médiateur à travers l'identification a priori de ce qui est à sa charge et qui relève du méta, ainsi que le rapport qu'on pourrait établir en termes de rationalités entre le champ des mathématiques et celui de la physique par le biais de la modélisation mathématique des phénomènes physiques. Le modèle des rationalités permet de penser ce rapport et la possibilité de faire coexister ces deux champs scientifiques à travers tous les types de rationalités. Enfin, les résultats de cette recherche soulignent le besoin de repenser l'introduction de la limite en prenant en compte le rôle d'epsilon, non seulement du point de vue formel, mais fondamentalement comme un moyen d'établir un pont entre les enjeux théoriques de la définition de limite et l'idée essentielle qui induit la forme que cette définition a aujourd'hui. Ceci ne peut être fait sans qu'un questionnement approfondi sur l'essence du raisonnement à epsilon près en analyse ne soit posé à travers une démarche qui, tout en préservant l'édifice mathématique, concilie l'analyse réelle et ses applications.

REFERENCES

Bloch, I. (2005) *Quelques apports de la théorie des situations à la didactique des mathématiques*. Note de synthèse à l'Habilitation à Diriger des Recherches. Paris : Université Paris-Diderot - Paris VII.

Brousseau, G. (1998b) *Théorie des situations didactiques : didactique des mathématiques 1970-1990*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Burn, B. (2005) The Vice: Some Historically Inspired and Proof-Generated Steps to Limits of Sequences. *Educational Studies in Mathematics* 60(3), 269-295.

Lecorre, T. (2016) *Des conditions de conception d'une ingénierie relative à la définition de limite – Un cadre basé sur un modèle de rationalité*. Thèse de doctorat. Grenoble : Université Grenoble-Alpes.

Mamona-Downs, J. (2001) Letting the intuitive bear on the formal; a didactical approach for the understanding of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics* 48, 259–288.

Przenioslo, M. (2004) Images of the limit of function formed in the course of mathematical studies at the university. *Educational Studies in Mathematics* 55(1/3), 103-132.

Robert, A. (1982). L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 3, 307–341.

Rogalski, M. (2016). Revenir au sens de la notion de limite par certains de ses raisons d'être. In Nardi et al. (Eds.), *Proceedings of the First Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics* (INDRUM 2016) (pp. 133-143). Montpellier: Université de Montpellier & INDRUM.

LES EQUATIONS DE DROITES DANS L'ESPACE : UNE ETUDE DES PROXIMITES DISCURSIVES DANS LES MANUELS DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE BELGE

NIHOUL[1*] Céline

Résumé – Nous nous intéressons au chapitre des équations de droites dans l'espace dans l'enseignement secondaire belge. Nous présentons tout d'abord quelques spécificités pour cette notion afin de préciser notre problématique de recherche. Celle-ci nous amène à analyser plusieurs manuels belges. Nous abordons alors nos outils théoriques dont la notion de proximités-en-acte. Nous précisons ensuite notre méthodologie d'analyse et illustrons nos résultats par quelques extraits de manuels.

Mots-clefs : droites, équations, espace, manuels, proximités

Abstract – We are interested in the teaching of equations of lines in the three-dimensional Euclidian space in Belgian secondary education. First, we present some specificities for this notion to clarify our research problem. This leads us to analyse several Belgian textbooks. We then present our theoretical tools, including the notion of proximities-in-act. We then specify our methodology and illustrate our results with some excerpt from manuals.

Keywords: lines, equations, space, textbooks, proximities-in-act

I. PROBLÉMATIQUE DE RECHERCHE

Cette communication s'inscrit dans notre travail de thèse et porte sur l'enseignement des notions de « droites » et de « plans » dans l'espace en Belgique. Ces notions sont travaillées pour la première fois dans l'enseignement secondaire et sont reprises dans un cours de première année universitaire pour la section mathématique. Nous avons réalisé un diagnostic de cet enseignement et mis en évidence des difficultés récurrentes (Nihoul, 2016). Nous nous centrons ici sur la difficulté à reconnaître et à décrire les droites de l'espace à partir de leurs équations. L'importance de cette difficulté nous amène à nous intéresser à la façon dont la notion de « droite » est travaillée dans le secondaire. Dans cet article, nous choisissons de nous focaliser sur son introduction.

Notre inscription dans la Théorie de l'Activité (Vandebrouck, 2008; Abboud-Blanchard, Robert, Rogalski, & Vandebrouck, 2017) nous amène à étudier les activités des élèves pour caractériser leurs apprentissages. Les traces de ces activités sont plus facilement observables lors des phases d'exercices, notamment grâce à une analyse *a priori* des tâches qui leur sont proposées. En revanche, l'introduction d'une notion relève des moments de cours où les élèves ne rentrent peu voire pas en activité. Notre objectif est alors d'étudier le discours de l'enseignant lors de ces moments d'exposition des connaissances. Pour ce faire, l'analyse *a priori* des tâches est remplacée par une étude *a priori* du « relief » de la notion. Il s'agit d'une étude croisant une dimension épistémologique (nature des notions), une dimension curriculaire (étude des programmes) et une dimension cognitive (difficultés des élèves). Cette étude du relief d'une notion permet notamment d'apprécier la distance entre ce que les élèves connaissent déjà et les notions que l'on veut introduire. Nous évoquons ici quelques résultats de cette étude du relief de la notion de droite et exposons les outils théoriques et la méthodologie qui vont préparer le terrain à cette étude dans les classes.

Les programmes de l'enseignement secondaire belge préconisent d'étudier la géométrie analytique plane (droite, vecteurs,…) en seconde[2]. En première[3], ces notions sont étendues à

1 * LDAR (EA4434) UMONS – Belgique – celine.nihoul@umons.ac.be

2 Les élèves ont majoritairement entre 15 et 16 ans.

l'espace et les notions de droites et de plans sont caractérisées dans le cadre (au sens de Douady, 1986) de la géométrie synthétique[4] (perspectives, positions relatives,…). C'est en terminale scientifique[5] que les équations de droites et de plans dans l'espace, ainsi que la résolution de systèmes d'équations linéaires sont abordées. Pendant ces trois années, la notion de droite est alors travaillée dans les cadres géométriques synthétique et analytique. Cependant, les programmes laissent à penser qu'un seul cadre à la fois est travaillé par année. Il est donc possible que les changements de cadres pour cette notion soient peu pris en compte dans l'enseignement secondaire. Pourtant, notre étude historique révèle qu'il est important d'associer le côté intuitif de la méthode synthétique à celle analytique. En effet, la méthode analytique a éloigné les mathématiciens de l'époque du sens géométrique du problème en jetant un voile sur leur perception visuelle (Dorier, 1990). Selon nous, il est alors important que ces changements de cadres soient présents et explicités dans l'enseignement.

Dans le cadre analytique, il y a de multiples façons de décrire, de voir et de définir l'objet « droite ». En effet, les équations peuvent être vectorielles, paramétriques ou cartésiennes. Les points de vue (au sens de Rogalski, 1995) sont donc nombreux. Dans sa thèse, Alves-Dias (1998) montre que les changements de points de vue ont un rôle fondamental dans l'apprentissage des notions d'algèbre linéaire élémentaire. Nous faisons l'hypothèse que ce rôle n'est pas minimisé pour les notions de géométrie analytique puisqu'elles peuvent constituer un tremplin important à un enseignement d'algèbre linéaire selon Dorier, Robert, Robinet, et Rogalski (1997). En effet, la géométrie analytique dans l'espace peut donner des « images » à certains concepts vectoriels tels que les ensembles de solutions de systèmes d'équations linéaires (Rogalski, 2000). En outre, le travail sur les équations de droites peut amener à faire un calcul, à réaliser un dessin et à décrire en langue naturelle un ensemble de solutions. Il peut également consister à chercher une équation à partir de diverses informations données dans un énoncé. Plusieurs registres de représentation (au sens de Duval, 1993) peuvent donc être en jeu. Selon Pavlopoulou (1993), les conversions entre les registres ne sont pas travaillées ou explicitées dans l'enseignement. Or, la maîtrise des conversions entre registres aide à la compréhension des concepts et des méthodes à acquérir.

Ainsi, les équations de droites peuvent être travaillées dans le cadre analytique selon de nombreux points de vue et dans de multiples registres. De plus, les connaissances antérieures en géométrie synthétique peuvent aider à établir les liens entre l'objet géométrique et les équations. Ces liens nous semblent importants puisque la notion d'équation, notion para-mathématique au sens de Chevallard (1985), n'a dans l'enseignement secondaire belge que le rôle d'«étiquette» (Schneider, 1988) et leurs interprétations peuvent « révéler des surprises lorsqu'elles sont susceptibles de représenter des objets géométriques différents dans un plan ou dans l'espace » (Schneider & Lebeau, 2010). Pariès et Robert (2009) parlent d'extensions de notion avec accident ou encore de ruptures entre le plan et l'espace. La notion dont il est question ici est donc une extension des droites du plan avec accident, notamment parce que dans le plan une seule équation cartésienne suffit à la représenter alors que dans l'espace on a besoin d'un système d'équations. Nous supposons que la prise en compte de ces spécificités contribue à donner du sens à la notion de droite dans l'espace et développe une certaine flexibilité chez les élèves, celle-ci n'est pas automatique et doit explicitement être un des objectifs de l'enseignement (Artigue, Chartier, & Dorier, 2000). Nous nous intéressons alors à la façon dont les enseignants du lycée prennent en compte son développement. Pour préparer cette étude dans les classes, nous avons mené une analyse de manuels. Notre problématique

---

3 Les élèves ont majoritairement entre 16 et 17 ans.

4 La géométrie synthétique est la géométrie basée sur les axiomes d'Euclide.

5 Les élèves ont majoritairement entre 17 et 18 ans et ont 6 à 8 heures de mathématiques par semaine.

de recherche est donc: « Comment les manuels de l'enseignement secondaire prennent en compte le développement de la flexibilité entre les cadres, les registres et les points de vue pour les équations de droites dans l'espace ? »

II. OUTILS THEORIQUES

Notre question de recherche nous place dans une approche opérationnelle de la conceptualisation. Autrement dit, nous l'associons à une disponibilité des notions, à l'organisation entre les connaissances antérieures et nouvelles, à la flexibilité attendue et la possibilité de résoudre des tâches comportant de nombreuses adaptations (Bridoux, Grenier-Boley, Hache, & Robert, 2016). Les conversions entre les registres, les changements de cadres et de points de vue participent ainsi à la conceptualisation de la notion de droite de l'espace. Outre le fait d'expliciter les cadres, les registres et les points de vue dans les textes du savoir, nous nous intéressons particulièrement aux ajouts qui peuvent être faits et qui permettent de rester aussi « proche » que possible des connaissances que les élèves ont déjà. Nous partageons l'hypothèse, formulée dans (Robert & Vandebrouck, 2014; Bridoux et al., 2016), qu'ils participent à la conceptualisation par les élèves de la connaissance nouvelle visée. Pour les caractériser, Robert et Vandebrouck (2014) utilisent la notion de proximités-en-acte :

> Les proximités-en-acte traduisent une activité de l'enseignant (discursive ou autre) visant à provoquer et/ou exploiter une proximité entre ce qu'il veut introduire et les réflexions ou les activités ou les connaissances des élèves.

Ces proximités peuvent être ou non cognitives mais nous nous centrons uniquement sur les proximités discursives de nature cognitive.

Comme ces auteurs l'expliquent, c'est à partir de l'étude du relief de la notion visée que le chercheur peut traquer *a priori* ces occasions de proximités. Nous complétons alors notre étude du relief par une analyse des occasions de proximités dans plusieurs manuels belges. Celle-ci nous permettra de repérer *a posteriori* dans le discours tenu par l'enseignant des proximités possibles ou inexistantes. Cependant, ce que le chercheur qualifie de proximités-en-acte reste potentiel. En effet :

> Même si l'étude préalable du relief sur la notion nous aide dans notre appréciation de ce qui est supposé connu des élèves et de ce qui est nouveau, voire difficile, il y a cependant toujours une part d'appréciation subjective du chercheur dans l'interprétation de ce que dit l'enseignant. (Bridoux et al., 2016, p.197)

Bridoux et al. (2016) distinguent trois types de proximités discursives dans le discours des enseignants: ascendantes, descendantes ou horizontales. Les proximités ascendantes se placent entre ce que les élèves ont déjà fait et le nouveau. Elles explicitent comment la nouvelle notion a été généralisée à partir de ce que les élèves ont déjà fait sur un cas particulier ou un exercice. Par exemple, l'enseignant propose aux élèves une activité dans laquelle une droite de l'espace est déterminée par deux points et l'objectif est d'écrire une équation telle que $(x, y, z) = (0,1,2) + k(1,2,3)$, où k est un réel. L'enseignant réalise ensuite le même raisonnement pour amener de manière générale le point de vue paramétrique $(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + k(a, b, c)$, où k est un réel et (x_1, y_1, z_1) et (a, b, c) sont respectivement un point et un vecteur directeur de la droite. Dans ce cas, il s'appuie sur un cas particulier traité par les élèves pour généraliser le raisonnement et le point de vue paramétrique.

Les proximités descendantes se placent entre ce qui a été exposé et des exemples ou des exercices à faire ensuite avec ou par les élèves. Elles explicitent comment la connaissance nouvelle peut être utilisée dans un exercice ou une démonstration. Par exemple, après avoir

introduit de manière générale la description de la droite de l'espace d'un point de vue cartésien, l'enseignant demande aux élèves de donner un système d'équations cartésiennes d'une droite dont un point et un vecteur directeur sont donnés. Il y a une proximité descendante possible parce qu'il applique l'énoncé général à un cas particulier en substituant les données aux variables sans refaire le cheminement qui a amené ce point de vue.

Les proximités horizontales n'amènent pas de changement de niveau de généralité, au contraire des deux autres types de proximités. Elles peuvent porter sur le cours en train de se faire, sur la structuration du cours ou sur les méthodes en jeu. Elles peuvent également expliciter une suite de calculs ou le sens d'un théorème. Par exemple, l'enseignant demande aux élèves de résoudre le système composé des équations $x = 3$ et $(x, y, z) = (0,1,2) + k(1,2,3)$, où k est un réel et dit « pour résoudre ce système, vous devez substituer dans la deuxième équation x par 3 et utiliser les opérations sur les vecteurs pour trouver d'abord la valeur du paramètre k et puis celle du point d'intersection ». Il y a une proximité horizontale possible car il explique la méthode à appliquer dans cet exemple, sans pour autant donner un procédé général de résolution des systèmes linéaires.

Dans la suite de cet article, nous précisons notre méthodologie d'analyse des manuels et nous illustrons nos résultats en mettant en évidence les occasions de proximités que nous y avons repérées.

III. METHODOLOGIE

Nous avons analysé tous les manuels belges[6] pour la terminale scientifique car ce sont, selon nous, les plus « complets ». Notre étude se réalise autour de trois manuels: *CQFD* (2013), *Espace Math* (2004) et *Actimath* (2016). Nous y avons, pour le chapitre dont il est question ici, regardé les activités d'introduction éventuelles, la partie « théorique », c'est-à-dire la partie dévolue au texte du savoir et les exercices proposés. Nous n'abordons ici que l'analyse de la partie théorique, correspondant en classe aux moments d'exposition des connaissances par l'enseignant.

Pour apporter des éléments de réponse à notre problématique sur la flexibilité, nous repérons les cadres, les registres et les points de vue en jeu dans cette partie. Nous pointons également les conversions de registres et les changements de points de vue proposés. Nous sommes particulièrement attentive au point de vue cartésien car il constitue une rupture lors du passage du plan à l'espace pour la notion de droite. De plus, les occasions de proximités qui pourraient se dégager à la lecture du manuel sont détectées. Par ce biais, nous obtenons des informations sur les liens entre les connaissances antérieures, ce que les élèves ont déjà fait et le nouveau. Nous pouvons donc inférer des éléments sur la place occupée par la géométrie synthétique au sein de ce chapitre.

IV. ANALYSE DES MANUELS ET RESULTATS

Nous commençons par une présentation générale de chaque manuel pour situer la notion visée au sein du chapitre de géométrie analytique. La progression lors de la présentation des équations de droites dans l'espace est à chaque fois explicitée. Nous nous concentrons ensuite sur le point de vue cartésien pour y repérer des occasions de proximités.

[6] Tous les manuels francophones existants pour ce degré d'enseignement et pour cette filière.

1. Présentation générale des trois manuels

La géométrie dans l'espace dans le manuel *CQFD* commence par l'étude des équations de droites de l'espace puis vient celle des équations de plans, le parallélisme, l'orthogonalité et la notion de distance d'un point à un plan ou à une droite. Pour les manuels *Actimath* et *Espace Math*, l'ordre est similaire si ce n'est que les équations de plans sont vues avant les équations de droites dans l'espace.

La progression suivie pour les droites est identique dans les trois manuels analysés. Elles sont d'abord décrites suivant le point de vue vectoriel. Ensuite, un repère de l'espace est fixé et l'équation vectorielle est traduite en termes de coordonnées. Cette égalité entre deux vecteurs est écrite comme un système d'équations paramétriques. Enfin, le point de vue cartésien est donné en éliminant le paramètre du système précédent. Les changements de points de vue vont du vectoriel vers le paramétrique et du paramétrique vers le cartésien.

2. Le manuel CQFD

La figure 1 montre l'introduction du point de vue cartésien.

En éliminant λ entre les équations du système (2), on obtient des équations cartésiennes de la droite d, définie par un point $A(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et un vecteur directeur $\vec{u}(x_{\vec{u}}\,;\,y_{\vec{u}}\,;\,z_{\vec{u}})$.

1. Si $x_{\vec{u}} \neq 0$, $y_{\vec{u}} \neq 0$ et $z_{\vec{u}} \neq 0$, alors $d \equiv \dfrac{x-x_A}{x_{\vec{u}}} = \dfrac{y-y_A}{y_{\vec{u}}} = \dfrac{z-z_A}{z_{\vec{u}}}$

Si la droite d est définie par les points $A(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$, $B(x_B\,;\,y_B\,;\,z_B)$ et si $(x_B-x_A)\neq 0$, $(y_B-y_A)\neq 0$ et $(z_B-z_A)\neq 0$, alors $AB \equiv \dfrac{x-x_A}{x_B-x_A} = \dfrac{y-y_A}{y_B-y_A} = \dfrac{z-z_A}{z_B-z_A}$.

Figure 1 *– CQFD p. 365*

Nous constatons dans la figure 1 la présence du registre de la langue naturelle accompagné d'expressions algébriques. Les justifications et la méthode à appliquer pour éliminer le paramètre ne sont pas explicitées, c'est donc à la charge de l'élève ou du professeur de faire les détails. De plus, deux expressions algébriques *a priori* différentes sont données en fonction des informations connues (un vecteur directeur ou deux points). Rien n'est dit sur le fait que ces deux expressions sont en fait identiques et que le vecteur directeur donné est désormais exprimé en fonction de son origine et de son extrémité. Un rapprochement avec une connaissance ancienne pourrait être fait et une occasion de proximité horizontale serait ainsi présente. Deux autres cas sont envisagés: l'un où une des composantes du vecteur directeur est nulle, l'autre où deux des composantes sont nulles. Dans les deux cas, un système d'équations cartésiennes est donné mais il n'est pas indiqué qu'il faut repartir du point de vue paramétrique et substituer la.es composante.s nulle.s du vecteur directeur dans le système pour obtenir le résultat final. L'explicitation de cette démarche serait une occasion de proximité horizontale.

3. Le manuel Espace Math

Le point de vue cartésien est exprimé en distinguant trois cas : les composantes du vecteur directeur sont non nulles, une composante est nulle, toutes les composantes sont nulles.

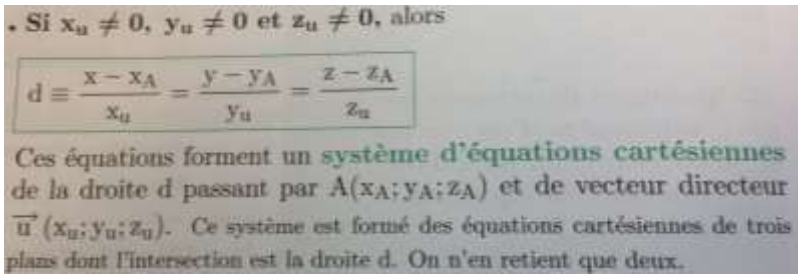


Figure 2 *– Espace Math p. 96*

La figure 2 suit immédiatement l'exposition du point de vue paramétrique. Les cas et le résultat sont donnés sans dire comment les trouver. Le changement de point de vue n'est alors pas expliqué. En classe, il est possible que l'enseignant explique cette étape. Une interprétation géométrique d'une droite comme intersection de plans est donnée. Cependant, il n'y aucun rapprochement repéré avec la forme générale d'une équation cartésienne de plan. Il y a alors une occasion de proximité horizontale. L'expression « On n'en retient que deux » est donnée sans explication supplémentaire. Une occasion de proximité horizontale serait de rappeler les connaissances de l'élève en géométrie synthétique. Le dernier cas est illustré par la figure 3.

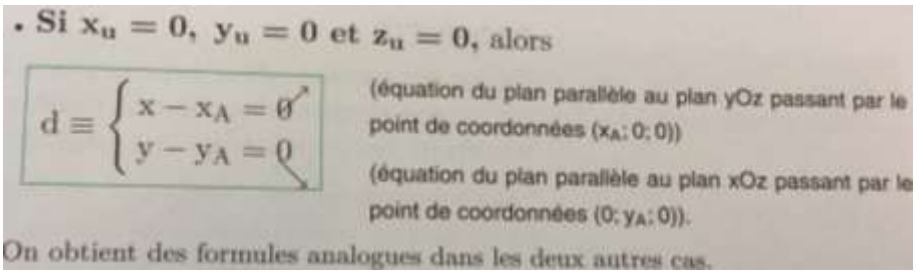


Figure 3 *– Espace Math p. 97*

À la figure 3, nous observons que chaque équation du système est interprétée géométriquement. Même si le système donné représente bien une droite, nous remarquons que le vecteur directeur est égal au vecteur nul. Ainsi, la droite considérée n'a pas de direction. Il est probable que l'enseignant interprète géométriquement ce problème et corrige cette erreur en se donnant une cote non nulle, ce qui amène une occasion de proximité horizontale. Nous pointons également que le registre de la langue naturelle accompagné de formules algébriques est omniprésent. Quelques liens avec le cadre synthétique sont aussi relevés mais non explicités.

4. Le manuel Actimath

Dans ce manuel, seul le cas où toutes les composantes du vecteur directeur sont non nulles est traité. Les autres cas sont vus plus loin dans la partie « droites particulières ». Ce manuel est le seul à expliciter la méthodologie pour passer du point de vue paramétrique vers le cartésien. Vient après une remarque illustrée à la figure 4.

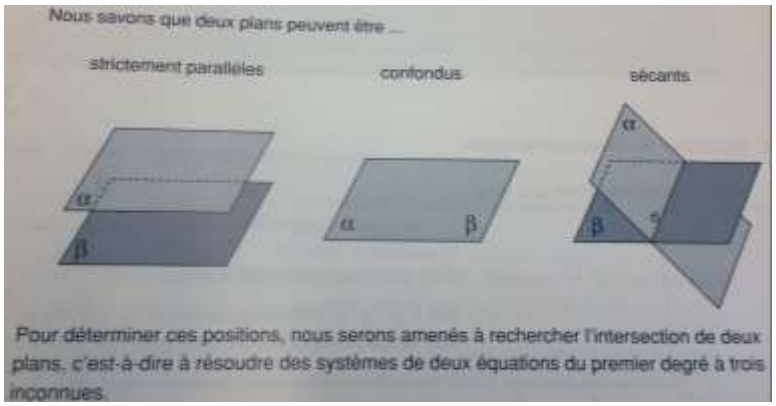


Figure 4 *– Actimath p. 49*

La figure 4 rappelle à l'élève une connaissance antérieure de géométrie synthétique. Un commentaire est donné pour interpréter la résolution d'un système comme la détermination des positions relatives d'objets géométriques. Selon nous, c'est une occasion d'établir des liens entre les cadres synthétique et analytique. Les registres de la langue naturelle et du dessin sont ici en jeu. Trois systèmes sont ensuite résolus: un système impossible, un système doublement indéterminé et un système déterminé. Les calculs lors de la résolution des différents systèmes ne sont pas explicités, l'ensemble des solutions n'est jamais indiqué, les explications liant les équations et le type de système ne sont pas données; il y a alors plusieurs occasions de proximités horizontales. Cependant, pour le système déterminé, il est indiqué:

> Les deux plans ne sont ni strictement parallèles ni confondus. Ils sont donc sécants. Ce système d'équations constitue donc des équations de la droite d'intersection des deux plans. (*Actimath*, p. 50)

Une interprétation géométrique de la position relative des deux plans, ainsi que celle de l'ensemble des solutions est donnée. Le registre algébrique est employé lors de la résolution des systèmes et les solutions sont exprimées en langue naturelle. Nous constatons néanmoins que cette conversion n'est pas expliquée. Une occasion de proximité horizontale est donc repérée. Ce troisième système sert de tremplin pour décrire une droite comme l'intersection de deux plans sécants. Il y a alors une occasion de proximité ascendante entre le cas particulier de l'exemple et le cas général avec deux plans sécants quelconques.

5. Bilan de l'analyse des trois manuels

L'analyse de manuels effectuée montre que le cadre analytique est travaillé avec très peu de références et de liens avec le synthétique, sauf dans le manuel *Actimath*. Le registre de la langue naturelle accompagné d'expressions algébriques est le plus présent. Ainsi, très peu de conversions entre registres sont repérées et quand il y en a une, elle n'est globalement pas expliquée. La partie théorique étudiée montre que les points de vue sont tous introduits dans le même ordre et que seuls les changements du vectoriel vers le paramétrique et du paramétrique vers le cartésien sont explicités. Nous avons pointé beaucoup d'occasions de proximités horizontales pour combler les manques des manuels notamment au niveau des justifications, reformulations, explications des calculs et des méthodes. Il y a quelques occasions de proximités descendantes entre la notion générale et un exemple ou un exercice. Enfin, il n'y a quasiment pas d'occasions de proximités ascendantes repérées dans ces trois manuels. Nous faisons l'hypothèse que cela s'explique par le fait que tous les points de vue sont immédiatement amenés de façon générale mais un travail pourrait être fait sur un exemple précis pour être ensuite généralisé.

V. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Nous nous intéressons à l'enseignement des droites dans l'espace en Belgique. L'étude du relief nous permet de préciser certaines spécificités de ces notions dont notamment la possibilité de les travailler dans les cadres synthétique et analytique, suivant de nombreux registres et points de vue. Nous étudions alors comment la flexibilité attendue pour cette notion est développée dans les manuels. De plus, l'approche opérationnelle de la conceptualisation nous amène à considérer tous les rapprochements entre ce que les élèves connaissent déjà et le nouveau. En tant que chercheur, nous traquons donc *a priori* dans les manuels ces occasions de proximités (au sens de Robert & Vandebrouck, 2014) avant de nous rendre dans les classes.

Notre analyse de manuels montre qu'il y a peu de rapprochement avec ce que les élèves connaissent déjà sur la notion de droite. Nous en déduisons qu'ils ne mettent pas en évidence les éventuelles ruptures entre le plan et l'espace. De plus, les calculs, les reformulations et les explications de méthodes sont peu ou pas prises en compte surtout lors des changements de points de vue ou des conversions de registres. Plusieurs occasions de proximités horizontales sont ainsi repérées. Peu d'exemples ou de contre-exemples sont présents. Pourtant, nous pointons des occasions de proximités descendantes. Ce panorama très général nous amène à supposer que la flexibilité attendue pour cette notion n'est que peu développée par les manuels. Au vu du nombre de manuels disponibles, nous prévoyons d'étudier le document rédigé par les enseignants pour leurs élèves afin d'enrichir les occasions de proximités relevées dans les manuels. L'objectif final de notre recherche est de réaliser une étude du discours des enseignants lors des moments d'exposition des connaissances pour la notion de « droite ». Nous voulons alors déterminer les proximités possibles, inexistantes ou imprévues grâce à une analyse *a posteriori* de leurs discours et savoir si la flexibilité est développée par les enseignants au sein de ce chapitre.

REFERENCES

Abboud-Blanchard M., Robert A., Rogalski J., Vandebrouck F. (2017) Pour une théorie de l'activité en didactique des mathématiques, Un résumé des fondements partagés, des développements récents et des perspectives, *Cahier du laboratoire de didactique André Revuz*, 17, Université Paris Diderot.

Alves-Dias M. (1998) *Les problèmes d'articulation entre points de vue «cartésien» et «paramétrique» dans l'enseignement de l'algèbre linéaire.* Thèse de doctorat. Paris VII.

Artigue M., Chartier G., Dorier J.-L. (2000) Presentation of other research works. Mathematics Education Library, On the teaching of Linear Algebra (pp. 247-264).

Bridoux S., Grenier-Boley N., Hache C., Robert A. (2016) Les moments d'exposition des connaissances en mathématiques; analyses et exemples. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 21, 187-234.

Chevallard Y. (1985) La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné. *Grenoble: La Pensée Sauvage.*

Dorier J.-L. (1990) Analyse historique de l'émergence des concepts élémentaires d'algèbre linéaire, *Cahier de didactique des mathématiques*, 7, Université Paris Diderot.

Dorier J.-L., Robert A., Robinet J., Rogalski M. (1997) L'algèbre linéaire: l'obstacle du formalisme à travers diverses recherches de 1987 à 1995. In Dorier J.-L. (Ed.), *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question* (pp. 105-147). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Douady R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil/objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7 (2), 5-31.

Duval R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65.

Nihoul C. (2016) Quelques difficultés d'étudiants universitaires à reconnaître les objets «droites» et «plans» dans l'espace: une étude de cas. In Nardi, E., Winslow, C., Hausberger, T. (Eds). Proceedings of INDRUM 2016, 464-473.

Pariès M., Robert A. (2009) Changement de cadres en géométrie dans l'espace. *Repères-IREM*, 75, 35-45.

Pavlopoulou K. (1993) Un problème décisif pour l'apprentissage de l'algèbre linéaire: la coordination des registres de représentation. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 67-93.

Robert A., Vandebrouck F. (2014) Proximités-en-acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves: analyses de séances sur des tâches complexes. *Cahier du laboratoire de didactique André Revuz*, 10, Université Paris Diderot.

Rogalski M. (1995) Notes du séminaire à Sao Paulo, Brésil.

Rogalski M. (2000) The teaching experimented in Lille. Mathematics Education Library. On the teaching of Linear Algebra (pp. 133-150).

Schneider M. (1988) *Des objets mentaux 'aire' et 'volume' au calcul des primitives*. Thèse doctorale, Louvain-la-neuve: Université catholique de Louvain.

Schneider M., Lebeau C. (2010) Equations incomplètes de plans et obstacles à la nécessité épistémique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 30(1), 11-45.

Vandebrouck F. (2008) *La classe de mathématiques: activités des élèves et pratiques des enseignants*. Toulouse: Octarès.

À LA FRONTIERE DES INSTITUTIONS :

QUELLES MATHEMATIQUES PAR ET POUR LES INGENIEURS ?

QUÉRÉ* Pierre-Vincent

Résumé – Nous nous intéressons à la formation en mathématiques des ingénieurs en France ainsi qu'à l'utilisation des mathématiques sur leur lieu de travail. Nous mobilisons la théorie anthropologique du didactique pour analyser des entretiens menés auprès d'ingénieurs. Nous relevons les praxéologies mathématiques dans les deux institutions (formation et lieu de travail) et montrons que même si des liens entre elles semblent manquer, les bases et le raisonnement mathématiques enseignés sont un réel besoin.

Mots-clefs : mathématiques dans la formation des ingénieurs, mathématiques sur le lieu de travail, théorie anthropologique du didactique, praxéologies mathématiques

Abstract – This paper deals with the mathematic training of French engineers and their effective use of mathematics in the workplace. We use the anthropological theory of didactics to analyze interviews with engineers. We identify mathematical praxeologies in both institutions (initial training and workplace) and show that even if it seems to exist a lack of connections between them, both mathematical basics and reasoning taught are a real need.

Keywords: mathematics in engineers' training, mathematics in the workplace, anthropological theory of the didactic, mathematical praxeologies

Cet article concerne la formation en mathématiques des ingénieurs en France ainsi que l'utilisation effective des mathématiques sur leur lieu de travail. Après une présentation de la thématique et du contexte de la recherche internationale à ce sujet, nous justifions l'utilisation de notre cadre théorique qui nous permet de poser nos questions de recherche. L'exposé du guide des entretiens menés auprès d'ingénieurs puis de notre méthodologie nous conduit alors à l'analyse de ceux-ci. Notre travail consiste à présenter l'utilisation des mathématiques dans les institutions de formation et les institutions de travail des ingénieurs avec lesquels nous nous sommes entretenus avant de conclure en mettant en perspective les usages des mathématiques rencontrés.

I. PRESENTATION DE LA THEMATIQUE

1. La formation des ingénieurs en France

Historiquement, c'est dans le domaine militaire que les premières formations d'ingénierie ont vu le jour au XVIème siècle en France. Aujourd'hui, les spécialités sont diverses et le diplôme d'ingénieur est un diplôme en 5 ans après le baccalauréat, délivré par l'une des 210 écoles relevant de la Commission du Titre de l'Ingénieur (CTI) créée en 1934. D'après l'enquête IESF (2015) qui sert ici de référence, environ 764.000 ingénieurs de moins de 65 ans étaient en activité dans le monde en 2015 (notre enquête auprès des ingénieurs datant de 2016, c'est l'année 2015 qui nous sert ici de référence).

Après le bac et avant leur spécialisation dans le Cycle Ingénieur, les étudiants suivent 2 ans de Cycle Préparatoire. D'après la même enquête, les Classes Préparatoires aux Grandes Écoles (CPGE, dans les lycées) en représentaient 50% en 2015, les Cycles Préparatoires Intégrés 25% (CPI, localisés dans les écoles d'ingénieurs elles-mêmes) et les autres – IUT (Instituts Universitaires et Technologiques), BTS (Brevets de Techniciens supérieurs), Université – 25%.

* CREAD, UBL – France – pierre-vincent.quere@ac-rennes.fr

Il existe d'autres formations menant à des métiers d'ingénierie, mais nous nous intéressons ici spécifiquement à la préparation du diplôme d'ingénieur.

2. Les travaux engagés sur ce thème

Le thème de la formation en mathématiques des ingénieurs et l'utilisation des mathématiques par ceux-ci donne lieu depuis la fin des années 1990 à de nombreuses recherches internationales utilisant des cadres théoriques et des angles de vues variés : théorie de l'activité, *boundary crossing and objects*, influence de la technologie sur la visibilité des mathématiques au travail, etc. Bakker (2014) en fait un tour d'horizon et nous citons ici rapidement quelques-unes des références qui servent de substrat à nos travaux.

Cherchant à comprendre pourquoi les employeurs anglais constatent un déclin des capacités mathématiques des ingénieurs, Ridgway (2002) a enquêté sur les besoins des ingénieurs sur leur lieu de travail ("*in the workplace*"). Il a conclu que le haut niveau de compétences mathématiques exigées pendant la formation des ingénieurs demeure nécessaire sur leur lieu de travail, contrairement à l'acquisition des techniques mathématiques. Kent et Noss (2002), s'intéressent aux relations établies entre "faire" et "comprendre" les mathématiques pour un ingénieur anglais. Ils concluent que "l'équilibre entre les compétences analytiques explicites et l'appréciation "qualitative" des modèles mathématiques s'inverse dès que la technologie mathématique devient de plus en plus omniprésente" (p. 5). Hochmuth, Biehler, et Schreiber (2014), relèvent la difficulté que représente pour les étudiants le passage entre les mathématiques enseignées en amont et pendant un cours d'ingénierie en analyse de signaux en Allemagne : dans un premier temps, les contenus mathématiques sont présentés de manière plus ou moins théorique et générale, alors que dans la seconde phase d'enseignement (dans les cours d'ingénierie), les concepts sont souvent nouveaux et les mathématiques sont plus appliquées. Enfin, van der Wal, Bakker et Drijvers (2017) mettent au jour sept compétences techno-mathématiques essentielles pour les futurs ingénieurs aux Pays-Bas : gestion de données, utilisation de logiciels, capacités de communication, sens de l'erreur, sens du nombre, compétences de techniques créatives et enfin graphiques.

En France, ce domaine est relativement naissant et nous nous plaçons dans la lignée des travaux de Romo-Vázquez (2009). Selon ses observations, bien que les ingénieurs aient naturellement des besoins de mathématiques avancées, ils ont aussi des besoins de type plus élémentaires (relevant alors de l'enseignement secondaire). Elle met également en évidence la grande complexité à projeter le monde de la pratique dans l'institution de formation. Ses recherches sont basées sur le même cadre théorique que celui de notre étude. Nous présentons celui-ci dans la section suivante.

3. Le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD)

Les ingénieurs français reçoivent une formation scientifique de haut niveau et les besoins mathématiques semblent s'accroître dans de nombreux secteurs d'activité (Martin-Deschamps & Le Tallec, 2002). C'est pourquoi le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique (Chevallard, 2017) nous semble adapté pour nos observations, grâce notamment au modèle des praxéologies qui permet de modéliser toute activité humaine, ici l'activité mathématique, au regard de l'institution dans laquelle elle se déroule.

Une praxéologie est un ensemble formé de deux blocs :

- le bloc practico-technique $\prod$ formé de deux éléments : le type de tâche *T*, et la technique associée τ. Ce bloc aussi appelé "praxis" peut-être assimilé à un savoir-faire.

- bloc technologico-théorique Λ formé également de deux éléments : la technologie θ et la théorie Θ. Il faut entendre technologie au sens de "discours rationnel justifiant l'utilisation d'une technique" et théorie au sens de "discours rationnel justifiant l'utilisation d'une technologie". Ce bloc aussi appelé le "logos" peut-être assimilé à un discours raisonné.

Nous appellerons "praxéologie mathématique" toute praxéologie dans laquelle les mathématiques interviennent dans au moins l'une des quatre composantes.

4. Questions de recherche

Les questions de recherche que nous formulons ici s'appuient sur notre cadre théorique : (1) Quelles sont les praxéologies mathématiques rencontrées par les ingénieurs sur leur lieu de travail ? (2) Quelles praxéologies ces ingénieurs ont-ils rencontrées dans leur formation initiale ? (3) Les praxéologies sont-elles différentes dans ces deux institutions, et si oui, en quoi diffèrent-elles ?

5. Le guide des entretiens

L'enquête sur laquelle nous basons nos analyses s'est déroulée en deux volets : un questionnaire suivi d'entretiens. Tout d'abord, nous avons diffusé un questionnaire en ligne et anonyme sur les listes d'anciens élèves de plusieurs écoles d'ingénieurs, dont nous ne détaillerons pas les questions ni les réponses ici. Celui-ci a apporté une vue globale sur la formation et les besoins en mathématique des ingénieurs, mais il n'a pas permis d'accéder aux praxéologies. C'est pourquoi nous avons réalisé des entretiens avec six volontaires ayant répondu au questionnaire.

Pour ces entretiens semi-ouverts, nous avons mis en place un guide en quatre parties :

- La partie 1 permet de présenter le métier actuel des ingénieurs interrogés et de capter leur regard sur la formation de mathématique reçue en Cycle Préparatoire et en Cycle Ingénieur vis-à-vis de l'expérience professionnelle qu'ils ont vécue.
- Dans la partie 2, nous leur avons demandé de proposer un hypothétique enseignement en formation initiale pour préparer au mieux à leur métier actuel : contenus proposés, méthodes, etc.
- La partie 3 du guide concerne le point de vue des ingénieurs rencontrés sur l'autonomie à l'universitçe et leur retour d'expérience à ce sujet. Nous leur avons demandé l'importance que revêt l'autonomie à leurs yeux dans l'enseignement supérieur. Nous leur avons également demandé, au regard de leur propre expérience, s'ils avaient des recommandations ou des propositions à faire, si nécessaire, afin de favoriser son développement dans la formation initiale des étudiants.
- La partie 4 permet de préciser les dispositifs utilisés ainsi que les ressources et l'emploi de ces ressources dans une éventuelle formation continue suivie ou en auto-formation en mathématiques.

Dans cet article, nous utiliserons les données des parties 1, 2 et 4 uniquement. La partie 3 est en effet liée à la problématique de l'autonomie sur laquelle nous avons souhaité échanger à l'occasion de ces entretiens. Nous n'établirons pas ici de lien entre autonomie et praxéologies.

Les résultats que nous présentons dans la suite complètent ceux présentés dans Quéré (2017). Pour choisir nos participants aux entretiens, nous nous sommes intéressés à différentes variables repérées dans le questionnaire : âge, Cycle Préparatoire suivi, spécialité

du diplôme obtenu, métier au moment de l'entretien, régularité du besoin mathématique (échelle de 1 à 5), qualité de la formation mathématique en cycle ingénieur (échelle de 1 à 5). Nous résumons ces caractéristiques dans le tableau 1.

Pseudonyme	**Jean**	**Pierre**	**Georges**	**Mathieu**	**William**	**Alice**
Âge	25 ans	27 ans	35 ans	29 ans	35 ans	30 ans
Cycle Préparatoire	CPGE	IUT	CPGE	Université	CPGE	CPGE
Diplôme	Informatique	Informatique	Matériaux	Chimie	Electricité	Matériaux
Métier actuel	Ingénieur de Recherche	Ingénieur en Sécurité Informatique	Consultant	Ingénieur Contrôle Procédés	Entrepreneur	Ingénieur Développe-ment
Besoin régulier de mathématique	5/5	4/5	2/5	5/5	4/5	4/5
Qualité formation en mathématique	3/5	4/5	3/5	N/D	3/5	3/5

Tableau 1 *- Caractéristiques des ingénieurs ayant participé aux entretiens*

Remarquons par exemple dans ce tableau le cas de Mathieu qui a suivi un Cycle Préparatoire à l'Université, qui n'a pas reçu de formation de mathématiques en Cycle Ingénieur, mais qui déclare avoir un besoin très régulier de mathématiques dans son métier.

II. QUELLES MATHEMATIQUES PAR ET POUR LES INGENIEURS ? ANALYSE DES ENTRETIENS

Dans les paragraphes suivants, nous analysons les parties 1 ("Métier et regard sur la formation") et 4 ("Formation continue et auto-formation") en termes de praxéologies rencontrées sur le lieu de travail (selon les ingénieurs interrogés). Nous regroupons nos analyses en fonction de thèmes qui sont ressortis comme étant essentiels.

1. Méthodologie de l'analyse

Nous proposons ici des tableaux praxéologiques que nous construisons à partir d'extraits des entretiens ou d'échanges écrits postérieurs aux entretiens.

La première entrée est le type de tâche *T* et c'est aussi le point de départ de la description faite par les ingénieurs de leur utilisation des mathématiques. Il nous a ensuite fallu repérer les autres composantes des praxéologies. Selon les formulations choisies dans les entretiens, il est parfois délicat de distinguer entre un discours décrivant une technique τ et un discours justifiant celle-ci, c'est-à-dire une technologie θ. Lorsque ce cas se présente nous expliquons le choix que nous avons effectué. De même, lorsqu'une case est vide, cela ne signifie pas que la composante en question n'est pas effectivement présente, mais cela signifie qu'elle n'a simplement pas été mentionnée par l'ingénieur concerné.

Notons que nous n'avons pas relevé d'usage de la théorie Θ pour justifier les technologies θ parfois présentées. La justification que nous pouvons émettre sous forme d'hypothèse est que l'usage des mathématiques est, pour les ingénieurs rencontrés, purement pratique et que le niveau de discours technologique suffit.

2. L'importance des bases mathématiques

Lors de nos entretiens d'une durée d'environ une heure chacun, le mot "bases" a été utilisé par les six ingénieurs sans exception et ce, environ 40 fois au total entre tous, sous des formes diverses : "bases d'algèbre linéaire", "bases d'analyse" ou "bases de probabilités-statistiques". Dans les déclarations des ingénieurs, nous avons observé que, lorsque les techniques ne sont pas précisées, les références à ces "bases" se situaient au niveau des technologies : un discours expliquant les techniques qu'ils utilisent (sans dire lesquelles). Sans être nommées "bases", elles peuvent également apparaître mais elles sont alors présentées par les ingénieurs interviewés comme des outils à leur disposition (par exemple, le calcul d'intégrales) ; nous résumons notre analyse dans le tableau 2 ci-dessous (entre parenthèse, l'initiale de leur prénom). Comme dans le reste de nos tableaux praxéologiques à suivre, nous n'indiquons que les cas les plus significatifs. Ici, il s'agit des cas dans lesquels l'utilisation de "bases" a été illustrée clairement et non pas simplement énoncé.

Type de tâche *T*	**Technique τ**	**Technologie θ**
Construire des modèles de simulation des procédés (dynamique des fluides, thermodynamique) ou des processus chimiques (M)	méthode des trapèzes, méthodes itératives (suites)	Calcul d'intégrales
Contrôler la qualité de la production (M)		Outils statistiques de base
Calculer le volume de différentes capacités ou équipements (M)		Géométrie de base
Modéliser le vieillissement de matériaux (A)	Résoudre des équations	Calcul d'intégrales, fonctions de plusieurs variables
Etudier le comportement vibratoire des rétroviseurs (A)		Bases de trigonométrie, d'intégration et d'analyse de Fourier
Elaborer un devis, chiffrer un projet (P)		Arithmétique basique

***Tableau 2** - Utilisation de bases mathématiques dans les praxéologies professionnelles*

Notons que les institutions dans lesquelles ces praxéologies sont majoritairement enseignées sont le Cycle Préparatoire, voire le Lycée (pour des formes simples de calcul intégral, par exemple).

3. Le statut de la logique, du raisonnement et de la rigueur

La deuxième observation que nous faisons dans l'analyse de nos entretiens est la position centrale qu'occupent la logique, le raisonnement et la rigueur mathématique. Nous regroupons dans le tableau 3 ci-dessous les praxéologies auxquelles nos ingénieurs se réfèrent à ce propos. Pour essayer d'expliquer ce que nous avons fait, dans la première ligne, nous partons d'une citation de William (lignes 1 et 2 du tableau 3), dont le contenu a été également énoncé par Alice en des termes très similaires (ligne 3 du tableau 3).

> C'est cette manière de raisonner qui m'a servi après. Plus que les résultats eux-mêmes, que les concepts eux-mêmes. C'est poser les hypothèses, réfléchir à un angle d'attaque d'un problème, c'est aboutir à un résultat, valider les résultats par d'autres angles pour recouper l'information. (...) C'est la démarche et la rigueur que j'ai pu apprendre en prépa qui m'ont toujours servi et qui me servent toujours aujourd'hui.

Type de tâche *T*	**Technique τ**	**Technologie θ**
Aborder un problème (W)	Accorder de l'importance aux hypothèses	C'est la manière de raisonner qui sert pour résoudre un problème
Résoudre un problème du début à la fin (W)	Réfléchir à un angle d'attaque, aboutir à un résultat et le valider	Il faut adopter une démarche rigoureuse pour résoudre un problème
Montrer qu'une propriété est vraie (A)	Utiliser la contraposée	

***Tableau 3** - Utilisation logique, du raisonnement et de la rigueur dans les praxéologies professionnelles*

L'analyse que nous pouvons effectuer au regard de ces descriptions est que logique et raisonnement rigoureux sont du côté de la technologie, en tant que discours justifiant l'utilisation de ces "techniques" de raisonnement. Ce discours peut être accompagné de connaissances de base pour pouvoir justifier l'utilisation de ladite technique.

D'après tous nos entretiens, il semble que les ingénieurs français rencontrent essentiellement ces praxéologies dans leur formation en Cycle Préparatoire.

4. Le cas de l'approfondissement de la preuve

La rigueur qu'apportent les mathématiques dans la résolution de problèmes au quotidien et décrite par certains (comme William, qui souligne l'importance des hypothèses) est apprise principalement en Cycle Préparatoire dans les démonstrations.

Pendant son entretien, Jean, ingénieur de recherche en développement de logiciels audio nous parle lui de son utilisation des preuves de théorèmes sous une forme différente :

> Je dois à la fois appliquer les théorèmes, mais aussi essayer de trouver des façons plus intelligentes de les utiliser, là je suis obligé de m'intéresser à la démonstration, et c'est ce qui fera la différence entre nous et un concurrent parce que les résultats tout le monde les a, mais par contre si jamais nous on arrive à les formuler d'une façon à ce que, par exemple (je vous donne un exemple sur un effet audio) le musicien ait un retour en moins de 6 millisecondes, alors que tous les autres concurrents ont une latence de 20 ms, nous ce qui fait qu'on peut avoir moins c'est parce qu'on est allé chercher dans les maths, voir comment on pouvait découper ça, et c'est ce qui fait la différence fondamentalement. Après l'effet sonnera exactement pareil. Finalement moi ce qui m'est le plus utile c'est toute la méthodologie acquise de démonstration lors de mes classes préparatoires.

Pour continuer notre analyse sous forme de tableaux praxéologiques, nous proposons de résumer cette citation dans le tableau 4 :

Type de tâche *T*	**Technique τ**	**Technologie θ**
Réduire la latence (J)	Trouver dans la preuve des théorèmes associés à la latence les paramètres qui améliorent les caractéristiques du logiciel développé	

***Tableau 4** - L'utilisation d'une preuve mathématique comme support technique*

Ici, même si la technologie n'est pas précisée, nous pouvons conjecturer qu'il s'agit de la "compréhension précise des fondements de la théorie mathématique" correspondante.

5. La place des statistiques

Les données que nous avons obtenues à propos des statistiques corroborent les résultats du questionnaire (Quéré, 2017) montrant que c'est le contenu de la formation en Cycle Ingénieur qui est le plus utile dans le milieu du travail. Nous détaillons l'analyse des données prélevées lors des entretiens dans le tableau 5 :

Type de tâche *T*	**Technique τ**	**Technologie θ**
Modéliser (comportement vibratoire, vieillissement de matériaux) (A) Prédire le comportement (A)	Régression Plans d'expérience Analyses de cluster	
Modélisation du risque de crédit des entreprises (G)	Régressions (linéaire, logistique) Statistiques descriptives	Statistiques (de base)
Rappeler aux clients ce que représente un écart-type ou la différence entre moyenne et médiane (M)		Statistiques (de base)

Tableau 5 *- Analyse des praxéologies professionnelles en statistiques*

Ici, lorsque la technologie θ n'est pas précisée, nous pouvons émettre l'hypothèse qu'elle est réellement absente car trop spécialisée. En effet, du fait que certaines techniques soient assez pointues, il n'y a pas d'enseignement auxquels les ingénieurs en poste peuvent se référer dans l'institution classique que représente le Cycle Ingénieur. C'est à cette occasion qu'entre en jeu par exemple l'auto-formation (comme Alice pour les différents types de régressions), ou la formation entre pairs (collègues ou via des forums).

Par ailleurs, nous retrouvons ici les statistiques "de base" qui sont apprises en Cycle Ingénieur et qui présentent pour nos ingénieurs un vrai atout de la formation puisqu'il n'y a pas d'enseignement de Statistique en Cycle Préparatoire.

6. Contenus et apprentissages particuliers

Certains métiers ont une forte composante mathématique, comme par exemple celui de Jean. Dans ce cas, il existe un certain nombre de techniques non enseignées par les institutions de formation initiale et qui sont apprises par des moyens d'auto-formation ou de formation continue (il cite l'utilisation des brochures des fabricants de processeurs, mais n'évoque pas les technologies éventuellement présentes dans ces brochures). Il arrive également que le Cycle Ingénieur apporte la technologie nécessaire dans des cas précis (par exemple, défis de décryptage). Dans le tableau 6, nous précisons quelques praxéologies mentionnées :

Type de tâche T	**Technique τ**	**Technologie θ**
Design d'un filtre audio (J)	Factorisations matricielles particulières (QR, Schur)	
Analyser les données entrées par l'utilisateur / Prédire des actions de l'utilisateur / Optimiser (J & A)	Régressions de tous types (polynomiales, linéaire, auto-régression, ...)	
Casser un code (P)		Résultats de cryptographie

Tableau 6 *- Analyse praxéologique pour des contenus et apprentissages particuliers*

III. CONCLUSION – DISCUSSION

Nous allons tout d'abord revenir sur nos questions de recherche et y apporter des éléments de réponse basés sur les analyses présentées dans cette étude.

(1) À l'instar des besoins mathématiques "élémentaires" ou "avancés" relevés par Romo-Vàzquez (2009), nous classons les praxéologies mathématiques rencontrées sur leur lieu de travail par les ingénieurs de notre enquête selon deux types :

- spécifiques pour lesquelles les types de tâches et les techniques mathématiques sont déclinées en lien direct avec le métier (par exemple, réduire la latence d'un logiciel audio en analysant la preuve de théorèmes mathématiques)
- transversales pour lesquelles les technologies sont faites de "bases" ainsi que de raisonnements, rigueur et logique. Si c'est le cas cependant, il peut s'agir de types de tâches précis (par exemple, calculer des volumes, contrôler la qualité de la production) ou plus générales (par exemple, communication).

(2) Les praxéologies mathématiques rencontrées dans leur formation initiale par les ingénieurs avec lesquels nous nous sommes entretenu diffèrent selon les institutions d'enseignement : les bases mathématiques sont majoritairement apprises en Cycle Préparatoire, voire au Lycée (par exemple, les intégrales). L'arrière plan de logique et de rigueur dans le raisonnement (y compris dans l'approfondissement d'une preuve mathématique) est aussi une praxéologie provenant en grande partie du Cycle Préparatoire (et plus précisément des CPGE). Le Cycle Ingénieur semble fournir les praxéologies essentielles en statistiques ainsi que les praxéologies à usage plus spécifique. Si la spécificité est trop importante, il y a alors recours à l'auto-formation ou à la formation continue.

(3) Nous constatons que les praxéologies rencontrées sont différentes dans les deux institutions que sont la formation et le milieu du travail et que certains apprentissages sont soulignés comme manquants dans la formation en Cycle Ingénieur. De plus, le manque de liens entre les deux institutions ainsi que le besoin de pratique et de concret dans la formation reviennent souvent. Mais relevons pour finir ce qu'Alice nous a dit lorsqu'on lui a demandé de proposer un cours : pointant d'abord du doigt la partie de probabilités "avec des boules dans des sacs", selon elle complètement inutile et déconnectée de la réalité, elle se ravise en disant qu'elle ne peut pas commencer autrement, car elle trouve que c'est quand-même indispensable pour comprendre la suite et les statistiques plus élaborées ! Finalement, les ingénieurs rencontrés reconnaissent avoir grand besoin de la rigueur mathématique et de supports plus théoriques à leur utilisation quotidienne des mathématiques.

Pour la suite de notre travail, il resterait à voir comment sont enseignées les mathématiques dans les cours dédiés (pas les parties de mathématiques présentes dans un cours de physique par exemple) en se tournant vers les enseignants (experts ou non) dans des écoles d'ingénieurs. Puis prévoir de rapprocher les besoins concrets et la formation à l'occasion d'un Parcours d'Étude et de Recherche (Chevallard, 2017).

REFERENCES

Bakker, A. (2014). Characterizing and developing vocational mathematical knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, *86*(2), 151–156.

Chevallard, Y. (2017). La TAD et son devenir : rappels, reprises, avancées. In G. Cirade, M. Artaud, M. Bosch, J.-P. Bourgade, Y. Chevallard, C. Ladage, et T.A. Sierra (Eds). *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école*

et dans la société. Actes du 4e congrès international sur la TAD (pp. 27-65). Toulouse, France.

Hochmuth, R., Biehler, R., et Schreiber, S. (2014). Considering Mathematical Practices in Engineering Contexts. In T. Fukawa-Connolly, G. Karakok, K. Keene et M. Zandieh (Eds.), *Proceedings of the 17th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 693–698). Denver, Colorado.

Ingénieurs Et Scientifiques de France (2015). *26ème enquête nationale sur les ingénieurs*. Paris, France.

Kent, P., et Noss, R. (2002). The mathematical components of engineering expertise: the relationship between doing and understanding mathematics. *Engineering Education 2002: Professional Engineering Scenarios, 2*(2002/056), 39/1-39/7.

Martin-Deschamps, M., et Le Tallec, P. (2002). L'explosion des mathématiques. *SMF-SMAI, Paris*.

Quéré, P.V. (2017). French engineers' training and their mathematical needs in the workplace: interlinking tools and reasoning. In T. Dooley et G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Mathematical Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2233-2240). Dublin, Ireland: DCU Institute of Education and ERME.

Ridgway, J. (2002). The mathematical needs of engineering apprentices. In A. Bessot et J. Ridgway (Eds.), *Education for Mathematics in the Workplace* (pp. 189–197). Springer Netherlands.

Romo-Vázquez, A. (2009). *La formation mathématique des futurs ingénieurs* (thèse de doctorat, University de Paris 7), Paris, France.

van der Wal, N. J., Bakker, A., et Drijvers, P. (2017). Which Techno-mathematical Literacies Are Essential for Future Engineers?. *International Journal of Science and Mathematics Education, 15(1),* 87–104.

LES DIFFICULTES LIEES A L'APPRENTISSAGE DE L'INTEGRALE DEFINIE A L'ENTREE EN CLASSE PREPARATOIRE

AKROUTI* Inen

Résumé – Nous présentons l'étude d'un questionnaire proposé à un groupe d'étudiants en classe préparatoire avant qu'ils n'abordent le cours d'intégration. A travers ce questionnaire, nous estimons explorer le niveau de connaissances supposées acquises chez les étudiants en fin du lycée, pour la notion d'intégrale, et essayer de repérer les difficultés qui pourraient exister.

Mots-clefs : Intégrale définie, aire algébrique, représentation sémiotique, dualité processus/objet.

Abstract – In this paper, we present the study of a questionnaire proposed to a group of students in the preparatory classes before they take the course on integral calculus. Through this work, we try to explore the level of knowledge supposedly acquired by students at the end of secondary school about the definite integral concept. We try to identify the difficulties that may exist.

Keywords: Definite integral, algebraic area, semiotic representation, process/object duality.

I. INTRODUCTION

Le concept d'intégrale définie, comme la plupart des concepts de l'analyse réelle, est un concept multiforme : il s'interprète en termes d'aire, de primitive, de somme ou plus précisément de limite de sommes. Dans de nombreux pays, le curriculum le présente comme un outil de calcul d'aire et de volume (Yerushalmy et Swidan, 2011). En Tunisie, il est introduit à partir des primitives des fonctions continues. Cette définition fait le lien d'une part entre primitive et intégrale et d'autre part entre intégrale et aire : pour une fonction continue et positive f sur un intervalle $[a, b]$ et F une primitive de f, l'aire sous la courbe est le réel $F(b) - F(a)$, appelé intégrale de f de a à b et noté $\int_a^b f(x)dx$.

En étudiant le point de vue institutionnel, Haddad (2012) souligne que l'enseignement de l'intégrale est réduit à un ensemble de propriétés algébriques et il s'identifie à un ensemble de techniques calculatoires. Ainsi les élèves s'habituent à travailler sur un ensemble de savoirs et de savoir-faire qui est le plus souvent utilisé de façon algorithmique. D'un autre côté, Ghedamsi (2008) constate que l'enseignement actuel « semble stabilisé autour de la manipulation d'un certain nombre d'ostensifs relatif aux fonctions, limites et dérivées ». Il se focalise sur quelques problèmes prototypiques. Ce choix pourrait poser des difficultés chez les étudiants dans leur processus d'apprentissage : Ils seraient susceptibles d'échouer dans certaines situations proposées où le contexte est non routinier.

Suite à ce constat, il nous est paru légitime de nous interroger sur *l'état des connaissances* des étudiants sur la notion d'intégrale. Notre objectif est notamment d'analyser l'impact des choix institutionnels sur l'apprentissage des élèves. Pour ce faire, nous nous sommes appuyés sur l'analyse des réponses à un questionnaire élaboré dans le cadre de notre mémoire de master (Akrouti, 2016) et proposé à l'entrée à l'université. A travers ce questionnaire, nous cherchons des éléments de réponse aux questions de recherche suivantes : l'enseignement actuel, en fin du secondaire, favorise-t-il un apprentissage adéquat de la notion d'intégrale ? Quelles difficultés peut-on repérer chez les nouveaux entrants à l'université en rapport avec cette notion ?

*1. Institut Supérieur de l'Education et la Formation Continue ISEFC, Université Virtuelle de Tunis – Tunisie – akroutiinen@yahoo.fr

II. LES CHOIX THEORIQUES ET METHODOLOGIQUES

Pour investiguer les questions proposées et cerner les caractéristiques spécifiques du travail sur la notion d'intégrale, nous avons choisi deux outils théoriques. Ces outils pourraient fournir des critères d'appréciation des spécificités du travail attendu des étudiants. Il nous a été possible de souligner l'importance du rôle que pourrait jouer le statut de la notion d'intégrale dans son apprentissage. Pour cela, nous considérons *la dialectique processus/objet* (Sfard, 1991) comme premier outil choisi, dont Sfard souligne l'importance pour la conceptualisation. Il s'agit donc, dans un premier temps, d'identifier les aspects processus et objets de la notion d'intégrale. Du point de vue de sa définition formelle (introduite à l'université) l'intégrale définie renvoie aux sommes de Riemann. Or il n'y a pas, dans l'enseignement secondaire, un vrai travail reliant l'intégrale à la somme des aires algébriques et prenant en compte le passage à la limite, donc réifiant un processus (infinitésimal) de sommation d'aires. L'introduction de la relation de Chasles (aspect structural de la dimension objet) met en œuvre l'additivité des aires algébriques dans le registre algébrique. Ceci permet de réifier un processus fini de sommation d'aires, si le lien avec le calcul des aires est correctement établi. Enfin, nous pouvons considérer que le calcul de primitives constitue un aspect opératoire de l'intégrale, qui est en quelque sorte « réifié » dans la formule $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Notre choix requiert aussi *les différentes représentations sémiotiques* (Duval, 1993). En effet, les processus de traitement au sein d'un registre de représentation sémiotique et de conversion entre registres sont des éléments efficients dans le processus de conceptualisation de l'intégrale, par la mise en relation qu'ils opèrent entre les différentes formes du concept (dans les registres géométrique, algébrique et numérique). Ces processus requièrent en général une flexibilité cognitive importante et sont de ce fait difficiles pour les étudiants. Une étude du manuel tunisien[2] faite par Haddad (2012) montre que l'institution favorise le travail dans le registre algébrique. Le registre symbolique est exclusivement utilisé dans les exercices portant sur l'étude de fonctions ou de suites réelles définies par des intégrales alors que le registre graphique est sollicité dans les tâches issues de la représentation graphique d'une fonction et le calcul d'aire. Enfin, le registre numérique est quasiment ignoré sauf dans quelques exercices où il s'agit d'approcher l'aire sous la courbe par la méthode des rectangles.

Dans le cadre de ce travail, nous avons choisi de proposer un questionnaire aux nouveaux bacheliers avant qu'ils n'abordent le nouveau cours d'intégration. Les connaissances testées sont celles supposées acquises en classe terminale. Les questions proposées se basent sur l'usage des exemples et des contre-exemples qui sont des tâches non routinières et qui oblige l'individu à dépasser le schéma d'action comme le souligne Gonzalez-Martin (2005). Le questionnaire a été soumis à des étudiants en première année préparatoire à l'Institut Préparatoire aux Ecoles d'Ingénieurs de Tunis (IPEIT) parcours Math-physique (MP). Il a été proposé au mois d'avril 2015. Dans ce questionnaire, nous avons fait le choix d'écarter les tâches calculatoires fréquemment rencontrées en classe terminale. Le questionnaire est constitué de cinq questions auxquelles les étudiants devaient répondre par *vrai* ou *faux*. Il a été demandé explicitement aux étudiants de justifier leur réponse.

III. ETUDE EXPERIMENTALE

Le programme tunisien préconise d'interpréter l'intégrale définie d'une fonction continue et positive comme l'aire sous la courbe. Puis, il définit l'aire comme l'intégrale de la valeur

2 En Tunisie il n'y a qu'un seul manuel scolaire pour le terminal Math. L'étude de ce manuel a été faite par Haddad (2012) où il a mené une étude praxéologique des chapitres : Intégrale et Primitive.

absolue d'une fonction continue. Ce choix présente l'intégrale comme un outil de calcul d'aire des surfaces non polygonales. Il met en avant l'aspect opérationnel de l'intégrale et limite le rôle de l'aire qui se réduit à être une simple interprétation géométrique de l'intégrale au lieu de contribuer à la fonder en lien avec les sommes de Riemann.

Dans ce papier, nous avons choisi de présenter une seule question (la question Q_5) parmi les cinq proposées aux étudiants. L'objectif de cette question est d'étudier la compréhension des étudiants des liens entre aire et intégrale. L'étude de cette question se compose d'une analyse ***a priori*** comportant le travail des étudiants en termes d'activités attendues en lien avec les outils théoriques de l'étude et une analyse ***a posteriori*** se basant sur leurs traces écrites afin d'étudier leur niveau de conceptualisation. La question Q_5 est la suivante :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$. Si [c, d] $\subset [a,b]$ *alors* $\int_c^d f(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$. *Répondre par vrai ou faux en justifiant votre réponse.*

1. Analyse a priori

Les étudiants qui ont gardé une bonne connaissance du cours de la fin du secondaire sont susceptibles de se baser sur la conception de l'intégrale en tant qu'aire algébrique et donc de la conversion entre registres pour construire un contre-exemple qui infirme la proposition comme le montre l'exemple suivant : $a=-1, b=d=1$, $c=0$ et $f(x)=x$. Ils pourraient également appuyer leur réponse par une figure. La complémentarité processus-objet qui est en jeu ici est : la sommation des aires algébriques (processus) et la relation de Chasles (objet). Si cette dualité n'est pas acquise, en lien avec la conversion de registres algébrique/graphique, on peut faire l'hypothèse que les étudiants seront en difficultés pour résoudre la tâche. En effet, davantage de manipulations algébriques sont requises, dans un travail analytique, alors que le registre graphique en permet une expression synthétique. Pour d'autres qui possèdent une conception erronée (induite en partie par l'institution) consistant à restreindre le contexte de la tâche aux fonctions positives, nous attendons qu'ils confirment la proposition. Pour ces derniers, l'intégrale est positive et coïncide avec l'aire.

2. Analyse a posteriori

Nous avons recueilli vingt et une réponses à cette question dont neuf réponses sont acceptables (42%) et douze réponses sont non acceptables (57%). Nous entendons par réponse acceptable celle qui est correcte avec des justifications valides du point de vue strictement mathématique et réponse non acceptable celle qui est fausse avec justification ou non et celle qui est correcte avec justification invalide ou non. Toutes les réponses recueillies sont réparties de la manière suivante :

Numéro de la question	Réponses acceptables	Réponses non acceptables			Absence de réponse
		Réponses fausses	Réponses correctes avec justification fausses	Réponses correctes sans justifications	
Q_5	9	6	4	2	0

Tableau 1 *– Etude globale des réponses des étudiants*

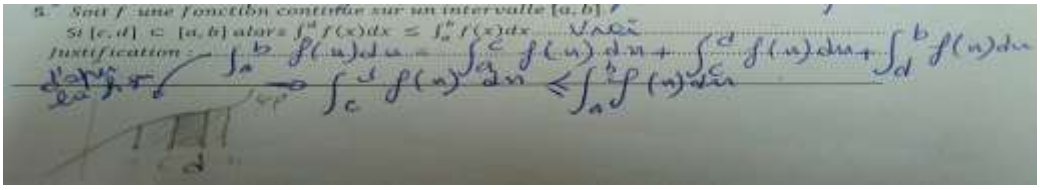
Les réponses acceptables :

Nous avons réparti les réponses acceptables en deux catégories. La première comporte les réponses se basant sur la relation de Chasles pour mobiliser l'additivité de l'intégrale. Cinq étudiants laissent entrevoir une trace permettant d'envisager que l'interprétation en termes d'aires algébriques a joué un rôle dans la construction du contre-exemple. Les fonctions choisies prennent des valeurs négatives. Parmi ces étudiants, trois se sont limités à des

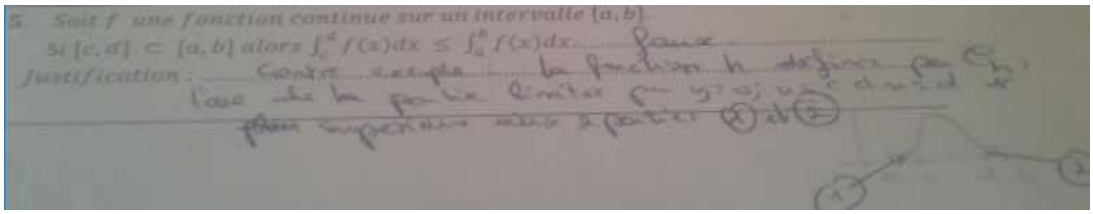
réponses dans le registre algébrique en donnant la formule algébrique de la fonction sur les deux intervalles choisis. Les deux autres ont appuyé leur réponse par un dessin. Pour la deuxième catégorie, les étudiants ont calculé la primitive de la fonction sur les deux intervalles choisis pour faire la comparaison entre les deux valeurs et conclure que la proposition est fausse. Les étudiants de la première catégorie, du moins ceux qui utilisent le registre graphique, sont capables de conceptualiser, via la relation de Chasles, l'intégrale comme sommation d'aires algébriques. La dualité processus/objet est acquise, ce qui facilite la construction du contre-exemple. Pour la deuxième catégorie, la conceptualisation se base sur des aspects processus qui sont limités au calcul de primitives, ce qui rend la construction du contre-exemple plus opaque.

Les réponses non acceptables :

Les réponses non acceptables représentent un taux d'environ 57%. Nous avons choisi la réponse suivante comme premier exemple d'étude :



En se basant sur un dessin, l'étudiant a utilisé la relation de Chasles pour solliciter l'additivité de l'intégrale, puis il a confirmé l'inégalité. Ici l'intégrale est à valeur positive et s'identifie à l'aire. L'erreur est due à la conception erronée consistant à considérer la fonction comme étant à valeurs positives. Malgré que la complémentarité processus/objet est mise en œuvre, la réponse est erronée car l'énoncé n'a pas stipulé la positivité de la fonction. Parmi les autres réponses fausses, quatre étudiants ont considéré que la proposition est vraie sans donner une justification. L'autre cas de réponse correcte avec justification fausse est le suivant :



L'exemple donné par l'étudiant confirme la proposition et ne l'infirme pas. Il semble interpréter l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ comme la somme des aires correspondant aux intégrales $\int_a^c f(x)dx \; et \int_d^b f(x)dx$. Il est incapable d'appliquer la relation de Chasles et sa conversion vers le registre graphique est erronée.

IV. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

L'analyse des données présentées ci-dessus nous a permis d'identifier quatre catégories d'étudiants :

- La première catégorie : un étudiant de cette catégorie est capable de conceptualiser, via la relation de Chasles, l'intégrale comme sommation d'aires algébriques. La dualité processus/objet est acquise, ce qui facilite la construction du contre-exemple. La conversion entre le registre algébrique (travail analytique) et le registre graphique (expression synthétique) est menée correctement. La conceptualisation est d'ordre structurel. Nous entendons par cela que l'étudiant a compris la définition et les

propriétés de la notion d'intégrale. Il est capable de manipuler l'intégrale dans son statut objet et son statut processus.

- La deuxième catégorie : la conceptualisation se base sur les aspects opératoires, limités au calcul de primitives ce qui rend la construction du contre-exemple plus opaque. La conceptualisation est d'ordre opérationnel. L'étudiant ne fait pas le lien entre les aspects objets et les aspects processus liées à la sommation d'aires. Du point de vue sémiotique, il se limite au registre algébrique. Il a des difficultés à poursuivre un apprentissage conceptuel.
- La troisième catégorie : bien que la complémentarité processus/objet soit mise en œuvre à travers la relation de Chasles, la réponse est erronée car elle se limite au cas des fonctions positives. Par la suite, la conceptualisation est d'ordre pseudo-structurel (Sfard et Linchevski, 1994). L'étudiant se base sur des cas particuliers pour généraliser une hypothèse. Il rencontre des difficultés liées à un abus de généralisation.
- La quatrième catégorie : un tel étudiant est incapable d'appliquer la relation de Chasles et la conversion vers le registre graphique est erronée. La conceptualisation n'a pas abouti et l'étudiant est incapable de réaliser la tâche.

Cette étude nous permet également d'étayer l'hypothèse selon laquelle, en l'absence du recours aux méthodes d'approximation mettant en application les sommes de Riemann et permettant de réifier un processus de sommation (infinitésimal), on obtient une conceptualisation de l'intégrale largement déconnectée du calcul des grandeurs (en particulier des aires). Le lien est fait de façon artificielle dans les programmes en définissant l'aire comme l'intégrale de la valeur absolue.

REFERENCES

Akrouti I. (2016) *Transition secondaire/supérieur en analyse : cas de l'intégrale de Riemann en classes préparatoires* (Mémoire de Master Université Virtuelle de Tunis, Tunis, Tunisie).

Duval R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactiques et de sciences cognitives* 5, I 37-65.

Haddad S. (2012) *L'enseignement de l'intégrale en classe terminale de l'enseignement tunisien* (Thèse de doctorat Université Paris Diderot & Université Virtuelle de Tunis, Paris, France & Tunis, Tunisie).

Sfard A. (1991) On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on process and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics* 22, 1-36.

LE PROCESSUS DE TRANSPOSITION DIDACTIQUE DE L'OBJET DEVELOPPEMENT LIMITE

BELHAJ AMOR* Fatma

Résumé – Ce texte présente les résultats d'une étude de la notion de développement limité en termes de transposition didactique au début de l'université. Les investigations didactiques conduites ont mis en évidence la nécessité d'articuler les dimensions sémantique, syntaxique et sémiotique afin d'introduire cette notion en tant qu'outil pour la nouvelle technique d'approximation locale des fonctions.

Mots-clefs : développement limité, praxéologies, sémantique, syntaxique, sémiotique

Abstract – This paper presents the results of a study concerning the didactic transposition of the object *approximating polynomial* at the beginning of the university. Our results highlight the necessity to articulate the semantic, syntactic, and semiotic dimensions with the aim of introducing this object as a tool for the new technique of local approximation of functions.

Keywords: approximating polynomial, anthropology, semantic, syntactic, semiotic

I. INTRODUCTION

Au début de l'université, l'objet développement limité a pour caractéristique fondamentale d'être introduit comme un outil pertinent pour résoudre des problèmes d'approximation locale des fonctions, ainsi que pour la modélisation physique, mécanique, etc. dans des domaines extra-mathématiques. Par ailleurs, certains travaux ont mentionné la pertinence de cet objet mathématique en tant qu'outil dans la nouvelle technique de calcul de limites complémentaire à celles préalablement utilisées en fin du secondaire (Praslon, 2000) et implicitement sollicitée par l'institution universitaire (Ghedamsi, 2008). Ces travaux n'ont par ailleurs pas approfondi les particularités de cette notion dans la résolution de problèmes d'approximations intra et extra mathématiques.

D'un autre côté, Kouki et Ghedamsi (2012) constatent que :

> Les analyses didactiques ont montré, du côté institutionnel, la pertinence de la prise en compte de l'articulation entre le point de vue sémantique et syntaxique, qui relève d'un niveau logico-mathématique, pour enrichir les catégorisations d'analyse proposées par Chevallard d'une part, et la place du point de vue sémantique dans des situations où le raisonnement purement syntaxique est inopérant. (Kouki & Ghedamsi, 2012, p.442)

Ce constat nous amène à poser la question du rôle de l'articulation sémantique/syntaxique dans des domaines intra et extra mathématiques afin d'introduire l'objet développement limité en tant qu'outil présent dans la nouvelle technique d'approximation locale des fonctions au début de l'université et plus précisément, au niveau des classes préparatoires section mathématiques et physique aux études d'ingénieurs tunisiennes.

II. METHODOLOGIE GENERALE ET CADRE THEORIQUE

En nous basant sur la revue de la littérature relative à l'enseignement et apprentissage des objets de l'analyse à l'entrée à l'université, nous avons choisi de conduire une étude de l'organisation mathématique prévue par l'institution des classes préparatoires dans l'environnement de la notion de développement limité, en utilisant trois variables macro-didactiques susceptibles de conditionner la nature du travail des étudiants et son évolution (Bloch & Ghedamsi, 2005) : V1 – Type de tâches et techniques utilisées (Chevallard, 1999) ;

* Université Virtuelle de Tunis – Tunisie – fatma.belhajamor@gmail.com

V2 – Registres sémiotiques et conversion entre registres (Duval, 1993) et V3 – Dialectique sémantique/syntaxique (Durand-Guerrier, 1996 ; Kouki, 2008 ; Kouki & Ghedamsi, 2012).

Au niveau de l'enseignement supérieur en Tunisie, il n'existe pas un manuel scolaire commun comme aux niveaux primaire et secondaire. Ceci nous a ramenée à conduire une étude sur le programme officiel, des polycopiés du cours de trois enseignants et quatre parties d'ouvrages universitaires les plus utilisés en tant que références de cours dans le champ des développements limités. En plus, nous avons conduit une étude d'enquête composée de sept questions auprès de 24 enseignants de différents instituts préparatoires des études ingénieures tunisiennes afin de connaître les approches choisies et les types de techniques à utiliser pour résoudre certaines tâches proposées dans l'environnement de développement limité (Belhaj Amor, 2016).

III. RÉSULTATS

1. Etude du programme et des différents supports de cours

L'étude du programme et des différents supports de cours[1] analysés via les trois variables macro-didactiques nous a permis de voir que l'utilisation des techniques d'ordres sémantique et mixte[2] ainsi que des registres géométrique et graphique est relativement absente dans l'enseignement de la notion de développement limité. En effet, cet objet mathématique n'est pas introduit en tant qu'approximation polynomiale[3] des fonctions faisant intervenir différents registres sémiotiques qui favoriseraient l'articulation sémantique/syntaxique dans des domaines intra et extra mathématiques (Kouki, Belhaj Amor & Hachaichi, 2016).

2. Analyse de l'enquête

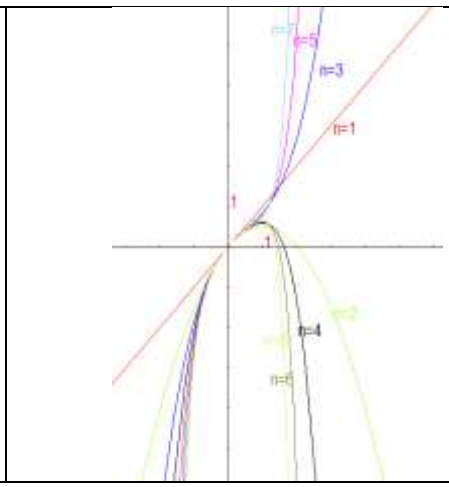
Soit la question :

On considère les deux activités suivantes :

Activité 1	**Activité 2**
On a : Au voisinage de zéro $\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1-(-x)}$ $=1+(-x)+(-x)^2+(-x)^3+\ldots+(-x)^n+\frac{(-x)^{n+1}}{1-(-x)}$ $=1-x+x^2-\frac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^n x^n+x^n\frac{(-1)^{n+1}x}{1+x}$ Comme $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^{n+1}}{x^n}}{1+x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{1+x}=0$ alors $x^n\frac{(-1)^{n+1}x}{1+x}=o\left(x^n\right).$ D'où $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\frac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^n x^n+o(x^n)$ $\int_0^x\frac{dt}{1+t}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+o(x^{n+1}).$	Voici les représentations graphiques de l'approximation de la fonction $x\mapsto Ln(1+x)$ pour certains ordres *n* de son développement limité au voisinage de zéro.

[1] Les trois polycopiés de cours et quatre parties d'ouvrages universitaires étudiés.
[2] Articulation des deux dimensions sémantique et syntaxique.
[3] La détermination des développements limités d'une fonction au voisinage d'un nombre réel donné revient à la représenter sous forme des polynômes en tant qu'approximations locales de cette fonction.

D'où $Ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + o(x^n)$.



1) Si vous aviez à proposer ce type d'activités à vos étudiants. Que choisiriez-vous ?
   ☐ La première activité ☐ La deuxième activité ☐ Les deux activités ☐ Aucune
2) Pour quelles raisons ?

Nous présentons les résultats de l'analyse de cette question, qui fait partie des sept questions proposées dans l'enquête. Nous avons proposé aux enseignants deux activités avec deux tâches différentes, présentant aussi deux techniques différentes, dont la première est algébrique d'ordre mixte et la deuxième technique géométrique d'ordre sémantique afin de déterminer les développements limités de la fonction $(x \to Ln(1+x))$ au voisinage de 0.

Nous présentons les réponses des 24 enseignants dans le tableau suivant :

Les types de technique choisis	τ_{alg}		$\tau_{géo}$	τ_{alg} **et** $\tau_{géo}$		
Total (%)	41.66		4.17	54.17		
Justifications	**Raisons institutionnelles**	**Pas de réponses**	**L'intérêt de l'illustration graphique**	**L'intérêt des illustrations graphiques et calcul numérique**	**L'intérêt de donner un exemple**	**Pas de réponses**
Total (%)	33.33	8.33	4.17	41.67	4.17	8.33

Tableau 1 *– Le degré de l'intérêt de la figure géométrique comme modèle d'objet d'approximations locales des fonctions dans l'enseignement des développements limités.*

Nous remarquons que 54% des enseignants interrogés préfèrent proposer aux étudiants les deux types de techniques algébrique et géométrique par la mise en considération de l'intérêt de faire recours aux illustrations graphiques afin d'introduire l'objet développement limité dans le domaine intra mathématique au début de l'université. En effet, la technique géométrique s'appuyant sur les représentations graphiques des différents ordres des développements limités de la fonction est insuffisante pour introduire notre objet d'étude.

Cette brève analyse expérimentale nous permet de constater qu'environ 58% des participants considèreraient l'utilisation de la figure géométrique dans l'enseignement de l'approximation des fonctions dans l'enseignement actuel des développements limités. En effet, le travail au niveau du graphique via des techniques géométriques n'est pas suffisant pour l'enseignement de cet objet mathématique.

L'analyse de notre corpus constitué des 24 réponses des enseignants nous a permis de dire que la majorité d'entre eux ne s'intéresse pas à la façon d'introduire l'objet développement limité dans le domaine d'approximations locales des fonctions par l'articulation des différents types de techniques d'ordres sémantique et mixte (Belhaj Amor, 2017).

IV. CONCLUSIONS GENERALES ET PERSPECTIVES

Le croisement des trois variables macro-didactiques nous permet de conclure que l'objet développement limité n'est pas introduit en tant qu'outil pour l'approximation locale d'une fonction faisant intervenir les différents registres sémiotiques qui favorisaient l'articulation sémantique/syntaxique dans des domaines intra et extra mathématiques.

D'un autre côté, nos investigations didactiques conduites démontrent l'intérêt du processus de visualisation pour l'apprentissage des nouvelles connaissances au niveau de l'université et ce, par la nécessité d'articuler les dimensions sémantique, syntaxique et sémiotique dans l'enseignement de l'objet développement limité. Cette étude nous a permis de proposer l'hypothèse que le travail au niveau du registre graphique via des techniques géométriques d'ordre sémantique est au cœur de l'enseignement des objets mathématiques au début de l'université.

REFERENCES

Belhaj Amor, F. (2016). *Enseignement de l'objet développement limité au début de l'université entre syntaxe et sémantique : Cas des classes préparatoires aux études d'ingénieurs tunisiennes*. Mémoire de master. Université virtuelle de Tunis.

Belhaj Amor, F. (2017). L'articulation sémantique, syntaxique et sémiotique dans le processus de transposition des concepts de développement limité et approximations locales. Actes du colloque EEDM 2017. Paris. Édit RDM (en cours).

Bloch, I., & Ghedamsi, I. (2005). L'enseignement du début de l'Analyse. *Petit x, 69*, 7-30.

Chevallard Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique de la didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2), 221-265.

Durand-Guerrier, V. (1996). *Logique et raisonnement mathématique. Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication*. Thèse de doctorat. Université Lyon1.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5*, 37-65.

Ghedamsi, I. (2008). Enseignement *du début de l'analyse réelle à l'entrée à l'université, Articuler contrôles pragmatique et formel dans des situations à dimension adidactique*. Thèse de doctorat. Université de Bordeaux 2.

Kouki, R. (2008). *Enseignement et apprentissage des équations, inéquations et fonctions au secondaire: entre syntaxe et sémantique*. Thèse de doctorat. Université Claude Bernard Lyon1.

Kouki, R., Belhaj Amor, F., & Hachaichi, Y. (2016). Comparaison entre l'évolution historique ayant mené aux développements limités et leur pratique d'enseignement au début de l'université: Entre syntaxe et sémantique. Actes du colloque INDRUM 2016.

Kouki, R., & Ghedamsi, I. (2012). Limite des méthodes syntaxiques en algèbre du secondaire. *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone EMF2012*, 435-444.

Praslon, F. (2000). *Continuités et ruptures dans la transition terminale S/DEUG Sciences en analyse : le cas de la notion de dérivée et son environnement*. Thèse de doctorat. Université Diderot Paris 7.

UNE ETUDE PRAXEOLOGIQUE MONTRANT LES CHOIX DE TRANSPOSITION D'UN ENSEIGNANT D'ALGEBRE ABSTRAITE

CANDY*[1] Julie

Résumé – Le passage de l'algèbre à l'algèbre abstraite implique une transition épistémologique interne aux mathématiques due à la nature des concepts en jeu. Nous présentons une étude praxéologique d'une série d'exercices issus d'un manuel afin de mettre en avant les choix de transposition didactique effectués par l'auteur pour prendre en charge cette transition.

Mots-clefs : algèbre abstraite, Théorie Anthropologique du Didactique, praxéologie structuraliste, idéal.

Abstract – The passage from algebra to abstract algebra implies an epistemological transition internal to mathematics due to the nature of the concepts at stake. We present a praxeological analysis of a sequence of exercises from a textbook to show the didactical transposition choices of the author to handle this transition.

Keywords: abstract algebra, anthropological theory of the didactic, structuralist praxeology, ideal.

I. INTRODUCTION

Hausberger (2018) a montré que la pratique mathématique en algèbre abstraite peut être vue comme une application de la méthode axiomatique, dans son usage structuraliste : les structures sont utilisées en tant qu'outil pour prouver des propriétés des objets, grâce aux techniques structuralistes. Ce passage de l'algèbre à l'algèbre abstraite implique pour l'étudiant une transition épistémologique interne à l'algèbre due à la nature de l'algèbre structuraliste. Mon travail de thèse en cours s'inscrit dans cette étude de l'entrée dans la pensée structuraliste en se concentrant sur l'étude d'un concept au cœur de cette pensée : le concept d'idéal. Soit $(A,+,*)$ un anneau et I un sous-ensemble de A. Alors I est un idéal (bilatère) de A si et seulement si $(A,+)$ est un groupe commutatif et pour tout $a \in A$ et pour tout $x \in I$ on a $a*x \in I$ et $x*a \in I$. En France, ce concept est généralement introduit en deuxième année de Licence ou de CPGE[2], en faisant le lien avec la définition du pgcd en arithmétique et avec pour application la réduction des endomorphismes (notion de polynôme minimal). Son importance en théorie abstraite des anneaux (pour générer des anneaux quotients) ou en lien avec l'arithmétique des anneaux abstraits (avec les grandes classes d'anneaux, dont les anneaux principaux définis à partir d'une condition portant sur les idéaux) n'apparaît qu'en troisième année de Licence, voire en Master 1, lors de cours dédiés aux structures algébriques. Ainsi, les étudiants rencontrent ce concept dans différentes institutions, et à différents niveaux du curriculum.

Pour les raisons évoquées ci-dessus, nous choisissons la Théorie Anthropologique du Didactique (Chevallard, 1998) comme cadre théorique afin d'étudier cette transition d'un point de vue institutionnel. La théorie anthropologique du didactique postule que toute activité humaine, et en particulier l'activité mathématique, peut être décrite grâce à l'outil des praxéologies. Une praxéologie est un quadruplet (T,τ,θ,Θ) constitué d'un bloc de la praxis $[T,\tau]$ où τ est la technique permettant de résoudre le type de tâches T, et d'un bloc du logos $[\theta,\Theta]$ où θ est la technologie (discours justifiant la technique) et Θ la théorie (discours

1* Haute Ecole Pédagogique du Valais – Suisse – Institut Montpelliérain Alexandre Grothendieck, Université de Montpellier – France – julie.candy@hepvs.ch

2 Classes préparatoires aux grandes écoles. Ce dispositif de niveau post-bac, spécifique au contexte français, a pour vocation de préparer aux concours donnant accès aux écoles d'ingénieurs les plus prestigieuses.

justifiant la technologie). La pensée structuraliste implique un travail sur des classes d'objets, sur les relations entre ces classes (par exemple entre anneaux factoriels, principaux et euclidiens) et sur la stabilité structurelle des propriétés par opération sur les structures (par exemple, l'addition et le produit d'idéaux, ou encore l'image directe ou réciproque par un homomorphisme, etc.). Cette méthodologie qui implique un rapport dialectique entre objets et structures, fait naître des praxéologies qui comportent, dans le bloc du logos, un théorème sur la structure en jeu. Hausberger (2018) défini ce type de praxéologie comme étant une *praxéologie structuraliste*. De ce fait, un des aspects de cette transition épistémologique interne peut se traduire en termes de construction (et d'évolution) de praxéologies structuralistes à partir de praxéologies antérieures (algébriques et logiques, voire structuralistes ; Jovignot, Hausberger et Durand-Guerrier, 2017). Nous présenterons ici l'évolution des praxéologies proposées dans un manuel de licence (Escofier, 2011) autour du concept d'idéal, dans une progression dédiée à la manipulation des anneaux quotients.

II. ANALYSE DES PRAXEOLOGIES ET DE LEUR EVOLUTION

Nous allons étudier un ensemble de 9 exercices indépendants intitulés « Exercices sur les quotients » (Escofier, 2011, p488-490). Les principales praxéologies rencontrées sont :

Ex.	Type de tâches	Technique	Technologie
1, 7	T_A: Simplifier un anneau quotient $K\,[X]/(P)$ donné, où P est irréductible	τ_A : Construire un morphisme f tel que (P)=Ker$f$ et utiliser le 1er théorème d'isomorphisme	θ_A : 1er théorème d'isomorphisme
2, 3, 8c	T_B: Simplifier un anneau quotient $A\,[X]/(P)$ donné	τ_B : Décomposer P de façon à obtenir des idéaux étrangers et appliquer le théorème chinois	θ_B :Théorème chinois
4	T_C: Démontrer que $A\,[X]/(P)$ et $A\,[X]/(Q)$ donnés sont isomorphes	τ_C : Trouver un isomorphisme ϕ tel que $\phi(P) = \phi(Q)$ puis utiliser le corollaire 1 (soient $\phi: A \longrightarrow A'$ un isomorphisme d'anneaux,I un idéal de A. Alors $\Phi(I)$ est un idéal de A' et A/I est isomorphe à $A'/\Phi\,(I)$)	θ_C : Corollaire 1
5, 6, 7, 8a, 8b	T_D: Déterminer si deux quotients $A\,[X]/(P)$ et $A\,[X]/(Q)$ donnés sont isomorphes ou pas	τ_C ou, dans la négative, τ_D : Interpréter les quotients en terme d'ajout de nouvelles relations et montrer qu'une relation ne peut exister.	θ_D : Relations conservées par isomorphisme

Figure 1 *–Résumé des principales praxéologies présentes au sein de ces exercices*

L'analyse praxéologique nous permet de relever plusieurs points saillants :

- les praxéologies A, B et C sont centrées autour de l'utilisation d'un théorème d'isomorphisme ou du théorème Chinois, qui apparaissent au niveau de la technologie : ce sont les connaissances visées. La raison d'être de ces technologies structuralistes mise en avant par l'auteur est la « simplification » des anneaux quotients (motivation épistémologique), qui requiert également des procédures pour décider de l'identité (à isomorphisme près) de deux quotients.

- Dans les exercices 4, 5 et 8a mobilisant la technique τ_C, les variables didactiques *A*, *P* et *Q* ont été choisies afin qu'il soit aisé de trouver l'isomorphisme ϕ.
- On remarque pour C et D un degré croissant de la généralité des objets au fur et à mesure des exercices : on travaille d'abord dans des quotients d'anneaux explicites (par exemple $K[X]/(X^2+1)$ puis sur des familles d'anneaux (par exemple les $A_k = Z[X]/(3X-k)$ où $\in Z$.
- Enfin, dans le dernier exercice de la série (exercice 9) les structures abstraites mobilisées jusqu'alors au niveau du logos figurent au sein du bloc de la praxis sans mention d'objets concrets, dans une nouvelle tâche d'un type qui généralise T_C : soit I et J deux idéaux de A, montrer que $I/(I \cap J)$ et $(I+J)/J$ sont isomorphes. Cette série d'exercices aboutit donc sur une transition de type 2 (cf. ci-dessous) au sens de Hausberger (2018).

La notion de transition de type 1 et de type 2, introduit dans le contexte de l'algèbre abstraite par Hausberger (2018), s'appuie sur les travaux antérieurs de Winslow (2006). Ce dernier explique que, dans le cas de l'enseignement de l'analyse à l'Université, l'étudiant rencontre un premier type de transition lorsqu'il passe d'une activité centrée autour du bloc de la praxis à un travail sur des praxéologies plus complètes. Puis l'étudiant fait face à un nouveau type de transition :

> les démonstrations ne sont plus seulement à connaître mais aussi à construire. Pour ces tâches, portant donc sur des objets plus généraux ou même « abstraits », l'étudiant n'a plus d'appui sûr dans des exemples familiers, « semblables » ou génériques. […] les objets de ces tâches nouvelles prennent leurs objets dans les blocs théoriques de praxéologies (en principe) familiers. (loc. cit. p. 4)

Dans le cas de l'algèbre abstraite, Hausberger (2018) explique que :

> although Algebra and Analysis involve quite different modes of reasoning, the transition from concrete to abstract thus presents similar challenges. But the following distinction should be pointed out: the type 1-transition in Winsløw's case is a process of completion of praxeologies, with praxis block unchanged, whereas in our context, Π is replaced by Π_s since structuralist techniques, oriented by the choice of a theoretical framework (a theory of structures), are developed. (loc. cit. p. 19)

Afin de compléter cette étude des choix de transposition didactique effectués par l'auteur, et en particulier de confronter le résultat de nos analyses aux perceptions de l'auteur de ses propres intentions didactique relatives à ses organisations mathématiques, nous avons conçu un protocole d'interview. Une première série de questions concerne le rapport personnel de l'auteur à l'algèbre comme par exemple « comment définiriez-vous l'algèbre en tant que champ mathématique ?». Suivent des questions sur la transposition didactique externe (Bosch et Winsløw, 2016), puis des questions sur la transposition didactique interne portant sur le manuel en entier comme « comment avez-vous choisi vos séries d'exercices sur les idéaux dans le livre ? ». Enfin, des questions portent sur la série d'exercices étudiée ci-dessus :

- Quel est pour vous l'apprentissage visé à travers cet exercice ?
- Pouvez-vous expliquer les choix qui ont été faits dans cette série d'exercices (ordre des questions, formulation des questions, choix des techniques utilisées, choix des anneaux en jeu pour chaque sous-question) ?
- La question 9 se distingue des autres ; qu'est-ce que vous en pensez ?

Ces dernières questions devraient permettre de mettre en lumière les intentions de l'auteur lors de la rédaction de l'exercice. La première question devrait nous permettre de circonscrire l'apprentissage visé : retrouve-t-on l'aspect simplificateur que l'analyse praxéologique met en valeur ? La deuxième question devrait nous permettre de décrire les praxéologies didactiques

de l'auteur lors de la création de l'exercice. En particulier, nous pourrons observer si ces praxéologies sont guidées par des choix conscients ou bien si le bloc du logos demeure implicite, l'enseignant s'appuyant essentiellement sur son intuition, aiguisée par une longue expérience d'enseignement. Enfin, la dernière question devrait permettre de décrire les intentions de l'auteur lors du choix de l'exercice 9. Ainsi, les réponses à cette interview devraient permettre d'enrichir et de compléter l'analyse précédemment menée. Ce travail est actuellement en cours et fera l'objet d'une publication ultérieure.

III. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

On peut qualifier la transposition effectuée par Escofier (2011) de « bottom-up » : l'auteur commence par des tâches au niveau d'anneaux spécifiés et généralise progressivement les tâches jusqu'à travailler au niveau des structures avec des anneaux abstraits uniquement. Cependant, dans le cas de l'exercice 9, l'auteur a choisi de spécifier l'homomorphisme qui doit être utilisé réduisant ainsi considérablement le topos de l'étudiant lors du passage à l'abstrait. L'analyse croisée de l'interview et de l'analyse praxéologique nous permettra d'enrichir nos conclusions. De telles études praxéologiques menées sur un corpus large de cours et travaux dirigés permettront de mettre en évidence les choix didactiques effectués par les enseignants pour prendre en charge les transitions intrinsèques à la nature de l'algèbre abstraite, de relever les leviers qu'ils mettent en place pour favoriser les apprentissages ou bien les obstacles didactiques qu'ils contribuent à créer. Pour cela, nous allons à la fois interviewer des professeurs qui enseignent le concept d'idéal (enseignants-chercheurs ou professeurs de CPGE en France et en Suisse) et croiser les résultats de l'analyse praxéologique de leurs cours et travaux dirigés à leurs réponses au questionnaire.

REFERENCES

Bosch M., Winsløw C. (2016) Linking problem solving and learning content: the challenges of self–sustained study and research processes. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 35(3), 357–401.

Chevallard Y. (1998) Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. In R. Noirfalise (Éd.), *Actes de l'Université d'été de la Rochelle : analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques* (pp.91-120). La Rochelle : IREM de Clermont-Ferrand.

Escofier J.P. (2011) *Toute l'algèbre de la licence. Cours et exercices corrigés.* Paris : Dunod.

Hausberger T. (2018). Structuralist Praxeologies as a Research Program on the Teaching and Learning of Abstract Algebra. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education* 4(1), 74-93.

Jovignot J., Hausberger T., & Durand-Guerrier V. (2017) Praxeological analysis: the case of ideals in Ring Theory. In T. Dooley et G. Gueudet (Éd.), *Proceedings of CERME10 conference* (pp.2113-2120). Dublin : DCU Institute of Education and ERME.

Winsløw C. (2006) Transformer la théorie en tâches : la transition du concret à l'abstrait en analyse réelle. In R. Rouchier et al. (Éd.), *Actes de la XIIIème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques* (pp.1-12). Cédérom. Grenoble : La pensée Sauvage.

Groupe de travail 6 (GT6)
Conception, diffusion et usages des ressources

BILAN DU GROUPE DE TRAVAIL N°6

CONCEPTION, DIFFUSION ET USAGE DES RESSOURCES

WOZNIAK[*] Floriane – FREIMAN[**] Viktor – HAYFA[***] Nina

Correspondant CS

SAWADOGO[****] Timbila

I. ETUDIER LES RESSOURCES

1. Une position d'ouverture théorique et thématique

Au-delà de ses différentes acceptions suivant les cadres théoriques, nous considérons ici une ressource comme tout ce qui permet à un sujet ou une institution de nourrir son action, de se re-sourcer . Instructions institutionnelles, manuels, documents pédagogiques, sites Internet, logiciels, vidéos, jeux, calculatrice, objets, idées, concepts, notions, expériences, discussions peuvent être des ressources. Textuelle, matérielle ou non matérielle, une ressource est une composante du milieu d'une situation visant à répondre à une question ou un besoin. Ainsi, le travail produit en utilisant un système de ressources, peut-il devenir lui-même une ressource, dès lors qu'il y a une intention d'en faire un tel usage.

L'étude du lien entre ressources et développement professionnel abordée aux colloques EMF 2012 et EMF 2015 a été prolongée en considérant comment la conception, la diffusion et l'usage d'une ressource peuvent contribuer au développement des praxéologies des enseignants et des apprenants voire des formateurs. L'évolution des curriculums qui introduisent la démarche d'investigation, l'interdisciplinarité ou la modélisation conduisent en effet à (re)considérer comment un élève peut mobiliser ou concevoir des ressources sans se limiter à celles délivrées par l'enseignant ou le manuel scolaire et ceci à tous les niveaux d'enseignement primaire, secondaire ou universitaire.

2. Des questions pour nourrir les échanges

Une ressource peut être envisagée selon deux points de vue : celui du concepteur de la ressource ou celui de l'utilisateur que celui-ci soit la cible pour laquelle la ressource est conçue ou pas. Aussi, afin d'illustrer l'étendue des questions qu'une telle ouverture théorique et thématique permet, nous proposons un ensemble de questions à propos de la conception, la diffusion et l'usage des ressources par/pour l'enseignant, le formateur, le chercheur ou l'élève constitués en collectifs ou non. Il s'agit en effet de considérer les conditions et contraintes relatives à la conception, la diffusion ou l'usage d'une ressource qui doivent être considérés comme trois pôles en interaction. La conception d'une ressource intègre nécessairement une anticipation de son usage et même des conditions de sa diffusion si elle est conçue pour autrui. L'usage d'une ressource conduit parfois à un travail de reprise de son contenu tandis que des conditions de sa diffusion dépendent évidemment son utilisation, il faut *a minima* savoir qu'une ressource existe pour qu'elle soit utilisée.

[*] Université de Montpellier, LIRDEF – France – floriane.wozniak@umontpellier.fr
[**] Université de Moncton – Canada – viktor.freiman@umoncton.ca
[***] Université libanaise – Liban – ninhay@yahoo.fr
[****] Burkina Faso – sawtimbs@gmail.com

Conception

L'étude de la conception d'une ressource embrasse le besoin ou l'objectif qui la déclenche, les références épistémologiques, didactiques et mathématiques qui la fondent voire l'apport du collectif lorsqu'il existe. Elle contribue à répondre à des questions comme :

- Comment une ressource est-elle conçue pour répondre à un besoin ?

- Comment les questions épistémologiques sont-elles prises en charge lors de la conception d'une ressource ?

- Quels sont les savoirs professionnels, mathématiques ou didactiques, mobilisés lors de la conception d'une ressource ?

- Quel est le rôle du collectif dans la conception (collective ou individuelle) d'une ressource ?

Diffusion

L'étude de la diffusion des ressources envisage les conditions d'une telle diffusion et les contraintes associées qu'elles soient prises en charge à la conception ou non.

- Comment les enseignants/apprenants/formateurs/chercheurs sont-ils alertés de l'existence de ressources utiles pour un besoin donné ?

- Sous quelles conditions une ressource se diffuse-t-elle ? Comment se réalise cette diffusion ?

- Quel est le rôle du collectif dans la diffusion d'une ressource ?

- Quels sont les éléments à diffuser ou les conditions à remplir pour qu'une ressource à destination des enseignants soit utilisée telle qu'elle a été conçue ?

- Les résultats de la recherche en didactique des mathématiques peuvent-ils diffusés comme ressources pour les professeurs ?

- Comment étudier les effets de la plus grande accessibilité et la plus grande diversification des ressources via, notamment, le numérique sur les pratiques des professeurs et des élèves ?

Usage

Concernant l'usage des ressources différents aspects peuvent être considérés :

- Quels sont les éléments qui conduisent un professeur/un élève à utiliser une ressource plutôt qu'une autre ? Comment est évaluée la pertinence de l'usage d'une ressource ?

- Comment étudier les différents usages d'une même ressource selon les moments de l'étude (enseigner *vs* évaluer, par exemple) ou les finalités (produire *vs* valider une réponse, par exemple) ?

- Les interactions entre élèves ou entre professeur et élèves peuvent être utilisées comme ressource pour l'activité mathématique en classe ou pour l'activité du professeur (dans ou hors la classe). Quels outils théoriques permettent d'étudier cette dualité ?

- Comment l'usage d'une ressource contribue-t-il au développement des praxéologies de son utilisateur ?

- Quelles sont les règles d'action d'utilisation d'une ressource ? Sont-elles unifiées ? Dépendent-elles de l'utilisateur, de ses connaissances disciplinaires, professionnelles, sociales ?

- Les ressources sont-elles utilisées telles qu'elles sont conçues et diffusées ? Quelles sont les conditions favorables à l'appropriation d'une ressource ? Sous quelles conditions les ressources subissent-elles modifications et adaptations ?

- L'usage d'une ressource par un même professeur/élève diffère-t-il dans le temps ?

II. UNE SYNTHESE DES ECHANGES

L'ouverture théorique et thématique a permis à un grand nombre de participants de s'engager dans ce groupe de travail ; 17 communications et 3 affiches ont nourri la réflexion des participants issus de 7 pays différents. Ce qui caractérise ce groupe de travail est la diversité des objets d'étude du fait des niveaux académiques, savoirs mathématiques, types de ressources ou acteurs concernés ou des cadres théoriques et méthodologiques adoptées.

Tous les niveaux d'enseignement de la maternelle au lycée (élèves de 3 ans à 18 ans) ont été abordés, y compris universitaire et post universitaire à travers la formation initiale et continue des enseignants. Ceci contribue à la variété des savoirs mathématiques concernés par les ressources : analyse (limite de fonction) ; combinatoire ; géométrie (cercle, théorème de Thalès, restauration de figures) ; informatique (programmation) ; nombres (numération, fractions), calcul mental ; preuve mathématique ; probabilités ; vecteurs.

Les types de ressources, que ce soit une unique ressource ou un système de ressources considérés, sont eux aussi variés : cours de didactique ; fiche d'observation de praxéologies d'élèves et/ou de professeurs ; forum de discussions ; interface (simulation sur ordinateur) ; ingénierie didactique et situations d'enseignement ; jeu mathématique ; livre du maitre et guide pédagogique sous forme papier ou numérique ; logiciel (GraphEasy en algèbre) ; manuel (papier ou numérique) ; vidéo sur Internet ou capsules.

La diversité se manifeste encore par les concepteurs des ressources et leurs destinataires. Certaines sont conçues par des chercheur ou formateurs à destination des enseignants, d'autres sont conçues par des chercheurs et/ou par des enseignants à destination des apprenants. Les élèves peuvent contribuer également à cette diversité, par exemple, dans un contexte de création, de validation et de partage d'un défi informatique où des ressources sont produites. Ce sont bien tous les acteurs intervenant dans le processus d'enseignement/apprentissage qui sont envisagés.

Enfin, au-delà des objets d'étude, la richesse du groupe de travail se révèle par la pluralité des approches théoriques et méthodologiques abordées : approche instrumentale ; double approche ; genèse documentaire du didactique ; objet-avec-lequel-penser ; théorie anthropologique du didactique et modèle T4TEL ; théorie des champs conceptuels ; théorie des communautés de pratiques ; théorie des situations ; théorie socioculturelle de l'apprentissage.

Cinq grands thèmes ont été abordés durant nos échanges.

1. Les ressources pour l'élève

Allard et al. analysent une pratique de classe inversée en considérant la complexité des enjeux d'utilisation de capsules vidéos produites par l'enseignant et conçues comme des ressources pour les élèves. De Simon et al. montrent comment l'analyse d'une situation d'enseignement en termes de dialectique médias-milieux permet d'étudier la façon dont une ressource conçue pour les élèves (ici, une interface de simulation de dénombrement de bûchettes) est graduellement incorporée dans le milieu de l'élève pendant son activité mathématique.

2. Les usages des ressources

Coulange et Train mettent en évidence un rapport dialectique (« tensions ») entre ce que font les élèves et les gestes langagiers des enseignants lors de différents moments d'une situation d'enseignement. Ceci les conduit à interroger le contenu de la ressource utilisée du point de vue de la prise en charge de cette tension. De leur côté, Bulf et Celi étudient la complexité des conditions pour qu'un gabarit dans une situation d'enseignement en géométrie devienne réellement une ressource pour l'élève. La variété des mises en œuvre observées conduit les auteures à interroger les contenus de formation en lien avec les pratiques effectives des enseignants. Hayfa pose la question du lien entre les connaissances des professeurs et la pertinence du choix des ressources qu'ils réalisent. Tandis que Castela propose un outil pour analyser les exercices et problèmes mathématiques des manuels afin d'accompagner les professeurs dans leur choix. Enfin, Fofana et Sokhna proposent « la médiation documentaire » à travers un modèle – EPIR – de coordination de médiations afin de documenter l'impact des ressources sur les pratiques.

3. Les ressources pour le professeur

Sayah explicite les aspects statiques et dynamiques d'un système de ressources et propose une taxonomie des ressources selon leurs fonctions dans le système documentaire du professeur, soit ressource mère, primaire, intermédiaire et stabilisée, ou bien « en veille » si la ressource est temporairement inactive. Mercier et Quilio présentent un processus collaboratif fructueux entre les chercheurs et les acteurs de terrain autour d'« une ressource pour l'observation capable d'engager la formation d'une pensée commune sur les problèmes rencontrés en pratique ». Cette fiche d'observation devient alors une ressource pour le professeur en introduisant dans son milieu de nouveaux objets (mathématiques ou didactiques). Douaire et Emprin étudient comment intégrer une description plus précise des gestes professionnels de l'enseignant dans d'anciennes ressources conçues par l'équipe ERMEL afin de la faire évoluer. Ce qui fait écho au questionnement de Mangiante qui s'intéresse aux conditions d'appropriation par les enseignants de situations d'enseignement conçues par la recherche dès la conception de la ressource en considérant ce que la ressource devrait ou pourrait prendre en charge. Freiman s'interroge sur les nouvelles ressources nécessaires pour permettre aux professeurs de répondre aux nouveaux enjeux d'enseignement, comme la réalisation de tâche complexe basée sur la programmation d'un robot.

4. Les ressources et la formation

Leroyer aborde la multi-dimensionnalité des ressources, en distinguant une ressource « pour comprendre » et une ressource « pour faire ». Georget présente un dispositif de formation initiale fondé sur un système de ressources primaires avec l'hypothèse qu'il pourrait durablement influencer le système documentaire des professeurs. Adihou et al. soulignent l'importance de phases interactives – observation, analyse et intégration dans les pratiques des enseignants – et postactives – commentaires des enseignants et des formateurs sur l'usage de la ressource, ainsi que les adaptations possibles – pour concevoir des ressources conçues avec une visée de formation des enseignants.

5. L'analyse des ressources

Martin, Malo et Thibault présentent une grille centrée sur des éléments conceptuels afin d'analyser une ressource faite de l'ensemble des manuels et de leurs annexes pour enseigner les probabilités. De son côté, Jolivet explicite un modèle qui permet d'une part de prendre en

compte les objectifs de qualité de la description didactique d'une ressource de type exercice, et qui d'autre part semble permettre de calculer une part importante des éléments relatifs aux besoins exprimés par des utilisateurs de ressources de ce type.

III. UNE QUESTION EMERGENTE ET DE NOUVELLES PERSPECTIVES

La qualité des communications et la richesse des discussions ont permis de faire émerger une nouvelle question de recherche, rendant nécessaire de poursuivre l'esprit d'ouverture théorique de ce groupe de travail.

1. L'écologie des ressources

L'étude des phénomènes de transposition didactique (Chevallard, 1991) a révélé comment les savoirs enseignés sont frappés d'obsolescence. De la même manière, une obsolescence des ressources apparaît, qu'elle soit d'origine interne au système didactique – du fait des changements curriculaires par exemple – ou externe au système didactique – du fait de l'évolution des conditions de formation ou des connaissances des enseignants, par exemple. Ce constat conduit à repenser la question des ressources en envisageant d'une part les conditions économiques et écologiques de leur diffusion, leur réception et leur appropriation et d'autre part les conditions ergonomiques de leur production. Question qui intègre, dialectiquement, l'écologie des savoirs visés dans la ressource elle-même.

Comme en atteste la rapide synthèse précédente, la diversité des cadres théoriques et méthodologiques a permis par ailleurs de constater que l'étude des ressources a été abordée selon deux grands types d'approche.

2. Deux positionnements théoriques

Dans ce groupe de travail, deux approches, deux points de vue ont coexisté. D'une part le point de vue des individus qui est porté par l'approche instrumentale (Rabardel, 1995) ou la question de l'« agentivité didactique » par exemple. D'autre part, le point de vue du système et des besoins de fonctionnement du système qui ne considère pas des individus singuliers mais des sujets d'une institution comme en théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1999). Ainsi, deux questions pourraient nourrir les discussions du prochain colloque EMF dans une perspective de dialogue entre cadres théoriques et méthodologies :

Quelles questions relatives aux ressources, leur conception, leur diffusion et leur usage sont posées et étudiées dans les différents cadres théoriques, avec quels outils méthodologiques ?

Comment la question de la spécificité des savoirs est-elle prise en charge dans l'étude d'une ressource par ces différents cadres théoriques ?

REFERENCES

Chevallard Y. (1991). *La transposition didactique*. Grenoble : La pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques* 19(2), 221–266.

Rabardel P. (1995) *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Armand Colin.

ANNEXE

LISTE DES TEXTES DU GT6 PAR ORDRE ALPHABETIQUE DU PREMIER AUTEUR

ADIHOU, A., LEROUX, A.-J. & BRISSON ,O.

Conception de ressources didactiques qui articulent des concepts mathématiques et didactiques.

ALLARD, C., ASIUS, L., HOROKS, J. & ROBERT, A.

Courtes vidéos de cours (capsules): une ressource pour la classe inversée, avantages et inconvénients. Points de vue d'enseignant et de didacticiennes.

BULF, C. & CELI ,V.

Reproduire un cercle: une ressource dont la conception, la diffusion et l'usage sont problématiques.

CASTELA, C.

Outiller les enseignants pour la sélection de tâches mathématiques dans les manuels.

COULANGE, L. & TRAIN, G.

Gestes professionnels langagiers didactiques et usages d'une ressource visant à introduire les fractions à l'école.

DE SIMON, M., BARQUERO, B. & CHAHAACHOUA, H.

Analyse du milieu via la dialectique medias-milieux : une étude de cas dans le contexte du dénombrement.

DOUAIRE, J. & EMPRIN, F.

L'évolution d'une ressource.

FOFANA, O. & SOKHNA, M.

Les médiations documentaires comme cadre pour analyser les systèmes de ressources des enseignants.

FREIMAN, V. & CHIASSON, M.

Enjeux de diversification et complexification de ressources : un cas de programmation informatique d'un robot dans une école de demain.

GEORGET, J.-P.

Un dispositif de formation initiale de professeurs stagiaires basé sur un système de ressources primaire.

HAYFA, N.

Influence des ressources sur la conception de l'enseignant du concept "vecteur".

JOLIVET, S.

Descripteurs didactiques d' « exercices de mathématiques » : catégorisation ; utilité et utilisabilité d'un modèle.

LEROYER, L.

La notion de support au centre d'un modèle des situations d'enseignement/apprentissage, ressource pour comprendre et pour faire.

MANGIANTE-ORSOLA, C

Analyse de choix de conception d'une ressource portant sur l'enseignement de la géométrie.

MARTIN, V., MALO, M. &THIBAULT, M.

Analyse des tâches probabilistes proposées dans une collection de manuels scolaires du primaire au Québec.

MERCIER, A., QUILIO, S.

La « fiche d'observation d'un fait didactique », une ressource dans le travail collaboratif professeurs/chercheurs.

SAYAH, K.

Analyse de la structure d'un système de ressources, articulation entre aspect dynamique et aspect statique: cas d'une enseignante de mathématiques.

AFFICHES

EYSSERIC, P.

Ressources produites et diffusées par la COPIRELEM pour la formation des professeurs des écoles.

HEROUX, S. & MAHEUX, J.-F

La ressource comme objets-avec-lesquels-penser: exemple d'un jeu mathématique.

LANGUEREAU, H., GARDES, M.-L.

Présentation de la base PUBLIMATH.

CONCEPTION DE RESSOURCES DIDACTIQUES QUI ARTICULENT DES CONCEPTS MATHÉMATIQUES ET DIDACTIQUES

ADIHOU[*] Adolphe - LEROUX[**]Anne-Julie - BRISSON[***]Olivier

Résumé – L'article présente le processus de conception de ressources qui articulent des contenus mathématiques et didactiques pour des formateurs, enseignants, élèves et étudiants en formation dans le cadre d'un projet. Offertes dans un environnement numérique, elles sont pour les formateurs, des outils intéressants et adaptables qui vont les aider dans leur planification et dans le choix des tâches et situations signifiantes qui permettent des activités mathématiques riches et pertinentes pour les élèves et les étudiants.

Mots-clés : Ressources, enseignement, apprentissage, didactique, mathématiques, formation

Abstract– The article presents resources conception process that articulates mathematical and didactic content for trainers, teachers, students and undergraduates as part of a project. Offered digitally, they are interesting and adaptable tools that will help teachers in their planning and in the choice of meaningful tasks and situations that will allow rich and relevant mathematical activities for students.

Keywords: Resources, teaching, learning, didactic, mathematics, formation

I. INTRODUCTION : CONTEXTE ET OBJECTIFS

Le projet consiste à rendre accessibles aux enseignants et aux formateurs universitaires, des ressources qui articulent savoirs mathématiques et didactiques afin que ces derniers les utilisent pour mieux anticiper et gérer les difficultés d'apprentissage, et ultimement, mieux travailler les concepts mathématiques avec les élèves et les étudiants, en contexte de formation, d'enseignement et d'apprentissage. Ainsi le projet vise d'une part la conception et l'intégration des ressources auprès des formateurs et des étudiants et d'autre part l'étude de l'impact de leur intégration sur les pratiques des formateurs et sur l'apprentissage des étudiants. Dans cet article, nous présentons d'abord un exemple mettant en évidence les ressources développées pour le concept des fractions. Ensuite nous exposerons la problématique en lien avec l'élaboration des ressources ainsi que les bases théoriques et conceptuelles qui sous-tendent leur conception (Gueudet et Trouche, 2010; Vergnaud, 1991). Nous précisons la démarche méthodologique (Robert, 2008; Robert et al., 2002; Roditi, 2008) qui a permis leur conception. Enfin, nous pointerons quelques apports de l'intégration de ces ressources à l'enseignement et à l'apprentissage des concepts mathématiques.

II. PRÉSENTATION DES RESSOURCES DIDACTIQUES DEVELOPPÉES

Nous illustrons et présentons quatre types de ressources que nous avons développé (1- Les fractions ; 2 – Les fractions équivalentes; 3- La comparaison de fractions ; 4-L'addition et la soustraction de fractions). Une interface présente des notions à acquérir et à maîtriser dans différents champs mathématiques au primaire, par exemple les fractions[1] en arithmétique. Elles s'appuient sur des fondements mathématiques et didactiques. La présentation d'une notion comporte dix sections[2]. Elles illustrent les contenus des composantes des ressources

[*]Université de Sherbrooke – Canada – adolphe.adihou@usherbrooke.ca
[**]Université de Sherbrooke – Canada – Anne-Julie.Leroux@USherbrooke.ca
[***]La Clinique mathématique – Canada – lacliniquemathematique@hotmail.com

[1] Le cas des fractions supérieur à 1 n'est pas traité, mais elles sont traitées dans d'autres ressources.

[2] Les points 7, 8 et 9 qui composent les dix sections (voir page suivante) ne sont pas encore sur l'interface. Les activités (point 7) sont en version papier. Les modalités pour intégrer le lien des métacours (point 8) conçus dans le cadre du dispositif de formation en mathématique dans le cadre du programme de Baccalauréat en adaptation scolaire et sociale (BASS) restent à préciser. Ces contenus sont accessibles aux étudiants.

pour un concept donné. Le lien suivant permet de découvrir en détail le contenu et la structure des ressources : http://ressourcesdidactiquesmathematiques.espaceweb.usherbrooke.ca. On peut accéder aux ressources en utilisant les informations suivantes : *Courriel : didactique et Mot de passe : capsule*

Ainsi, pour un concept donné nous développons dix catégories de ressources suivantes :

1. Synthèse de la Progression des Apprentissages (PDA) en lien avec chaque concept.
2. Carte conceptuelle des concepts en lien avec les contenus de la PDA.
3. Capsule vidéo à visée formative et didactique en lien avec les concepts mis en évidence dans les activités.
4. Capsule vidéo à visée formative et didactique traitant des notions ou problématiques mises en évidence dans les activités ou lors de leur conception.
5. Animation en trois dimensions (3D) de concepts et de processus.
6. Affiche.
7. Illustration des concepts et procédures et lien avec la capsule et la carte conceptuelle.
8. Recueil d'activités : suggestions de situations (manipulations, activités) à mettre en ligne
9. Rappels mathématiques (sur la base des savoirs essentiels des programmes de formation) un lien sera fait avec les métacours que nous avons développés.
10. Guide d'accompagnement à la formation pour donner des formations et mis à la disposition des formateurs qui le désirent.

Dans la section qui suit nous présentons quelques exemples avec des images des ressources didactiques. Ces exemples peuvent être consultés en cliquant sur le lien suivant : http://ressourcesdidactiquesmathematiques.espaceweb.usherbrooke.ca

Synthèse de la Progression des Apprentissages en lien avec chaque concept

La synthèse de la PDA apporte des précisions sur les savoirs à acquérir durant les années du primaire et du premier cycle du secondaire. Il constitue un complément au programme de formation de l'école québécoise en lien avec la notion abordée. Il a permis de concevoir des outils de formation et d'accompagnement tels que : une carte conceptuelle des contenus, des concepts à construire, des procédures à développer et les tâches qui favorisent des activités mathématiques riches.



Figure 1 *– Synthèse de la Progression des Apprentissages*

Carte conceptuelle

Une carte conceptuelle des contenus, des concepts à construire, des procédures à développer et les tâches qui favorisent des activités mathématiques riches.



Figure 2 *– Carte conceptuelle*

Capsule vidéo à visée formative et didactique

La capsule vidéo accompagne les éléments précédents pour assurer une bonne compréhension de la notion. Elle donne les informations nécessaires au niveau didactique, et ce, à partir d'animations, d'une narration et d'explications.

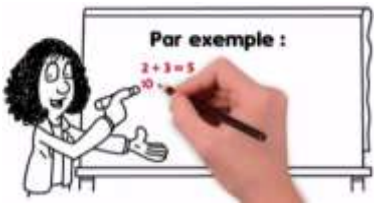


Figure 3 *– Image extraite de la capsule vidéo*

Illustrations animées en trois dimensions (3D) de concepts et de processus

Chaque illustration animée comprend des exemples de modèles mathématiques (articulés aux différents sens des fractions dans le cas des fractions) en lien avec une intention didactique (activités mathématiques attendues ; aspects du concept visés, …) bien précise.

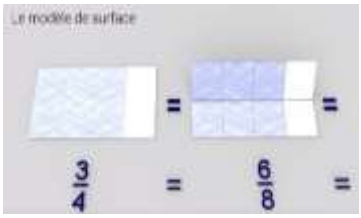


Figure 4 *– Illustrations animées en trois dimensions (3D)*

Affiche

L'affiche résume les différents contenus et modèles abordés pour la notion et elle permet de donner du sens à cette dernière. Elle permet d'organiser l'enseignement de la notion et d'en donner une représentation quant aux différentes dimensions mathématiques et didactiques de la notion. Ce travail s'appuie sur les savoirs théoriques et didactiques. Cette stratégie sera reprise dans la conception des capsules. Les relations sont indiquées au moyen de mots, d'images, d'objets, etc.



Figure 5 *Affiche*

Illustrations des concepts et procédures et liens avec la capsule et la carte conceptuelle

L'illustration suivante fait le lien entre les différents contenus mis en évidence dans la carte conceptuelle, de même que les illustrations 3D des ressources et de la capsule. Il permet d'illustrer les différents sens et les modèles utilisés et de donner des représentations des différentes dimensions mathématiques et didactiques de la notion.



Figure 5 *– Illustrations des concepts et procédures et liens avec la capsule et la carte conceptuelle*

Guide d'accompagnement à la formation

Un guide d'accompagnement à la formation est conçu pour donner des formations. Il est mis à la disposition des formateurs qui le désirent.



Figure 6 *– Page de garde du guide d'accompagnement à la formation*

III. PROBLÉMATIQUE

Plusieurs recherches en didactique des mathématiques (Sayac, 2012; Squalli, 2012; Proulx, 2010) ont montré que certains étudiants en formation initiale et même certains enseignants éprouvent des difficultés en mathématiques ou ont une compréhension plutôt instrumentale des mathématiques caractérisée par une connaissance du comment faire plutôt que de ce qu'il faut faire et du pourquoi il faut le faire (Adihou, Marchand, Koudogbo et Leroux, 2017). Certaines recherches exposent les difficultés des élèves liées à l'apprentissage de certains concepts qui sont notamment dues à des représentations précaires (Rosar et al., 2001) et pointent l'inégale répartition des activités des manuels (Mercier et Deblois, 2004). D'autres insistent sur le sens des concepts et mettent explicitement en évidence le fait que le sens se construit dans différents contextes avec des ressources et du matériel pertinent, comme en témoignent les travaux de Dias (2012) sur la manipulation et l'expérimentation en mathématiques, ceux de Trgalová, Aldon, Gueudet et Matheron (2008) sur la conception, l'usage et le partage des ressources ainsi que plusieurs travaux sur l'articulation des moyens technologiques et l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques (Aldon, 2015; Lagrange et al. 2003). La problématique de l'enseignement et l'apprentissage des concepts mathématiques est une question qui préoccupe la communauté des didacticiens des mathématiques. L'enseignement et l'apprentissage de raccourcis mathématiques ou de trucs mathématiques (Adihou et Marchand, 2014) en est un exemple alors que l'enseignement et l'apprentissage supposent la construction et la compréhension des concepts mathématiques avec des ressources pertinentes. Ces dernières doivent « favoriser, dans un premier temps, des interactions fertiles et autonomes entre l'élève et le milieu didactique. Cela n'est possible que si l'élève investit sa rationalité, met en œuvre et finalise une stratégie et si le milieu didactique lui fournit une rétroaction sur la justesse des connaissances qu'il a engagées » (Giroux, 2015, p. 6). Elles permettront un travail sur le sens des concepts évitant de donner aux élèves des techniques toutes prêtes ou des raccourcis mathématiques.

Au Québec, l'analyse de certaines ressources qui sont approuvées par le ministère mettent en évidence des lacunes. Leur approbation ne repose vraiment pas sur des savoirs didactiques (les différents sens des fractions,…) et mathématiques (la propriété d'équivalence, les relations d'ordre)[3]issues de la recherche (Lebrun, Bédard, Hasni et Grenon, 2006). Par ailleurs, dans son rapport de 2005 et de 2006, le Conseil supérieur de l'éducation au Québec (CSÉ) recommande un accompagnement des enseignants en ce qui concerne les nouvelles ressources et celles issues des recherches(CSÉ, 2005, 2006).Dans la perspective de rapprochement et d'une articulation entre la recherche et la pratique, en d'autres termes le fait que les savoirs de recherche doivent nourrir la pratique, les rapports du CSÉ soulignent, entre autres, que la disponibilité des résultats de la recherche (ou des ressources qui en découlent) n'est pas suffisante pour insuffler des changements dans les pratiques. Il faut un accompagnement des utilisateurs de ces résultats et ressources en les amenant à réfléchir sur leur usage dans leurs pratiques (CSÉ, 2005; 2006). Les ressources que nous développons mettent explicitement en évidence des savoirs didactiques et mathématiques à la disposition des enseignants, ce qui concoure à la compréhension des concepts. Leur intégration représente une occasion d'enrichir et de construire du sens face au concept à l'étude (sens et algorithme). C'est dans ce contexte que s'inscrivent la conception et l'usage des ressources développées dans le cadre du projet.

IV. CADRE DE RÉFÉRENCE

Le cadre de référence de notre projet articule deux cadres qui se complètent. Il s'agit de la genèse documentaire du didactique (Gueudet et Trouche, 2010). Ce cadre supporte le contexte de conception des ressources, mais aussi la façon dont les artéfacts et instruments contribuent à re(s)sourcer l'enseignant. Quant à la théorie des champs conceptuels (Vergnaud, 1991), elle permet de mettre au cœur des ressources le travail sur le sens dans l'enseignement et l'apprentissage des concepts. En effet, pour étudier le travail de l'enseignant, l'approche documentaire du didactique fait recours au travail de l'enseignant en mettant au centre les ressources. Adler (2010) considère la ressource comme un objet qui vient re(s)sourcer le travail de l'enseignant (Pepin et al. 2013). Une ressource ou une nouvelle ressource perturbe (positivement ou négativement) la routine du sujet, mais participe au développement professionnel de ce dernier. Ainsi, l'intégration d'une ressource dans la pratique de l'enseignant nécessite la construction de schèmes d'usage. Étudier les apports du recours aux ressources dans les pratiques des enseignants et sur l'apprentissage des élèves interpelle les la théorie des champs conceptuels, dans la mesure où nos ressources positionnent le travail sur le sens des concepts lors de leur intégration dans l'enseignement et l'apprentissage.

Selon Vergnaud, un concept se construit par l'élève, à travers une variété de situations utilisées qui lui sont proposées : « ce sont les situations qui donnent sens au concept, mais le sens n'est pas dans les situations elles-mêmes » (Vergnaud, 1991, p. 158). Le sens qui se construit est « une relation du sujet aux situations et aux signifiants » (Vergnaud, 1991, p. 158). Pour modéliser ce qu'est un concept, Vergnaud (1991), positionne trois ensembles : 1) les situations qui donnent du sens au concept (la référence); 2) les invariants opératoires sur lesquels reposent l'opérationnalité des schèmes (le signifié) et 3) les formes langagières et non langagières qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les situations et les procédures de traitement (le signifiant). Le sens qui se construit est le rapport du signifié au signifiant et aux types de situations. Les ressources développées (synthèse de la PDA, carte conceptuelle, activités, etc..) font appel à ce type de rapport en misant sur la place

[3] La référence à ces savoirs dans ce texte ne signifie pas qu'il n'existe que deux types de savoir : soit exclusivement mathématique, soit exclusivement didactique.

du formateur et de l'enseignant par l'entremise de l'interface technologique qui joue un rôle de médiation.

V. MÉTHODOLOGIE

La méthodologie repose sur l'analyse des pratiques issue de la double approche ergonomique et didactique (Robert, 2008; Robert et al., 2002; Roditi, 2008). La double approche didactique et ergonomique articule les théories en didactique des mathématiques et la théorie de l'activité. Elles prennent en compte les activités en classe, mais aussi les contraintes du métier d'enseignant qui sont davantage prises en considération dans les composantes des pratiques développées par Robert (2008). Il s'agit des composantes cognitive et méditative qui sont en lien avec les activités possibles des élèves en classe. Elle met aussi en évidence les composantes du côté du métier permettant de déterminer d'autres pratiques, soit: la composante personnelle à la pratique de l'enseignant, la composante institutionnelle qui renvoie aux situations professionnelles permettant à l'enseignant de choisir les activités à réaliser et la composante sociale qui concerne l'environnement dans lequel les enseignants interviennent.

La démarche de réalisation s'articule autour de trois phases distinctes, les phases préactive, interactive et postactive (Cloes et al., 1991) de l'action pédagogique au cours desquelles tout formateur ou enseignant est amené à prendre diverses décisions, à établir différents choix auxquelles nous avons ajouté la phase anté et la phase réflexive. Ces phases sont structurées par les contenus mathématiques qui sont à l'œuvre dans les activités de classe et les composantes des pratiques (Robert, 2008). Elles renseignent aussi sur le processus de développement des ressources (Tableau 1).

	Phase anté : Anticipation sur l'organisation de l'enseignement : choix didactiques. Rencontre pour analyser les éléments à prendre en compte dans l'environnement des ressources		
	Phase préactive	**Phase interactive**	**Phase postactive**
Analyse	Analyse mathématique et didactique des ressources et des	Observation, analyse et opérationnalisation des ressources	Analyses après la conception
Contenus observés	Organisation de l'enseignement, interventions, choix, principes sous-jacents, Planification	Tâches à proposer : enseignants face aux ressources Gestions possibles de la réalisation des ressources	Écart entre ce qui a été planifié et ce qui a été fait
	Phase réflexive : Recueil des difficultés et peaufinement des analyses.		

***Tableau 1** – Démarche de réalisation*

1. Justification des cadres et leur articulation

Les deux cadres théoriques (la genèse documentaire du didactique (Gueudet et Trouche, 2010) et la théorie des champs conceptuels (Vergnaud, 1991) s'opérationnalisent à deux niveaux. Il s'agit d'une part de la démarche entreprise depuis la gestation de l'idée de produire des ressources jusqu'à la conception des ressources et, d'autre part, de l'élaboration des diverses activités qui structurent la mise en place des contenus qui organisent les ressources. En ce sens, le point de départ est la recherche de supports qui viennent « re(s)sourcer le travail » (Pepin et al. 2013) des enseignants et des formateurs, en mettant explicitement en avant les contenus mathématiques et didactiques. Cette démarche s'est appuyée sur une méthodologie précise. Elle a été sous-tendue par la volonté de re(s)sourcement des concepteurs et des analyses qui ont fait appel à la théorie des champs conceptuels. Le deuxième niveau est celui des utilisateurs lorsque nous mettons les ressources (finies ou en cours de développement) à leur disposition afin que celles-ci les

« re(s)sourcent » dans leurs pratiques. Tout en nous appuyant sur la démarche qui structure l'action pédagogique (Cloes et al., 1991) articulée à la phase anté et à la phase réflexive, le cadre de la double approche didactique et ergonomique (Robert, 2008) s'opérationnalise elle aussi à deux niveaux. Le premier niveau est celui de la méthodologie en lien avec la conception et le deuxième niveau, lorsque nous expérimenterons pour étudier l'impact de l'intégration des ressources en formation initiale sur l'apprentissage des élèves et les pratiques des enseignants et des formateurs : mais pour quelle formation, quel enseignement et quels apprentissages ?

2. Processus du développement des ressources : description des phases

La phase anté a eu pour objectif de cerner la problématique de la conception des ressources pour les enseignants et d'identifier des concepts, mais aussi de se documenter sur l'enseignement et l'apprentissage des concepts ainsi que les choix didactiques qui les accompagnent « à partir d'études historiques, épistémologiques et didactiques, afin de travailler à partir des spécificités des concepts étudiés (signifiant et signifié), de décrire la conceptualisation visée ainsi que le processus qui le permet et de dégager les variables qui serviront de référence aux analyses de tâches (Robert, 2008). Cette phase, qui a consisté en des rencontres entre concepteurs, a permis d'analyser les concepts en identifiant les classes de situations qui permettent de travailler les concepts. Cette analyse conceptuelle a permis de dégager les éléments importants à considérer dans l'apprentissage et l'enseignement des concepts au regard du PFEQ (synthèse de la PDA). De plus, les analyses conceptuelles menées ont permis la conception de cartes conceptuelles[4]. Par exemple, dans le cas des fractions, il s'agissait de positionner les différents sens d'une fraction, les modèles qui permettent de les illustrer et les activités importantes auxquelles il faut faire référence pour les étudier. Il s'agit entre autres de la nécessité de mettre le sens au cœur de l'enseignement et de l'apprentissage en mathématiques et d'analyser la façon dont l'interface sera configurée et comment ces ressources pourraient intégrer la pratique des enseignants et des formateurs (Robert, 2008; Roditi, 2008). Cette phase a ainsi permis d'analyser et d'anticiper des contenus qui seront mis en évidence dans *les phases préactive, interactive et postactive* lors de la conception des ressources et l'interface qui servira à opérationnaliser ces contenus. La recherche de l'interface a occupé une place importante dans cette phase dans la mesure où l'intégration de la dimension numérique est un des objectifs de la conception des ressources. Comment utiliser le support numérique pour créer des ressources qui articulent les dimensions mathématiques, conceptuelles et didactiques pour des enseignants et des formateurs?

La phase préactive comporte deux volets. Le premier volet a servi à planifier le travail à faire. De manière plus spécifique, il a permis de faire des analyses mathématique et didactique, de planifier les étapes de réalisation et d'identifier les conditions favorables pour la réalisation des activités pouvant faire émerger le recours aux ressources. Le deuxième volet a consisté en des rencontres avec les collaborateurs afin de mettre en évidence la structure possible des ressources en procédant à l'écriture de scénarios et le choix de matériel de

[4] Dans Tcheuffa Nziatcheu (2018) : « La carte conceptuelle, c'est une représentation graphique d'un domaine de connaissance tel que perçu par un ou plusieurs individus, et qui établit des liens entre différents concepts évoqués par son ou ses auteurs (Laflamme, 2006, p. 8). La carte conceptuelle est un outil efficace pour apprendre à tous les niveaux scolaires ou professionnels et elle aide à apprendre comment apprendre (Novak et Gowin, 1984 ; Novak, 2002). La carte conceptuelle peut fonctionner comme un artefact à travers lequel des apprenants démontrent une compréhension progressive d'un réseau de concepts et développent leurs connaissances par collaboration et coopération (Novak, 2010, 1998) »

manipulations (voir capsule didactique). Elle a aussi porté sur les contenus traités, leur organisation, les buts poursuivis sur le plan des savoirs et des compétences en mathématiques, les approches utilisées, les tâches demandées aux élèves (synthèse de la PDA et carte conceptuelle). Cette phase a permis la réalisation d'une première version des ressources.

La phase interactive a permis d'observer et d'analyser les ressources. Elle a permis de rendre explicite la façon dont pourrait s'opérationnaliser les ressources dans la planification des enseignants et des formateurs et comment les ressources sont mises en scène d'un point de vue didactique, d'expliciter les difficultés et celles qui semblent engendrer dans la pratique de classe. Elle a permis d'avoir aussi les points de vue d'enseignants et de formateurs sur comment les ressources développées peuvent être intégrées dans les pratiques des enseignants. *La phase postactive* a été utile pour analyser les commentaires des enseignants et des formateurs sur les ressources, les choix effectués, l'écart entre ce qui a été planifié et ce qui a été rapporté sur les ressources. Elle a permis de prévoir les adaptations possibles à effectuer. Elle a aussi fourni des informations en vue d'affiner notre approche et des informations issues des phases préactive et interactive. La phase réflexive a servi pour faire le point sur la recherche et sur le travail effectué par des entrevues. Elle a eu pour objectif de recueillir les difficultés rencontrées par les enseignants dans l'usage des ressources ainsi que la pertinence des ressources au regard des concepts enseignés selon leur point de vue. Ce travail servira à mettre en place une stratégie de diffusion de notre travail et à bonifier notre pratique future. Ces entrevues ont alimenté nos analyses.

Les différentes phases ont permis la mise en place d'une recherche et ont fourni de précieuses informations pour analyser les activités (mathématiques, professionnelles) induites, c'est-à-dire celles provoquées lors de la conception de ressources.

VI. RETOMBÉES

Le projet met en place des ressources didactiques originales et novatrices appuyées par des savoirs didactiques théoriques avec un processus original qui vise l'étude de l'impact de l'intégration d'une innovation dans la pratique des enseignants. L'originalité et la dimension innovante du processus se justifient selon trois aspects. Elles articulent le développement des ressources; l'intégration des ressources; le développement professionnel. Les ressources mettent explicitement en évidence pour les enseignants des savoirs mathématiques et didactiques en les articulant dans une perspective d'amélioration de leur pratique. De même, la conception, l'approche et la démarche reposent sur des cadres théoriques et méthodologiques éprouvés en recherche en didactique des mathématiques. Les ressources didactiques comportent des capsules vidéo, des affiches et font un lien original avec la PDA sur la base d'analyses mathématiques et didactiques. Dans la perspective de transfert des connaissances, le processus de leur développement prend appuie sur des concepts et savoirs didactiques théoriques pour outiller le milieu de pratique. L'étude de l'impact de ces nouvelles ressources relève d'un besoin d'articulation des savoirs de la recherche et de la pratique, mais aussi de formation et d'accompagnement qui vise à ce que les enseignants interviennent mieux auprès des élèves. Le contexte de l'étude avec les enseignants met en évidence un besoin en vue d'un développement professionnel qui s'explique par un partenariat. Il en découle la volonté d'étudier l'impact des ressources à la suite de formations mettant au centre ces ressources dans l'accompagnement des enseignants. Un projet de recherche (subvention de recherche obtenue) permettra d'étudier l'usage des ressources développées dans la pratique des enseignants et des formateurs. Les résultats de cette recherches contribueront à positionner les conditions de diffusion de ces ressources auprès des formés ou des enseignants qui bénéficient de ces ressources. Le projet permettra de bonifier

les autres capsules en construction. Cette recherche permettra d'expliciter l'usage des ressources dans le cadre de la formation d'enseignant ou de celui qui est visé si les ressources sont mises en ligne pour les enseignants. Un accompagnement sur l'usage de ressources est prévu et des orientations de nature didactique sont suggérées (matériel manipulable, fiche pédagogique, lectures d'apports didactiques). La recherche sera l'occasion pour étudier et analyser le regard et l'appréciation des ressources par les utilisateurs et comment ils les ont intégrées dans leur pratique, en substitution du reste ou en croisant plusieurs ressources.

VII. CONCLUSION

Dans notre contribution, nous explicitons les hypothèses et notre démarche sur la construction des ressources et en donnons une description. Les ressources permettent un travail sur le sens des concepts évitant de donner aux élèves et aux étudiants en formation des trucs mathématiques (Adihou et Marchand, 2014). La description et les analyses nous amènent à répondre aux questions que nous nous sommes posées (quelle formation, quel enseignement et quels apprentissages) soit implicitement, soit explicitement à cette étape de notre travail. Ainsi, une ressource pertinente serait une ressource qui intègre une approche conceptuelle des apprentissages, des apports mathématiques et didactiques. Le tout serait une ressource qui s'appuie sur ce que nous connaissons sur les pratiques effectives. La portée et l'impact d'une ressource dépend de la façon dont elle est utilisée. En ce sens, l'exploitation de la ressource est tributaire de la formation de ceux qui les exploitent. Pour une utilisation efficace des ressources développées, la formation mathématique et didactique serait d'une grande utilité pour re(s)sourcer le travail de l'enseignant (Pepin et al. 2013). Nous avons positionné ainsi des cadres qui donnent sens et qui justifient la conception de ces ressources. Le cadre théorique a permis de nous insérer dans une démarche pour concevoir les ressources et élaborer les activités qui structurent la mise en place des contenus qui organisent les ressources dont il est question. Quant au cadre méthodologique, il a permis une démarche de conception. Il interviendra lorsque nous étudierons l'impact de l'usage des ressources.

RÉFÉRENCES

Adihou, A. & Marchand, P. (2014) Les trucs mathématiques en classe de mathématiques : quand et pourquoi? *Math-École*, 221, 35-40.

Adihou, A., Marchand, P. Koudogbo, J. & Leroux, A.-J. (2017) Formation à l'enseignement des mathématiques au baccalauréat en adaptation scolaire et sociale à l'Université de Sherbrooke : Enjeux, actions et perspectives. In ARPEME, *Actes du 43ème colloque de la COPIRELEM : Enseignement des mathématiques et formation des maîtres aujourd'hui : quelles orientations, quels enjeux ?* (pp. 306-328). Puy-en-Velay : France.

Adler, J. (2010) La conceptualisation des ressources, apports pour la formation des professeurs de mathématiques. In G. Gueudet & L. Trouche (Éd.), *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques* (pp. 57-74). Rennes: Presses universitaires de Rennes.

Aldon, G. (2015) Technology and Education: Frameworks to Think Mathematics Education in the Twenty-First Century. In U. Gellert, J. Gimenez, C. Hahn & S. Kafoussi (Eds) *Educational path to mathematics: a CIEAEM sourcebook* (pp. 365-381). Springer Berlin, Heidelberg.

Cloes, M., Zabus, A. & Piéron, M. (1991) Analyse de stratégies pédagogiques de l'enseignement des activités physiques: Influence des décisions pré-actives de l'enseignant dans l'émission de réactions à la prestation. In Ph. Jonnaert (Éd.). *Les didactiques, similitudes et spécificités* (pp.195-207) Bruxelles : Plantyn.

Dias, T. (2012) *Expérimenter et manipuler en mathématiques. Comprendre les difficultés des élèves pour mieux les résoudre*. Paris : Editions Magnard.

Giroux, J. (2015) Difficultés des élèves en mathématiques au primaire : Les apports de la didactique. *Math-École* 224, p. 4-7.

Gueudet, G. & Trouche, L. (2010) Des ressources aux documents, travail du professeur et genèses documentaires. In G. Gueudet & L. Trouche (Éd.), *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques* (pp. 57-74). Rennes: Presses universitaires de Rennes.

Laflamme, A. (2006) Carte conceptuelle : un outil pour soutenir l'acquisition des connaissances. BENA, Montréal : Université de Montréal.

Lagrange J.B, Artigue M., Laborde C. & Trouche L. (2003) Technology and Mathematics Education: A Multidimensional Study of the Evolution of Research and Innovation, In A.J. Bishop, M.A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick and F.S. Leung (Éd.) *Second International Handbook of Research in Mathematics Education*, (pp. 239-271), Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Mercier, P. & DeBlois, L. (2004) Passage primaire-secondaire dans l'enseignement et l'apprentissage des fractions. *Envol* 127, 17-24.

Novak, J.-D. (2010) Learning, creating, and using knowledge: Concept maps as facilitative tools in schools and corporations. Routledge.

Novak, J.-D. (2002) Meaningful learning: the essential factor for conceptual change in limited or appropriate propositional hierarchies (LIPHs) leading to empowerment of learners. *Science Education*, 86 (4), 548-571.

Novak, J.-D. (1998) *Learning, Creating, and Using Knowledge: Concept Maps as Facilitative Tools in Schools and Corporations. Mahwah*, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Novak, J.-D. & Gowin, D.-B. (1984) *Learning How to Learn.* New York, NY: Cambridge University Press.

Pepin, B., Gueudet, G. & Trouche, L. (2013) Re-sourcingteacherwork and interaction: new perspectives on resource design, use and teacher collaboration. *ZDM*, 45 (7), pp. 929-943.

Proulx, J. (2010) Reconnecter les futurs enseignants avec les mathématiques du secondaire: travailler autour de conceptualisations riches en «faisant» des mathématiques. *In* J. Proulx & L. Gattuso (Éd.), *Formation des enseignants en mathématiques: tendances et perspectives actuelles* (pp. 129-152). Sherbrooke: Éditions du CRP.

Robert, A. (2008) La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques d'enseignants de mathématiques. In F. Vanderbrouck (Éd.), *La classe de mathématiques: activités des élèves et pratiques enseignants* (pp. 59-68). Toulouse: Éditions Octares.

Robert, A., & Rogalski, J. (2002) Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Revue Canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*. 2(4), 505-528.

Roditi, E. (2008) Des pratiques enseignantes à la fois contraintes et personnelles, et pourtant cohérentes. In F. Vanderbrouck (Éd.), *La classe de mathématiques: activités des élèves et pratiques enseignants* (pp. 73- 93). Toulouse: Éditions Octares.

Rosar, D., Van Nieuwenhoven, C. & Jonnaert, Ph. (2001) Les fractions, comment mieux comprendre les difficultés rencontrées par les élèves. *Instantanés mathématiques*, 32(2), 4-16.

Sayac, N. (2012) Former à enseigner les mathématiques dans le primaire : Quelles pratiques pour quelle formation? In J.-L. Dorier & S. Coutat (Éd.), *Actes du colloque EMF 2012, Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21^{e} siècle*, (pp. 173-183). Genève : Université de Genève.

Squalli, H. (2012) Quelle articulation entre formation mathématique et formation à l'enseignement des mathématiques? Essai d'analyse et point de vue d'un didacticien des mathématiques. In J. Proulx, C. Corriveau & H. Squalli (Éd.), *Formation mathématique des enseignants de mathématiques: pratiques, orientation et recherches* (pp. 143-157). Québec: Presses de l'Université du Québec.

Tcheuffa Nziatcheu, J (2018) De l'analyse conceptuelle a la réalisation d'une carte conceptuelle : un dispositif de formation pour les futurs enseignants du primaire en mathématiques. *Math-École (RMé)*, 229, 31-38.

Trgalová, J., Aldon, G., Gueudet, G. & Matheron, Y. (2008) *Ressources pour l'enseignement des mathématiques: conception, usage, partage*. Actes des journées mathématiques de l'INRP. INRP, Lyon, 13 et 14 juin 2007. Lyon : France

Vergnaud, G. (1991) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, 10(2-3), 133-170.

COURTES VIDÉOS DE COURS (CAPSULES) : UNE RESSOURCE POUR LA CLASSE INVERSÉE, AVANTAGES ET INCONVÉNIENTS.

POINTS DE VUE D'ENSEIGNANT ET DE DIDACTICIENNES

ALLARD Cécile[*], ASIUS Loic[**], HOROKS Julie[***], ROBERT Aline[****]

Résumé – Dans ce texte nous nous appuyons sur le témoignage d'un enseignant pratiquant la classe inversée pour en discuter les avantages qu'il souligne et les inconvénients qu'il esquisse. Pour cela nous revenons à une caractérisation possible des moments d'exposition des connaissances, tant en termes de contenus que de déroulements, en relation avec les activités possibles des élèves. Les résultats de nos analyses (dont certains seront illustrés pendant l'exposé) permettent d'engager une discussion et de réfléchir à un cahier des charges.

Mots-clefs : classe inversée, pratiques enseignantes, expositions de connaissances, ressources, proximités discursives

Abstract – In this text, we lean on the debriefing of a teacher using the flipped class design to discuss the advantages he stresses and the disadvantages he outlines. We present our characterization of the moments of telling, addressing their contents and their implementation, according to the possible activities of the students. Our results (some of them will be presented during the exposure) lead to engage a discussion and to think about specifications of such a design.

Keywords: flipped classes, moments of telling, teachers practices, learning videos, discursive proximities

I. INTRODUCTION

Nos recherches de l'école primaire à l'entrée à l'université (Allard et al, 2016) montrent qu'il existe un malaise réel des enseignants et des élèves face aux moments d'expositions des connaissances (cours). Ce malaise s'exprime de différentes façons et ses causes ne sont pas toujours les mêmes. La pédagogie inversée, importée des pays Anglo saxons, semble pour certains apporter une réponse possible à ce malaise.

Ce mouvement, qui vient du Canada et des USA, amène à remplacer des moments de cours par de courtes vidéos, appelées capsules, à voir à la maison (hors classe). Ce sont ces ressources que nous interrogeons ici. Le terme « inverser » questionne, qu'inverse-t-on ? En général ce sont les moments d'expositions de connaissances en classe. Les élèves écouteraient ces courtes vidéos, hors la classe, de manière à avoir plus de temps ensuite pour faire les exercices et autres applications en classe, avec l'aide du professeur.

Par ailleurs, depuis quelques années est développé un véritable plaidoyer de l'institution pour un enseignement explicite et l'usage de capsule vidéo. Un des arguments pour inverser la classe est de proposer aux enseignants une modalité de travail qui permet de leur libérer du temps pour accompagner les élèves de manière plus individuelle, plus proche, plus explicite.

Dans quelle mesure peut-on supprimer les cours (certains cours) en classe et les remplacer par des capsules ? Y a-t-il des conditions à respecter ? Des contenus qui s'y prêtent mieux que d'autres ?

Dans la première partie de cet exposé la parole sera donnée à un enseignant de mathématiques de collège rompu à cette pratique et qui conçoit lui-même ses capsules, mises sur You Tube. Il illustrera sa manière de travailler avec les élèves et les raisons de ses choix et

[*] LDAR UPEC MCF– France– cecile.allard@u-pec.fr
[*] Collège Liberté (DRANCY)-professeur certifié- France– loic.asius@ac-creteil.fr
[*] LDAR UPEC MCF– France– julie.horoks@]u-pec.fr
[*] LDAR UCP Professeure émérite– France– aline.robert@u-cergy.fr

indiquera ce qu'il pense du dispositif (même s'il ne dispose pas d'évaluations précises). Cela permettra de bien comprendre ses intentions et comment il met en œuvre et apprécie cette pratique.

Dans la deuxième partie de l'exposé nous reviendrons aux moments d'exposition des connaissances (Bridoux & al. 2016), en présentant un point de vue didactique sur leur rôle possible dans les apprentissages puis en indiquant notre démarche pour les analyser, qui s'appuie sur la prise en compte des déroulements en relation avec les contenus.

Nous conclurons par une discussion, s'appuyant sur certains résultats que nous pourrons illustrer pendant l'exposé, et débouchant sur une présentation à plusieurs voix d'un cahier des charges à respecter pour utiliser ce type de ressources à bon escient.

II. LE POINT DE VUE D'UN ENSEIGNANT PRATIQUANT LA CLASSE INVERSEE : UN TEMOIGNAGE1

La classe inversée est une pratique pédagogique qui s'est répandue rapidement et qui a été adoptée par un grand nombre d'enseignants de mathématiques et d'autres disciplines. Cette pratique est caractérisée par une grande diversité de ses mises en œuvre, le point commun toujours partagé, est la création ou l'usage de capsules vidéo présentant des éléments du cours. Ces pratiques sont pour le moment assez peu étudiées par la recherche en didactique des mathématiques.

Les formations que j'ai animées ont été des occasions pour échanger avec des collègues inverseurs et partager nos constats à l'origine de nos essais d'inverser la classe : le temps de copie de cours apparait être un temps long pendant lequel la présence du professeur ne semble pas optimisée, par ailleurs le temps consacré aux exercices en classe, à l'activité mathématique des élèves, semble insuffisant. D'autres remarques, liées au temps viennent compléter : nous pensons que le travail hors la classe peut être pensé différemment. La plupart du temps, les élèves ont des exercices à faire hors la classe sans aide de leur professeur. C'est un point qu'une grande partie des inverseurs ont souhaité changer afin de rendre davantage efficace la présence de l'enseignant au contact des élèves. Pour cela, on déplace les temps et les lieux des apprentissages ce qui est souvent traduit de manière plus ou moins caricaturale par « cours à la maison et devoirs en classe ».

Mon aventure de classe inversée a débuté en 2011, dès ma 3ème année d'enseignement, la deuxième en établissement classé REP[2] sur des classes de 5ème puis j'ai poursuivi cette expérimentation en suivant mes classes jusqu'au brevet des collèges. Mon but était avant tout d'aider les élèves en difficulté et les élèves décrocheurs qui me semblaient perdre pied très tôt dans le cycle d'apprentissage et plus particulièrement lors des moments d'activité de découverte des notions de cours et du cours lui-même. Ce décrochage avait pour conséquence de rendre les élèves totalement inactifs à la maison (devoirs non faits) et très passifs en classe. Je souhaitais aussi intégrer davantage l'utilisation des nouvelles technologies dans mon enseignement pour le rendre plus attractif et ludique, notamment dans le travail hors la classe.

Mon fonctionnement en classe inversée a évolué au fil des années au gré des réussites et des échecs constatés auprès de mes élèves, mais je peux quand même dégager un canevas invariant des différentes étapes de ce que je propose aux élèves sur une nouvelle notion : une activité de découverte, une vidéo à écouter hors-classe, avec une fiche de prise de notes, et un questionnaire en ligne et des exercices en classe.

[1] L'usage de la première personne du singulier dans ce paragraphe souligne ce statut particulier de témoignage.
[2] REP : réseau d'éducation prioritaire

Dans mon dispositif de classe inversée, j'organise ainsi mes temps d'apprentissage et de travail aux côtés des élèves de façon à rythmer le plus possible les séances tout en individualisant au maximum l'aide apportée. Chaque nouveau chapitre est introduit en classe par une activité commune à tous les élèves qui aboutit à une synthèse co-construite mais dont l'institutionnalisation et sa formalisation écrite n'interviendront que plus tard. A la suite de l'activité la fiche de prise de notes est distribuée, permettant aux élèves d'accéder à la ressource vidéo et noter la trace écrite. Un questionnaire en ligne est associé à la vidéo et permet à l'élève de vérifier son degré de compréhension. Ce travail de prise de notes et de réponse au questionnaire en ligne est fait hors la classe avec un délai de temps nécessaire à la parade d'éventuelles embûches (accès à internet, accès à un ordinateur, problèmes de connexion...). De retour en classe, un débriefing du questionnaire en ligne est fait à partir des données statistiques des réponses des élèves. Ce débriefing débouche sur un débat avec les élèves et la mise en place d'éventuelles remédiations selon les difficultés rencontrées par certains. Les élèves poursuivent par un travail en classe en s'attachant à résoudre des exercices, des problèmes de nature diverses selon un plan de travail connu de tous et avec la possibilité de faire appel à moi lorsqu'ils en éprouvent le besoin. Je suis alors au contact permanent et régulier des élèves les plus en difficultés sans perdre de vue pour autant les autres.

Bien que j'essaie de différencier en fonction des besoins de mes élèves, ces derniers se voient tous proposer un même ensemble d'exercices « basiques ». Cette base commune me permet d'organiser des temps de travail collectif pendant lesquels je peux revenir sur des productions d'élèves significatives. Se lancer dans la classe inversée, impose une réflexion sur les ressources (conception des fiches, des questionnaires accompagnant les capsules proposées aux élèves) mais aussi sur les modalités de travail (alternance de travail en groupe, collectif et individuel renvoyé souvent hors la classe). Il est aussi nécessaire d'installer un nouveau contrat avec les élèves (et les familles). Mais cela amène aussi à se poser des questions sur le contenu. En effet, les choix des notions, des chapitres, des séquences que j'ai inversés ont aussi été une longue source d'interrogations. Comment choisir les notions à inverser ? Sur quels critères s'appuie-t-on pour décider si telle ou telle notion est capsulable/inversable ? Quoiqu'il en soit les choix des notions inversées sont des choix propres à chaque professeur. Aussi, je crois vraiment que toute notion mathématique est « capsulable » mais que ce montage vidéo mathématique apporte une plus-value plus ou moins importante à l'apprentissage de la notion par les élèves.

Chaque création de capsule embarque aussi des questions et des choix, multiples et sources de tourments pédagogiques et didactiques. Sur les contenus d'abord, que dois-je mettre absolument dans ma capsule vidéo ? Des choix d'usages ensuite, quel format, quelle durée, quelle tonalité, quel vocabulaire ? Toutes ces interrogations dans la conception d'une capsule vidéo sont en relation avec le malaise vis à vis des moments d'exposition des connaissances.

En effet, lorsque je construis un cours non-inversé, j'ai aussi des choix didactiques à faire mais les interactions avec les élèves ne sont pas les mêmes. On peut rebondir sur la parole des élèves, ajouter des remarques, des explications, changer d'exemple, modifier son vocabulaire, faire des schémas et ajuster le discours en restant au plus près des interventions d'élèves. En mode inversé, même si l'activité d'introduction est là pour réguler cette « mémoire de classe », les choix de conception de la capsule vidéo, réalisée forcément en amont, ont été faits sans cet aller-retour élèves-professeur, à partir de l'anticipation du professeur face à l'éventail d'éventuelles questions de ses élèves. Or chaque classe est différente et même s'il y a des constantes, la part d'adaptabilité du discours du professeur lors des moments d'expositions des connaissances n'est pas une part que l'on peut négliger.

Ainsi après quelques années de pratique, même si j'ai constaté des effets positifs comme le retard du décrochage des élèves, ou l'implication plus importante des élèves dans les devoirs faits hors la classe, je continue à penser que des conséquences ou des dérives de cette pratique doivent mettre en alerte les professionnels de l'éducation et particulièrement des mathématiques. La conception de capsules vidéo courtes, et la pratique de la classe inversée, ont été une machine à hacher, découper, segmenter le savoir mathématique pour le rendre plus digeste pour les élèves. Ainsi, même si à court terme, j'ai pu en voir des effets positifs on ne peut pas ne pas se poser la question du long terme. En trois années de pratique intensive puis deux autres années plus mixtes, j'ai pu constater chez beaucoup d'élèves la volonté d'avoir des capsules vidéo de tout : correction d'exercices, correction de contrôle, correction de sujet de brevet, de méthodologie.... Cela m'a particulièrement alerté quand, après leur passage au lycée, certains élèves, revenant me voir, me tenaient un discours stigmatisant le fait que leur nouveau professeur de mathématiques ne faisait pas de vidéos et donc qu'ils n'arrivaient pas à suivre correctement. Cela me fait dire qu'ils n'ont en fait pas « compilé » tout le savoir mathématique acquis au collège mais qu'ils ont peut-être vu ces capsules vidéo comme des épisodes d'une série et qu'une fois la saison terminée, ils n'en ont retenu que quelques éléments trop vagues pour passer à la saison suivante. Le savoir mathématique rencontré au collège par ces élèves ne s'est peut-être donc pas construit dans sa globalité et j'ai eu l'impression que la pratique de la classe inversée avait accentué le côté zapping et consommateur de savoir.

Enfin, même si tout cela repose sur mon expérience propre et que je n'ai pas développé d'outils d'analyse précis de cette expérimentation, les questions qui émergent ne peuvent laisser indifférent les professionnels de l'éducation tant la pratique de la classe inversée a fait d'adeptes à travers la France. La réflexion que cela a suscitée chez beaucoup de professeurs, puis la généralisation de cette pratique et la valorisation de celle-ci par les institutions sans analyses didactiques fines des tenants et des aboutissants doivent aussi nous mettre en garde. D'autant plus qu'à l'heure actuelle, la pluralité des pratiques existantes rend encore plus compliquée et difficile toute tentative d'analyse des classes inversées. Le positionnement de l'institution lui-même est à interroger car des outils « préfabriqués » ou « clés en main » sont désormais fournis aux enseignants par des relais sérieux et validés par l'institution. Je pense par exemple aux vidéos développées par les réseaux Canopé pour les notions de mathématiques du cycle 3 ou bien encore les ressources de la BRNE (Banque de Ressources Numériques pour l'école) pour le cycle 4 et plus récemment aussi l'apparition d'une chaîne Youtube Mathscope sous l'égide de l'APMEP. C'est surement différent d'utiliser une capsule déjà réalisée ou une capsule dont on est le concepteur. Tout cela doit attirer notre attention y compris sur les conséquences sur les apprentissages des élèves à long terme.

III. UN POINT DE VUE DIDACTIQUE SUR LES « COURS » (MOMENTS D'EXPOSITION DES CONNAISSANCES)

Cette première partie pose beaucoup de questions pertinentes à aborder, sur les moments d'exposition des connaissances dans les apprentissages mathématiques. Dans ce qui suit, on réserve le mot « cours » à ce moment, indispensable à nos yeux de didacticien, où l'enseignant livre des éléments généraux du savoir à retenir et à appliquer, éventuellement en lien avec des éléments contextualisés du même savoir qui ont précédé le cours. De fait, les connaissances des élèves et ce qu'ils ont fait avant un cours sont très importantes à connaître, tout comme les exercices qui suivront, pour apprécier les cours, qu'on ne peut pas concevoir de manière isolée du reste.

Il existe différentes modalités de déroulements de ces moments de cours et différentes organisations (en termes de contenu). Plusieurs variables différencient les choix de contenus pour les cours, nous retenons notamment l'indication, facultative, du statut des connaissances en jeu, qui peut être implicite ou explicite, avec les mentions « admis » ou « démontré » ou bien encore le fait que ce qui est donné dans le cours va ou non être applicable directement ensuite. Dans les capsules étudiées, le statut n'est pas indiqué, les connaissances apparaissent, alors, comme un texte fait de règles de droit dont on ne dit rien de l'origine.

Une autre variable est celle du temps d'exposition des connaissances (quelques minutes dans les capsules). Ces expositions « flash » réduisent le cours à ce qui peut servir aux élèves. On peut se demander dans quelle mesure plus le contenu du cours est succinct, non étoffé, plus il peut apparaître loin de ce que savent déjà les élèves, artificiel en quelque sorte, non inscrit dans l'ensemble En caricaturant, on pourrait voir dans les cours restreints, même filmés, une suite de résumés, limités aux méthodes à appliquer, sans réelle cohérence ni justification. C'est peut être ces limites qui ont conduit Loic à moins inverser, pour finalement favoriser à nouveau ce tissage entre cours et exercices, enrichi par les échanges collectifs en classe. Comment apprécier plus précisément ces moments de cours ?

1. Retour au cadre général d'analyse

Le concept de processus d'institutionnalisation est apparu d'abord en Théorie des situations didactiques C'est un processus qui permet aux connaissances visées, d'abord en actes (pour les élèves), travaillées à partir d'une situation d'action, d'être partagées, rendues publiques, formulées, décontextualisée et généralisées.

Nous référant pour notre part à la théorie de l'activité, nous basons nos études des apprentissages sur celles des activités des élèves[3], notamment en classe. Ce sont en effet, du point de vue que nous adoptons, ces activités qui déterminent pour une grande part les apprentissages (Robert & al. 2012). Leur analyse met en jeu les tâches proposées (au sens large, y compris les moments d'écoute), les déroulements organisés en classe, mais aussi le contexte (programmes, notions mathématiques en jeu et difficultés ; établissement, élèves concernés…). En fait ces activités des élèves sont en grande partie provoquées par les choix des enseignants, en termes de tâches, de décisions, de discours mathématiques et de commentaires, choix eux-mêmes conditionnés à la fois par la volonté de faire apprendre les élèves et par des contraintes liées au métier de professeur (ibidem).

Nous nous intéressons aux pratiques ordinaires d'enseignants soumis à des contraintes comme la nécessaire prise en charge des décrocheurs, d'autres élèves qui ne lisent pas leurs cours ou ne comprennent pas ce qui est écrit. Nous pensons donc que des expositions de connaissances sont visibles lors de phase comme les phases de rappels, des phases de bilan, des synthèses sont les moments qui nous intéressent. Lors de ces moments ponctuels, les savoirs et les connaissances formulées ont un niveau plus ou moins généralisées, formalisées. Ce que nous étudions c'est la dynamique entre ces différents moments, ces différents niveaux de formulations.

Mais pendant les cours, quand c'est l'enseignant qui parle, les activités des élèves sont particulièrement inobservables. Dans la mesure où nous ne pourrons pas y accéder directement, c'est à partir du discours de l'enseignant qui présente les connaissances à apprendre que nous travaillons, en nous centrant sur son rôle de médiateur. Nous nous inspirons des théories de Vygotski (1985) et tout particulièrement du modèle de la ZPD[4] pour

[3] Ce qu'ils disent ou non, font ou non, pensent : une partie est donc hors champ des observations.
[4] Zone proximale de développement

proposer une hypothèse qui nous servira à étudier ces moments. Nous admettons ainsi que l'enjeu de l'exposition des connaissances, compte tenu de ce qui a pu se passer avant et de ce qui se passera après, est d'arriver à faire activer chez les élèves, après le cours, des connexions, d'abord provisoires et partielles, entre les mots, les formules, les énoncés généraux présentés et les activités mathématiques particulières, contextualisées, qui leur sont proposées. Ce sont en particulier les commentaires ajoutés par l'enseignant au strict contenu mathématique qu'il a choisi de présenter, en relation avec les connaissances visées et avec les activités antérieures et à venir des élèves, qui peuvent contribuer à jouer ce rôle. Autrement dit, plus l'enseignant réussirait à rapprocher les éléments généraux qui sont en jeu de ce que savent déjà ou ont déjà fait les élèves, en engendrant ainsi un travail dans les ZPD des élèves, plus la conceptualisation individuelle visée pourrait avancer. On suppose aussi, suivant les hypothèses de Vygotski, mais ce n'est pas spécifique aux cours, que le fait que cela se passe en classe met en jeu le collectif des élèves qui peut participer aux évolutions individuelles en termes de compréhension

2. L'analyse des cours : prise en compte des contenus et des déroulements

L'étude de ce que nous appelons le relief des notions étudiées permet d'avoir une référence sur le savoir en jeu : nous croisons des éléments mathématiques, curriculaires et cognitifs. Les difficultés répertoriées des élèves sont ainsi dégagées, en lien avec les programmes concernés et les caractéristiques des notions retenues.

Cela permet d'étudier les contenus développés par l'enseignant, en repérant ses choix globaux puis locaux, au niveau des théorèmes, des exemples, des exercices résolus, etc. à partir de vidéos ou de transcriptions.

Ce premier repérage fait préciser en même temps les modalités des déroulements : les moments d'échanges avec les élèves, d'écoute, de copie du cours, les répétitions. Il permet en particulier de traquer ce qui vient des élèves, réponses à des questions de l'enseignant ou questions spontanées des élèves. C'est important dans la comparaison avec les capsules, pour comprendre en quoi les interventions des élèves peuvent enrichir même un moment de cours.

Suit l'étude locale de ce qui est ajouté dans le discours de l'enseignant au strict discours mathématique (étudié auparavant). Nous avons développé la notion de proximité pour labelliser des éléments de pratiques de l'enseignant pouvant conduire à des rapprochements avec les élèves, du moins interprétés comme tels par le chercheur, qu'elles soient conscientes ou non (Robert & Vandebrouck, 2014). Pour l'étude des cours, nous nous sommes restreints à l'étude des proximités dans le discours de l'enseignant en classe.

Ces proximités discursives[5] sont faites de commentaires ajoutés par l'enseignant sur les mathématiques, à propos du travail mathématique (ce que nous appelons méta), (cf. Robert & Robinet 1996 ; Tenaud 1991). Elles comportent des liens, des répétitions sans ou avec transformations (le dire autrement), des analogies ou métaphores, des éclaircissements, des explicitations, éventuellement des dévoilements ou mises en garde ; reprenant des éléments présents dans les activités, connaissances ou réactions des élèves, l'enseignant attire l'attention, fait redire ou questionne. Ces proximités peuvent être accompagnées de gestuelles adaptées, dont nous ne rendons pas compte, sauf pour ce qui est montré au tableau.

[5] Nous nous limitons aux proximités pouvant avoir une visée cognitive, même si les encouragements par exemple peuvent avoir des conséquences positives sur les apprentissages

Mettre en évidence les occasions de proximité, les proximités tentées, ou manquées, contribue à mieux comprendre ce que les enseignants développent ou non comme rapprochements éventuels, ce qui pourrait rester implicite et donc faire obstacle à la construction des connaissances visées. Une phrase du cours peut d'ailleurs contenir plusieurs proximités. En fait le chercheur ne peut repérer que des proximités possibles[6], mais n'a aucun moyen de savoir si elles ont été effectives (entendues) et encore moins « efficaces », même pour certains élèves seulement.

Compte tenu de la spécificité des cours de mathématiques déjà évoquée, entre énoncés généraux et exercices particuliers, nous nous sommes particulièrement intéressées aux proximités qui peuvent rapprocher un élément contextualisé et sa généralisation (dans les deux sens), ascendantes ou descendantes selon qu'il y a en jeu un processus inductif ou déductif, ou encore deux éléments ayant le même degré de généralité. Ces dernières proximités, horizontales, peuvent être locales (sur le détail du texte du savoir en jeu, les calculs faits, les démonstrations) ou plus générales (sur le sens, le pour quoi, le pourquoi, les statuts de ce qui est présenté). Nous donnerons des exemples pendant l'exposé.

Nous avons utilisé ce type d'analyse pour étudier des cours et des capsules et dégager des différences, par-delà les usages des capsules.

IV. DISCUSSION ET PERSPECTIVES

1. Discussion

Un cours en classe, par sa durée non strictement limitée, permet à la fois de présenter des éléments qui ne vont pas obligatoirement « servir » directement et d'expliciter des liens divers, entre ancien et nouveau, général et particulier et tout ce qui s'est passé en classe, en se référant aussi aux questions immédiates des élèves.

On peut s'interroger sur la portée et les limites des interactions avec les élèves pendant les cours, et sur la compréhension liée à l'exposition d'éléments « inutiles » qui n'auront pas de place dans une capsule. Chappet-Paries et al. (2017) ont montré des exemples où certains implicites du cours, mais pas tous, sont levés grâce aux interventions d'élèves. Dans une capsule analogue à ce cours, il reste beaucoup plus d'implicites et d'imprécisions, notamment par le manque de liens avec les cours précédents. Même dans les « bonnes » classes, on peut penser que certaines proximités sont difficilement amorcées par les élèves, et que c'est à l'enseignant de les prendre en charge, en restant le plus proche possible du déjà-là… Ce serait le cas des proximités ascendantes, notamment celles qui explicitent la généralisation, et horizontales générales, liées à des règles du jeu mathématiques. Ce type de proximités ne peuvent pas être développées dans une capsule. Peuvent-elles se rattraper en séances d'exercices ? Allard et Petitfour (2017) montrent que cela n'est pas fait dans le cas d'une séance sur l'usage du rapporteur. L'expérience menée est trop petite pour prétendre avoir des résultats certains, mais elle est suffisante pour donner des orientations aux futures recherches.

Dans les classes où les élèves ont du mal à comprendre l'intérêt des cours, sans doute y a-t-il aussi moins d'amorces de proximités ; il peut y avoir des interventions d'élèves très dispersées, correspondant à des ZPD différentes. La question du rôle du collectif, même limité, reste cependant posée dans les appropriations individuelles.

[6] Nous préférons possibles à potentielles pour ne pas introduire de confusion avec ce qui pourrait être et n'est pas.

On peut enfin s'interroger sur les raisons qui poussent les enseignants à s'inscrire dans ce mouvement de la classe inversée, au-delà de la volonté d'accompagner les élèves même hors la classe (voir témoignage Asius). D'autres facteurs jouent, comme la complexité des pratiques et contraintes auxquelles sont soumis les enseignants (Robert & al. 2012).

2. Vers un cahier des charges

Questionner l'intégration ou non des capsules nous amène à travailler sur un cahier des charges pour ces ressources.

La première condition d'un cahier des charges d'une pratique raisonnée et raisonnable de la classe inversée est inévitablement l'établissement d'un contrat d'usage entre les élèves, leurs parents, le professeur et l'établissement. Ce contrat nécessite une période de mise en place transitoire mais il semble incontournable qu'il faille aussi travailler sur le long terme.

Ensuite, un autre élément fondamental de ce cahier des charges tient aux modalités de conception d'une capsule vidéo. Tout d'abord, le format : il doit être court. En dessous de 3 minutes pour le cycle 4 (collège) et de 6 minutes pour le lycée semblent des formats courts envisageables. Bien entendu cette durée impose des choix. Un idéal serait tout de même de mentionner les compétences mathématiques abordées, l'objectif de la capsule vidéo et la notion mathématique à laquelle elle se rattache.

Le choix du vocabulaire est également un élément de réflexion à mettre en avant dans ce cahier des charges. Un compromis doit être trouvé entre un langage trop familier qui susciterait une adhésion peut-être plus aisée des élèves mais les éloignerait de la rigueur mathématique et un discours cadré, technique, susceptible de perdre les élèves dès le début de la vidéo. De même, il serait intéressant de mentionner ce qui est admis ou sera démontré (plus tard) afin de gagner en rigueur et clarté au niveau du contenu disciplinaire.

Enfin, l'idée d'associer à chaque capsule vidéo une fiche pédagogique pourrait être creusée, notamment en formation. Cette fiche pourrait par exemple mentionner le scénario adopté dans la vidéo et l'utilisation envisagée, notamment la manière de l'articuler dans le cours, dans une progression. Mieux encore, cette fiche pédagogique pourrait, à l'instar de celles développées par les réseaux Canopé, permettre à l'enseignant de développer en classe une activité étroitement liée à l'utilisation de la capsule, créant ainsi un pont entre la classe et le hors la classe. En effet, le lien entre privé et public reste à nos yeux constitutifs de l'acquisition des connaissances.

Reste qu'une réflexion sur le rôle des moments d'exposition des connaissances et ce que peuvent apporter leurs déroulements au sein d'un scénario complet peut faire l'objet d'une formation spécifique, qui permettrait aux enseignants de choisir en toute connaissance de cause les modalités les plus adéquates à chaque situation.

RÉFÉRENCES

Allard C., Petitfour E. (2017) Classe inversée : quel impact sur les connaissances ? *Petit x* 104, 25-47.

Allard C., Asius L., Bridoux S., Chappet-Paries M., Pilorge F., & Robert A. (2016) Quand le professeur de mathématiques est sur You Tube… *Cahier LDAR* n°16, IREM Paris sud

Bridoux S., Grenier Boley N., Hache C., &Robert A. (2016) Les moments d'exposition des connaissances en mathématiques, analyses et exemples. *Annales de didactique et sciences cognitives de Strasbourg* 21, 187-234.

Chappet-Paries M., Pilorge F., & Robert A. (2017) Moments d'exposition des connaissances et capsules vidéos pour classe inversée dans l'enseignement mathématique secondaire, *Petit x 105,38-72.*

Robert A., Penninckx J., & Lattuati M. (2012) *Une caméra au fond de la classe*. Besançon : PUFC.

Robert A. & Robinet J. (1996) Prise en compte du méta en didactique des mathématiques, RDM, 16-2, 145-176.Robert A., Penninckx J., Lattuati M. (2012) Une caméra au fond de la classe. Besançon : Presses Universitaires de Franche Comté.

Robert A., Vandebrouck F. (2014) Proximités-en-acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPDdes élèves : analyses de séances sur des taches complexes. R*echerches en didactique des mathématique*s 34, 2-3, 239-285.

Tenaud I. (1991) *Une expérience d'enseignement de la géométrie en Terminale C : enseignement de méthode et travail en petits groupes*. Thèse de doctorat, Université Paris-Diderot.

Vygostki L. (1985) *Pensée et langage*. Paris : Messidor.

REPRODUIRE UN CERCLE : UNE RESSOURCE DONT LA CONCEPTION, LA DIFFUSION ET L'USAGE SONT PROBLEMATIQUES

BULF[*] Caroline – CELI[**] Valentina

Résumé – Engagées dans l'élaboration d'une progression portant sur le cercle, nous avons conçu un problème original qui vise à créer le lien entre un gabarit de demi-disque et le compas, en matérialisant les éléments caractéristiques du cercle qui, dans l'énseignement primaire, sont souvent introduits de façon ostensive. Ainsi visons-nous à déterminer en quoi la conception, la diffusion et l'usage de ce problème, considéré dès lors comme une *ressource*, se révèle d'une grande complexité.

Mots-clefs : agir-penser-parler ; cercle ; école primaire ; reproduction de figures géométriques.

Abstract – Engaged in the development of a progression on the circle, we conceived an original problem which aims to create the link between a template of half-disk and the compass, by materializing the characteristic elements of the circle which, in primary education, are often introduced ostensibly. We aim to determine how the design, diffusion and use of this problem, considered as a resource, is very complex.

Keywords: act-think-speak; circle; primary school; reproduction of geometric figures.

Depuis plus de trente ans, les travaux de recherche en didactique de la géométrie se sont multipliés et ont fait avancer de façon substantielle nos connaissances sur les enjeux des problèmes de reproduction de figures géométriques planes à l'école primaire. Au point de départ de notre travail, se trouve alors l'envie partagée d'outiller l'enseignant pour s'approprier « facilement » des travaux de recherche portant sur ce type de problèmes (Bulf & Celi, 2015). Nous verrons, au cours de ce papier, que cela nous a conduites à la conception d'une *ressource*[1] dont la diffusion et l'usage se révèlent complexes : d'une part, par la dimension épistémologique qu'elle recouvre – en lien avec les objets de savoir géométrique, ici le cercle – et, d'autre part, par la dimension didactique qu'elle vise car les expérimentations de la ressource en question, menées dans diverses classes, ont révélé des mises en oeuvre tellement différentes qu'elles nous ramènent sur des questions fondamentales portant sur la nature des savoirs de formation en lien avec les pratiques des enseignants.

I. LE POINT DE DEPART : CONCEPTION D'UNE RESSOURCE POUR REPONDRE A UN BESOIN

En syntonie avec l'actualité de la recherche française en didactique de la géométrie (Perrin-Glorian & Godin, 2017 ; Bulf & Mathé, 2017), nos travaux s'inscrivent dans le cadre théorique développé par Duval (2005), à propos de la *déconstruction dimensionnelle*, et dans le prolongement des travaux portant sur des *problèmes de restauration* de figures planes, développés par les membres du dit *groupe de Lille*[2].

Considérant les problèmes de reproduction de figures planes, sous certaines conditions[3], comme des situations fondamentales[4] (Perrin-Glorian & Godin, 2017) pour traiter les

[*] Université de Bordeaux, Lab-E3D, EA 7441, ESPE d'Aquitaine – France – caroline.bulf@u-bordeaux.fr
[**] Université de Bordeaux, Lab-E3D, EA 7441, ESPE d'Aquitaine – France – valentina.celi@u-bordeaux.fr

[1] Au sens de « tout ce qui permet à un sujet ou une institution de nourrir son action », comme indiqué dans l'appel à communication pour le GT6 de EMF 2018.

[2] Nous désignons par *groupe de Lille* les membres du groupe de recherche qui a fonctionné à l'IUFM du Nord pas de Calais durant une vingtaine d'années : F. Brechenmacher, J.-R. Delplace, R. Duval, C. Gaudeul, M. Godin, J. Jore, B. Keskessa, R. Leclercq, C. Mangiante-Orsola, A.-C. Mathé, B. Offre, M.-J. Perrin-Glorian, O. Verbaere.

[3] Une figure modèle est donnée ; une partie de la figure – dite *amorce* – à obtenir est donnée soit par son tracé soit par un instrument (un gabarit déchiré, par exemple) qui permet de reporter des informations D2 de la figure

premiers concepts géométriques à l'école primaire (alignement, perpendicularité, symétrie orthogonale, etc.), nous avons mené une analyse diachronique de plusieurs manuels scolaires et des instructions officielles afin de caractériser l'évolution de ce type de problèmes au cours de ces trente dernières années (Bulf & Celi, 2015). L'un de nos axes de recherche a consisté à pister des traces éventuelles de l'influence de travaux de recherche en didactique de la géométrie. Il nous est apparu important de croiser ces trois dimensions – les travaux de recherche portant sur les problèmes de reproduction, les manuels scolaires et les instructions officielles – car celles-ci peuvent être toutes trois considérées comme des *ressources* dans la mesure où notre ambition première venait d'un besoin d'outiller les enseignants de façon efficace par rapport à leurs propres objectifs d'enseignement en classe.

1. *Les problèmes de reproduction de figures géométriques planes dans les instructions officielles et dans les manuels scolaires de ces trente dernières années*

Ce premier travail (Bulf & Celi, 2015) a mis en évidence que les problèmes de reproduction de figures planes n'apparaissent qu'à la fin des années 70 dans les programmes officiels de mathématiques et, depuis, une place de plus en plus importante leur a été accordée.

Dans les manuels scolaires, jusqu'au début des années 90, ce type de problèmes est quasiment absent. Ce n'est qu'à partir du milieu des années 90 jusqu'à aujourd'hui que l'on en trouve de plus en plus. Dans les manuels scolaires (jusqu'en 2015, date de constitution de notre corpus), il existe néanmoins peu de traces des travaux de recherche portant sur les problèmes de reproduction de figures planes et cela malgré une volonté de la part des « chercheurs » à l'origine de ces travaux de diffusion par différents canaux (publications, communications dans des colloques, formations initiale et continue, en ligne, …), depuis une vingtaine d'années. En effet, seule la collection *EuroMaths* (Hatier) fait figure d'exception en s'appuyant de façon argumentée sur de nombreux travaux de recherche en didactique de la géométrie ; on relève des traces évidentes de transposition des travaux de recherche sur les problèmes de reproduction, notamment à partir des travaux précurseurs de Ducel et Peltier (1986) sur les conditions nécessaires pour favoriser l'analyse d'une figure modèle pour sa reproduction. D'autres manuels (plus rares) peuvent proposer également des traces mais sont souvent peu en phase avec les ambitions premières des auteurs des travaux de recherche précités ou ceux proposés par le groupe de Lille.

2. *Identification d'un besoin : combler des manques dans une progression sur l'enseignement et l'apprentissage du cercle et du compas*

Parmi tous les problèmes de reproduction de figures planes analysés dans la première phase de notre recherche, nous avions examiné avec une attention particulière ceux, nombreux, mettant en jeu le cercle et le compas. Nous avons alors pointé des manques, à savoir que : l'articulation entre les différents usages du compas est pratiquement absente ; nulle part n'apparaît explicitement de prise en compte de la dialectique possible entre les différentes conceptions du cercle (Artigue & Robinet, 1982) ; en outre, sont presque inexistantes les conditions favorables pour exercer et développer chez les élèves le regard géométrique sur les figures (au sens du groupe de Lille). Nous nous sommes alors engagées

---

modèle ; on dispose d'instruments variés qui ont un coût d'utilisation donné ; quand les élèves pensent avoir terminé, ils peuvent tester leur production par un calque disponible auprès du maître (Perrin-Glorian & Godin, 2017). Compte tenu de ces contraintes, le groupe de Lille parle de **problèmes de restauration**, **cas particulier de problème de reproduction**, en raison de la présence d'une amorce.

[4] Au sens de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998).

dans l'élaboration d'une progression « comblant ces manques » et réunissant les conditions favorables pour faire évoluer le regard des élèves sur le cercle et le compas, du cycle 1 au cycle 3 (Bulf & Celi, 2016). Cette progression inclut plus particulièrement un problème original (Figure 1) que nous avons qualifié de « problème-clé » car il vise à créer le lien entre un gabarit de demi-disque et le compas (et donc entre diverses conceptions du cercle), en matérialisant les caractéristiques du cercle (le centre, rayon, diamètre – le centre étant obtenu par l'intersection des diamètres), qui sont souvent introduites de façon ostensive.



Figure 1 *– Le « problème-clé »*

Il s'agit, pour l'élève, de trouver un moyen de reproduire un cercle tracé sur la feuille distribuée (ce que nous appelons 'cercle-modèle'), en se servant uniquement du compas pour le tracer. Un gabarit de demi-disque lui est fourni et il devra s'en servir seulement pour prendre ou ajouter des informations sur le cercle-modèle (phase d'analyse de la figure-modèle). La feuille et le gabarit fournis ne peuvent être ni pliés, ni coupés. Pour résoudre le problème, on attend que l'élève trace un diamètre avec le gabarit de demi-disque sur le cercle-modèle, puis, en le tournant suivant la trajectoire du bord courbe, il en trace un second qui permettra de mettre en évidence le centre du cercle comme intersection des deux diamètres tracés et un rayon comme segment joignant le centre du cercle avec l'un de ses points. C'est ainsi que l'élève, en se servant du compas, devrait tracer le cercle demandé, identique au modèle. Le problème en question articule alors différentes conceptions du cercle : celles de courbure constante et invariante par rotation (par la présence du gabarit de demi-disque) tout en ouvrant la voie à celle nouvelle du cercle défini par un centre et un rayon (par l'obligation d'utiliser le seul compas pour tracer le cercle demandé).

Le reste de notre papier a pour objectif de déterminer en quoi la conception et la diffusion de ce problème, considéré dès lors comme une *ressource*, se révèle d'une grande complexité dont nous développons les origines dans la partie suivante.

II. COMPLEXITES DES CONSIDERATIONS EPISTEMOLOGIQUES ET DIDACTIQUES NECESSAIRES POUR LA CONCEPTION, LA DIFFUSION ET L'USAGE D'UNE RESSOURCE

1. Dimension épistémologique liée à la conception de la ressource (analyse a priori)

Pour mener une analyse *a priori* de notre problème-clé, outre une analyse mathématique, nous avons réfléchi à l'activité potentielle des élèves en fonction des valeurs des variables didactiques de la situation. Nous avons enrichi ce modèle d'analyse en présentant aussi l'articulation de trois dimensions relatives à notre objet d'étude *: agir-parler-penser* (Jaubert et al., 2012) du cercle mais aussi du centre et du rayon. Une fois déterminés et sans viser l'exhaustivité, les différents modes d'agir-parler-penser *a priori* nous ont fourni des balises pour l'analyse *a posteriori* et nous ont ainsi permis de repérer en contexte – lors du déroulement de la situation – les manifestations effectives des modes d'agir-parler-penser du

cercle et de ses éléments caractéristiques (centre et rayon) par l'enseignant et les élèves. En guise d'exemple, nous montrons ici différents modes d'agir-penser-parler *a priori* du cercle (Tableau 1 ; extrait de Bulf & Celi, à venir).

Manière de penser - voir dimensions et relations des différentes unités figurales	**Manières d'agir** Usage des instruments	**Manières de parler**
vision iconique (2D ou 1D)	reconnaissance d'une allure générale main levée (papier crayon)	rond / cercle
vision surface 2D	gabarit de disque deux moitiés de gabarit de demi-disque juxtaposées	rond / cercle / disque moitié de disque/cercle demi-disque demi-cercle
Figure ayant un ou des (une infinité) axes de symétrie vision surface ou contour de surface ou ligne 2D ou 1D/2D ou 1D	pliage / superposition	
vision contour de surface 1D/2D	contour d'un gabarit de disque	
vision ligne de courbure constante 1D	superposition et/ou rotation du bord d'un gabarit avec la ligne du cercle tracé	pareil partout
ligne courbe fermée 1D (+ vison dynamique : mouvement d'une ligne ou d'un point autour d'un point à une distance fixée)	trace graphique du « mouvement » du compas qui tourne	cercle, rond, compas qui tourne (autour d'un point fixe)
ligne 1D à égale distance d'un point 0D -> relation entre objet 0D et 1D	trace graphique du compas écartement du compas comme mémoire de cette distance	un cercle de centre X et de rayon *n*
ensemble de points à même distance d'un point donné -> relation entre objets 0D et 0D	trace graphique du compas RG	un cercle de centre X et de rayon *n*

Tableau 1 *– Différentes manières d'agir-penser-parler a priori du cercle dans le contexte du « problème-clé »*

De la même manière, les différents statuts du point – intersection de lignes, *coin* ou extrémité d'un segment, repère, etc. – sont à l'origine de différents modes d'agir-penser-parler du centre d'un cercle. Et encore, les différents statuts de la ligne – trait, repère, droite, segment, ensemble de points, etc. – conduisent à différents modes d'agir-penser-parler du diamètre et du rayon d'un cercle comme étant une distance, une longueur ou un segment. Ainsi l'analyse *a priori* du problème en termes de modes d'agir-penser-parler du cercle (et de ses éléments constitutifs) permet-elle de mettre en évidence toute la complexité du problème *a priori*, d'un point de vue d'abord épistémologique.

Parmi ces différents modes d'agir-penser-parler du cercle (ainsi que du diamètre et du centre), aucun n'a une primauté sur les autres ; tous sont nécessaires et intrinsèquement liés pour comprendre le cercle dans toute sa complexité, dans ce contexte. Nous faisons également l'hypothèse que ces trois dimensions s'inter-influencent, les registres graphique et langagier étant en étroites relations sans lien de subordination[5] (Bulf et Mathé, 2017). Et ce sont ces multiples liens et articulations qui nous paraissent intéressants à décrire car ils constituent selon nous les rouages du processus d'institutionnalisation (et donc de conceptualisation) qui se jouent lors de cette séance. En effet, pour un même élève, les chemins ne semblent pas linéaires entre ces différents modes d'agir-penser-parler du cercle (et de ses éléments constitutifs) : tous semblent devoir s'articuler afin de résoudre ce problème. La question se pose alors de l'évolution des connaissances[6] mises en jeu par l'élève, dans le processus de secondarisation (Jaubert et al., 2012) et d'institutionnalisation, vers un savoir[7] géométrique.

[5] Ce qui n'est toutefois pas le cas si les élèves sont dyspraxiques (cf. Petitfour, 2015)

[6] Au sens de Laparra & Margolinas (2016, p. 86) : « […] Nous parlons de *connaissance* pour désigner ce que le sujet met en jeu quand il investit une situation […] La plupart du temps, les connaissances ne sont pas formulées aisément car elles existent dans le temps et dans l'action ».

[7] Au sens de Laparra & Margolinas (*ib.*, p. 87) : « […] Nous parlons de *savoir* pour décrire ce que les membres d'une institution considèrent comme légitime et utile et qu'ils se transmettent dans certaines conditions définies culturellement ».

Ce faisant, de nouvelles questions surgissent sur la mise en œuvre, la diffusion et l'usage, en classe du problème-clé et notamment sur les connaissances d'action à expliciter : comment les faire évoluer vers le savoir visé ? Ici, le *cercle de centre x et de rayon n*. Jusqu'où aller dans l'explicitation des connaissances d'action (et plus généralement des modes d'agir-penser-parler du cercle / du centre / du rayon) ? Quels savoirs *exposer* ? Quelle formulation des savoirs stabiliser ? Quelle désignation retenir des objets en jeu ? Et surtout, compte tenu des différents et nombreux implicites repérés *a priori*, quels sont les « blancs à remplir »[8] ?

2. Dimensions épistémologique et didactique liées à la diffusion et l'usage de la ressource

Nous avons examiné le déroulement de notre problème-clé dans trois contextes de classe différents : la classe de Alice (Rome, Italie) avec des élèves de 9 ans (niveau équivalent au CM1), en avril 2016 ; la classe de Emilie (Bordeaux, France), avec des élèves de 8 ans (CE2), c'est l'une de nous deux (désignée par la suite Caro) qui a pris en charge la classe pour la séance, en mai 2017 ; la classe de Stella (Pau, France) avec des élèves de 11 ans (6^{e}), en novembre 2016.

Pour analyser et pouvoir comparer les mises en œuvre de la ressource dans ces trois contextes différents, nous avons choisi de nous concentrer sur la gestion de ce que nous considérons comme « un blanc à remplir » : *le bord droit du gabarit de demi-disque*. Cet élément de la ressource nous paraît crucial et déterminant dans la dynamique d'évolution des modes d'agir-penser-parler du cercle et de ses composants (centre, rayon). En effet, dans le contexte de notre recherche, nous désignons par « blanc à remplir » les différentes significations possibles assignées au « bord droit du gabarit de demi-disque » et qui sont implicitement ou explicitement exploitées au cours de la séance : diamètre, moitié de disque, axe de symétrie, etc. Ainsi la question *quel(s) blanc(s) à remplir ?* renvoie-t-elle une fois de plus à la tension du couple dévolution / institutionnalisation (Allard 2015) : cette question relève en effet du paradoxe de l'enseignant (Brousseau, 1998 ; Coulange, 2014) qui consiste, pour l'enseignant, à savoir quand, comment et quoi dévoiler de ses intentions et des connaissances en jeu sans tuer les enjeux et objectifs d'apprentissage visé. Selon nous, la question *quel(s) blanc(s) à remplir ?* englobe donc, avec un point de vue plus général, nos questions formulées dans le paragraphe précédent. Ces différentes questions nous paraissent essentielles à examiner lorsqu'il s'agit de concevoir un document accompagnant la ressource : quelles préconisations, indications ou précautions prendre ? Quoi dire/ne pas dire à l'enseignant ? Comment le guider pour une mise en œuvre idoine ? Ces questions nous paraissent aussi cruciales que des indications sur le matériel ou la consigne car, comme les analyses *a posteriori* l'indiquent, les différentes manifestations de ce « blanc à remplir » (et ce n'est pas le seul blanc à remplir qui nous paraît important) sont le témoin de déplacements cognitivo-langagiers de l'élève et donc également témoin du processus de secondarisation (et donc d'institutionnalisation) en cours.

Comme dans toute analyse comparative, nous avons pu identifier des éléments communs et cela malgré les différents passés et les diverses cultures caractérisant chacun des trois contextes. C'est le cas, par exemple, à propos des procédures adoptées par les élèves. Quel que soit le contexte, et en enfreignant parfois les consignes, nombreux élèves ont tendance à résoudre le problème en positionnant à l'œil le compas sur le bord droit du gabarit du demi-disque ou sur un premier tracé de diamètre obtenu en faisant le contour de ce bord droit sur le

[8] Nous empruntons à Tauveron (2011) la notion de « blanc à remplir » qui, dans le champ de la didactique du français, désigne toute connaissance implicite nécessaire pour comprendre certaines mises en relation ou significations, à propos de la lecture de textes ou d'albums.

cercle-modèle. Presque la totalité de ceux qui réussissent tracent deux diamètres horizontaux et verticaux : tout se passe comme si, dans les modes d'agir-penser-parler du diamètre du cercle, les élèves convoquent celui de l'axe de symétrie du cercle ; le point obtenu devient alors pour eux le repère permettant de positionner la pointe sèche du compas, puis l'écartement du compas obtenu assure que la courbure soit la même partout :

> **Kelya (élève de CE2, Bordeaux)** : « une **marque** pour me repérer (…) oui parce que là j'ai fait un **morceau** // après j'ai vu que là c'était **exactement les mêmes** /// là j'ai refait là parce que // et après // comme il extrait **exactement pareil** je l'ai retracé là »
>
> **Paolo (élève de CM1, Rome)** : « Et puis nous devons voir si ces **quatre formes** sont **égales** » « J'ai tracé la moitié du disque / et puis aussi de cet autre côté / et il y a ainsi **quatre angles** »
>
> **Maxime (élève de 6e, Pau)** : « Du coup on a coupé en quatre quarts maintenant »

Dans Artigue & Robinet (1982, p.19), la prégnance des axes horizontal et vertical est déjà repérée ; ces auteures l'explicitent de la façon suivante :

> « Le cercle y apparaît comme une figure géométrique ayant même dimension dans deux directions privilégiées : l'horizontale et la verticale. Il a une longueur et une largeur, voire une largeur et une hauteur et elles ont même mesure. Pour tracer cette longueur et cette largeur, l'enfant ne cherche pas, semble-t-il, à réaliser un maximum de longueur de cordes horizontales ou verticales, mais plutôt à partager le cercle en deux parties égales. Le milieu du cercle est justement le point de croisement de la longueur et de la largeur. De ce fait, longueur et largeur semblent être considérées comme des axes de symétrie plutôt que comme des diamètres ensemblistes. »

En poursuivant cette comparaison d'usages possibles de la ressource, des points communs et des divergences apparaissent dans les conduites et les choix des enseignantes ou dans leurs interactions avec les élèves. Tout au long de la séance, Alice et la chercheure expérimentatrice (nous sommes à l'école élémentaire) restent proches du contexte de la manipulation et du registre graphique. Par exemple :

> **Alice (CM1, Rome)** : **comme ça et comme ça** les autres ne voient pas ce que tu fais sur la feuille et donc **comme ça et comme ça** c'est **quoi**?
>
> **E2 (CM1, Rome) :** j'ai tracé **la moitié du disque** *[le gabarit est posé « verticalement » sur le modèle de façon à ce que son bord courbe coïncide avec une partie du cercle-modèle]* et puis aussi de cet **autre côté** *[le gabarit est posé « horizontalement ».*

Mais Alice n'utilise jamais le mot diamètre ou bord droit alors que la chercheure expérimentatrice, dans la classe d'Emilie, parle explicitement de « contour droit » :

> **Caro (CE2, Bordeaux) :** Qu'est-ce que vous en pensez de **son tracé** ? (…) vous avez fait ça vous aussi ? (…) il a **fait le contour droit** / ça avait **partagé en 2 le cercle.**

Seule Stella, en classe de 6e, désigne rapidement par diamètre le tracé obtenu mais, dans l'usage de la ressource en question, son objectif est différent :

> **Stella (6e, Pau)** : oui on trace **un segment qui a un nom** / Noé // un **rayon** pour Noé /// un **diamètre** //

Aucune des enseignantes observées ne fera référence au diamètre en tant qu'axe de symétrie, connaissance pourtant disponible chez tous les élèves de ces trois contextes et qui, comme nous l'avons évoqué précédemment, est à l'origine de certaines procédures d'élèves.

Dans les classes de Stella et d'Alice, très rapidement, on déplace l'objet de discours vers le centre alors que la reconnaissance et le statut particulier de ce point ne seront reconnus que beaucoup plus tard dans la classe de Emilie (par la chercheure expérimentatrice). Tout au long des déroulements, quelle que soit la classe, la façon d'agir et parler du bord droit du gabarit de demi-disque servira de point d'appui au processus de secondarisation qui va, par voie de conséquence, se déroule de façon bien différente dans les trois contextes. Dans le discours

d'Alice, on reconnaît des allers-retours permanents rendant compte de modes d'agir-penser-parler du diamètre différents (indiqués entre crochets dans l'extrait ci-dessous) :

> **Alice (CM1, Rome)** : de cette de cette ligne et de celle-ci elles se coupent, n'est-ce pas ? et si je fais comme ça ? et comme ça ? [*elle fait semblant de tracer des diamètres sur le modèle*] … elles se coupent ? elles se coupent toutes ? … et où se coupent-elles ? [Le bord droit du gabarit permet de tracer des lignes qui se coupent en un point]
>
> **Alice (CM1, Rome)** : … si j'avais un gabarit assez grand je pourrais trouver la la / la moi…
>
> **Plusieurs élèves (CM1, Rome)** : la moitié [Le gabarit permet de déterminer la « moitié » du disque]
>
> **Alice (CM1, Rome)** : **si maintenant je trace d'ici** [*elle trace un troisième diamètre*] **fais-je toujours la moitié ? d'ici fais-je encore la moitié** [*un autre diamètre*] **encore la moitié** [*encore un autre diamètre*] / **toutes ces lignes d'après vous sont-elles égales ?** [ces lignes ont la même longueur]

Ces fluctuations entre les différentes visions des objets en jeu traduit souvent une certaine instabilité dans les objectifs visés par Alice que l'on peut rapprocher d'un phénomène dit de « brouillage des contextes interprétatifs » (Coulange, 2014) : ici, elle cherche à déplacer les objets de discours vers la relation entre diamètre et rayon mais les élèves restent sur la vision du centre du cercle comme point de repère, origine ; contrairement à ses intentions, sa tentative de se servir du compas conforte les élèves dans la vision du centre comme point fixe, repère. Dans la difficulté de conduire les élèves vers la vision du centre comme point à égale distance de tous les points qui constituent le cercle, Alice se sert alors d'une ficelle, qui « matérialise » pour elle le rayon. Tout se passe comme si, pour Alice, la seule façon de penser le cercle (vision en termes de ligne ou d'ensemble de points à égale distance) était celle qu'elle souhaite valider, alors que celle-ci ne correspond pas à celle qu'ils sont en train de construire dans cette situation. Dans la classe de Stella, le cercle étant rapidement caractérisé par ses éléments (diamètre, centre, rayon), l'enseignante ne reviendra pas sur l'aspect matériel du gabarit (bord droit ou moitié de disque). En revanche, la désignation du diamètre oscille souvent entre segment ou longueur ou segment qui relie deux points du cercle passant par le centre. La trace écrite renverra pourtant à une définition en termes de lieu géométrique, ignorant les modes d'agir-parler-penser du cercle qui ont pu être convoqués, voire confrontés, lors du déroulement effectif de la situation. Dans la classe d'Émilie, les premiers échanges collectifs en appui sur les premiers modes d'agir-penser-parler du cercle (*à l'œil*) conduisent rapidement à reformuler le problème par « *où placer la pointe sèche sur la ligne tracée ?* ». C'est dans le langage qu'évolue la désignation de ce « repère » vers une interprétation en tant qu'intersection de lignes que l'on nommera « centre ». Consciente des différentes désignations possibles de tous ces éléments, la chercheure expérimentatrice a à cœur de mettre en lien ou d'expliciter les différentes désignations possibles, créant sans doute là aussi des phénomènes de brouillage de contexte interprétatif :

> **Caro (CE2, Bordeaux)** : « Hein voilà ça **c'est un diamètre** // Un diamètre c'est **donc le bord droit du demi-disque** qui **a un début et une fin dès lors qu'il rencontre le cercle** et vous avez appelé ces **intersections** entre le bord du demi-disque et le cercle // vous les avez appelés vous avez reconnu que **ça faisait des points** ».

La volonté d'expliciter et de mettre en lien toutes ces désignations laisse également peu de place aux propres reformulations et tissages de la part des élèves.

III. CONCLUSIONS

La mise en œuvre de notre ressource dans trois contextes différents met en évidence toute la complexité qui réside dans le passage d'une situation fondamentale à une situation didactique. La mise en œuvre dans les trois classes révèle des traitements très différents alors que les procédures des élèves observées, quel que soit le contexte, sont finalement assez

proches (procédures basées sur des modes d'agir-penser-parler du diamètre comme axe de symétrie). Quel que soit le contexte, les articulations entre les différents modes d'agir-penser-parler ne sont pas toujours « cohérentes » : par exemple, un mode d'agir sur le diamètre en tant qu'« axe de symétrie » sans en parler ou un mode de penser le cercle comme lieux géométriques sans « l'agir ». Le rôle des instruments et les façons de parler des objets n'étant pas univoques, l'orchestration collective des échanges langagiers est complexe. En effet, soit ces multiples désignations sont assumées et ouvrent la voie à de nombreux malentendus ou brouillages de contexte interprétatif, soit l'enseignant suit unilatéralement son mode d'agir-penser-parler sans tenir compte des nombreuses voies possibles.

Cette complexité d'origines multiples – épistémologique, didactique et liées aussi aux pratiques enseignantes – nous conduisent à penser que les choix consistant à expliciter certains « blancs à remplir » se révèlent trop complexes pour être laissés à l'appréciation de celui qui s'appropriera la ressource.

REFERENCES

Allard C. (2015) *Etude du processus d'Institutionnalisation dans les pratiques de fin d'école primaire : le cas de l'enseignement des fractions*. Université de Paris VII.

Artigue M. & Robinet J. (1982) Conceptions du cercle chez des enfants de l'école élémentaire, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 3.2, 5-64.

Brousseau G. (1998) *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Bulf C., Celi V. (2015) Une étude diachronique des problèmes de reproduction de figures géométriques au cycle 3. *Grand N* 96, 5-33.

Bulf C., Celi V. (2016) Essai d'une progression sur le cercle pour l'école primaire - une articulation clé : gabarit-compas. *Grand N* 97, 21-58.

Bulf C., Celi V. (à venir) *Conceptualisation en classe de géométrie : mise à l'épreuve d'une situation et d'un cadrage théorique en termes de circulation*. Actes de la 19e école d'été de didactique des mathématiques, Paris 20-26 août 2017.

Bulf C., Mathé A.-C. (2018) Agir-parler-penser en géométrie, un point de vue sémiotique sur l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie à l'école primaire, conférence plénière, Actes du 44e Colloque de la COPIRELEM, Épinal13-15 juin 2017.

Coulange L. (2014) Les pratiques langagières au cœur de l'institutionnalisation de savoirs mathématiques. *Spirale. Revue de recherches en éducation* 54, 9-28.

Ducel Y., Peltier M.-L. (1986) *Géométrie. Une approche par le dessin géométrique au CM2*. IREM de Rouen, Rouen.

Duval R. (2005) Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Les annales de didactique et de sciences cognitives*10, 5-53.

Jaubert M., Rebière M. & Bernié J-P. (2012) *Communautés discursives disciplinaires scolaires et construction de savoirs : l'hypothèse énonciative*.
https://www.leseforum.ch/myUploadData/files/2012_3_Jaubert_Rebiere_Bernier.pdf (consulté la dernière fois le 17 février 2019)

Laparra M., Margolinas C. (2016) *Les premiers apprentissages scolaires à la loupe*. De Boeck, Louvain-la-Neuve.

Perrin-Glorian M.-J., Godin M. (2017) *Géométrie plane : pour une approche cohérente du début de l'école à la fin du collège*.
https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01660837/document (consulté la dernière fois le 17 février 2019)

Petitfour É. (2015) *Enseignement de la géométrie des élèves en difficulté d'apprentissage : étude du processus d'accès à la géométrie d'élèves dyspraxiques visuo-spatiaux lors de la transition CM2-6ème*. Université Paris-Diderot – Paris 7.

Tauveron C. (2011) *La lecture comme jeu 1, à l'école aussi. Université d'automne « La lecture et la culture littéraire au cycle des approfondissements »*.

http://eduscol.education.fr/cid46316/la-lecture-comme-jeu-1-a-l-ecole-aussi.html (consulté la dernière fois le 17 février 2019)

OUTILLER LES ENSEIGNANTS POUR LA SELECTION DE TACHES MATHEMATIQUES DANS LES MANUELS

CASTELA[*] Corine

Résumé – Nous présentons des outils issus de deux cadres théoriques, la Théorie Anthropologique du Didactique et la Double Approche, pour analyser les exercices et problèmes mathématiques. Nous montrons que ce style d'analyse peut aider l'enseignant à concevoir un parcours basé sur la résolution de problèmes visant à développer et évaluer les capacités mathématiques des élèves. Ceci est illustré par des exemples qui se réfère à la capacité 'Utiliser le théorème de Thalès' du programme français en 4e et 3e.

Mots- clefs : Programme du second degré, analyse de tâche, praxéologie, moments de l'étude

Abstract - We present tools coming from two theoretical frameworks, the Anthropological Theory of Didactics and the Double Approach, to analyze mathematical exercises and problems. We show that this style of analysis will support the teacher's work in designing a program based on problem solving to enhance and assess students' mathematical skills development. This is illustrated through examples which refer to the skill 'Being able to use the Intercept theorem' from the French curriculum for Grades 8 and 9.

Keywords: Secondary school curriculum, task analysis, praxeological study process.

I. INTRODUCTION

Suivant en cela la tendance internationale encouragée par l'OCDE, le gouvernement français a initié en 2006 une importante réforme éducative aux niveaux primaire et secondaire avec l'objectif principal de passer d'une centration sur les disciplines académiques à une priorité donnée au développement de compétences clés. La nature transdisciplinaire de la notion de compétence est alors particulièrement mise en avant, ainsi que la nécessité de prendre appui, pour développer les compétences sur des situations diverses et complexes, aussi proches de la vie réelle que possible. Pour le collège (Niveaux 6 à 9), les programmes de mathématiques sont réécrits et publiés en 2008[1]. Cependant, sauf pour quelques déclarations générales sur la contribution de la discipline au développement des compétences, les changements sont limités et les objectives d'apprentissage restent structurés par les connaissances et capacités mathématiques. En d'autres termes, les enseignants de mathématiques ont à mettre en œuvre ce qu'ils peuvent considérer comme un programme en deux parties : d'une part, développer les compétences transversales, une mission pour laquelle ils ne se sentent pas vraiment préparés ; d'autre part, enseigner les mathématiques. Ceci peut expliquer que ceux des enseignants qui avaient toujours enseigné les mathématiques avec une pédagogie plutôt classique ont poursuivi dans la même voie, restant par exemple peu enclins à organiser des séances collectives de résolution de problèmes complexes. Ainsi, l'introduction dans l'épreuve de mathématiques du Brevet des Collèges (examen de fin de cycle, en 3e - niveau 9) d'une tâche complexe (contexte quotidien, autonomie requise dans l'utilisation des mathématiques) s'est traduite par un échec important chez les élèves et des protestations de la part des enseignants.

Une nouvelle réforme a été initiée en 2015 et implémentée en 2016, les programmes étant une nouvelle fois réécrits[2]. En ce qui concerne les compétences, l'approche adoptée diffère de la précédente en ce que deux niveaux de compétences mathématiques sont explicitement considérés : des compétences générales, qui sont la contextualisation en mathématiques de

[*] LDAR (Laboratoire de Didactique André Revuz), Universités de Rouen, Paris Diderot, Paris-Est Créteil, Artois et Cergy Pontoise- France-Corine.Castela@univ-rouen.fr

[1] BO Spécial n°6 du 28-08-2008. Programmes du collège. Programmes de l'enseignement de mathématiques.

[2] BO Spécial n°11 du 26-11-2015. Programme d'enseignement du cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2), du cycle de consolidation (cycle 3) et du cycle des approfondissements (cycle 4).

compétences transversales ; des compétences locales (capacités dans le programme de 2008) reliées à des compétences générales et à des connaissances mathématiques.

Exemples de contextualisation en mathématiques de la compétence transversale 'Raisonner' (Programmes 2015, p. 369 -Cycle 4 - Niveaux 7 à 9) :

Résoudre des problèmes mettant en jeu des grandeurs variées (géométriques, physiques, économiques) : mobiliser les connaissances nécessaires, analyser et exploiter ses erreurs, mettre à l'essai plusieurs solutions.

Démontrer : utiliser un raisonnement logique et des règles établies (propriétés, théorèmes, formules) pour parvenir à une conclusion.

Exemples de compétences mathématiques locales liées à la compétence Démontrer (ibidem, p. 378) :

Résoudre des problèmes de géométrie plane, prouver un résultat général, valider ou réfuter une conjecture. Par exemple, prouver que deux droites sont parallèles. Exemples de connaissances associées : caractérisation angulaire du parallélisme, parallélogramme : propriétés relatives aux côtés et aux diagonales, théorème de Thalès et sa réciproque.

En utilisant le modèle praxéologique développé par la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD dans la suite, Chevallard, 1999), nous dirons que ce programme est structuré par une liste relativement limitée de praxéologies mathématiques, l'horizon éducatif étant que les élèves deviennent capables de les employer à leur propre initiative dans des situations problématiques mathématiques ou non. Le terme 'horizon' signifie ici que cet objectif très ambitieux ne sera pas atteint par certains élèves pour certaines des praxéologies en question (voir plus loin). Cependant, les enseignants sont supposés accepter cette mission impossible, l'hypothèse institutionnelle étant peut-être que, ce faisant, ils vont favoriser le développement des compétences transversales clés. Cette hypothèse demanderait à être confirmée. Toutefois, en ce qui concerne l'éducation mathématique, les recherches ont apporté des preuves solides du fait qu'une pédagogie basant l'étude des mathématiques sur leur caractère outil pour répondre à des questions et mettant l'accent sur l'activité des élèves, favorise, dans certaines conditions, l'apprentissage. Ces résultats pourraient aider les enseignants français à faire face aux exigences de la réforme de 2015, du moins pour ce qui concerne les mathématiques.

Dans la suite, nous situant à l'interface entre la sphère de la recherche et celle de l'enseignement, nous cherchons à montrer comment des outils produits par la TAD (Chevallard, 1999 ; Castela, 2008) et par la Double Approche des pratiques enseignantes (DA dans la suite, Vandebrouck, 2008)[3] peuvent aider les enseignants à réaliser les types de tâches didactiques que les programmes de 2008 prétendent traiter en décrivant les objectifs en termes de capacités :

> La définition de ces capacités vise donc à clarifier les attentes, à préciser les priorités et à fournir des repères dans le but d'aider les enseignants dans leur travail de programmation et de mise au point des évaluations qui permettent d'en baliser la réalisation. (p.12)

Les auteurs de manuels sont chronologiquement les premiers concernés par ces types de tâches didactiques. Puis, à leur tour, les enseignants utilisent les ressources mises à disposition par les manuels pour planifier leurs séquences d'enseignement et concevoir leurs évaluations.

[3] Le cadre théorique global de notre réflexion est la TAD, nous ne faisons qu'emprunter à la DA ses outils d'analyse des tâches sans adopter pour cela l'approche cognitiviste de la théorie de l'activité qui est la sienne.

Notre texte sera centré sur un item du programme de troisième (2008, p.37), en deux parties :

Connaissances : Configuration de Thalès ; Capacités : (C_1) Connaître et utiliser la proportionnalité des longueurs pour les côtés des deux triangles déterminés par deux parallèles coupant deux droits sécantes (théorème de Thalès dans la suite) ; (C_2) Connaître et utiliser un énoncé réciproque.

II. CLARIFIER LES ATTENTES : QUELLE PRAXEOLOGIE LOCALE EST EN JEU ? À QUEL NIVEAU DE MAITRISE ?

En dépit de la citation précédente, le texte des programmes n'explicite pas du tout l'étendue du champ de problèmes dans lequel les élèves sont supposés utiliser les théorèmes considérés. Donc les auteurs de manuels et les enseignants doivent déterminer pour quels types de problèmes ces résultats produisent une technique et décider si les élèves sont supposés ou non devenir capables d'utiliser chacune d'entre elles. Dans les termes de la TAD, il s'agit de décrire une praxéologie locale, c'est-à-dire une organisation mathématique obtenue en intégrant un certain ensemble de praxéologies ponctuelles justifiées par le même discours technologique.

Quatre types de tâches sont classiquement incluses dans l'organisation locale relative au théorème de Thalès et sa réciproque : (T_1) Calculer la longueur d'un segment ou d'un rapport de longueurs, (T_2) Prouver que deux droites sont sécantes, (T_3) Prouver que deux droites sont parallèles, (T_4) Prouver que deux longueurs ou deux rapports de longueurs sont différents. Certaines conditions, associées aux hypothèses des théorèmes, doivent être vérifiées dans le contexte de la tâche : présence de deux triplets de points alignés (O, A, B) et (O, A', B')[4] avec des hypothèses sur les droites (AB) et (A'B') (parallèles ou sécantes) ou sur des rapports de mesures algébriques faisant intervenir ces points (égaux ou différents).

Considérons maintenant le problème suivant :

> Soit un triangle ABC et trois points P, Q and R des droites (BC), (CA) et (AB) respectivement, distincts de A, B et C, démontrer que si $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \times \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1$, alors P, Q et R sont alignés.

Ce problème peut être résolu en utilisant le théorème de Thalès. Dans les limites de l'organisation praxéologique locale incluant les quatre types de tâches précédents, cette solution nécessite un très haut niveau de maîtrise de la capacité C_1. Pourquoi ? La tâche à traiter ne renvoie à aucun des types T_i inclus dans la praxéologie locale, il n'y a pas de droites parallèles dans la configuration et les rapports de mesures algébriques impliqués font intervenir six points. Notre expérience est que la plupart des étudiants qui se préparent à devenir enseignants de mathématiques au secondaire, après une licence de mathématiques, n'utilisent pas spontanément le théorème de Thalès pour résoudre ce problème et que, si on le leur suggère, ils éprouvent des difficultés à le faire. Ceci est peut-être dû au fait que le corollaire direct du théorème qui permet de montrer que, sous certaines hypothèses, trois points sont alignés, n'est pas enseigné en France au lycée et, qu'à l'université où la géométrie est abordée dans un cadre vectoriel et affine, la praxéologie locale relative au théorème de Thalès perd son intérêt.

À ce stade, clarifiant ainsi le texte des programmes, nous considérons que la praxéologie locale que les élèves de troisième sont supposés s'approprier réunit au plus quatre types de tâches (T_4 étant souvent négligé). Puis nous définissons le plus haut degré de maîtrise de cette organisation mathématique comme d'être capable d'utiliser le théorème de Thalès ou sa

[4] La conservation des rapports de longueur par projection parallèle n'est pas enseignée en France au secondaire.

réciproque pour résoudre une tâche ne relevant directement d'aucun des T_i, et ce dans un contexte non typique, i.e. dont sont absents les objets et hypothèses cruciales. Il est raisonnable de penser que ce niveau de maîtrise n'est pas visé au secondaire et que les attentes relatives aux capacités C_1 and C_2 renvoient strictement aux types de tâches $T_{1\to4}$: il s'agit de savoir utiliser l'un des théorèmes pour résoudre une tâche appartenant visiblement à l'un de ces quatre types.

III. QUELQUES ELEMENTS DE CADRE THEORIQUE

La TAD considère l'enseignant comme le directeur du processus d'étude que les élèves réalisent pour créer ou recréer une praxéologie mathématique. Ce processus est organisé en six moments, chacun d'entre eux remplissant une fonction spécifique ; toutes sont essentielles pour la pleine réussite de l'apprentissage : le moment de la première rencontre avec la praxéologie en jeu (M_1), le moment exploratoire (M_2) au cours duquel une technique τ émerge de la rencontre avec plusieurs tâches du même type T, le moment technologico-théorique (M_3) consacré au développement d'un discours rationnel relatif à τ, le moment du travail de la technique (M_4), le moment de l'institutionnalisation (M_5) et le moment de l'évaluation de la technique et des acquis des élèves (M_6). Dans ce texte, nous sommes particulièrement concernés par M_4 : selon Chevallard (1999, p. 253), M_4 doit « à la fois améliorer la technique en la rendant plus efficace et plus fiable (ce qui exige généralement de retoucher la technologie élaborée jusque-là), et accroître la maîtrise qu'on en a ».

Ce modèle n'est pas lié à un style pédagogique particulier, notre texte ne l'est pas non plus. Dans le style classique, le processus d'étude peut commencer par M_3 (présentation d'un théorème), suivi de M_1-M_2 sous l'intitulé 'Applications'. Une telle chronologie est inversée quand le processus d'étude est inspiré par des approches constructivistes. Qu'en est-il de M_4 ? Il faut reconnaître que la TAD ne fournit guère d'outils permettant aux enseignants d'organiser ce moment qui est particulièrement concerné par les questions didactiques relatives au développement des capacités : Quelle est l'étendue visée du type de tâches ? Est-il possible de définir des critères de différenciation entre les tâches, qui puissent servir de base à la conception d'un parcours progressif de résolution de problèmes et à l'évaluation des acquis des élèves ? Pour répondre à ces questions, nous nous tournons vers la Double Approche (DA dans la suite), laquelle, se référant à la Théorie de l'Activité, s'intéresse particulièrement aux activités des élèves, sous l'hypothèse que leurs apprentissages résultent des activités qu'ils développent en réponse aux tâches mathématiques. La DA a développé des outils pour analyser ce qu'un élève devrait faire avec ses connaissances pour résoudre un exercice ou un problème donné. Les éléments pris en compte sont les suivants : quelles sont les solutions possibles au niveau scolaire considéré ? Quelles connaissances mathématiques y sont impliquées ? Ont-elles été enseignées récemment ou pas ? Y a-t-il des indices concernant la technique à utiliser dans l'énoncé du problème, et à la suite, dans le discours de l'enseignant ? Et enfin, quelles sont les adaptations que la tâche spécifique impose à la technique générique ? La DA propose une caractérisation de telles adaptations (par ex. Vandebrouck, 2008 ; Horoks & Robert, 2007) : reconnaissance des éléments rendant possible l'utilisation du théorème, de la formule, de la définition ou de la technique à utiliser ; mélange avec d'autres connaissances mathématiques ; introduction de nouveaux objets, notations, points, etc.; changement de cadres, de registres de représentation, de points de vue ; introduction d'étapes dans la solution ; utilisation des résultats de questions antérieures ; existence de choix relatif à la procédure de résolution ; déficit de connaissances.

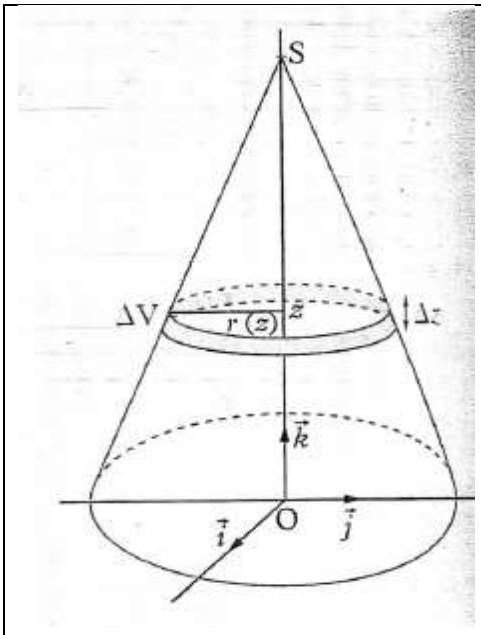
Notons bien que ce style d'analyse n'est pas de nature psychologique. L'analyse n'est pas basée sur les hypothétiques connaissances mathématiques d'un élève donné, mais sur le

contexte institutionnel de la résolution, depuis les programmes officiels au niveau scolaire considéré jusqu'à son implémentation effective par un manuel ou un enseignant. C'est pourquoi il n'est pas anormal que ce travail puisse être importé dans le cadre de la TAD pour répondre aux questions que nous avons soulevées à propos du moment du travail de la technique.

Dans la suite, nous nous centrons sur la praxéologie ponctuelle relative à la technique produite par le théorème de Thalès pour le type de tâches T_1 'Calculer la longueur d'un segment ou d'un rapport de longueurs' (notée OM_1 dans la suite).

IV. QUELLE DOIT ETRE L'ETENDUE DU TYPE DE TACHES ?

Nous avons vu dans la partie II que la capacité C_1 (connaître et utiliser le théorème de Thalès) ne pourrait certainement pas être aussi étendue dans l'enseignement secondaire qu'elle pourrait l'être avec l'énoncé qu'en donne le texte du programme. Il reste aux auteurs de manuels et aux enseignants à expliciter quel est le plus haut degré de maîtrise visé, c'est-à-dire caractériser les tâches de T_1 que l'on considèrera comme envisageables à un niveau donné.



La figure de gauche figure dans un manuel de Terminale (niveau 12), filière Scientifique, au sein du Chapitre 'Intégrales'.

Objectif : établir une formule du volume V d'un cône circulaire régulier de sommet S, hauteur h et rayon R.

Un système de coordonnées est introduit, le sommet S ayant pour coordonnées (0, 0, h). z est un nombre réel compris entre 0 et h. Comme on le voit sur la figure, l'énoncé introduit les notations Δz and ΔV correspondant à une petite variation de z.

La section du cône par le plan parallèle à (xOy), passant par le point (0, 0, z) est un cercle de rayon noté r(z).

1ère question : Montrer que $r(z)=R\cdot(h-z)/h$.

***Figure 1**- Un énoncé de Terminale S (Math'x- 2006- Didier, p.200)*

1. Première analyse de la tâche : éléments concernant la façon dont OM_1 est impliquée

La tâche se trouve dans un chapitre d'Analyse, centré sur le concept d'intégrale, nouveau et difficile, et sur les types de tâches et techniques associées. Reconnaître que la tâche à traiter dans la question 1 relève du type T_1 suppose d'abord une extension du sens du terme Calculer (Calculer une longueur …) d'un point de vue numérique à un point de vue littéral. À ce niveau scolaire, plusieurs techniques ont été enseignées pour ce type (par ex., les théorèmes de Thalès et Pythagore, la trigonométrie, etc.). Une technique doit être choisie mais l'énoncé ne contient aucun indice orientant clairement vers l'emploi du théorème de Thalès, particulièrement parce que la configuration typique de ce théorème n'est pas présente dans la figure.

Concernant les adaptations de la technique, nous relevons que : elle doit être mélangée avec des calculs littéraux et avec une notation fonctionnelle (deux significations pour les parenthèses) ; de nouveaux points doivent être introduits ainsi que des notations pour les sommets des triangles ; le parallélisme des côtés des triangles doit être établi ; les longueurs manquantes de certains segments doivent être obtenues à partir des données littérales.

2. Notre réponse provisoire à la question de l'étendue du type de tâches T_1

Considérons cet exemple comme une introduction au travail que les auteurs de manuels en particulier doivent réaliser, au sein des mathématiques et en dehors, pour évaluer l'étendue visée pour un type de tâches et en déduire le plus haut niveau de maîtrise attendu des élèves à la fin de l'enseignement secondaire. Il est très probable que pour des élèves d'une filière scientifique, l'exploration des tâches présentes en physique convergera avec notre exemple. Mais, puisque la géométrie élémentaire est souvent utilisée dans une gamme étendue de secteurs professionnels, nous oserons supposer que, même en Troisième et Seconde (Niveau 9 et 10), l'étude du type des tâches T_1 devra inclure des tâches ne contenant aucune allusion particulière à OM_1, conduisant les élèves à mélanger la technique correspondante avec d'autres connaissances, mathématiques ou non. En particulier, T_1 doit être étendue du calcul numérique de longueurs à l'établissement de formules littérales et de relations fonctionnelles.

De fait, des problèmes satisfaisant ces exigences apparaissent dans de nombreux manuels de Seconde (Niveau 10), au cours des chapitres consacrés à l'algèbre et aux fonctions, comme à la géométrie dans l'espace et à la trigonométrie. Ceci signifie que, dans ces manuels, le moment M_4 pour OM_1 se prolonge au sein du processus d'étude de nouvelles praxéologies locales. Ceci crée les conditions d'un emploi de la technique sous la responsabilité des élèves.

V. DES JALONS POUR UNE PROGRESSION DU TRAVAIL DE LA TECHNIQUE

Revenons maintenant à la classe de quatrième (niveau 8) où le théorème de Thalès est enseigné pour la première fois dans le cas particulier de deux demi-droites [OA) et [OA') coupées par deux droites parallèles. Nous présentons ci-dessous des repères basés sur les outils d'analyse de la DA que l'enseignant pourra utiliser, quel que soit son style pédagogique, pour concevoir le parcours d'exercices et problèmes qu'il proposera pour développer la connaissance du théorème et la maîtrise de la technique de tous ses élèves. Notons que, comme les moments, ces phases ne doivent pas être interprétées comme une chronologie : le parcours d'étude pourra enchaîner des tâches relevant des unes et des autres sans s'en tenir à un ordre de A à D. C'est pourquoi, ci-dessous au terme de phase nous préférons celui de zone, considérant ainsi que nous proposons aux auteurs de manuels et aux enseignants une cartographie mathématique et didactique du champ des tâches relevant du type T_1.

Dans la suite, on se reportera à l'annexe pour les exemples illustrant chaque zone.

1. Zone A : observation active du théorème

Nous considérons ici de petits exercices au sein desquels le théorème est pris comme objet, dans l'intention d'aider les élèves à étudier, en cherchant à répondre aux questions, la structure du théorème, par exemple dans leur travail à la maison. On peut considérer qu'ils relèvent du moment technologico-théorique (M_3).

2. Zone B : utiliser la technique dans des tâches simples et isolées du type

Selon les termes de la DA, il s'agit d'exercices dans lesquels la technique est efficace sans aucune adaptation et où les autres connaissances mathématiques en jeu sont familières aux élèves. Notons toutefois que, pour certains élèves, les tâches de cette zone ne sont pas d'emblée simples. Elles le deviennent après un premier entraînement à utiliser la technique avec de très légères variations sur les notations, l'orientation des triangles dans la feuille, la nature des nombres impliqués (entiers et décimaux sont supposés bien maîtrisés), le segment dont la longueur est à calculer (dans le plus petit triangle ou le plus grand, sur les parallèles ou pas).

Ces exercices peuvent être considérés comme relevant du moment M_2 ou du moment M_4. L'observation du théorème commencée dans la phase A se poursuit ici.

3. Zone C : Poursuivre l'exploration du type de tâches et travailler les adaptations de la technique

Cette phase du parcours est cruciale : les élèves savent que les tâches proposées se traiteront en utilisant la technique en cours d'apprentissage ; cependant son utilisation n'est pas simple parce qu'une ou plusieurs adaptations sont nécessaires. Selon notre expérience en formation initiale d'enseignants, les débutants sous-estiment ces difficultés, particulièrement ceux qui ont un très bon niveau mathématique. Comme nous l'avons vu précédemment, une grande variété d'adaptations est possible. Nous faisons l'hypothèse que, en étant confrontés à cette diversité, les élèves développeront leur maîtrise de la technique. C'est le rôle de l'enseignant de sélectionner un ensemble suffisamment riche de tâches pour développer cette phase.

Nous analysons brièvement le second exemple. Cette tâche apparaît dans le chapitre où est étudié le théorème de Thalès, donc les élèves s'attendent à devoir l'utiliser dans les exercices du chapitre. Cependant dans ce cas une autre solution est disponible. Il s'agit de prouver que TON est isocèle en utilisant plusieurs résultats disponibles sur les angles puis de calculer NT avec le théorème de Pythagore déjà présenté dans ce manuel. La technique de OM_1 est elle aussi efficace avec quelques adaptations dont l'introduction de plusieurs étapes : prouver que (ON) et (EJ) sont parallèles, déterminer TE et enfin calculer TJ en utilisant le théorème de Pythagore.

Cette tâche est un exemple très intéressant du point de vue de l'étude de la praxéologie OM_1 puisque presque tous les types d'adaptation sont présents. De plus, nous y rencontrons à propos du théorème de Pythagore une tâche relevant de la zone D que nous présentons maintenant.

4. Zone D : des tâches laissant à la responsabilité des élèves la convocation de la technique

Ceci correspond au plus haut degré de maîtrise visé au secondaire que nous avons déterminé dans la partie IV, à partir de l'exemple du calcul du volume du cône. Il est pratiquement impossible d'atteindre ce niveau dans le cadre du chapitre consacré à la praxéologie à l'étude, ceci à cause du contrat didactique le plus courant. Mais, dans les séquences suivantes, au cours desquelles de nouvelles techniques sont étudiées, l'enseignant peut choisir quelques tâches qui poursuivent le moment du travail de techniques antérieures.

Comme nous l'avons vu à la fin de la section V.3., de telles tâches relèvent alors de la zone C de la nouvelle technique à l'étude.

On peut se demander s'il est possible de concevoir des tâches de la zone D dans lesquelles, hormis la technique à l'étude, toutes les connaissances en jeu seraient anciennes et bien maîtrisées. Dans l'organisation classique de l'enseignement des mathématiques en France, cela semble difficile (Castela, 2008) puisque les problèmes proposés par les manuels apparaissent au sein de chapitres structurés selon les connaissances mathématiques. Mais, dans le cadre de la dernière réforme qui inclut explicitement des compétences mathématiques générales au sein des objectifs d'apprentissage, on peut espérer que les manuels fourniront aux enseignants de nouvelles tâches pour la zone D, sans liens explicites avec des connaissances nouvelles.

VI. CONCLUSION

Pour finir, nous résumerons le travail réalisé dans ce texte en empruntant à Chaachoua et Bessot (à paraître) l'idée d'importer dans la TAD la notion de variable didactique. Notons d'abord que la réalité d'un type de tâches *T* ne se réduit pas à un descriptif de la tâche générique à accomplir (« Calculer la longueur d'un segment »), c'est aussi un ensemble de tâches, qu'il convient de déterminer et d'analyser. Nous distinguerons deux étapes dans ce processus d'exploration. La première vise à déterminer du point de vue des mathématiques académiques et de leurs applications scientifiques et professionnelles, la variété des formes sous lesquelles se rencontre le type *T*. Cette variété peut être décrite de manière systématisée grâce à la définition d'un certain nombre de variables, ayant trait soit aux objets de savoir impliqués dans les tâches, soit aux raisons qui font qu'apparaît une tâche relevant de *T*. Par exemple, pour le type « Calculer la longueur d'un segment », quelle est la nature de la mesure visée : un nombre, une lettre (inconnue, variable), un paramètre de la situation ? Quelle est la dimension de l'espace géométrique auquel appartiennent les objets ? À quoi sert de calculer cette longueur : à calculer une aire, un volume ; à résoudre une équation, à optimiser cette longueur, etc. Ces variables ont pour but de décrire l'étendue du type, elles ne concernent pas le processus d'étude de la tâche. Nous dirons que ce sont des variables épistémo-pratiques qui permettent de définir l'ensemble des tâches relevant de la composante *T* d'un modèle praxéologique $[T, \tau, \theta, \Theta]$ qui servira de référence pour l'enseignement. A ce niveau d'analyse, deux énoncés traitant la même question sous les mêmes hypothèses ne seront pas différenciés selon les indications données.

La deuxième étape du processus d'exploration consiste à définir la praxéologie à enseigner, ce qui conduit généralement à réduire l'ensemble des tâches relevant du type et ce par deux mécanismes : d'une part, une limitation des valeurs prises par les variables épistémo-pratiques (par exemple, on ne fera intervenir en quatrième que des valeurs décimales ou fractionnaires des mesures) ; d'autre part, la prise en compte de variables permettant d'analyser le processus d'étude de la tâche dans le contexte spécifique où il se déroule, c'est pourquoi nous les qualifions de variables didactiques. Nous trouvons ici les critères d'analyse développés par la DA, qui différencient les zones de notre cartographie.

On aura reconnu dans le passage de la praxéologie de référence à la praxéologie à enseigner la première étape du processus de transposition didactique, processus qui agit donc aussi sur les types de tâches et leur étendue. Il en est de même de la deuxième étape de la transposition, celle par lequel l'enseignant définit la praxéologie qu'il enseigne à ses élèves, dont la composante *T* dépendra des choix, conscients ou inconscients, appliqués aux valeurs des différentes variables.

Les outils présentés dans ce texte explicitent les variables didactiques dont dépend l'extension du type *T* des praxéologies à enseigner. Former les enseignants à leur utilisation nous paraît de nature à aider les enseignants à assumer en pleine conscience leur part du processus transpositif, c'est-à-dire à décider de l'extension du type impliqué dans la praxéologie qu'ils veulent enseigner et à construire un parcours d'étude permettant à leurs élèves de reconstruire cette praxéologie. Dans cette perspective, nous avons conçu dans le cadre de la formation initiale des enseignants de mathématiques au secondaire (deuxième année de master) un module de neuf heures. À la fin de ce module, chaque enseignant stagiaire devait élaborer un choix d'exercices parcourant les quatre zones pour l'étude d'une praxéologie librement choisie en lien avec la classe dont il était responsable. Il s'agissait là d'un travail a priori, non suivi d'implémentation en classe. Or, les recherches réalisées dans le cadre de la DA ont mis en évidence les effets sur la tâche des interventions de l'enseignant pendant la résolution de problèmes. C'est pourquoi Horoks et Robert (2007) ont expérimenté un autre processus de formation des enseignants, basé sur des analyses régulières de vidéos réalisées en classe. Ces deux approches sont complémentaires.

RÉFÉRENCES

Castela, C. (2008) Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'enseignement. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 28(2), 135-182.

Chaachoua, H., Bessot A. (à paraître) Introduction de la notion de variable dans le modèle praxéologique. *Actes du 5e congrès pour la Théorie Anthropologique du Didactique*. Castro-Urdiales, Espagne. 2016.

Chevallard, Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.

Horoks, J., Robert, A. (2007) Tasks designed to highlight task-activity relationship. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10(4), 279-287.

Vandebrouck, F. (Éd.), (2008) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques enseignantes.* Toulouse : Octarès Editions.

ANNEXE

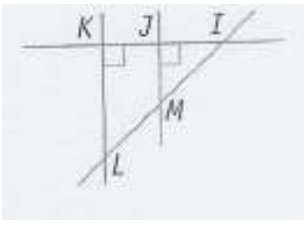
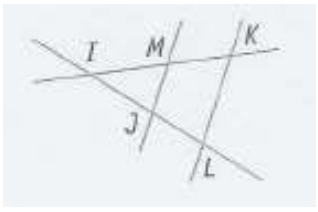
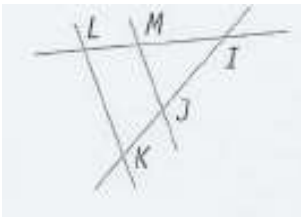
6.	7. (JM)//(LK)	8. (LK)//(MJ)
		
Dans les exercices 6 à 8, quatre droites sont tracées. Est-il possible d'utiliser le théorème de Thalès pour prouver que : $\frac{IJ}{IK} = \frac{IM}{IL} = \frac{JM}{KL}$?		

Figure 2*- Zone A : exemples issus d'un manuel de quatrième (Phare 4e -2007-Hachette, p. 226)*

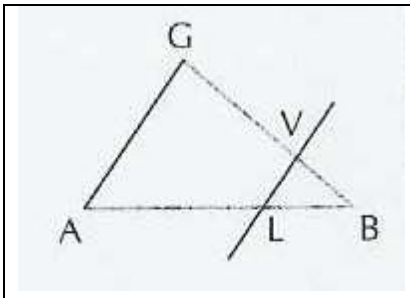
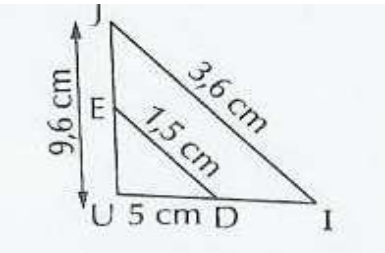
 (GA)//(VL), AB=9cm, BL=3cm, VB=2,5cm, VL=2cm. Calculer GB et AG.	GLE est un triangle tel que GL= 6cm, GE=10cm and LE=15cm. A ∈ [GL] tel que GA=2cm. La parallèle à (LE) passant par A coupe [GE) en B 1. Faire une figure à main levée. 2. Calculer AB	Sachant que les segments verts ([ED] et [JI]) sont parallèles, calculer les longueurs manquantes. 

Figure 3*- Zone B : exemples issus d'un manuel de quatrième (Horizon 4e- 2011-Didier, p.245)*

Tracer un triangle FUT tel que : FU=7,5cm ; UT = 5cm et FT = 4cm. Placer le point R sur [FU] tel que FR=3cm. Tracer la parallèle à (RT) passant par U. Elle coupe [FT] en I. Calculer FI.	Tracer un triangle JET isocèle rectangle en E, tel que JE = 6 cm. Placer le point O de [ET] tel que TO=2cm. Tracer la perpendiculaire à (ET) passant par O. Elle coupe (JT) en N. Calculer NT au mm près.

Figure 4*- Zone C : exemples issus d'un manuel de quatrième (Horizon 4e- 2011-Didier, pp. 247-248)*

GESTES PROFESSIONNELS LANGAGIERS DIDACTIQUES ET USAGES D'UNE RESSOURCE VISANT A INTRODUIRE LES FRACTIONS A L'ECOLE

COULANGE[*] Lalina – TRAIN[**] Grégory

Résumé – Nous observons les usages d'une même ressource qui vise à introduire les fractions à l'école primaire (élèves de 9-10 ans), par trois enseignantes. Nous étudions les gestes professionnels langagiers didactiques de ces enseignants, liés à la dévolution, la régulation des actions des élèves, la formulation de connaissances et l'institutionnalisation des savoirs au sein de la situation didactique. Cette étude nous permet en retour d'interroger certaines caractéristiques de la ressource utilisée.

Mots-clefs : gestes langagiers didactiques professionnels, fractions, usages d'une ressource

Abstract – We observe teachers' uses of the same resource that aims to introduce fractions to primary school (students 9-10 years). We study the linguistic and professional didactic gestures of these teachers, related to the devolution, the regulation of students' activity, the formulation and the institutionalization of knowledge, within the didactic situation. This study allows us to question properties of the resource through teachers' interactions.

Keywords: linguistic and professional didactic gestures, fractions, resources' use

Nous étudions des phénomènes didactiques liés à l'enseignement et à l'apprentissage des fractions à l'école au sein d'un Lieu d'Education Associé, l'école Carle Vernet[1], situé dans un quartier prioritaire de la ville de Bordeaux. Précisons qu'en lien avec ce LéA, ce travail s'inscrit dans une perspective plus large d'étude du rôle du langage dans l'enseignement et l'apprentissage de différentes disciplines à l'école, qui tient compte des spécificités d'un public d'élèves provenant d'un quartier prioritaire[2]. Dans ce contexte, une ressource unique extraite de l'ouvrage ERMEL *Apprentissages numériques et résolution de problèmes CM1* (Charnay & al. 2005) visant à introduire les fractions en lien avec la mesure de longueurs a été utilisée par trois enseignantes collaboratrices, dans des classes d'élèves de CM1 (9-10 ans). La ressource utilisée par les trois professeures des écoles est elle-même inspirée d'une ressource plus ancienne produite par des chercheuses en didactique (Douady & Perrin 1986).

Nous avons produit des analyses des situations d'enseignement observées et filmées dans les trois classes, en convoquant la notion de gestes professionnels langagiers didactiques (Jaubert 2007, Lhoste 2017). Nous reprenons ici l'effort de catégorisation produit par Lhoste & Champagne (à paraître) qui met en avant différentes catégories de gestes langagiers communes à diverses disciplines, telles que la thématisation et l'accentuation (qui permettent de faire apparaître ou ressortir des traits saillants d'une question mise à l'étude), la focalisation (qui vise une centration temporaire sur une question secondaire ou partielle), le pointage (geste corporel qui attire l'attention sur un élément ciblé) la reprise modification (de formulations d'élèves visant des déplacements de signification), de publication et de tissage didactique (permettant de tisser des liens entre ce qui est vécu dans la situation et ce qui est détaché de ce contexte). A l'instar de ces auteurs, nous considérons que ces gestes professionnels langagiers didactiques demeurent ajustés à des savoirs disciplinaires (Coulange, Jaubert & Lhoste 2018). Nous faisons l'hypothèse que ces gestes professionnels langagiers didactiques participent à la dévolution, à la régulation des actions des élèves, à la formulation de connaissances et à l'institutionnalisation des savoirs mathématiques (Brousseau 1998) dans le cadre d'une situation didactique, ainsi qu'à la secondarisation des genres discours au sein de la communauté discursive mathématicienne scolaire (Bernié 2002 ;

[*] Lab-E3D, Université de Bordeaux - France – lalina.coulange@u-bordeaux.fr
[**] Lab-E3D, Université de Bordeaux - France – gregory.train@u-bordeaux.fr

[1] Voir la page de présentation du LéA : http://ife.ens-lyon.fr/lea/le-reseau/les-differents-lea/ecole-carle-vernet

[2] Les élèves de cette école sont très majoritairement issus de milieux socio-défavorisés.

Jaubert et Rebière 2012 ; Gobert 2014 ; Coulange 2014). Nos analyses en termes de gestes professionnels langagiers didactiques révèlent des aspects à la fois singuliers et récurrents de ces gestes qui éclairent en retour, des caractéristiques de la situation didactique, modélisée à partir de la ressource utilisée et de certaines de ces différences avec la ressource d'origine.

I. GESTES PROFESSIONNELS LANGAGIERS DIDACTIQUES ET USAGES D'UNE RESSOURCE POUR INTRODUIRE LES FRACTIONS

Comme indiqué ci-avant, nous collaborons avec trois enseignantes (surnommées respectivement P1, P2, P3 par la suite) sur le thème d'étude des fractions et des décimaux au cycle 3 et ce, depuis plusieurs années au sein du LéA Carle Vernet. Dans le cas présent, les maîtresses travaillent avec leurs ressources habituelles et de leur choix, extraites du ERMEL. Précisons que nous (les chercheurs) ne sommes intervenus ni dans la conception de séances, ni dans leur préparation. L'enjeu global des situations didactiques décrites dans la ressource ERMEL est d'introduire le fractionnement de l'unité pour mesurer des longueurs de segments avec une bande unité (qui sert d'étalon de longueur). Les segments sont choisis de manière à ce que leurs mesures fassent intervenir des demi, des quarts et des huitièmes de l'unité – le procédé attendu étant des pliages en deux successifs de bandes, permettant de matérialiser ces fractions de l'unité nécessaires pour mesurer et communiquer la mesure des segments donnés initialement dans un dispositif d'émission et de réception de messages entre élèves.

1. Des gestes professionnels langagiers didactiques liés à la dévolution de la situation

Discours enseignant de P1	**Discours enseignant de P2**	**Discours enseignant de P3**
[…] chaque binôme **va avoir un segment à mesurer** / *P1 distribue la feuille 1 à chaque binôme* / Hop // **Non non non rangez moi ces règles / pas de règles // pas mesurer avec la règle** / Non [avec des bandes] / **Je vais vous donner une bande / une bande unité / vous n'aurez que cet instrument là pour mesurer //** et après // et attention vous allez devoir écrire un message / […] **vous faites ce que vous voulez avec mais vous n'avez que cet instrument-là//** C'est là que cela devient difficile / **Je sais que vous savez mesurer des segments avec une règle ça y a pas de soucis / ça n'est pas très intéressant en CM1 on est d'accord ?** [E : l'an dernier tu nous avais fait mesurer avec des millimètres]// **Oui on avait mesuré avec des millimètres et des centimètres / tu as raison // cette fois ci on est en CM1 vous n'avez plus rien / vous n'avez qu'une bande de papier qui est la bande unité / On l'appelle bande unité parce que / parce que c'est votre mesure de base on va dire / tout le monde a la même // elles sont toutes identiques en	Aujourd'hui on va commencer à aborder **une notion nouvelle** que connaissent les élèves de CM2 […] // **aujourd'hui vous allez devoir ranger vos règles graduées** / vous n'en allez pas avoir besoin [*en prenant la bande unité*] // **elles doivent disparaître immédiatement / allez allez dans les casiers // Je veux plus voir de règles graduées / Il est interdit de se servir de sa règle graduée** // [...] **aujourd'hui en binôme vous allez devoir vous servir de cette magnifique bande** / Cette bande vous pouvez l'appeler **bande unité // chut // c'est une unité // cette bande va vous servir à mesurer les segments qui sont sur la feuille 1** // d'accord ? / chut / aujourd'hui / pas de questions // une fois que vous aurez fait ça avec votre camarade vous devrez écrire sur votre feuille un message à vos camarades / un message pour que vos camarades à la fin puissent retrouver le segment que vous aviez sur cette feuille là que je vous donnerai dans un deuxième temps // alors évidemment ce n'est pas la peine de chercher le segment A B parce que sur cette feuille ce	Les CM1 aujourd'hui **nous allons voir une notion nouvelle** // […] / vous allez être par groupes de deux ou de trois et il va falloir élaborer des messages pour les autres élèves / on va avoir des émetteurs et des récepteurs / l'émetteur d'un message que fait-il […] Il envoie un message / il l'envoie à un autre groupe // Il va falloir faire un message qui va être lu à un autre groupe / Et le récepteur / qui c'est le récepteur ? / celui qui a le message / d'accord on est bien d'accord sur ces deux mots / […] sur votre fiche ou sur votre petite feuille que voyez-vous ? […] / un segment / tout le monde a un segment / n'est-ce pas ? // **vous allez devoir envoyer un message à un autre groupe pour retrouver le segment que vous avez sur cette feuille** [*en montrant la feuille affichée au tableau*] pour que l'on le retrouve parmi ces segments // oui ? et pour cela vous allez pouvoir vous aider [E : de la règle] / eh ben non justement pas on a pas le droit d'utiliser une règle / on va prendre une bande unité / on l'appellera bande unité / grâce à cette bande / […] vous écrirez le

longueur / on est d'accord / *P1 les superpose pour montrer aux élèves //* **donc elles sont toutes identiques en longueur/ parfois en largeur elles sont un peu différentes / la couleur n'a pas d'importance / ce sont les mêmes**	n'est pas / ce ne sont pas des lettres qui sont notées mais ce sont des chiffres	message pour qu'il puisse retrouver sur cette feuille le bon segment / [E : c'est comme une devinette ?] […]/ **vous pouvez vous aider avec quoi ? / la bande unité /** donc vous allez écrire un message pour que le récepteur puisse retrouver votre segment sans savoir lequel c'est sur la feuille il n'aura plus le segment oui ?

Tableau 1*- Discours enseignant dans une phase dédiée à la dévolution de la situation didactique*

Les trois enseignantes ne dévoluent pas la situation didactique de la même manière. Elles officialisent toutes les trois la nouveauté d'une notion (« *une notion nouvelle* », « *cette fois-ci on est en CM1* ») dans le domaine des mathématiques. Pour autant, la formulation des consignes diffère de manière assez importante dans les trois classes.

D'une part P3 interagit davantage avec les élèves que les deux autres enseignantes en focalisant leur attention sur des aspects (non didactiques) liés à la communication dans la situation didactique (*l'émetteur d'un message que fait-il [E …] Il envoie un message / il l'envoie à un autre groupe // Il va falloir faire un message qui va être lu à un autre groupe / Et le récepteur / qui c'est le récepteur ? /*). Ceci donne lieu à des effets de brouillage de contextes interprétatifs en lien avec les attentes de la situation didactique (les élèves parlant de « *devinette* », « *d'énigme* ») qui sont à même de les éloigner des termes du problème mathématique censé être dévolué. Le discours tenu par P3 présente aussi ce problème mathématique de manière plus ouverte que les deux autres maîtresses (*vous allez devoir envoyer un message à un autre groupe pour retrouver le segment que vous avez sur cette feuille*) : sans parler de mesure d'un segment et en amenant le rôle de la bande unité comme une aide possible (*vous pouvez vous aider avec quoi ? la bande unité*) mais sans en préciser la fonction liée au mesurage. Notons que ceci conduit d'emblée les élèves à envisager des stratégies descriptives *a priori* assez éloignées du nouveau procédé de mesurage visé. Ces stratégies sont toutefois pour partie invalidées par la maîtresse et ses élèves car ne permettant pas de répondre à la question posée (*est-ce que si je dis il est grand ça suffit ?[E : non]*).

Dans les deux autres classes, les discours des enseignantes ciblent plus précisément le problème mathématique en l'associant à un instrument (la bande unité) dont la nouveauté est pointée et explicitement associée à l'interdiction d'usage d'un « ancien » instrument, la règle : elles officialisent par là-même la rupture de contrat didactique que recouvre la situation. Ce qui est attendu est explicité à travers les interventions de P1 et de P2 : il s'agit de chercher à mesurer la longueur d'un segment d'une manière différente. Dans ces deux classes le problème mathématique est clairement posé *via* des gestes professionnels didactiques langagiers concomitants à la fois de thématisation, d'accentuation et de pointage (*chaque binôme va avoir un segment à mesurer* » « *il est interdit de se servir de sa règle graduée* ; *aujourd'hui en binôme vous allez devoir vous servir de cette magnifique bande / Cette bande vous pouvez l'appeler bande unité (…) cette bande va vous servir à mesurer les segments qui sont sur la feuille ; Je sais que vous savez mesurer des segments avec une règle ça y a pas de soucis / ça n'est pas très intéressant en CM1 on est d'accord ? Oui on avait mesuré avec des millimètres et des centimètres / tu as raison // cette fois ci on est en CM1 (…)/ vous n'avez qu'une bande de papier qui est la bande unité /*). Notons que P1 focalise de surcroît l'attention des élèves sur différentes caractéristiques pertinentes du nouvel instrument « la bande unité », sans pour autant entamer la dévolution du problème mathématique (*On l'appelle bande unité parce que / parce que c'est votre mesure de base on va dire / tout le monde a la même // elles sont toutes identiques en longueur / on est d'accord / [P1 les*

superpose] // donc elles sont toutes identiques en longueur/ parfois en largeur elles sont un peu différentes / la couleur n'a pas d'importance / ce sont les mêmes).

Suite à ces phases introductives, on observe *in situ* des activités différentes de la part des élèves qui confirment que la dévolution s'est jouée et continue à se jouer différemment dans les trois classes. On remarque notamment que dans la classe de P3, les élèves mettent en œuvre des procédés de mesurage qui cherchent davantage à reproduire des usages anciens de la règle : évaluation approximative de la mesure en cm de la bande unité – recherche d'un étalon par pliage de la bande unité permettant de retrouver un nombre exact d'unités lié à la mesure du segment, etc. Ceci entrave temporairement le « bon » déroulement de la situation didactique. Des régulations de la part de l'enseignante P3, assez nombreuses lors des deux premières séances observées, apparaissent dès lors comme rendues nécessaires pour réorienter l'activité mathématique des élèves dans le sens prévu.

2. Des gestes langagiers didactiques liés à la régulation des actions des élèves

Dans les trois classes, très peu d'élèves mettent en œuvre des pliages en deux de la bande unité à mettre en lien avec un fractionnement de l'unité (pour obtenir des demis, des quarts et des huitièmes de l'unité). Les élèves se contentent pour la quasi-totalité de reconnaître perceptivement des « *moitiés* », voire des « *quarts* » de l'unité.

P1 et P2 vont dès lors s'assurer dans leurs classes respectives de l'émergence de ce procédé de pliage en deux de la bande unité. Elles vont négocier des déplacements de signification des objets de discours liés à la « *moitié* » (ou au demi) et « *quart* » de l'unité en lien avec le procédé de pliage désigné comme un moyen de valider (qu'il s'agit bien d'un demi ou d'un quart de l'unité) via des reprises modifications de formulations d'élèves et en focalisant sur le caractère d'égalité des « parts » ou fractions de l'unité ainsi obtenues. Cela donne lieu à des étayages récurrents de la part de l'enseignante P2 auprès de ces élèves, à la fois dans la phase de travail en binôme (voir extrait ci-dessous) et dans l'épisode conclusif et collectif de la première séance observée dans sa classe. Les gestes professionnels langagiers didactiques observés et décrits ci-dessous participent à une secondarisation du discours des élèves sur la « *moitié* » ou le « *quart* » de l'unité.

E1 : ça c'est un quart [cf. geste ci-dessous]  P2 : Comment tu sais ? Comment tu peux être sûr ?[E hausse les épaules] P2: Comment tu peux être sûr ? E1 : C'est environ vers là P2 : Oui **mais si on veut pas dire environ vers là** ? Comment on fait ? ça veut dire quoi un quart de l'unité E1 : C'est la moitié… c'est moins que la moitié P2 : La moitié ça veut dire quoi pour toi la moitié ? E1 : La moitié c'est là [en montrant le milieu de la bande unité] P2 : Comment tu sais que c'est la moitié ? E1 : **Ben parce que – il y a le mi [lieu ?] // il y a le même espace des deux côtés** P2 : Pour être sûr comment tu fais ? Pour être sûr de ça ? E1 : [prenant un stylo] je vais mesurer avec ça P2 : On n'a pas le droit de mesurer avec ça [léger rire de LA – E1 : pourquoi] parce il faut juste / parce que/ tu te sers de la bande unité ///	***Mise à distance de la proposition de l'élève*** *: oppose « être sûr », « savoir » à « environ vers là » :* ***« oui mais »…*** ***Focalisation :*** *L'enseignante P2 fait formuler à E1 le caractère d'égalité des deux moitiés de l'unité* *L'enseignante pointe la nécessité d'un moyen de valider ce caractère d'égalité pour faire émerger le pliage*

comment tu peux être sûr ? / que là c'est la moitié comme tu dis ? E1 : On peut mesurer avec notre doigt E2 : On plie P2 : Comment ? Comment E2 ? E2 : On le plie P2 : On le plie comment ? E2 : Comme [E2 prend la bande unité et la plie en deux] E1 : Les CM2 ils ont fait comme ça la dernière fois P2 [en prenant la bande unité pliée] : ça c'est quoi alors ? [en la dépliant et en pointant une partie correspondant à une moitié] si vous faites ça c'est quoi là ? E1 et E2 : La moitié P2 : La moitié – un demi d'accord d'une unité // [en remontrant le message] sauf que lui il veut/ eux / ils vous parlent de quart ? E2 : Donc il faut encore le plier P2 : Pourquoi ? [E2 replie en deux la bande unité déjà pliée en deux] Pourquoi tu le plies encore ? E2 : Pour faire un quart P2 : Pourquoi ? ça veut dire quoi un quart pour toi ? E2 : Celui qui a fait ça // un quart P2 : Pourquoi ? c'est quoi un quart pour toi ? ça [en reprenant la bande pliée en 4 – dépliée] ça veut dire que tu as fait quoi pour obtenir un quart ? E2 : C'est plié P2 : En combien E2 : En quatre P2 : Alors il est où le quart [E2 montre une part] D'accord	***Déplacement de signification*** *de l'objet de discours en lien avec le pliage : la moitié de l'unité est obtenue par un pliage en deux* ***Reprise modification*** *: Substitution du terme moitié par « demi » (lexique spécifique des fractions)* *Prolongement du procédé du pliage et extension de signification au quart de l'unité* ***Médiation de la part de l'enseignante – introduction d'un objet de discours intermédiaire*** *: « plié en quatre » pour réduire la distance entre l'action de pliage et le résultat de l'action – l'obtention de 4 parts*

Tableau 2 - *Interactions langagières visant à négocier le procédé de pliage de la bande unité*

3. Des gestes langagiers didactiques liés à la formulation et à l'institutionnalisation

Dans les deux classes de P1 et de P2, le caractère superposable des parts obtenues par pliage est explicitement pointé au cours d'échanges collectifs lors des épisodes conclusifs des séances observées (*P2 : on a fait quoi avec l'unité pour avoir des quarts ? [E : on a plié] en combien [E : en quatre] en quatre au hasard / [E : non] merci // donc ce quatre-là [en pointant l'écriture du chiffre 4 dans* $\frac{1}{4}$*] il veut dire qu'on a plié // qu'on a partagé l'unité en quatre […] en quatre parts égales*). Il y a une tension inhérente à la situation didactique : entre l'action (on plie en 2 : 1 fois, 2 fois et 3 fois) et le résultat de l'action (on obtient un demi, un quart ou un huitième de l'unité), prise en charge dans le discours de ces deux enseignantes. Celles-ci introduisent des objets de discours intermédiaires associés à la manipulation de la bande comme le partage en 4 ou en 8 (P2 : *on a partagé l'unité en quatre*) ou le pliage en 4 (P1 parle *de pliage en deux, en quatre, en huit*) qui visent à établir des liens entre les actions et les résultats de ces actions. Des formulations liées à l'action matérielle de pliages en deux successifs (de l'unité mais aussi de la moitié de l'unité et du quart de l'unité) sont des objets récurrents de discours du côté des élèves – notamment en ce qui concerne le « *huitième* », absent d'un genre de discours premier et de pratiques langagières routinières des élèves, contrairement à la « *moitié* » et au « *quart* ». Les élèves le désignent comme la « *moitié du quart* » ou un « *demi-quart* ». Les enseignantes négocient dès lors un changement de point de vue sur le huitième comme étant le résultat d'un partage équitable en huit de l'unité avant d'introduire le terme « *huitième* » et son écriture symbolique « $\frac{1}{8}$ u ». L'extrait de transcription suivant permet de rendre compte de ce travail langagier.

E : un demi quart P2 : un demi quart – je le plie en deux ? P2 : Ah génial un demi quart [*P2 écrit à la suite de « 2u + » -« ½ » puis se reprend – efface*] alors je vais l'écrire comme ça un demi quart [*un demi 1/4*]. Est-ce que quelqu'un a trouvé autre chose qu'un demi-quart ? Personne n'a trouvé autre chose que un demi-quart ? C'est très intéressant ce que vous avez trouvé / alors on va voir avec une bande unité / ici j'ai ma bande unité d'accord ? (…) Comment je fais pour trouver un demi quart ? Je commence par faire quoi ? [E : plié en deux]	*P2 prend en compte la formulation des élèves, l'évalue et rend publique la désignation « demi-quart », la stabilise provisoirement en l'écrivant au tableau en mélangeant, après hésitation, écritures alphabétique et numérique. Ce faisant, elle* ***focalise*** *sur quoi va porter l'objet du*

Je le plie en deux / là j'ai des [E : demi] demi / d'accord E : tu continues tu replies et tu replies encore une fois P2 : et je le replie encore ? E : en deux P2 : parce que là j'ai des quarts et tu m'as dit un demi quart / je le replie en deux ? E : en deux parts égales P2 : Oui / merci en deux parts égales Es (en chœur) : et ça fait un demi-quart P2 : Alors regardez je viens de faire un demi-quart / un demi-quart //[*LA déplie la bande unité*] Regardez / qu'est-ce que vous voyez / [E : ça fait beaucoup] oui / regardez combien il y en a ? Regardez combien de parts il y a ? E : un deux trois quatre cinq six sept huit P2 : oui huit / un demi quart on pourrait l'appeler autrement alors ? E : un huitième P2 : Pourquoi ? Pourquoi BE dit un huitième E : Parce qu'il y en a huit / parce qu'il y a huit parts égales P2 : on a partagé en / t'as vu CH // c'était très intéressant de dire un demi quart / Bon un demi quart on se rend compte que finalement c'est un deux trois quatre cinq six sept huit / donc on est en huitième E : c'est quatre et un demi / quatre et quatre P2 : effectivement en langage mathématique deux unités / deux u plus [*écrit 2 u + au tableau*] qui peut aller m'écrire un huitième au tableau ?	*discours. Le problème de la désignation de cet objet dans le registre symbolique est posé en vue de construire une désignation partagée dans la communauté discursive mathématique scolaire.* *Négociation d'**un changement de point de vue** sur le résultat de l'action – en faisant « le demi du quart » de l'unité on a partagé l'unité en huit* *Désignation par un élève du « huitième » et mise en relation avec le nombre de parts égales de l'unité* *Passage au registre symbolique à construire en extension des écritures fractionnaires déjà produites et commentées $\frac{1}{2}u - \frac{1}{4}u$]*

Tableau 3 - *Formulation de connaissances et institutionnalisation de savoirs liés au « huitième de l'unité »*

Dans les épisodes conclusifs des séances observées, se négocient ainsi des recontextualisations et des décontextualisations d'objets de discours en lien avec les actions d'élèves vécues dans la situation (comme plier en deux un quart de l'unité), le résultat de ces actions (on obtient un partage équitable de l'unité en huit) et leur ancrage dans la communauté discursive scolaire mathématicienne (avec intervention d'un registre symbolique) *via* un tissage didactique.

Dans le cadre de ce type d'épisodes dont la principale fonction est la formulation de connaissances et l'institutionnalisation des savoirs, une tension observable dans les trois classes est relative aux échanges comme une succession de reprises – modifications de « *trois quarts* » (envisagé par les élèves comme le report du quart de l'unité trois fois) dans le passage à l'écriture symbolique $\frac{3}{4}$. P2 rend public et étaye longuement autour de cet écrit symbolique en focalisant l'attention des élèves sur la logique de production de cette nouvelle écriture, en la recontextualisant par rapport au contexte du partage de l'unité *via* un tissage didactique. Dans les classes de P1 et de P3, on observe un phénomène de brouillage de contextes interprétatifs associés à la publicisation de cette écriture symbolique. Les deux enseignantes vont désigner cette écriture oralement en parlant de « *trois parts [ou morceaux] sur quatre* », ce qui nonobstant la congruence sémantique apparente avec l'écriture mathématique (qui pousse certainement les enseignantes à recontextualiser cette écriture de cette façon) recouvre potentiellement un autre point de vue conceptuel sur la fraction. Ceci éloigne les élèves du contexte de partage de l'unité (ou de subdivisions de l'unité) vécu antérieurement. Notons également que des écrits intermédiaires du type $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ proches a priori de la fraction unitaire préalablement introduite et de l'action de report d'un quart de l'unité de longueur ne sont présents dans aucune des classes observées. P2 mobilise toutefois un comptage à l'oral (« *un, deux, trois quarts* ») qui permet de faire ces mises en relation.

Discours enseignant de P2	**Discours enseignant de P1**
P2 : comment je pourrai l'écrire CH une unité et trois quarts de l'unité ? (…) un trois le trait de la fraction et	P1 : regardez bien ça c'est important [*une E ayant écrit $\frac{3}{4}$ au tableau*] trois quart c'est trois morceaux /

un quatre [*l'enseignante écrit* $\frac{3}{4}$ *u*] trois quart de u // pourquoi trois quart de u / ce 4 là NA ça veut dire quoi ? […] comment ? [E : quatre quarts] il me dit que cela veut dire qu'il y a quatre quarts / qu'est-ce que vous en pensez ? / qu'est-ce que veut dire ce quatre ? On l'a dit tout à l'heure WA ? qu'est-ce que ça veut dire ce quatre en dessous ? [E : quatre quarts] BE ? [BE : c'est quand on a partagé la bande en quatre] exactement / en quatre on a dit comment déjà [E : en quatre parts unités] avec quatre unités tu arrives à faire une unité ? / vas-y / qu'est-ce qu'on fait là ? On a fait quoi avec l'unité pour avoir des quarts ? [E : on a plié] en combien ? [E : en quatre] (…) donc ce quatre **là il veut dire qu'on a plié qu'on a partagé pardon l'unité en quatre en /// en quatre parts égales / et alors ce trois ça veut dire quoi ? / ça veut dire qu'on partage l'unité en quatre parts égales d'accord et que je n'en prends que trois / un deux trois quarts**	poussez-vous que tout le monde voit // **trois morceaux sur quatre** / MA [*en montrant* $\frac{1}{2}$] un morceau sur deux / un morceau de bande pliée en deux / **trois morceaux de bandes pliés en quatre** ***Brouillage de contextes interprétatifs*** *– mise en présence de deux contextes : « trois morceaux sur quatre » (je compte la partie d'un tout) et « trois morceaux de bandes pliés en quatre » (je partage l'unité et prend un certain nombre de parts). Dans les classes de P1 et de P3 on voit par la suite des représentations symboliques erronées du type :*  *L'élève a écrit* $\frac{3}{4}$ *sur chaque quart de la bande unité*

Tableau 4- *Négociation de la signification de l'écriture symbolique* $\frac{3}{4}$ *– deux contextes interprétatifs différents*

II. RETOURS SUR LA (OU LES) RESSOURCE(S) AU REGARD DE SES USAGES DANS LES PRATIQUES ENSEIGNANTES

Lors des séances observées les trois enseignantes font d'assez nombreux rajouts à la ressource utilisée (extraite de l'ouvrage ERMEL), tant du point de vue de la dévolution, de la régulation des actions des élèves, de la formulation de connaissances ou de l'institutionnalisation des savoirs. Du point de la consigne décrite dans l'ouvrage[3], certains des rajouts faits dans le discours enseignant paraissent pour partie nécessaires pour faciliter la dévolution de la situation didactique dans leurs contextes de classes. Ils permettent d'officialiser la nouveauté de la notion en jeu, de préciser les termes du problème mathématique et d'expliciter la rupture de contrat didactique liée à des pratiques anciennes de mesurage (associées à l'usage d'un « nouvel » instrument de mesure de longueur : la « bande unité » dont l'une d'elles va jusqu'à préciser les caractéristiques à retenir comme pertinentes). Du point de vue de la régulation des actions des élèves, il a fallu d'assez nombreuses interventions de la part des enseignantes pour faire émerger la procédure de pliage en deux. Le milieu de la situation didactique ne contraint pas *a priori* suffisamment les stratégies liées au pliage, évoquées par les auteurs de la ressource. Ces stratégies s'avèrent pourtant nécessaires pour la production du huitième de l'unité qui ne semble pas faire partie d'usages « quotidiens » ou « sociaux » au même titre que la moitié ou le quart de l'unité. On peut d'ailleurs s'interroger sur ce que ces termes « *moitié* » ou « *quart* » recouvrent en termes de connaissances antérieures pour les élèves : identifient-ils par exemple le caractère superposable de ces moitiés ou quarts d'une unité, équitable au regard de la grandeur en jeu (ici la longueur alors qu'on manipule des surfaces) ? Cela nous conduit à nous interroger plus avant, sur le rôle joué par ces connaissances routinières, mises en jeu par les élèves dans la situation didactique modélisée à partir de la ressource qu'il s'agisse d'ailleurs de la ressource ERMEL ou de la ressource d'origine. A la fois, ces connaissances (liées à la moitié ou au quart) apparaissent nécessaires pour faire « piloter » le fractionnement d'une unité dans une direction donnée. Dans le même temps, il s'agit bel et bien de les dépasser ou de les faire

[3] *« sur la feuille n°2 vous devez écrire un message qui permettra à ceux de trouver sur la feuille n°3 le segment qui a la même longueur que le vôtre. Vous ne pouvez pas mesurer votre segment avec le double décimètre mais vous pouvez utiliser la bande comme unité de longueur et l'appeler bande unité. »* (ERMEL CM1, p. 410)

évoluer pour conduire les élèves à produire de nouvelles significations de ce « *demi* » ou de ce « *quart de l'unité* », à étendre dans le cas présent au « *huitième de l'unité* ». Du point de vue de la formulation des connaissances et de l'institutionnalisation des savoirs, nous retenons de nos analyses, deux principaux points. D'une part, il nous semble y avoir des phénomènes de tensions entre les actions des élèves (liées aux pliages successifs en deux) et les formulations autour des résultats de ces actions qui nécessitent d'être renégociées dans le discours enseignant. Notamment pour donner la signification prévue au huitième de l'unité, construit par pliage en deux du « *quart* » de l'unité mais qui ne peut être désigné que dans un après coup, il s'agit de constater que cette action a permis d'obtenir un partage de l'unité en « *huit parts égales* ». En ce qui concerne l'institutionnalisation, on constate également des tensions entre les actions, les résultats de ces actions et les écritures symboliques produites à l'issue de la situation didactique. Certaines des actions liées à la situation didactique sont destinées à s'effacer dans les écritures symboliques produites au final. Ainsi les enseignantes ne formalisent-elles pas d'écritures en lien avec le pliage en deux des subdivisions de l'unité : $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}$. Notons que la production de telles écritures était prévue dans la ressource d'origine (Douady & Perrin 1986), tendant à réduire par là-même la distance entre des actions de pliage et les résultats de ces actions, uniquement prise en charge ici par un discours enseignant. Un deuxième constat qui renvoie également à une différence entre la ressource ERMEL et la ressource d'origine est la difficulté constatée autour de l'introduction d'écritures fractionnaires qui ne correspondent pas à des fractions unitaires. Dans la ressource d'origine, les écritures symboliques institutionnalisées à l'issue de la situation s'appuyaient uniquement des fractions unitaires : « trois quarts » étant désigné non pas comme $\frac{3}{4}$, mais par $\frac{1}{4}u + \frac{1}{4}u + \frac{1}{4}u$ ou $3 \times (\frac{1}{4}u)$.

Au final, nous constatons ainsi des écarts entre les deux ressources, signifiants au regard des phénomènes étudiés en termes de gestes professionnels langagiers didactiques dans l'usage de la ressource ERMEL. Les écarts constatés nous amènent à nous interroger plus avant sur l'introduction et la manipulation d'écritures symboliques fractionnaires. En effet il nous semble y avoir une multiplicité de contextes liés à l'interprétation de telles écritures à la fois par les élèves et par les professeurs. Ces contextes interprétatifs (Gobert 2014) sont à considérer à l'aune des interactions des élèves avec le milieu de la situation didactique mais aussi des interactions langagières entre élèves et enseignants. Ainsi, nous constatons la reproductibilité de phénomènes relatifs à la situation didactique liée à la ressource d'origine qu'il s'agit de ne pas négliger, notamment du point de vue des interactions des élèves avec un milieu au sein de cette situation qui leur permettent d'étendre le partage en deux à autre chose qu'une unité simple (le quart étant la moitié du demi et le huitième étant la moitié du quart). Cette extension d'un opérateur de partage n'est d'ailleurs pas capitalisée dans la production d'écritures symboliques afférentes, ni dans la ressource ERMEL, ni dans les usages qu'en font les enseignants au sein des classes. Pourtant les écritures symboliques envisagées dans la ressource d'origine qui correspondent à l'extension d'un opérateur partage à des subdivisions de l'unité nous paraissent pouvoir prendre du sens, les élèves partageant bien plus que l'unité et ce, de manière récurrente dans des situations d'enseignement des fractions à l'école. Des écritures du type $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}$ ou $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}$ pourraient avoir la place belle dans de telles situations d'enseignement. Il s'agit bien sûr pour autant de ne pas se tromper et de ne pas interpréter de telles écritures symboliques comme relevant du produit de deux fractions. La distance entre « *prendre une fraction de* » et le produit d'un nombre par une fraction est grande. Elle ne saurait d'ailleurs être résolue par un simple discours injonctif du type « *prendre une fraction d'un nombre c'est le multiplier par cette fraction* » ou « $\frac{1}{3}$ *d'une chose se traduit par* $\frac{1}{3} \times$ *chose, le « de » signifiant mathématiquement toujours « × »* » l'on voit parfois circuler dans d'autres ressources, y compris institutionnelles. Affaire à suivre sur ce point, donc ...

REFERENCES

Bernié J.-P. (2002) L'approche des pratiques langagières scolaires à travers la notion de « communauté discursive » : un apport à la didactique comparée ? *Revue française de pédagogie*, 144, 77-88.

Brousseau G. (1998) *Théorie des situations didactiques. Didactiques des mathématiques 1970-1990.* La Pensée Sauvage.

Charnay R., Douaire J., Valentin D. et Guillaume J.-C. (2005) *Apprentissages numériques et résolution de problèmes CM1*, Hatier.

Coulange L. (2014) Les pratiques langagières au cœur de l'institutionnalisation des savoirs mathématiques, *Spirale*, 54, 9-27.

Coulange, L., Jaubert, M., Lhoste Y. (2018) Les gestes professionnels langagiers didactiques dans différentes disciplines : fondements théoriques et méthodologiques - études de cas en mathématiques et en français, *eJRIEPS.* Texte disponible sur : http://elliadd.univ-fcomte.fr/ejrieps/special1

Douady R., Perrin M.-J. (1986) *Liaison Ecole-Collège. Nombres décimaux*. IREM Paris-Sud.

Jaubert M. (2007) *Langage et construction de savoirs à l'école, un exemple en sciences*, Presses Universitaires de Bordeaux.

Gobert S. (2014) Déplacements dans le processus de secondarisation, *Spirale*, 54, 65-84.

Jaubert M., Rebière M. (2012) *Communauté discursives disciplinaires scolaires et constructions de savoirs : l'hypothèse énonciative*. Texte disponible sur Forumlecture.ch : http://www.leseforum.ch/myUploadData/files/2012_3_Jaubert_Rebiere_Bernie.pdf

Lhoste Y. (2017) *Épistémologie & didactique des SVT. Langage, apprentissage, enseignement des sciences de la vie et de la terre*. Presses universitaires de Bordeaux.

Lhoste Y., Champagne M. (à paraître) Quel apport de la notion de contexte aux recherches comparatistes en didactique ? Analyse comparée de situations d'enseignement-apprentissage en sciences de la vie et de la terre et en français à l'école élémentaire, *in* M. Ducrey-Monnier, L. Pelissier & I. Verscheure (eds), *Contributions du comparatisme en didactique à l'intelligibilité des pratiques d'enseignement et de formation.* Editions du midi.

ANALYSE DU MILIEU VIA LA DIALECTIQUE MEDIAS-MILIEUX : UNE ÉTUDE DE CAS DANS LE CONTEXTE DU DENOMBREMENT

DE SIMONE[*] Marina – BARQUERO[**] Berta – CHAACHOUA[***] Hamid

Résumé – Dans cet article, nous montrons comment un dispositif de simulation conçu pour exécuter des tâches autour de la numération peut effectivement devenir une ressource dans le milieu de l'élève, en lui permettant d'avancer efficacement dans les tâches de dénombrement. Pour cela, nous nous appuyons sur une analyse en termes de la dialectique médias-milieux qui permet de voir comment le dispositif de simulation (premièrement considéré en tant que média) est graduellement incorporé dans le milieu de l'élève pendant son activité mathématique.

Mots-clefs : dispositif de simulation, médias-milieux, dénombrement, primaire, numération

Abstract – In this paper, we present how a simulating device designed for executing tasks about the place-value numeral system can become a resource for the enrichment of students' *milieu*, allowing them to progress in the tasks concerning counting situations. With this purpose, we base our analysis in the central dialectics of the medias-milieux that leads us to analyse how the simulating device (firstly considered as a media) is gradually integrated in the *milieu* of the student during her mathematical activity.

Keywords: simulating device, medias-milieux, counting situations, primary school, numbering

I. PROBLÉMATIQUE DE RECHERCHE

Cette recherche vise à analyser la construction progressive du milieu des élèves impliqués dans des tâches de dénombrement via le dispositif de simulation « Simbûchettes ». La conception et le développement de « Simbûchettes » ont été menés au sein d'un projet de recherche de l'équipe MeTAH de l'Université Grenoble Alpes, en se basant sur un certain nombre d'hypothèses, des choix et des propriétés didactiques qui permettent la constitution d'un milieu favorable pour faire progresser les élèves dans les tâches de dénombrement. En particulier, « Simbûchettes » a été conçu pour transposer dans un environnement informatique des tâches de dénombrement que les élèves à l'école primaire en France ont souvent l'habitude d'accomplir avec du matériel tangible (par exemple avec des pailles). L'idée a été de reprendre ces dispositifs tangibles, en les enrichissant par la dimension informatique afin de dépasser certains obstacles qui se présentent inévitablement quand on manipule du matériel tangible (De Simone & Chaachoua, 2017). Notamment, la mise en œuvre de situations d'enseignement fondées sur la manipulation tangible rencontre différentes limites : (1) la manipulation des collections d'objets de grande cardinalité nécessite énormément de temps, (2) le matériel tangible ne produit pas de rétroactions pertinentes pour l'apprentissage, (3) un enseignant ne peut pas observer plusieurs élèves à la fois. La dernière limite est au cœur du travail de thèse de Brasset (2017) qui a étudié un outil d'orchestration permettant à l'enseignant de suivre en temps réel plusieurs élèves et modifier les caractéristiques des situations depuis sa tablette. Concernant les limites (1) et (2) nous pensons que la simulation basée sur la manipulation d'objets virtuels à travers le dispositif de simulation « Simbûchettes » peut être une réponse possible.

Pour analyser le travail que les élèves mettent en place avec ce dispositif, nous focalisons notre analyse sur une dialectique centrale : la dialectique des médias et des milieux

[*] Faculté de Psychologie et des Sciences de l'Education, Université de Genève – Suisse – marina.desimone@unige.ch
[**] Universitat de Barcelona – Espagne – bbarquero@ub.edu
[***] Univ. Grenoble Alpes, LIG – France – Hamid.Chaachoua@imag.fr
Ce travail a été réalisé dans le cadre du projet CMIRA soutenu par la région Auvergne-Rhône-Alpes.

(Chevallard, 2008) qui nous permet de décrire la constitution progressive du milieu. Notre question de recherche peut donc être formulée de la façon suivante : le dispositif de simulation, « Simbûchettes », permet-il de constituer un milieu approprié à travers ses fonctionnalités pour faire progresser les élèves dans les tâches de dénombrement ? Ici, nous allons répondre à cette question, en présentant une étude de cas d'une élève qui a déjà travaillé avec du matériel tangible et qui a été confrontée à la manipulation sur le dispositif de simulation pour la première fois dans le contexte de notre expérimentation.

II. PRESENTATION DE LA RESSOURCE « SIMBÛCHETTES »



Figure 1 *– Exemple d'une activité dans Simbûchettes*

L'interface « Simbûchettes[1] » (Fig. 1) est une simulation du dispositif matériel « bûchettes » (largement utilisé dans l'enseignement en France). Elle est utilisée uniquement comme outil de recherche pour mettre en œuvre et valider des projets de recherche autour de ce dispositif, sans aucune finalité actuelle de diffusion. L'interface est organisée en plusieurs zones : un texte pour l'énoncé de la consigne ; une réserve constituée de distributeurs de bûchettes, des paquets (dizaines, centaines, etc.) ; une zone de construction / déconstruction de groupements ; des boîtes composées (milliers, centaines, dizaines, unités) ; une table où on peut déposer librement les bûchettes et les paquets ; une poubelle. Elle offre à l'élève des possibilités d'actions sur des éléments de l'interface : déplacer les bûchettes ou les groupements, les déposer dans des zones diverses de l'écran, faire ou défaire des groupements et supprimer des éléments. Dans cet article, nous nous intéressons à deux actions spécifiques, *grouper* et *déposer*.

Action *grouper* : si dans la zone de groupement il y a 10 éléments de même nature (unités simples, dizaines, ...) alors on peut constituer un groupement en cliquant sur le "cercle" (Fig. 1, rectangle en bas à gauche). Nous désignons cette action par *grouper.*

Action *déposer* : pour déposer un élément dans une zone, il suffit de le saisir avec le doigt, le faire glisser en maintenant suffisamment la pression sur l'écran tactile jusqu'à la zone désirée de dépôt et lâcher l'objet. Nous désignons cette action par *déposer.*

Ce dispositif nous donne la possibilité de choisir et de définir des paramètres permettant ainsi de générer plusieurs situations didactiques. Ces paramètres peuvent concerner l'affichage des constituants de l'interface (boîtes, zone de groupement, …) et donc les éléments disponibles à l'élève et les actions autorisées ou pas. Ces dernières constituent les

[1] L'interface « Simbûchettes » a été conçue au sein d'un projet de l'équipe MeTAH du Laboratoire d'Informatique de l'Université de Grenoble Alpes.

seules rétroactions de la version actuelle du dispositif, qui, pour l'instant, ne prévoit pas un traitement des procédures erronées des élèves.

III. CADRE THEORIQUE ET METHODOLOGIQUE

Nous nous plaçons dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique (Chevallard, 1999) et nous avons mis en place la méthodologie de recherche suivante : (1) Elaboration d'un Modèle Praxéologique de Référence (MPR) ; (2) Choix des types de tâches et élaborations de tâches dans « Simbûchettes » ; (3) Analyse *a priori* ; (3) Expérimentation et analyse. En premier lieu, pour les étapes (1) et (2), nous avons construit les différentes tâches en nous appuyant sur le MPR, développé par Chaachoua (2016) pour le type de tâches « Dénombrer une collection d'objets » et décrit selon le cadre T4TEL. Dans ce modèle les types de tâches et sous-types de tâches sont générés à partir d'un ensemble de variables (Chaachoua & Bessot, à paraître). Pour cela, on introduit un générateur de type de tâches défini par le type de tâches T = (dénombrer une collection d'objets) et par un système de variables. Nous présentons ici seulement certaines de ces variables.

Par instanciation de trois variables on obtient trois sous types de tâches T_1, T_2 et T_3 présentés dans le Tableau 1 ci-dessous, à partir des trois variables :

V1 : Cardinal (Multiple de 10, Non multiple de 10).

V2 : Organisation du matériel. Elle prend 3 valeurs : En Vrac (constitué seulement par des unités simples sans aucun groupement) ; Partiellement groupé ; Totalement groupé (constitué par des groupements successifs par dix totalement réalisés).

V3 : Configuration des ordres des unités. Elle prend deux valeurs : Homogène (un seul type de groupement à la même unité de numération) ; Hétérogène (différents types de groupement avec différentes unités de numération).

Nous avons élaboré quatre tâches relevant de ces types de tâches et qui ont été implémentées dans « Simbûchettes ». Elles ont la même consigne : « Combien de bûchettes y a-t-il en tout ? ». Dans le tableau ci-dessous, nous avons résumé les types de tâches avec la définition des variables didactiques qui ont structuré les différentes tâches successives qui ont été expérimentées.

Type de tâches	*Variables didactiques*	*Configuration de la simulation pour les tâches*
T_1 : Dénombrer une collection « en vrac » qui représente un nombre multiple de 10 inférieur à 100	V1 = Multiple de 10 V2 = En vrac V3 = Homogène	*Tâche* 1 : 80 bûchettes « en vrac »
T_2 : Dénombrer une collection totalement groupés homogène	V2 = Totalement groupée V3 = Homogène	*Tâche* 2 : 12 dizaines de bûchettes *Tâche* 3 : 67 dizaines de bûchettes
T_3 : Dénombrer une collection totalement groupée hétérogène	V2 = Totalement groupée V3 = Hétérogène	*Tâche* 4 : 2 centaines de bûchettes, 23 dizaines de bûchettes, 15 unités simples

Tableau 1 *– Description générale des tâches proposées aux élèves et délimitation des variables didactiques.*

Pour décrire les techniques de ces types de tâches, nous nous référons au cadre T4TEL où la technique est décrite par un ensemble de types de tâches. Dans « Simbûchettes », la mise en œuvre des techniques se traduit par un ensemble d'actions et, en particulier, par les actions *grouper* et *déposer* présentées ci-dessus. Pour cela nous considérons deux types de tâches $T_{déposer}$ et $T_{grouper_x}$. Le type de tâches $T_{déposer}$ est considéré comme élémentaire au sens où il

n'est pas nécessaire de décrire sa technique. Cependant, au niveau de l'interface, sa technique correspond à la manifestation de l'action *déposer*. Le type de tâches $T_{grouper_X}$ "Faire un groupement de dix éléments de même unité" a une technique : déposer 10 éléments de même unité dans la zone de groupement suivi de l'action *grouper*. Nous le considérons aussi comme type de tâches élémentaire.

Ces deux types de tâches seront des ingrédients des techniques avec d'autres types de tâches. Par exemple, une technique du type de tâche T_1 peut être décrite comme suit : $\tau_1 = \{T_{déposer}, T_{grouper_10}, T_{CUS.dix}\}$ où $T_{CUS.dix}$ est compter de 10 en 10.

Le deuxième outil que nous utilisons pour l'analyse est le *schéma Herbartien* (Chevallard 2008) dont les principaux composantes sont un système didactique $S(X ; Y ; Q)$ qui se crée lorsqu'un collectif d'étudiants X et un collectif d'enseignantes Y s'engagent dans l'étude d'une question Q. Le processus d'étude a pour objectif de produire une réponse $R^{\heartsuit}$ à la question Q et se schématise par $S(X ; Y ; Q) \sum R^{\heartsuit}$. Les moyens utilisés pour le faire constituent le *milieu didactique M* créé par le système didactique $S(X ; Y ; Q)$ en vue de construire $R^{\heartsuit}$, ce qui se désigne avec $[S(X ; Y ; Q) \langle M] \sum R^{\heartsuit}$. Ce *milieu didactique M* est constitué par un ensemble d'objets et d'outils pour développer l'étude. Concrètement, l'étude d'une question initiale Q appelle donc à la construction de réponses partielles ou à la mobilisation de réponses $R^{\diamondsuit}_n$ déjà construites, à déconstruire à partir des œuvres disponibles O_p afin de produire de nouvelles réponses en faisant émerger de nouvelles tâches et questions Q_m dérivées. Ce milieu M s'écrit sous la forme développée suivante :

$$[S(X ; Y ; Q) \rightharpoonup \{ R^{\diamondsuit}_1, R^{\diamondsuit}_2, \ldots, R^{\diamondsuit}_n, O_{n+1}, O_{n+2}, \ldots, O_p, Q_{p+1}, Q_{p+2}, \ldots, Q_m \}] \hookrightarrow R^{\heartsuit}$$

Nous nous focalisons sur l'analyse de la constitution progressive du milieu didactique M. Avec cet objectif, lié à la question de recherche formulée dans la première section, nous utilisons dans ce qui suit la *dialectique des médias et des milieux* comme outil essentiel d'analyse de la constitution du milieu. Chevallard (2013) considère qu'« un média est un système quelconque émettant des messages ; un milieu, relativement à une question donnée, est un système que l'on suppose dénué d'intention vis-à-vis de ladite question et auquel on peut « extorquer » des éléments de réponse. […] ». La prise en considération de cette dialectique va être essentielle pour nous permettre de décrire l'enrichissement et la constitution progressive du milieu de X et de bien comprendre qui joue le rôle de média dans chaque étape, et quels objets (tâches, techniques, technologie, …) intégrés dans le dispositif de simulation « Simbûchettes » sont (ou pas) adoptés et incorporés dans le milieu.

1. Aspects méthodologiques

L'expérimentation a impliqué un groupe de 30 élèves de deux classes de CE2 d'une école primaire de Gières[2]. Tous les élèves ont travaillé, d'abord, avec du matériel tangible constitué par des pailles et puis, dans les mois successifs, ils ont utilisé « Simbûchettes ». Tous les élèves ont travaillé sur les mêmes tâches liées au type de tâches T « Dénombrer une collection d'objets », en accord avec les éléments théoriques discutés dans la première partie de cet article. Pendant l'expérimentation nous avons enregistré l'activité mathématique des élèves à l'aide d'une caméra qui filmait les gestes des mains des élèves et la tablette dans l'utilisation de « Simbûchettes ». Les vidéos ont été transcrites dans un deuxième temps pendant la phase de traitement de données. Dans cet article, nous analysons un épisode particulier de l'expérimentation dans lequel nous nous focalisons sur la transition du type de tâches T_1 à T_2

[2] Dans les environs de Grenoble (France).

(ou tâches 1 et 2) (Tableau 1) et, en particulier, sur l'enrichissement du milieu grâce à l'enjeu de la dialectique média-milieu qui apparaît.

Nous pouvons considérer comme question *Q* la tâche initiale suivante : « Combien de bûchettes y a-t-il en tout ? ». Cette question sera la même pour toutes les différentes tâches décrites dans la section III. Dans l'épisode que nous analysons, on peut observer un système didactique constitué par la question *Q*, concrétisée par les tâches t_1 et t_2, l'ensemble *X* constitué par une seule élève (*x*) et l'ensemble *Y* constitué par la chercheuse-observatrice (*y*). L'objectif n'est pas seulement de rechercher la bonne réponse et de dénombrer combien de bûchettes il y a en tout (R_1, R_2, R_3, R_4 comme réponses au tâches T_1, T_2, T_3 et T_4), mais plutôt de décrire et analyser les différents éléments qui interviennent dans le processus d'étude de *Q* et comment la dialectique médias-milieux est essentielle pour bien comprendre si et comment ces éléments sont intégrés dans le milieu des élèves.

IV. ANALYSE DES DONNÉES

Nous soulignons que « Simbûchettes » répond à un ensemble d'intentions didactiques dans lesquelles il existe plusieurs ostensifs (Bosch & Chevallard, 1999) censés d'accompagner et d'aider les élèves dans la mise en œuvre des techniques de manipulation des objets de la collection à dénombrer pour exécuter la tâche. Notre analyse se concentre sur comment tous ces éléments sont utilisés, déconstruits et adoptés par *x* dans son activité mathématique. En ce qui concerne la structure de notre analyse, nous considérons les moments clés de l'activité mathématique de cette élève dans lesquels la dialectique médias-milieux émerge, en montrant comment des nouveaux éléments introduits par les médias sont effectivement assimilés dans le milieu de *x*.

1. Analyse de la dialectique médias-milieux tout au long de la tâche 1

Dans l'extrait concernant la première tâche t_1, la chercheuse-observatrice *(y)* commence par présenter les fonctionnalités de « Simbûchettes » et celle de la tablette sur laquelle « Simbuchettes » est installée. *y* explique comment on peut procéder pour effectuer la manipulation et le déplacement des bûchettes virtuelles sur l'écran dans les espaces autorisés par l'interface (la zone de groupement, la table, les boîtes, etc.). Dans ce **premier moment** de *rencontre avec Q et avec les nouveaux ostensifs*, les *médias* principaux sont :

(a) le dispositif de simulation « Simbûchettes » qui introduit la tâche à réaliser et délimite l'espace de manipulation possible de l'utilisateur ;
(b) *y* qui décrit les éléments constitutifs de l'interface de « Simbûchettes » et explicite les techniques associées aux $T_{déposer}$ et $T_{grouper}$.

A ce niveau-là, *x* semble surprise et le dispositif de simulation apparaît comme média qui introduit la tâche et les objets virtuels à dénombrer. Ensuite, *y* agit de nouveau comme média principal, en établissant le « parallélisme » avec la manipulation tangible déjà effectuée par l'élève avec des pailles ($R^{\Diamond}_1$). De plus, *y* explique à *x* que visuellement ce n'est pas toujours possible de dénombrer correctement les bûchettes qu'on voit dans les conteneurs de l'interface sans les déplacer. Ce fait est une conséquence d'une limite de l'interface qui superpose les bûchettes les unes derrière les autres une fois qu'on dépasse la portée graphique maximale du conteneur. C'est pour cette raison que c'est important de déplacer les bûchettes pour voir combien il y en a effectivement dans les boîtes, en faisant des groupements de dix ou de cent pour rendre plus efficace le dénombrement. Cette intervention de *y* peut être

considérée comme un geste didactique pour aider *x* à adopter le média que *y* vient de lui expliquer.



Figure 2 *– Construction d'une dizaine*



Figure 3 *– Déplacement des dizaines sur la table*

On peut observer l'incorporation de tous ces éléments dans le *milieu* et leur adoption par *x* : $M_{1.1}$ = {$T_{déposer}$, $T_{grouper}$, Q_1, $\tau_{déposer}$, $\tau_{grouper}$, $R^{\Diamond}_1$}. En effet, *x* commence à construire des groupements de 10 dans la zone de groupement de la tablette (Fig. 2) et à utiliser la « table » pour classer les groupements de 10 et dénombrer combien de groupements de 10 il y a en tout (Fig. 3).

Le **deuxième moment** dans lequel la dialectique médias-milieux apparaît de nouveau, c'est quand *x* a finalisé sa stratégie mathématique pour résoudre la tâche et elle veut *valider sa réponse* R_1. Le milieu disponible ne donne pas des rétroactions automatiques pour ce qui concerne la *validation* de la réponse de l'utilisateur. C'est en ce moment-là que *x* demande à *y* de jouer encore le rôle de *média* pour vérifier et valider son résultat. En particulier, l'échange entre *x* et *y* a été le suivant :

x : C'est bon
y : Combien de bâtons y a-t-il en tout ?
x : 80
y : Est-ce que tu peux m'expliquer comment tu as fait pour compter ? [$Q_{1.1}$]
x : Ben, j'ai tout mis par paquets de 10
y : Oui et puis comment tu as fait pour trouver le nombre 80 ?
x : J'ai fait 10 plus 10, 20, plus 10, 30 plus 10, plus 10, 40, plus 10, 50, plus 10, 60, plus 10, 70, plus 10, 80 [$R_{1.1}$]
y : Très bien

À la fin de ce deuxième moment, le milieu est enrichi avec tous les éléments suivants :

$$M_{1.2} = \{ M_{1.1}, Q_{1.1}, R_{1.1}, [T_{cus.dix}, \tau_{_cus.dix}, \Theta_{_cus.dix}] \}$$

$$S(x ; y ; Q_1) \rightarrow M_1 = \{M_{1.1} \subset M_{1.2}\} \rightarrow R_1$$

où $\tau_{_cus.dix}$, $\Theta_{_cus.dix}$ sont respectivement la technique et la technologie associées au type de tâche $T_{cus.dix}$ (compter de 10 en 10).

2. Analyse de la dialectique médias-milieux tout au long de la tâche 2

Concernant la deuxième tâche t_2, ce n'est pas nécessaire que *y* présente à nouveau les fonctionnalités du logiciel.

> *y : alors là, il faut que tu me dises combien de bâtons il y a en tout, mais cette fois-ci tu vois qu'au lieu d'avoir des bâtons simples, tu as des paquets de 10. Je te rappelle que tu peux utiliser toujours cette zone de groupement si tu le souhaites, ok ?*

Dans ce **premier moment** de *rencontre avec T_2 par la tâche t_2* les *médias* principaux sont : (a) le dispositif de simulation qui introduit la tâche à réaliser et met à disposition la nouvelle distribution des bûchettes virtuelles ; et (b) *y* qui rappelle la tâche à réaliser t_2 en remarquant

les différences avec la situation précédente : il n'y a plus de bûchettes unités, chaque nouveau élément représente une dizaine (changement de signification d'un des ostensifs principaux). À ce moment-là, le milieu est constitué par : $M_{2.1}$ = { M_1, T_2 , remarque sur l'usage des ostensifs }.

x construit un paquet de 5 dizaines et puis elle appuie sur le bouton pour les grouper mais elle reçoit la rétroaction du logiciel (Fig. 4). C'est à ce moment-là que la dialectique média-milieux émerge de nouveau car *x* se pose des questions sur la *validité des techniques de groupement* (τ_{grouper}).



Figure 4 *– Rétroaction du système pour informer l'élève qu'il faut avoir exactement 10 paquets de 10 pour pouvoir grouper*

En particulier, dans ce **deuxième moment**, « Simbûchettes » joue le rôle de média en informant l'élève sur les techniques pas exploitables avec ce dispositif. Cette nouvelle réponse ($R^{\Diamond}_2$) introduite par le logiciel indique à l'utilisateur que « Simbûchettes » ne permet pas d'effectuer des groupements de cardinalité différente de 10. Cette réponse $R^{\Diamond}_2$ est bien comprise par *x* et, en effet, *x* procède en effectuant des paquets de 10 dizaines pour construire les centaines. *x* déplace le paquet de 10 dizaines sur la table et met à côté les deux paquets de 10 restants. Pour finaliser, *x* demande à *y* de jouer encore le rôle de *média* pour vérifier et valider sa réponse R_2. De la même manière qu'avec la tâche t_1, *y* doit agir comme média pour poser la nouvelle question $Q_{2.1.}$ "Comment as-tu fait pour trouver 120 ?".

x : j'ai mis 10 paquets ici (x pointe la zone de groupement), après j'ai fait 100 plus 10 et plus 10.

À la fin de cette deuxième tâche, les éléments constitutifs du milieu peuvent être décrits comme suit :

$$M_{2.2} = \{ M_{2.1}, R^{\Diamond}2, Q_{2.1}, \tau_{\text{grouper de 10 en 10}} \}$$

$$[S(x, y, Q_2) \rightsquigarrow M_2 = \{M_{2.1} \subset M_{2.2}\}] \hookrightarrow R_2$$

Commentaires sur les tâches 3 et 4

Pour exécuter ces deux dernières tâches t_3 et t_4, il n'y a pas besoin d'intégrer des nouveaux éléments dans le milieu de l'élève *x.* La dialectique médias-milieux est difficile à détecter. *x* commence la nouvelle tâche sans problèmes avec les différents techniques et logos associés mis en œuvre dans les tâches précédentes. On peut, donc, observer comment tous les éléments qui viennent d'être introduits comme médias par *x* tout au long des tâches précédentes sont effectivement incorporés dans son milieu.

Extrait concernant la T_3: x fait tout de suite des paquets de 100. Jusqu'à quand elle arrive à faire 6 paquets de 100 et elle met les paquets restants dans la zone de groupement, mais puis elle s'aperçoit qu'elle ne peut pas faire un autre paquet de 100.

y : combien ?
x : 670
y : Comment as-tu fait ?

x : J'ai fait 100 plus 100 plus 100 plus 100 plus 100 plus 100 et puis après j'ai fait plus 10 plus 10 plus 10… en fait j'ai additionné ça (elle indique les centaines) et puis j'ai additionné ça (elle indique les dizaines) et à la fin j'ai tout rajouté ensemble.

Extrait concernant la T_3:
x : 445
y : Est-ce que tu peux m'expliquer à voix haute comment as-tu fait pour trouver ce nombre?
x : J'ai fait 100 plus 100 plus 100 plus 100, 400 ; plus 10, plus 10, plus 10, plus 10, 440 ; plus 5, 445.

V. CONCLUSION

Dans cet article, nous pouvons donc répondre affirmativement à notre question de recherche qui est « le dispositif de simulation, « Simbûchettes », permet-il de constituer un milieu approprié à travers ses fonctionnalités pour faire progresser les élèves dans les tâches de dénombrement ? ». Comme nous l'avons montré à travers l'analyse des données, l'environnement informatique « Simbûchettes » introduit comme outil pour exécuter des tâches de dénombrement, s'est révélé effectivement être une ressource pour faire progresser les élèves dans les tâches de dénombrement. En particulier, en termes d'analyse concernant la dialectique médias-milieux, « Simbûchettes » est devenu une des composantes fondamentales du milieu de l'élève pris en considération dans notre article.

Dans les deux premières tâches proposées à l'élève, « Simbûchettes » a été présenté comme média par la chercheuse car l'élève n'avait jamais rencontré cet outil informatique. Pendant les deux premières tâches proposées à l'élève, nous avons remarqué que ce média commence graduellement à être incorporé dans le milieu de l'élève, car elle arrive à exécuter efficacement les tâches. Même les incertitudes concernant la cardinalité des groupements autorisée ont été dépassées par l'élève assez vite grâce aux rétroactions du dispositif de simulation.

A partir de la troisième tâche, nous pouvons affirmer que « Simbûchettes » a été incorporé d'une façon efficace dans le milieu de l'élève : au fait, l'élève résout les tâches sans aucune hésitation, en utilisant les fonctionnalités mises à disposition par le dispositif de simulation d'une façon assez naturelle.

REFERENCES

Bosch, M., Chevallard, Y. (1999) La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques* 19(1), 77-124.

Chevallard, Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques* 19(2), 221–266.

Brasset, N. (2017). *Les décisions didactiques d'un enseignant dans un EIAH. Etude de facteurs de type histoire didactique*. Thèse de de l'Université Grenoble Alpes. Grenoble.

Chaachoua, H., Bessot, A. (à paraître) Introduction de la notion de variable dans le modèle praxéologique. *Actes du 5e congrès pour la Théorie Anthropologique du Didactique*. Castro-Urdiales, Espagne, 2016.

Chaachoua, Y. (2016) *Praxéologie de référence de l'aspect décimal de la numération par la manipulation selon le modèle T4TEL*, Mémoire de Master de Didactique des Sciences, Université de Grenoble Alpes.

Chevallard, Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique de mathématiques* 19(2), 221-265.

Chevallard, Y. (2008) Un concept en émergence : la dialectique des médias et des milieux. Dans G. Gueudet & Y. Matheron (Eds.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2007*. Paris, France : IREM de Paris 7 et ARDM, 344-366.

Chevallard, Y. (2013) Savoirs et compétences : genèse et résection d'un conflit. *Troisième colloque international de l'association pour les recherches comparatistes en didactique* (ARCD) (Marseille, Janvier 2013).

De Simone, M., Chaachoua, H. (2017) The transposition of counting situations in a virtual environment. *Proceedings of the 13th International Conference on Technology in Mathematics Teaching, ICTMT 13, Ecole Normale Supérieure de Lyon/Université Claude Bernard Lyon 1* (pp. 314-322).

L'EVOLUTION D'UNE RESSOURCE

DOUAIRE Jacques[*], EMPRIN Fabien[**]

Résumé – Les ressources produites, il y a plusieurs années par les recherches de l'équipe ERMEL (Ifé), devenaient plus difficilement accessibles aux enseignants compte tenu notamment de l'évolution de la formation. Aussi à partir des résultats de ces recherches, notre équipe produit de nouvelles ressources qui décrivent plus précisément les gestes professionnels de l'enseignant. Cet article analyse les choix de cette évolution ainsi que certaines des questions qu'elle pose.

Mots-clefs : Enseignement primaire, épistémologie, ressource, situation didactique.

Abstract – The resources produced several years ago by the research of the ERMEL team (Ifé) became more difficult for teachers to access, especially in view of the evolution of training. Also from the results of this research, our team produces new resources that accurately describe the professional gestures of the teacher. This paper analyzes the choices of this evolution as well as some of the questions it raises.

Keywords : Didactic situation, epistemology, primary education, resource,

I. PROBLEMATIQUE

1. Les recherches de l'équipe ERMEL

L'équipe ERMEL (Equipe de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques à l'Ecole Elémentaire – IFé ENS-Lyon) conçoit, expérimente, et produit des ingénieries didactiques (Artigue 2002) sur l'ensemble de l'enseignement des mathématiques à l'école. Elle réunit des enseignants, des formateurs, et des enseignants chercheurs qui ont conduit des recherches sur les apprentissages mathématiques à l'école, d'abord dans le domaine numérique puis géométrique. Ces recherches ont abouti à la production de 6 ouvrages, « Apprentissages numériques et résolution de problèmes » de la GS au CM2 (de 5 à 11 ans) et d'un ouvrage dans le domaine géométrique destiné du CE2 au CM2 : « Apprentissages géométriques et résolution de problèmes au Cycle 3 ». Actuellement notre équipe travaille sur les apprentissages spatiaux et géométriques de la GS au CE1, dans la continuité de la recherche précédente.

Mais compte tenu de l'évolution de la formation des enseignants du 1er degré, tant initiale que continue, il nous est apparu nécessaire de produire de nouvelles ressources afin de rendre plus accessibles les résultats de nos recherches. En particulier nous décrivons plus explicitement le travail du professeur dans la conduite des situations didactiques, et par là même ce qui est nécessaire à la mise en œuvre d'une situation et ce qui relève des choix de l'enseignant. Nous proposons aussi des choix facilitant l'évolution des gestes professionnels de l'enseignant. Ce sont ces deux axes de réflexion que nous souhaiterions questionner.

2. Comment la ressource ERMEL est-elle conçue pour répondre à un besoin ?

La méthodologie de la recherche comporte :

- Une identification des besoins des enseignants, par exemple concernant la mise en œuvre de situations didactiques, leurs difficultés à laisser les élèves chercher ou à leur donner la charge de la preuve dans les phases de validation.

[*] Équipe ERMEL (Ifé), France jacques.douaire@wanadoo.fr
[**] Équipe ERMEL (Ifé) CEREP- Université de Reims, France, Fabien.emprin@univ-reims.fr

- Une analyse du savoir (problèmes, propriétés, représentations symboliques…), ainsi que des connaissances que les élèves peuvent développer, fondée sur de nombreux travaux en didactique des mathématiques ou en psychologie, par exemple, pour les structures additives Vergnaud (1986).
- L'organisation de l'étude de l'ensemble des notions numériques (ou géométriques), sur les trois années de chaque cycle.
- L'élaboration de situations didactiques (Brousseau 1998) et leur expérimentation dans de nombreuses classes de différents milieux sociaux dans plusieurs académies.

Ces composantes sont en interaction : l'identification des potentialités des élèves étant aussi issue des expérimentations menées.

- La rédaction d'ouvrages pour les enseignants et pour les formateurs et comportant :
    - une explicitation des enjeux des apprentissages et des problématiques de l'enseignement
    - puis les dispositifs d'enseignement expérimentés. Leur description permet à l'enseignant d'anticiper l'activité mathématique des élèves.

Ces ouvrages sont souvent considérés comme des références en formation et ont été analysés par des chercheurs : Butlen, Masselot, Pézard (2003). Georget (2009), Gueudet, Aldon, Douaire, Trgalová, Winslow (2010), Houdement (2013). Les situations produites sont perçues comme étant robustes, cette appréciation étant liée à leur expérimentation préalablement à la rédaction des ouvrages[1].

3. Un nouveau questionnement sur l'usage des ressources

L'utilisation de ces ressources (dont la dernière édition date de 2005 et 2006), suppose la compréhension, par des enseignants du primaire, des enjeux des apprentissages exposés dans les parties théoriques au début de chaque ouvrage et une maîtrise, de la mise en œuvre des activités, qui est en construction chez des enseignants débutants, par exemple des phases de dévolution ou de mises en commun.

Or depuis quelques années la formation tant initiale que continue a évolué. En particulier la médiation nécessaire que pouvaient assurer les formateurs pour l'appropriation des ressources issues de recherches par des enseignants du primaire non spécialistes des mathématiques est plus incertaine. L'appréhension des enjeux des apprentissages ou des caractéristiques des situations didactiques est devenue plus difficile pour des enseignants, débutants ou expérimentés, qui souhaitant modifier leur enseignement des mathématiques. Aussi, pour assurer la diffusion des résultats de ces recherches et permettre aux enseignants de les utiliser dans les conditions actuelles, il nous est paru nécessaire de repenser son usage et de produire une nouvelle ressource.

C'est ce processus, avec ses hypothèses et ses questionnements, que nous souhaitons présenter ici.

[1] Citons par exemple Geroget J.-P. (2009 p 127), à propos d'un des problèmes : « Le fait que l'équipe ERMEL ait probablement testé ce problème dans de nombreuses classes du cycle 3 est un critère important pour dire que ce problème peut être proposé à des élèves de ce cycle d'enseignement. »

II. ANALYSE DU PROCESSUS

1. Des constats sur les difficultés d'appropriation

Plusieurs constats étaient formulés par les enseignants et les formateurs :

1. Les parties théoriques étaient devenues difficilement accessibles par un enseignant qui découvrait ERMEL sans avoir pu les articuler avec des apports d'une formation.
2. Les situations les plus importantes, celles qui permettent notamment un saut qualitatif dans les connaissances des élèves, n'étaient pas toujours identifiées parmi les nombreuses activités ; l'enseignant ne sachant donc pas quoi choisir et ayant l'impression de ne pas « pouvoir tout faire ».
3. Dans ces situations, des options sur l'organisation du travail (par exemple : travail individuel, ou par binôme,…) étaient parfois laissées au choix de l'enseignant, sans que les critères les justifiant ne soient systématiquement explicités.
4. Et surtout, si l'activité mathématique de l'élève était décrite (problème mathématique posé, sa contribution à un apprentissage sur le long terme, ainsi que les connaissances dont disposent les élèves pour pouvoir élaborer une solution et la contrôler…), toutes les prises de décisions ou les interventions de l'enseignant ne l'étaient pas pour chaque situation :
    - adapter les variables de la situation aux possibilités des élèves ;
    - favoriser un contrat didactique adéquat aux différentes phases de l'activité ;
    - dévoluer le problème ;
    - analyser les productions des élèves, préalablement à la mise en commun ;
    - organiser les échanges;
    - prévoir la synthèse et l'institutionnalisation, et les reprises ou entraînements nécessaires.

2. Un exemple

Pour expliciter notre propos prenons l'exemple d'un descriptif d'activité dans l'édition de 2005 d'ERMEL CP qui y est considérée comme des « petits problèmes » additifs de recherche d'un état final avec une transformation positive ou négative ou de recherche d'une transformation. Cette activité s'inscrit dans une progression sur les mois de novembre et de décembre dont l'objectif est que les élèves comprennent qu'il est possible d'anticiper avec les nombres, c'est-à-dire de prévoir le résultat d'une réunion de collections sans dénombrer matériellement les objets. Le descriptif (ERMEL CP p 137 et 138) destiné à l'enseignant indique : « Un élève est invité à mettre x objets (x est annoncé à la classe et/ou écrit au tableau) dans la boîte ; un autre élève met à son tour y objets (y est annoncé à la classe et/ou écrit au tableau) dans la boîte sans les mettre un à un ; la boîte est fermée et il est demandé aux élèves de trouver combien il y a d'objets dans la boîte. Il est annoncé qu'on vérifiera ensuite en comptant dans la boîte. Au départ les nombres sont compris entre 1 et 20 et y a un nombre compris entre 1 et 5 ».

Sept lignes plus loin :

« La taille des nombres joue un rôle important dans le choix des procédures de résolution ; ainsi on favorisera l'utilisation du surcomptage en proposant d'abord d'ajouter à x un petit nombre : 1, 2 ou 3, par exemple (avec x assez grand pour éviter le surcomptage) »

Avec ce descriptif, c'est à l'enseignant de choisir les valeurs, ainsi que les modalités possibles de déroulement (en collectif, en atelier…). Les interventions orales de l'enseignant au cours de la séance relèvent de ses initiatives.

Pour des enseignants ayant le souci de permettre aux élèves de chercher, ou ayant l'expérience de telles ressources privilégiant l'activité mathématique de l'élève, un tel dispositif était suffisant. D'autant que dans la situation adidactique qui est proposée juste après (LE NOMBRE-CIBLE) où les élèves auront à articuler la recherche d'un état final et celle d'une transformation, les indications sur les interventions de l'enseignant sont plus détaillées et sa structure comme ses effets pouvaient être analysés dans le cadre de formations initiales ou continue.

Mais pour un enseignant débutant soit dans sa carrière soit avec ce type de dispositif, de plus sans appui sur des collègues ou des formateurs, les choix dans les valeurs et l'absence d'indication sur les interventions risquent de transformer complètement l'activité et même de décourager un enseignant qui ne pourrait pas analyser les difficultés éventuelles qu'il aurait rencontrées.

Aussi, nous avons repris les situations des ouvrages ERMEL CP et CE1 en précisant les décisions que peut prendre l'enseignant si elles ne figuraient pas dans l'ouvrage initial.

3. Des choix directeurs

Les nouvelles ressources que nous produisons « Les Essentielles ERMEL CP » (2016) et « Les Essentielles ERMEL CE1 » (2017) repensent complètement l'apport des recherches par :

- Une entrée par les situations et non par des parties théoriques qui présentaient les savoirs, ou les apports des travaux en didactiques ou les problématiques d'apprentissage et d'enseignement.
- Une progression sur l'année plus claire, avec sur une situation essentielle par quinzaine.
- Un descriptif précis de ces situations et de leur déroulement, en supprimant les options qui n'étaient pas déterminantes pour l'activité mathématique des élèves.
- L'explicitation de l'ensemble des décisions que l'enseignant peut prendre selon les caractéristiques de sa classe.
- A la suite de chaque situation des réponses sont apportées aux questions qu'un enseignant peut se poser en mettant en œuvre ces situations, tant sur l'activité mathématique des élèves que sur la conduite des séances (par exemple : présentation de la consigne, gestion de la mise en commun,… ou conduite d'une classe à plusieurs niveaux).
- Les enjeux des apprentissages ou les choix de progression, prenant en compte l'expérience liée à l'utilisation de cette situation font l'objet d'éclairages à la suite.

4. Des hypothèses

L'hypothèse sous-jacente étant que c'est davantage par l'analyse de sa propre expérience à partir d'une séquence réalisée que par la compréhension préalable des cadres théoriques que l'enseignant peut faire évoluer sa pratique. Pour favoriser cette analyse nous proposons donc trois « outils » :

1. une description très précise des actions de l'enseignant ;

2. une liste de techniques pour mettre en place ces tâches, placées en commentaire au long du descriptif ;
3. une prise de recul, dans un troisième temps, par un discours qui lui permette de comprendre que ces techniques ne sont pas locales.

Par ailleurs l'usage potentiel par des enseignants débutants de ces ressources nous a conduits à proposer une progressivité temporelle dans la mise en œuvre des gestes professionnels sollicités dans les situations. Par exemple ce qui est utile pour identifier les connaissances des élèves et pour dévoluer un problème est explicité en tout début d'année, puis accompagner une recherche, différencier les tâches ou conduire une mise en commun l'est ultérieurement.

5. Des méthodes

La production de cette nouvelle ressource nous a conduit à définir des critères de modification du descriptif original des situations pour le rendre accessible à des enseignants découvrant la ressource ou ne pouvant que l'utiliser ponctuellement :

1. Pour expliciter les enjeux, les activités mathématiques et l'organisation de la séquence, nous avons reconsidéré les progressions. Par exemple nous avons repensé la cohérence de l'apprentissage des opérations et nous avons mis en évidence des points communs entre les progressions de chacune d'elles. Cette approche du calcul, plus unifiée, est aussi l'objet d'éclairages proposés au moment où telle ou telle question se pose, par exemple, lorsqu'un enseignant en début d'année identifie les façons erronées dans l'application de techniques apprises auparavant.
2. Pour favoriser l'activité mathématique des élèves, nous avons intégré dans le descriptif même de chaque situation les adaptations nécessaires en fonction des caractéristiques de chaque classe. Nous explicitons les possibilités d'intervention orales de l'enseignant, leur variété selon les phases (appropriation, recherche, mise en commun, synthèse…). Ces informations nous paraissent indispensables pour des enseignants débutants.
3. Pour permettre l'appropriation des situations nous proposons, après le descriptif de celles qui nous semblent le nécessiter, des analyses de productions ou des chroniques de déroulement d'une des phases citées précédemment (appropriation, mise en commun…). Nous avons donc repris « à la source » l'analyse de documents cités dans les descriptifs ou mené des expérimentations complémentaires.

Lors de notre communication, nous exemplifierons à partir de documents (extraits vidéos, productions…) ces différents points.

III. PREMIERE EBAUCHE DE REPONSES AUX QUESTIONS DU GROUPE DE TRAVAIL

Nous proposons de compléter cette présentation par des premiers éléments de réponses à certaines des questions posées au groupe de travail.

1. Comment la ressource est conçue pour répondre à un besoin ?

L'identification des besoins des enseignants est à l'origine même de nos recherches et celles-ci ont aussi pour but de produire une ressource qui leur est destinée.

2. Comment les questions épistémologiques sont-elles prises en charge ?

Plusieurs questions épistémologiques en relation avec la mise en œuvre d'une recherche ou la production de ressources pourraient être abordées. En effet si l'apport des travaux de didactique ou de psychologie pour la problématisation des processus d'apprentissage concernant un contenu spécifique (nous évoquions les structures additives au paragraphe II.2), ou pour la structuration d'une situation didactique est évident pour nous, la production de nos dispositifs d'enseignement suppose de prendre en charge l'intégralité des apprentissages, avec des champs qui peuvent avoir moins fait l'objet de recherches.

Par ailleurs la validité de l'ingénierie didactiques nécessite la prise en compte de l'ensemble des décisions qu'un maître peut être amené à prendre, pose la question d'ordre épistémologique de ce qui relève du didactique ou du pédagogique.

Enfin les aspects épistémologiques des concepts mathématiques à enseigner est à la base du travail d'ingénierie.

3. Quel est le rôle des savoirs professionnels, mathématiques ou didactiques, mobilisés lors de la conception d'une ressource ? Quel est le rôle du collectif dans la conception des ressources ?

Les ressources initiales (ERMEL 2005) ont été produites dans le cadre de recherches (INRP) associant des enseignants et formateurs de plusieurs académies permettant des expérimentations dans de nombreuses classes de différents milieux sociaux, trois années de suite pour chaque niveau. La ressource « les Essentielles ERMEL CP » (2016) est élaborée à partir de ces résultats, par une équipe réduite d'enseignants, de formateurs et chercheurs. Pour les deux productions, l'expérience des auteurs, dans sa variété, est importante pour aboutir à une cohérence qui est le résultat de débats.

Sur la reconnaissance ou la diffusion de nos ressources.

Les publications ERMEL constituaient souvent des documents d'appui en formation. Nous n'avons pas encore de résultats issus de recherche sur ce point sur notre dernière ressource, celle-ci étant assez récente.

Quels sont les conditions… pour qu'une ressource soit utilisée telle qu'elle a été conçue

Il nous semble difficile d'émettre un point de vue général sur cette question. Comme l'ensemble de ce texte tente de l'expliquer, c'est plutôt à partir des difficultés apparues ces dix dernières années dans l'utilisation de notre ancienne ressource que nous avons construit la nouvelle. Simplement deux critères nous semblaient importants : d'une part assurer la « robustesse » des activités proposées, c'est à dire l'activité mathématique des élèves qui nécessite de fournir à l'enseignant une description exhaustive de la tâche et des procédures des élèves. Cette robustesse tant des progressions que des situations doit être accompagnée par une explicitation précise des actions de l'enseignant d'une part et d'autre part par la proposition des pistes d'analyse des activités une fois que l'enseignant les a déjà mises en œuvre, pour enrichir son expérience professionnelle.

Les résultats de la recherche en didactique des mathématiques peuvent-ils diffuser comme ressources pour les professeurs

Ainsi que nous l'avons évoqué au point plusieurs résultats constituent des apports fondamentaux sur la problématisation des apprentissages, ou sur des conditions de l'enseignement. Mais en tant que tels, ils ne sont pas suffisants pour constituer une ressource,

et de plus une appropriation efficace par les enseignants nous semble passer par leur usage comme outils d'analyse de leur « pratique » (séquences…), pour un cadre devenu en partie indépendant de la formation.

Les interactions entre élèves et professeurs…

Proposant plusieurs situations comportant notamment des phases de validation où les élèves ont la charge d'établir le vrai ou le faux ou de comparer des méthodes, la question des interactions langagières, en particulier des argumentations qu'ils peuvent y développer et des interventions de l'enseignant est prise en charge à différents endroits de la ressource : dans la description des tâches du déroulement de la situations, dans les informations fournies dans la marge du descriptif de chaque situation sur les techniques que peut employer l'enseignant selon sa classe pour favoriser ces interactions, dans les éclairages sur les finalités et les cohérences de ces interactions ou décisions, qui suivent les descriptifs.

Quelles sont les règles d'action d'utilisation d'une ressource…

L'expérience montre qu'il y a une variété d'usage d'une ressource, tant pour les formateurs que pour les enseignants ; il nous est donc difficile de répondre à cette question, excepté que nous avons envisagé que celle-ci puisse :

- d'une part être prise en main par un enseignant débutant : les gestes professionnels souvent plus délicat pour ce public (dévoluer le problème, ne pas trop guider dans la recherche, conduire une mise en commun…) sont progressivement abordés. Nous avons explicité une progressivité dans les gestes professionnels nécessaires à la mise en œuvre des situations que nous proposons en considérant que la ressource devait pouvoir être utilisée par un enseignant débutant qui ne dispose probablement pas encore de repères suffisants dans sa pratique pour anticiper, par exemple, les conséquences d'intervention trop précoces lors des phases de recherche.
- d'autre part être utilisée par un formateur qui n'aborderait qu'une situation.

REFERENCES

Argaud H.-C., Douaire J., Emprin F., Emprin-Charotte F., Gerdil-Marguerin G. (2016). *Les Essentielles ERMEL CP*, Hatier.

Argaud H.-C., Douaire J., Emprin F., Gerdil-Marguerin G. (2017). *Les Essentielles ERMEL CE1*, Hatier.

Artigue, M. (2002). Ingénierie didactique : quel rôle dans la recherche en didactique aujourd'hui, ? *Revue Internationale des Sciences de l'éducation, n°*8, 59-72.

Brousseau, G. (1998). Théories des situations didactiques. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Butlen D., Masselot P., Pézard M.(2003) De l'analyse de pratiques effectives de professeurs d'école débutants nommés en ZEP/REP à des stratégies de formation *Recherche et formation n°44*, 45-61.

Équipe ERMEL (2003) Gestion des mises en commun par des maîtres débutants in *Faire des maths en classe ?* Colomb J., Douaire J., Noirfalise R. dir.), INRP/ADIREM.

Équipe ERMEL (2005) Apprentissages numériques et résolution de problèmes, (Hatier), 6 ouvrages : GS - CP - CE1 - CE2 - CM1 - CM2.

Équipe ERMEL (2006) Apprentissages géométriques et résolution de problèmes, (Hatier).

Georget J ;-P. (2009) Activités de recherche et de preuve entre pairs à l'école élémentaire : perspectives ouvertes par les communautés de pratique d'enseignants (Thèse Université Paris Diderot).

Gueudet, G., Aldon, G., Douaire, J., Trgalova, J., Winslow, C. (2010). *Apprendre, enseigner, se former en mathématiques : quels effets des ressources ?* Ifé.

Houdement, C. (2013). *Au milieu du gué : entre formation des enseignants et recherche en didactique des mathématiques.* (Note pour l'HDR. Université Paris Diderot). https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00957166.

Vergnaud G (1986) Psychologie du développement cognitif et didactique des Mathématiques, (*Grand N* n°38).

LES MEDIATIONS DOCUMENTAIRES COMME CADRE POUR ANALYSER LES SYSTEMES DE RESSOURCES DES ENSEIGNANTS.

FOFANA [*]Ousmane Bilale B. A. - SOKHNA[**] Moustapha

Résumé : Cette étude s'inscrit dans une recherche en cours sur l'évolution des systèmes de ressources des enseignants de mathématiques. Elle s'appuie sur l'approche documentaire qu'elle compte approfondir en insistant sur les médiations documentaires. Cette recherche, à travers l'étude de la notion de limite de fonction numérique à variable réelle, fait de la médiation documentaire un outil qui permet d'analyser, de la conception des programmes à leur mise en œuvre dans les classes, les interactions dans les genèses documentaires communautaires.

Mots-clefs: Systèmes de ressources, médiation documentaire, enseignement des mathématiques, limite de fonction.

Abstract: This study is part of an ongoing research on the evolution of resource systems for mathematics teachers. It is based on the documentary approach that it intends to deepen by insisting on documentary mediations. This research, through the study of the notion of numerical function limit to real variable, makes the documentary mediation a tool which allows to analyze, from the conception of the programs to their implementation in the classes, the interactions in Community documentary genesis.

Keywords: Resource systems, documentary mediation, mathematics education, limit of function.

I. INTRODUCTION

Le développement de la didactique des mathématiques a pris ces dernières années un tournant important lié au développement du numérique et de sa « proximité » avec les activités mathématiques. Ce développement secoue le cœur de l'activité didactique. Actuellement, la didactique des mathématiques n'étudie pas seulement des éléments isolés du système didactique (la notion de variable didactique, de milieu, le topos de l'enseignant, etc.), mais elle tente de faire aussi de l'unité du système un objet d'étude. Ce nouvel objet d'étude tient sa pertinence dans les propos de Vygotski (1934). En effet, il attirait notre attention sur la méthode qui consiste à décomposer en éléments les totalités psychologiques complexes. Pour lui,

> On peut la comparer en faisant l'analyse chimique qui décompose l'eau en hydrogène et en oxygène, aucun des deux éléments ne comprenant les propriétés du tout et, chacun, possédant des propriétés qui ne sont pas présentes dans la totalité. Ceux qui appliquent cette méthode pour comprendre par exemple la propriété de l'eau d'éteindre le feu, découvriront avec surprise que l'hydrogène l'allume et l'oxygène le maintien. Ces découvertes ne nous aideraient pas beaucoup dans la solution du problème. (p.23)

Cependant, l'étude du système didactique pose le problème de cadre théorique mais aussi et surtout de méthodologie. Cette étude tente d'apporter une contribution à ces problèmes. Elle prend en compte les propositions des noosphères[1]et leur cahier de charge, les manuels et autres ressources utilisées par les enseignants, la classe et son environnement. Il s'agira alors de compléter la théorisation de l'approche documentaire en s'appuyant sur la notion de

[*] Université Cheikh Anta Diop de Dakar – Sénégal –ousmane.bilale.fofana@hotmail.fr
[**] Université Cheikh Anta Diop de Dakar – Sénégal – moustapha.sokhna@ucad.edu.sn

[1] Le mot noosphère (au sens de Chevallard) est au pluriel car l'étude prend en compte des institutions (au sens de Chevallard) différentes (Sénégal, France, Tunisie).

médiation afin de pouvoir analyser certaines difficultés rencontrées par les élèves sur le concept de limites.

II. QUELQUES OUTILS THEORIQUES

Les éléments théoriques qui sont au cœur de notre étude s'appuient sur l'approche documentaire du didactique (Gueudet & Trouche 2008). Cette approche fédère des cadres théoriques en didactique et vise à analyser l'activité de l'enseignant sur, avec, et pour les *ressources*. Cette approche peut être décrite autour de trois piliers : la distinction entre ressources et *documents*, le processus de *genèse documentaire* et la médiation documentaire.

1) Le premier élément de cette théorisation est la distinction ressources-document. *(Ressources* comme *Artefact et Document* comme *Instrument)*. Cette distinction est à rechercher dans ce que Rabardel (1995) appelle

> une conceptualisation généralisée de la notion d'instrument. Dans la plupart des conceptualisations c'est l'artefact qui est considéré de façon explicite ou implicite comme l'instrument. Nous proposons d'élargir ce point de vue et de considérer l'instrument comme une entité mixte qui tient à la fois du sujet et de l'artefact. L'instrument comprend dans cette perspective :
>
> - un artefact matériel ou symbolique produit par l'utilisateur ou par d'autres ;
> - un ou des schèmes d'utilisation associés résultant d'une construction propre ou de l'appropriation de schèmes sociaux préexistants. (p. 4)

Si pour lui l'instrument est à la fois un artefact et des schèmes d'utilisation, Gueudet & Trouche (2008) font résulter les schèmes d'utilisation d'une construction - redéfinition et reproduction par le sujet des schèmes sociaux et culturelles préexistants dans les ressources.

> Nous proposons d'utiliser la notion d'artefact comme terme alternatif, neutre, permettant de penser différents types de relations du sujet à l'objet ou au système anthropotechnique : comme structure technique, dispositif fonctionnant, instrument...Soulignons qu'au-delà des objets matériels, la notion d'artefact inclut les objets symboliques. (p. 3)

2) Un autre intérêt de l'approche en termes de genèse instrumentale est qu'elle permet de fonder théoriquement l'articulation et la continuité entre les processus institutionnels de conception des artefacts et la poursuite de la conception au sein des activités d'usage. Les processus d'instrumentation participent au processus global de conception en s'inscrivant dans un cycle : modes opératoires (prévus par les concepteurs), schèmes d'utilisation (élaborés par les utilisateurs), nouveaux modes opératoires prévus par les concepteurs à partir des schèmes d'utilisation. Les processus d'instrumentalisation s'inscrivent dans un cycle parallèle au précédent : fonctions constituantes de l'artefact (définies par les concepteurs), fonctions constituées (par les utilisateurs), inscription de ces fonctions constituées dans une nouvelle génération d'artefacts (par les concepteurs). Se fondant sur des principes similaires un ensemble de ressources donne naissance, pour une classe de situations, au cours d'une genèse documentaire, à un *document*. Le document se construit ainsi, progressivement, par et pour le professeur, à travers deux processus duaux : *l'instrumentation* (le processus qui fait émerger les fonctions constituantes des ressources) et *l'instrumentalisation* qui est liée au développement des fonctions constituées des ressources.

3) Si nous voulons éviter cette fiction didactique qui pourrait laisser penser que le système didactique peut fonctionner sans enseignants, nous devons compléter la théorisation de l'approche documentaire par les différentes médiations du système. Dans cette perspective théorique, nous avons introduit la notion de *médiation documentaire*, prolongeant la médiation instrumentale. D'ailleurs, pour Rabardel (1995) la médiation instrumentale apparaît comme un concept central pour penser et analyser les modalités par lesquelles les instruments

influencent la construction du savoir. La médiation documentaire qui doit constituer le socle de l'approche documentaire n'est pas souvent développée dans les différents travaux en didactique. Or dans le cadre de l'enseignement des mathématiques, les médiations documentaires se font à deux niveaux : d'abord la noosphère qui utilise les ressources principales pour organiser l'activité d'enseignement et les types de *collaboration* entre enseignants ; ensuite, chaque enseignant après analyse et interprétation du programme utilise et des ressources pour « faire son cours ». La figure 1 traduit les différentes médiations.

Nous traduisons cette disposition fractale des médiations en une disposition qui implique davantage la noosphère dans leur rôle de formateur (figure 4). La noosphère sera ainsi proactive, c'est-à-dire qu'elle doit non seulement répondre aux difficultés des apprenants, mais anticiper sur certaines difficultés afin de réguler les perturbations éventuelles des enseignants. Q*uatre types de médiations documentaires pourraient apparaitre (épistémique, pragmatique, réflexive et interpersonnelle)* (Rabardel, 2002) : **la médiation épistémique** qui est orientée vers la connaissance de l'objet ; la **médiation pragmatique** qui, elle, est orientée vers l'action, la **médiation *réflexive*** qui est orientée vers le sujet lui-même ; elle est présente dans ce que Chevallard (1999) appelle le ***moment*** de ***l'évaluation*** et enfin la **médiation interpersonnelle** qui se réalise entre les sujets.

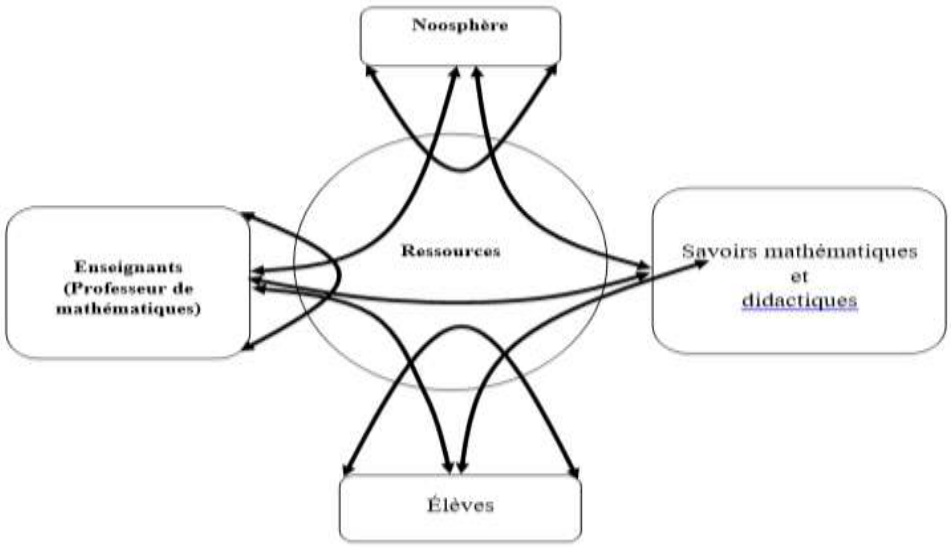


Figure 1 - *Les principales médiations documentaires entre la noosphère proactive, le professeur et les élèves (Sokhna, 2006)*

III. TERRAIN EXPERIMENTAL ET OUTILS METHODOLOGIQUES

Dans cette étude, nous avons choisi la notion de limite d'une fonction pour illustrer la pertinence de la notion de médiation documentaire comme outil d'analyse. Ce choix s'explique par une préoccupation exprimée par nombre de chercheurs en didactique des mathématiques sur les difficultés liées à l'enseignement et à l'apprentissage de la notion de limite. Les recherches ont montré que ces difficultés sont de plusieurs ordres : épistémologique (Mamona-Downs, 2002, 2010, Sierpinska, 1987), cognitif (Cottrill, Nichols, Schwingendorf, Thomas,Vidakovic, 1996, Mamona-Downs 1990) langagière (Cornu, 1991), sémiotique (Roh, 2008, Hitt, 2006), didactique (Boschet, 1983, Robert, 1983 (sur la convergence des suites), Hitt, 2006). Ainsi, ces recherches et d'autres telles Artigue (1998), Bloch (1999) et Hitt (2007) mettent en exergue toute la complexité et les difficultés dans l'acquisition de cette notion centrale en analyse.

Ce choix s'explique également par le fait que la médiation documentaire apparait comme l'outil théorique le plus approprié pour analyser les difficultés ci-dessus citées rencontrées par les professeurs de mathématiques du Sénégal pour enseigner la notion de limite. En effet au Sénégal, comme dans la plupart des pays la « qualité » des ressources est à interroger. Et parmi ces ressources, le programme *officiel est très certainement la ressource la plus utilisée par les enseignants du Sénégal* (Abboud-Blanchard & al. 2015). Or, au Sénégal, le concept de limite tel qu'il est proposé dans le programme officiel présente plusieurs discontinuités dans les médiations documentaires :

- Les intentions des programmes sont parfois claires et bien avisées. Les propositions de la noosphère sont bien documentées avec des références mathématiques et didactiques. Les paradoxes liés à une introduction de la notion de limite en s'appuyant sur l'intuition ne sont pas ignorés et une exploitation par des outils mathématiques formels est encouragée. Ainsi, en introduction du programme de première Scientifique (17-18 ans), il est mentionné que « Les nouveaux concepts tels que les limites et le raisonnement par récurrence à propos desquels les acquis des élèves sont insuffisants pour leur introduction rigoureuse, seront approchés de manière intuitive. Cependant une fois les concepts et les propriétés de base établis, la rigueur et la précision seront exigées dans leur utilisation. » Commission Nationale Mathématiques (2006). Une première difficulté qui apparait dans la structure noosphérienne (au sens de Chevallard), censée concevoir le programme, est le faible niveau de médiation documentaire en son sein. Cette structure noosphérienne appelée Commission Nationale de Mathématiques (CNM), composée de professeurs de lycée et de collèges en activité et de chercheurs en mathématiques et en didactique des mathématiques est au début et à la fin du processus de conception du programme de mathématiques de collège et du secondaire. Si pour certains membres de la CNM, les références mathématiques et didactiques ont du sens, d'autres membres de la structure n'ont pas l'occasion de les rencontrer. Un partage organisé sur ces références sous forme de séminaire permettrait à ses membres d'accéder aux ressources mathématiques et didactiques qui ont motivées les intentions, but et finalité du programme.

- Pour concevoir un programme, la CNM est subdivisé en sous-groupes qui travaillent en parallèle sur des programmes différents. Il existe par exemple un sous-groupe premier cycle qui conçoit le programme de la 6ème (11-12 ans) à la 3ème (15-16 ans) ; des sous-groupes qui sont sur le programme de lycée de la 2nd (15-16ans) à la Terminale (18-19 ans) en Sciences expérimentales, en Sciences mathématiques, etc. Dans tous les programmes de lycée, en classe de première (17-18 ans) la conception de la limite finie l en un point d'abscisse x_0 est $[\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0\ (\forall x \epsilon\ Df, 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)\ ]$ or pour le programme français la conception d'une limite finie en x_0 est $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0\ (\forall x \epsilon\ Df, |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$. Ainsi la fonction numérique à variables réelles définie par $x \to \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$ a pour limite 1 en 0 dans le programme du Sénégal et n'admet pas de limite dans le programme français. Ce choix, en soi, ne pose pas de problème s'il n'était pas source de deux malentendus didactiques :

  - Le premier de ces malentendus est les ressources utilisées par les enseignants. Au Sénégal, les manuels produits en adéquation avec son programme sont presque inexistants contrairement à la France. En France, 92% des enseignants de

mathématiques placent les manuels scolaires en première position parmi les ressources qu'ils utilisent effectivement pour préparer leurs cours (on pourrait supposer cette tendance valable au Sénegal). Ces enseignants estiment également que la première ressource utilisée par leurs élèves est le manuel scolaire (Abboud-Blanchard & al, 2015). Au Sénégal, la langue d'enseignement est le français. N'ayant pas de manuels officiels, les enseignants sénégalais utilisent souvent les ressources françaises. Or ces manuels ne sont pas neutres. Ils ne sont pas seulement des outils d'apprentissage ou d'enseignement. Ils sont médiateurs à une culture. Selon Bruillard (2010) les manuels exercent quatre fonctions essentielles : référentielles ; instrumentale ; idéologique et culturelle ; documentaire. Ils influencent également les pratiques des enseignants et conditionnement les apprentissages des élèves (Bruillard, 1996).

- Le second malentendu est dans la cohérence interne du programme. Si dans le programme de Terminale science expérimentale la limite de fonction composée est bien définie en rapport avec le programme officiel, le programme de la terminale S1 ne prend pas les mêmes précautions.
  Enoncé 1 *du théorème dans le programme* de Terminale S2 (sciences expérimentales)

$$si \lim_{x\mapsto a} f(x) = b \; et \lim_{x\mapsto b} g(x) = l \; et \; g \; continue \; alors \lim_{x\mapsto a} gof(x) = l$$

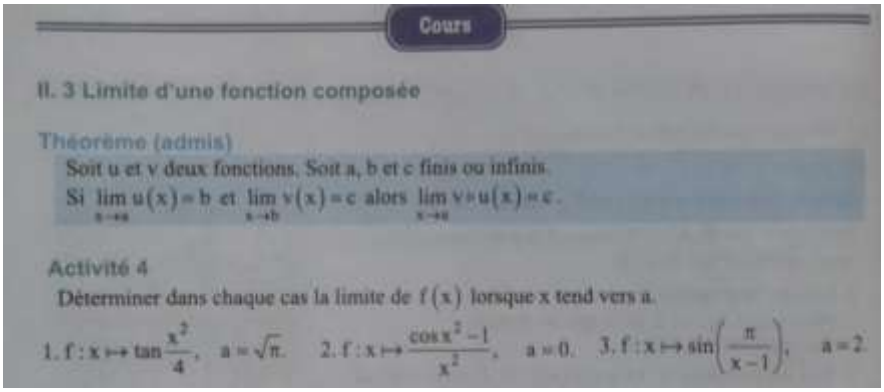
Enoncé 2 *du théorème dans le programme* de Terminale S1(mathématiques)

$$si \lim_{x\mapsto a} f(x) = b \; et \lim_{x\mapsto b} g(x) = l \; alors \lim_{x\mapsto a} gof(x) = l$$

On peut constater que le second énoncé très souvent utilisé par les enseignants n'est pas conforme aux choix qui sont faits lors de la définition de limite (voir contre-exemple ci-dessous).

Soient les fonctions f , g : IR→IR définies par : $f(x) = \begin{cases} 1 \; si \; x = 0 \\ 0 \; si \; x \neq 0 \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} 0 \; si \; x = 0 \\ 1 \; si \; x \neq 0 \end{cases}$	D'après le théorème admis du programme $\lim_{x\to 0} gof(x) = 1$	Or $\lim_{x\to 0} gof(x) = 0$

Il faut préciser que la fonction documentaire des programmes n'est pas sans risques si les programmes ne sont pas accompagnés de manuels d'accompagnement. Des propositions fausses peuvent survivre dans les classes sans être détectées. On ne peut pas considérer non plus que les médiations documentaires sont cohérentes si les manuels sont conçus par une structure nationale. En Tunisie où, en 2008, les manuels étaient conçus par des Tunisiens, un énoncé du même type que celui qui est dans l'énoncé 2 du programme sénégalais est fait dans les manuels.


Cours

II. 3 Limite d'une fonction composée

Théorème (admis)

Soit u et v deux fonctions. Soit a, b et c finis ou infinis.

Si $\lim_{x \to a} u(x) = b$ et $\lim_{x \to b} v(x) = c$ alors $\lim_{x \to a} v \circ u(x) = c$.

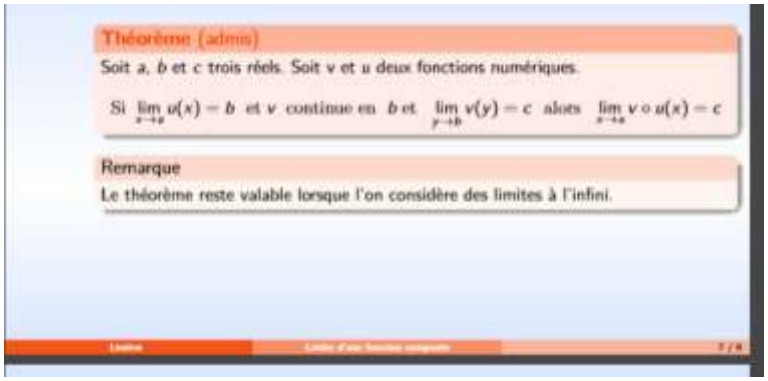
Activité 4

Déterminer dans chaque cas la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a.

1. $f : x \mapsto \tan\frac{x^2}{4}$, $a = \sqrt{\pi}$. 2. $f : x \mapsto \frac{\cos x^2 - 1}{x^2}$, $a = 0$. 3. $f : x \mapsto \sin\left(\frac{\pi}{x-1}\right)$, $a = 2$.

Figure 2 *- Manuel scolaire de mathématiques de la Tunisie de 2008, niveau 4 Sciences expérimentales, tome 1, page 10*

Les malentendus didactiques ci-dessus cités ne manqueront de créer des incidents dans les classes. Au Sénégal, le Ministère de l'Education nationale a fait appel à des enseignants pour concevoir des fiches de cours pour les élèves. Ces fiches ont eu une bonne formulation de théorème (l'énoncé 1) malgré le fait qu'elles font référence au programme de la terminale S1.


Théorème (admis)

Soit a, b et c trois réels. Soit v et u deux fonctions numériques.

Si $\lim_{x \to a} u(x) = b$ et v continue en b et $\lim_{y \to b} v(y) = c$ alors $\lim_{x \to a} v \circ u(x) = c$

Remarque

Le théorème reste valable lorsque l'on considère des limites à l'infini.

Figure 3 *- Fiche de cours sur les limites pour les élèves conçue par le Ministère de l'Education nationale*

On peut faire l'hypothèse que si au cours de la conception des programmes, une bonne articulation des médiations était faite, les erreurs et les incohérences pourraient être amoindries. Il s'agira de mener des expérimentations sur des chapitres clefs du programme avant son adoption. Chaque expérimentation suivrait les quatre étapes ci-dessous. Lorsqu'un chapitre est conçu, une appropriation de la ressource par un enseignant est sollicitée. Il s'agit là d'une médiation épistémique qui passe par une instrumentation des ressources. La phase médiation épistémique est suivie d'une médiation pragmatique : l'enseignant qui pourrait être amené à une instrumentalisation de la ressource pour l'adapter à la classe note toutes les modifications opérées et les objectifs qu'il vise à travers ces modifications. L'enseignant fait l'expérimentation en présence de deux autres enseignants : un enseignant de *terrain* et un chercheur du domaine. Cette troisième phase qui se rapporte à la médiation interpersonnelle sera complétée par un moment de confrontation et d'analyse. La confrontation aura lieu entre les modifications opérées et les objectifs visés à travers ses modifications et les résultats de la classe. L'analyse, elle, permet de décrypter les justifications des écarts entre les choix faits et les résultats du terrain. Cette phase de genèse documentaire communautaire sera suivie d'une phase de médiation réflexive pendant laquelle l'expérimentateur et les autres membres de la commission s'interrogent sur la validité et la pertinence des choix. La figure ci-dessous fait le résumé de ces différentes phases.

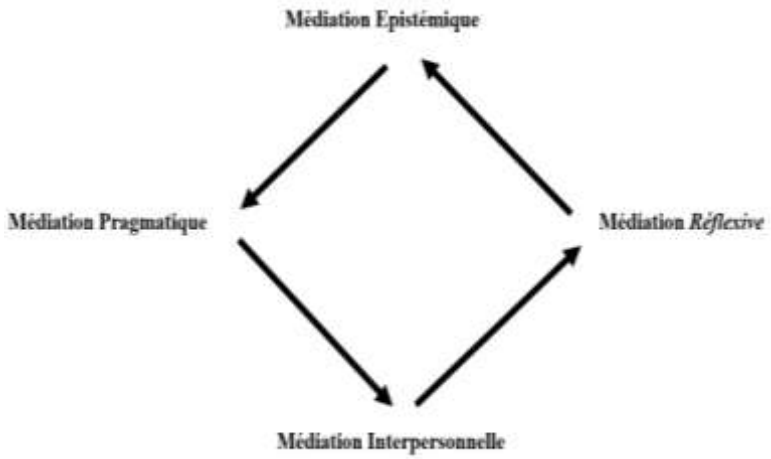


Figure 4 *- Modèle EPIR de coordination des médiations*

IV. ELEMENTS DE CONCLUSION

Rabardel (2002) disait que « le développement de cette théorie (l'approche instrumentale) suppose la constitution d'une vaste communauté scientifique dont les frontières disciplinaires s'étendront au-delà de la psychologie ». En développant l'approche documentaire du didactique Gueudet & Trouche (2008) ont approfondi l'approche instrumentale et ont conçu un outil théorique qui permet d'analyser l'activité de l'enseignant sur, avec, et pour les *ressources*. Il restait à documenter l'impact des ressources sur les pratiques. Il se trouve que la médiation documentaire permet de faire cette étude comme elle permet d'outiller les structures qui conçoivent les programmes. Le modèle EPIR de coordination des médiations fait de la genèse documentaire un outil puissant d'analyse de fait didactique. La notion de limite par sa complexité et sa proximité avec la notion de l'infini a engendré des difficultés de plusieurs ordres dans l'enseignement. Avec le programme de mathématiques de lycée au Sénégal, des difficultés d'ordre épistémologique, cognitif, langagier et didactique sont étudiées. Ce travail s'inscrit dans une recherche sur l'évolution des systèmes de ressources des enseignants de mathématiques. Elle s'appuie sur l'approche documentaire et développe le modèle EPIR pour étudier les médiations documentaires. Elle va se poursuivre pour le mettre à l'épreuve et consolider les différentes phases du modèle.

REFERENCES

Abboud-Blanchard, M et al. (2015) Dimensions culturelles dans la conception, la diffusion et les usages des ressources dans l'espace mathématique francophone. In: L. Theis. *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage – Actes du colloque EMF2015*. Alger : 2015.

Artigue, M. (1998). L'évolution des problématiques en didactique de l'analyse. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 18 (2) 231-261.

Bloch, I. (1999). L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en première scientifique. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* 19(2) 135-194.

Boschet, F. (1983). Les suites numériques comme objet d'enseignement (premier cycle de l'enseignement supérieur français). *Recherches en didactique des mathématiques*, *4*(2), 141-163.

Bruillard, E. (2010). Auteurs et territoires de l'éducation à l'information : un point de vue « informatique ». In Chapron F. et Delamotte E. (dir.), L'éducation à la culture informationnelle. Villeurbanne : *Presse de l'ENSSIB*, p. 68-75.

Bruillard, E. (2006). Travail et apprentissage collaboratifs à distance dans l'enseignement supérieur. Element de réflexion. *Presses universitaires de Rennes.*

Bruillard, E. (2005). Les manuels scolaires questionnés par la recherche in BRUILLARD. Éric (dir.) Manuels scolaires, regards croisés. CRDP de Basse-Normandie, Documents, actes et rapports sur l'éducation, Caen, p. 13-36.

Choppin, A. (1996). Les Manuels de mathématiques en classe de Sixième: un aperçu historique, in G.-L. Baron et E. Bruillard (dir.), Du Livre au CDRom, permanences et innovations : le cas des manuels de mathématiques en Sixième (pp. 9-14). Paris: INRP, Créteil : IUFM, Lille : Trigone

Cornu, B. (1991). Limits, in D. Tall (ed.), *Advanced mathematical thinking*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 153-156.

Cottrill, J. Nichols, D., Schwingendorf, K. Thomas, K. Vidakovic, D. (1996). Uderstanding the limit concept: Beginning with a coordinated process. *Journal of mathematical behavior*, 15, pp. 167-192.

Hitt F. (2007). Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d'une méthode d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'auto-réflexion. In M. Baron, D. Guin et L. Trouche (Éditeurs), Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage. conception et usages, regards croisés (pp. 65-88). Éditorial Hermes.

Hitt F. (2006). Students' functional representations and conceptions in the construction of mathematical concepts. An exemple : the concept of limit. *Annale de didactique et de sciences cognitive*, 11, 251-267

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques, 19*(2), 221-266.

Chevallard, Y. (1997). Familière et problématique, la figure du professeur. Texte issu d'un cours donné à la VIIIe école d'été de didactique des mathématiques (Saint-Sauves, 22-31 août 1995).*Recherches en Didactique des Mathématiques*, no 17/3, 1997, p. 17-54.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 12 (1), 73-112. Republié in *J. Brun (Éd.)*. (1996). Didactique des mathématiques (pp. 145-196). Lausanne : Delachaux et Niestlé.

Engeström, Y. (1991). Developmental work research: Reconstructing expertise through expansive learning. *In M. I. Nurminen & G. R. S. Weir (eds.)*, Human jobs and computer interfaces. Amsterdam: Elsevier Science Publishers.

Gueudet, G. &Trouche, L. (2008). Du travail documentaire des enseignants: genèses, collectifs, communautés. *Éducation et didactique vol.2, n.3.*

Mamona-Downs, J. (2002). Letting the intuitive bear on the formal; a didactical approach for the understanding of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics, 48,* 259-288.

Mamona, J. (1990). Sequences and series-Sequence and function: Students' confusions, *Int. J. Math. Educ. Sci. Tech.*, 21, 333-337.

Margolinas, C. (2004). La situation du professeur et les connaissances en jeu au cours de l'activité mathématique en classe. Simmt, E. et Davis, B. *2004 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group / Groupe canadien d'études en didactique des mathématiques 2004*, 2004, Québec, Canada. CMESG/GCEDM: Edmonton, pp.3-21, 2005.

Ministère de l'éducation nationale du Sénégal (2006). Programme de mathématiques du second cycle. *Sénégal.*

Rabardel P. (2002) Le langage comme instrument ? Eléments pour une théorie instrumentale étendue. In Y. Clot (Ed.), Avec Vygotski. p. 265-290. Paris : La Dispute.

Rabardel P. (1995) Qu'est ce qu'un instrument ? Appropriation, conceptualisation, mises en situation. *Les dossiers de l'ingénierie éducative, Vol. 19, p. 61-65. CNDP*.

Robert, A. (1988). Réflexions sur l'analyse des textes d'exercices des manuels. *Cahier de didactique des mathématiques*, 51, 88 p.

Robert A. (1983). Ingénierie didactique sur les suites numériques après le baccalauréat. Available at : http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/up/CDM_4_Aline_Robert_-_Ing%C3%A9nierie_didactique_sur_les_suites_num%C3%A9riques_apr%C3%A8s_le_baccalaur%C3%A9at.pdf

Roh, K. H. (2008). Students' image and their understanding of definitions of the limit of a sequence. *Educationnal studies in mathematics*, 69, pp. 217-233.

Sierpinska, A. (1987). Students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in mathematics*, 18(4), pp. 371-397.

Vygotski L.S. (1934) Pensée et langage (2002). Paris : *La Dispute*.

ENJEUX DE DIVERSIFICATION ET COMPLEXIFICATION DE RESSOURCES : UN CAS DE PROGRAMMATION INFORMATIQUE D'UN ROBOT DANS UNE ECOLE DE DEMAIN

FREIMAN[*] Viktor– CHIASSON[**] Mario

Résumé – Lorsque les élèves de l'école intermédiaire s'engagent dans une tâche interdisciplinaire de programmation d'un robot, ils vivent une situation d'apprentissage authentique leur permettant de concevoir, de réaliser et de partager avec leurs pairs un défi informatique. Ce processus nouveau fait appel à un accès élargi à une multitude de ressources, tente diverses approches de résolution de problème, mobilise une variété de concepts mathématiques et informatiques tout en prenant conscience des affordances de cet espace d'apprentissage plus diversifié et complexe.

Mots-clefs : Problème complexe, programmation robotique, défi informatique, affordances STIM, espace d'apprentissage riche en technologies.

Abstract – When middle school students engage in an interdisciplinary task of programming a robot, they experience an authentic learning situation that allows them to design, implement, and share with their peers an IT challenge. This novel process involves expanding access to a multitude of resources, attempting various problem-solving approaches, mobilizing a variety of mathematical and computational concepts, and becoming aware of the affordances of this more diverse and complex learning space.

Keywords: Complex problems, robotics programming, computer challenger, STEM affordances, technology-rich learning space.

I. ENJEUX DE DIVERSIFICATION ET DE COMPLEXIFICATION DE RESSOURCES DANS UNE ECOLE DE DEMAIN

Au Nouveau-Brunswick, tout comme au Québec et dans d'autres provinces canadiennes, le système scolaire francophone a entamé une réforme profonde de l'enseignement de mathématiques depuis 2000 axée sur l'acquisition, par tous les élèves, « des qualités requises pour apprendre à apprendre afin de se réaliser pleinement et de contribuer à une société changeante, productive et démocratique » (MEDPE, 2016) grâce, entre autres, à une plus grande diversification et complexification de ressources sur un plan :

- transdisciplinaire (en lien avec les résultats d'apprentissage transdisciplinaires, soit le développement personnel et social, la culture et patrimoine, la communication, le pensée critique, les méthodes de travail et les compétences en Technologies de l'Information et de la Communication – TIC),
- interdisciplinaire (favorisant l'habitude chez l'élève de procéder aux transferts des savoirs, des savoir-faire et des savoir-être) et
- disciplinaire (ayant comme principes didactiques l'habilité chez l'élève à gérer et résoudre une situation-problème, à raisonner et communiquer mathématiquement, ainsi qu'à faire des liens entre les différentes branches de mathématiques, entre les mathématiques et les autres disciplines, et avec la vie de tous les jours).

En plus d'enrichir les apprentissages des élèves, cette diversification et complexification de ressources a permis de combler des lacunes au niveau de ressources 'faites maison' pour une communauté linguistique minoritaire (Freiman et al, 2012) en ouvrant la voie à des pratiques enseignantes innovatrices (Freiman et Michaud, 2009) qui permettent aux élèves de s'engager dans une résolution de problèmes complexes reflétant ainsi une dynamique nouvelle « de production d'outils ou de concepts et de résultats théoriques » qui ressort

[*] Université de Moncton – Canada, viktor.freiman@umoncton.ca

[**] Université de Moncton – Canada, chiasmaj@gmail.com.

l'apport de mathématiques comme « outils de compréhension » chez l'élève du monde et de son évolution dans un contexte de « collaboration entre les disciplines scientifiques » (comme c'est le cas des tâches de la robotique, et, de façon plus générale, du domaine STIM – Sciences, Technologie, Ingénierie et Mathématique) (EMF, 2018, énoncé de la thématique, https://emf2018.sciencesconf.org/resource/page/id/1). Nous examinons, depuis 15 ans, cette complexité de l'interaction entre ce rôle transformé de mathématiques dans la société moderne et les apprentissages des élèves via une approche « multidisciplinaire, holistique, et systémique » (idem.)

Notamment, au plan de l'accès aux ressources, la réalisation du nouveau programme a mené à une mise en place d'une étude pilote ADOP (Accès Direct à l'Ordinateur Portable) (Blain et al, 2006) auprès des élèves de la 6e à la 8e année, qui a permis d'expérimenter les quatre scénarios interdisciplinaires nommés InterTIC (mathématiques, sciences et langue) conçus par les didacticiens, en collaboration avec les enseignants, selon une approche par problèmes (Freiman et al, 2011). Une interaction dialectique entre la démarche de l'élève (qui a pris en possession le problème à résoudre, conçu les outils d'investigation, par exemple, un questionnaire ou un protocole d'expérimentation, a conduit une enquête / expérience scientifique, fait une collecte et une analyse des données, et finalement rédigé un rapport, en plus de partager ses résultats lors d'une présentation à ses collègues de classe) et le savoir mathématique lui permet de se ressourcer tant du côté de mobilisation de ses compétences que du côté de l'appréciation du rôle complexe de mathématiques « comme un outil puissant d'appropriation du réel, un outil de raisonnement, un outil de résolution de problèmes, et un outil de communication » (MEDPE, 2016).

D'autres exemples de ressources qui sont devenues accessibles grâce aux technologies numériques sont le site Internet CAMI (Communauté d'apprentissages multidisciplinaires interactifs) qui proposait des problèmes mathématiques aux élèves (entre 2000 et 2015) (Freiman et Lirette-Pitre, 2009; Freiman et Manuel, 2013; Freiman et DeBlois, 2014), le logiciel dynamique d'algèbre GrapheEasy utilisé par Gauthier (2014) dans une démarche PIE (prédire-investiguer-expliquer), le forum de discussion en ligne pour permettre aux élèves de se partager des démarches de résolution de problèmes algébriques (LeBlanc, 2012), et un site wiki de co-construction de savoirs didactiques par les futures enseignants de mathématiques et de sciences lors de leur formation initiale (Freiman et Lirette-Pitre, 2006). Une expérimentation a été faite avec quelques enseignants du primaire et du secondaire quant à l'utilisation d'un simulateur virtuel de jeux de hasard conçu par les didacticiens québécois, à l'aide de l'équipe de concepteurs de ressources en ligne NetMath et des enseignants du secondaire (Freiman et al, 2012). D'autres collaborations ont été entamées avec les enseignants français et haïtiens menant à la conception du portail ProblemaTICE (http://www.problematice.com/) qui contient de problèmes mathématiques avec une trousse d'outils multimédia (animations, vidéos, exercices, etc.) permettant un apprentissage plus autonome de la part de élèves, tout en donnant du sens aux apprentissages de concepts mathématiques (Gauthier, 2014) et en explorant la créativité des élèves (Bélanger et al., 2014).

D'ailleurs, des liens entre les activités de robotique et les mathématiques ont été mis en évidence lors des expériences pilotes dans une école primaire (en 5-6-7 années) faisant partie de projets FIA (Fonds d'innovation en apprentissage) permettant aux enseignants d'innover dans leurs pratiques pédagogiques. Les données de cette étude (Blanchard et al, 2010) ont fait ressortir le potentiel de l'activité de robotique qui, par sa nature, celle de synchronisation entre les robots Lego Mindstorm® et le logiciel RoboLab®, semble solliciter constamment des combinaisons complexes des capacités cognitives et métacognitives de haut niveau de la part de l'élève. Parmi ces capacités on retrouve la prise de conscience de la situation,

l'élaboration de stratégies de prise de décision et le monitoring continu de l'exécution qui nécessite l'ajustement constant du programme de robot. Blanchard et al. (2010) ont soulevé la préoccupation que devant cette complexité, dans le but de fournir de l'aide aux élèves, une intervention trop directe de l'enseignant risque de nuire à leur capacité de se ressourcer à partir d'un feedback instantané du système d'exécution du programme par le robot en continuant les essais-erreurs. En même temps, les auteurs ont noté que l'absence de toute forme d'étayage produit, comme effet, une solution qui, malgré tout effort soutenu de va et vient, crée une impasse dans le processus de résolution de problème (idem.).

Une analyse plus raffinée du travail des élèves effectuée par Savard et Freiman (2016) a révélé des problèmes concernant l'évaluation du progrès des élèves notamment sur le plan de développement de leur capacité de se ressourcer tant cognitivement que méta-cognitivement. En effet, une stratégie essai-erreur utilisée sans étayage didactique approprié montre ces limites quant à l'évaluation systémique de la situation (lorsque le robot ne suit pas les commandes voulues) et une synchronisation conséquente du code et de déplacements de robot, à l'aide de paramètres numériques appropriés (vitesse et angles de rotation). Cela complexifie également l'apport 'ressourçant' du savoir mathématique mobilisé qu'on continue à étudier avec nos partenaires du milieu scolaire dans le cadre de la nouvelle initiative CompeTI.CA (Compétences en TIC en Atlantique, www.competi.ca), un Réseau de partenaires qui collaborent sur les enjeux d'éducation d'un écosystème qui s'intègre au monde numérique de plus en plus global et interconnecté (Freiman et al, 2016; Freiman et al., 2017, et Freiman et Chiasson, 2018).

En réponse à ces enjeux du monde numérique du 21e siècle, le nouveau Plan provincial en éducation de 10 ans (MEDPE, 2016) accorde une place encore plus importante aux disciplines STIM, où on définit le rôle intégrateur de mathématiques comme ressource qui appuie le développement chez les élèves non seulement d'une meilleure « compréhension de leur univers, mais aussi des capacités de raisonnement, l'affinement des habiletés de résolution de problèmes et le maintien d'une forme de questionnement » ainsi leur permettant de « se servir des concepts mathématiques dans divers contextes d'apprentissage et de vie » (p. 15). De plus en plus d'écoles de la province introduisent alors des activités de programmation et de robotique dans le curriculum, sous forme d'ateliers de fabrication numérique (Labos créatifs, https://www.brilliantlabs.ca/) et directement dans l'enseignement disciplinaire, entre autres, en mathématiques (LeBlanc et al, 2018).

À qui donc ressemble aujourd'hui cette classe de mathématiques transformée, orientée vers le futur? Toutefois, que veut-on dire par 'ressources' dans ce nouveau contexte? À quoi ressemblent la diversification et la complexification des ressources ? De quelle façon les nouveaux espaces d'apprentissages donnent l'accès aux ressources nécessaires pour bien outiller les élèves « d'aujourd'hui pour vivre dans le monde de demain » (EMF, 2018)? De manière plus générale, comment une plus grande diversification et complexification de ressources peut-elle soutenir les apprentissages dynamiques des élèves, tout en maximisant les affordances des ressources? Nous avons présenté, dans le cadre de notre groupe de travail lors du colloque, des premiers résultats d'une étude de cas menée dans une école intermédiaire (6-7 année, programme d'immersion française) qui a permis d'intégrer les activités de conception, de réalisation et de partage de défis informatiques dans un cours de mathématiques (Chiasson, 2018, accepté).

II. APPRENTISSAGE INTEGRE DE LA ROBOTIQUE ET DE RESSOURCES NOUVLLES : UNE CLARIFICATION CONCEPTUELLE

Denning (2009) précise que le développement des compétences nouvelles, stimulées par l'expérimentation, les interactions et la pratique active, devrait s'insérer dans des activités de programmation informatique. En effectuant une synthèse de la littérature scientifique portant sur l'apprentissage de la robotique, Chiasson (2018, accepté) démontre qu'il s'effectue à partir de l'utilisation de divers concepts mathématiques et informatiques (la logique, l'algorithmique, la décomposition, la séquence, l'abstraction et l'évaluation) à l'aide d'une démarche inductive de résolution de problèmes complexes (le bricolage, la création, le débogage, la persévérance et la collaboration) dans un espace d'apprentissage riche en technologies qui facilite l'accès à une plus grande variété de ressources (humaines et technologiques), ainsi qu'une exploration continue de leurs affordances (Figure 1) :

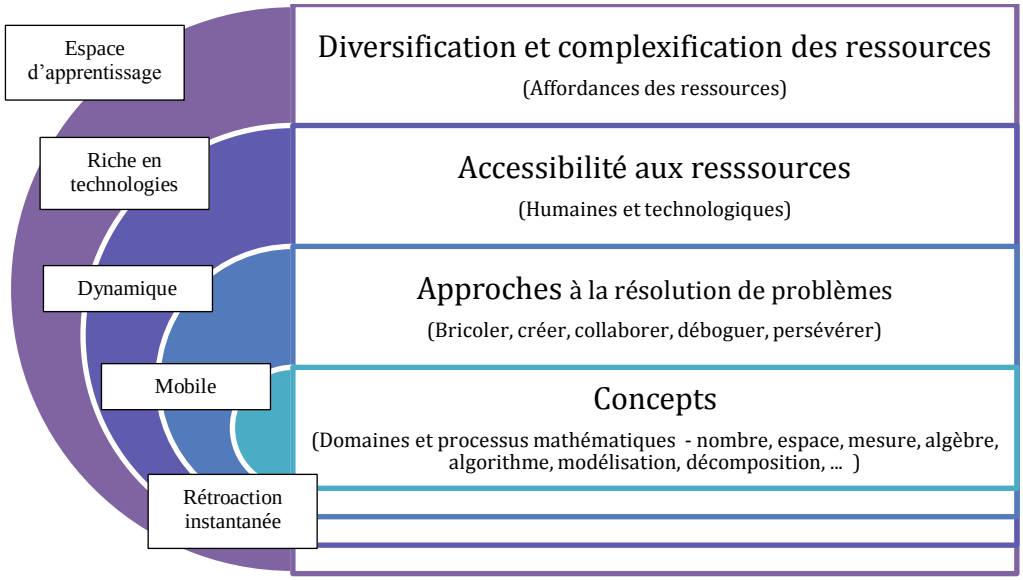


Figure 1 - Diversification et complexification des ressources dans un espace d'apprentissage riche en technologies, dynamique, mobile, avec rétroaction instantanée

Dans un monde numérique moderne, l'accès aux ressources technologiques devient indispensable à l'émergence de la collaboration et, par conséquent, permet d'accroitre l'efficacité et la productivité des individus. En outre, le partage des connaissances entre les membres d'une organisation est considéré comme une ressource qui favorise la réussite et crée une culture d'*empowerment* (Tapscott, 2006).

Plusieurs auteurs reconnaissent l'impact de l'environnement d'apprentissage sur les approches pédagogiques utilisées en salle de classe. En outre, l'intégration des ressources technologiques dans l'enseignement favorise une pédagogie active qui permet aux élèves de prendre part à leurs apprentissages (Breslow, 2007; Norton, McRobbie et Cooper, 2000). Plus récemment, Djambong et Freiman (2016) précisent que, contrairement aux classes traditionnelles, un espace plus riche en ressources technologiques fait place à l'exploration, à la découverte, à l'expérience et à l'expérimentation, facilitant des activités pédagogiques telles que les remue-méninges, la réévaluation des idées, la réflexion ainsi que le travail individuel ou en équipe. Toutefois, il est primordial de faire la distinction entre deux principaux types de technologies qui supportent la construction d'un espace riche en technologies : les technologies physiques reliées à l'espace physique (les salles, les murs, les fenêtres, les tables,

les chaises, etc.) et les technologies numériques reliées à l'espace numérique (l'ordinateur de bureau à l'ordinateur portable, la tablette numérique, ainsi que d'autres appareils mobiles munis d'un accès Internet) qui sont en évolution constante (JISC, 2006, Lorenz et al, 2015).

En ce qui concerne les ressources humaines, la construction des connaissances des élèves peut s'enrichir par des interactions sociales dans des environnements collaboratifs. Vygotsky (1962) a soutenu que la croissance cognitive de l'apprenant s'améliore en interaction de l'apprenant avec des pairs ou des enseignants compétents. D'ailleurs, des théories socioculturelles de l'apprentissage mettent l'accent sur l'utilisation d'outils pour la médiation de la construction collaborative des connaissances (Cole, 1996, Pea, 1993). Les discussions de groupe peuvent servir d'outils de médiation pour l'acquisition de connaissances. La recherche a indiqué que les discussions de groupe correctement guidées sont une ressource qui permet généralement des perspectives différentes, encourage la négociation de sens et facilite ainsi la construction de connaissances collaboratives dans des contextes d'apprentissage en ligne et en face-à-face (Brookfield et Preskill, 2005).

Le besoin de diversifier les ressources est souvent associé à l'enjeux de mieux répondre à la réalité nouvelle de salle de classe de plus en en plus hétérogène, ce qui est, dans le contexte scolaire du Nouveau-Brunswick, est lié à l'inclusion scolaire.On cherche ainsi un meilleur engagement de tous les élèves dans leurs apprentissages, tout en augmentant leur motivation, à laquelle un accès direct aux outils numérique peut contribuer de façon essentielle, comme l'a démontré, entre autres, le projet ADOP mentionné ci-dessus (Fournier et al, 2006). Le terme 'diversification' dans l'espace d'apprentissage renvoie également au processus d'apprentissage des élèves et repose sur un espace d'apprentissage avec des ressources permettant de varier, de différencier, d'adapter et de modifier l'acquisition des résultats d'apprentissage des programmes d'études (Astolfi, 1995). Ainsi, l'interrelation de différentes ressources humaines et technologique crée un espace d'apprentissage en forme de toile d'araignée augmentant les occasions de diversification et de complexification des ressources donnant l'accès à de nouvelles formes de construction des connaissances, qui explorent de nouvelles affordances.

Introduit par Gibson (1979) pour signifier l'adaptation de tout être vivant à son environnement, le terme "affordance" suppose que les individus et les animaux réussissent à s'adapter rapidement aux caractéristiques et aux propriétés d'un milieu. En fait, la façon dont ils perçoivent les caractéristiques physiques des objets correspond à la façon dont ils interagissent avec ces derniers. Or, leur perception génère des actions sans aucune connaissance antérieure des objets, ce qui révèle qu'elle ne repose que sur la dimension visuelle de l'objet. Ainsi, une affordance existe en lien avec les capacités d'action d'un individu et ne change pas lorsque ses besoins ou ses buts se modifient (Evans, Pearce, Vitak et Treem, 2016). Inspiré de Gibson (1979), Norman (1999) s'intéresse à la conception des objets et des environnements d'apprentissage numériques axée sur les possibilités qu'offre un objet, soit l'interaction personne-objet ou personne-machine. Ainsi, l'apparence physique des objets ou des environnements doit inspirer des actions possibles de l'utilisateur ou définir comment ils devraient être utilisés (Allaire, 2006; Evans et al., 2016).

Dans un environnement d'apprentissage, Allaire (2006) mentionne que les affordances, de nature autant sociale que numérique, permettent de soutenir la pédagogie de même qu'une démarche d'analyse réflexive en collaboration avec d'autres apprenants, dans un mode de créativité. Selon Gaver (1991), les affordances doivent mettre en lumière des aspects de l'espace d'apprentissage permettant aux élèves de s'y intégrer rapidement. En d'autres mots, les caractéristiques sociales de l'environnement ont une forte incidence sur la façon dont les élèves y interagissent. Or, les affordances doivent clairement être représentées afin d'être bien perçues. Bref, il est important que les affordances sociales du contexte en face à face soient

clairement visibles pour amener les individus à collaborer avec d'autres. Toutefois, elles doivent être assez souples pour laisser la latitude aux apprenantes et apprenants quant aux possibilités d'interactions.

Du côté des affordances numériques mises en place pour soutenir la démarche d'analyse réflexive, elles doivent être perceptibles du point de vue des processus qu'elles soutiennent (Gaver, 1991). En d'autres termes, elles doivent permettre aux utilisateurs de les adapter à leur contexte d'utilisation et de prendre des initiatives dans les tâches à accomplir. Toutefois, l'auteur souligne l'importance de ne pas proposer des affordances dont la perception engendrera une action trop peu souple qui risquera ainsi d'aller à l'encontre du développement de la réflexion. Selon Dallaire (2008), dans un contexte éducatif, pour assurer l'engagement et l'apprentissage, l'enseignant doit prendre en compte la perception des élèves de l'environnement ou des objets numériques puisqu'elle déterminera la façon dont les élèves vont interagir. Plus précisément, les affordances ne se limitent pas aux possibilités offertes mais plutôt à ce qui se produit lorsque les élèves utilisent les outils numériques.

Dans notre étude de cas, nous analysons des exemples du travail des élèves sur les tâches de conception, réalisation et partage de défis informatiques avec les robots programmés qui permettent de rendre visibles des éléments de diversification et de complexification de ressources que nous illustrerons à l'aide de deux exemples.

III. EXEMPLES DE CONCEPTION ET D'USAGE DE RESSOURCES EN ROBOTIQUE PAR LES ÉLÈVES : ENJEUX DE DIVERSIFICATION ET DE COMPLEXIFICATION

Exemple 1 : Conception d'un défi

Une fiche avec un défi informatique a été présentée aux élèves (Figure 2). Après avoir composé une séquence algorithmique permettant, à l'aide d'un iPad et d'une application appelée *Swift Playgound* (langage de programmation), de programmer le déplacement d'un robot, les deux élèves assis sur le plancher pouvaient observer le comportement du robot en action (exécution du programme). Ainsi, ils pouvaient valider si le robot (*Dash*), s'arrête à une certaine distance (5 cm requis par l'énoncé du défi) de l'objet gris (personnage de *StarWars*) et émet un son. Plus précisément, les élèves exploitent les différents concepts mathématiques et des approches de résolution de problèmes. S'ils perçoivent qu'il leur manque des informations pour bien définir le problème présenté, au lieu de passer à l'étape de l'exécution, ils reprendront la phase de perception pour recueillir des informations supplémentaires. Toutefois, s'ils sont satisfaits de l'information recueillie, ils conceptualisent un plan d'actions cognitives, c'est-à-dire, des lignes de code qu'ils mettront en exécution. Ainsi, lors de l'exécution, ils utilisent des concepts pour ajuster leurs approches afin de régler les problèmes rencontrés. C'est au moment de l'exécution de leurs codes qu'ils reçoivent des rétroactions les informant de la réussite ou de l'échec du défi. Dans le dernier cas, ils reprendront le processus pour trouver la source du problème en utilisant d'autres concepts ou d'autres approches. Dans le cas d'un succès, ils pourront partager leurs résultats avec les pairs ou l'enseignant afin de valider leurs apprentissages leur permettant de développer leur autonomie et leur confiance en soi.



Figure2 - Deux élèves en train de valider l'exécution de leur programme par le robot

Exemple 2. Réalisation d'un défi par les élèves

Lors de la réalisation de leurs projets, les élèves devaient concevoir leur propre fiche de défi informatique (et créer leur propre parcours du robot), le tester et partager les résultats avec leurs pairs. Après avoir conceptualisé le parcours en utilisant les ressources disponibles en salle de classe, les élèves font la construction concrète du parcours en se référant à leur représentation graphique et, par la suite, écrivent les lignes de code pour représenter le trajet à être exécuté par le robot. Au moment de l'exécution, les élèves vérifient (valident) la cohérence du comportement du robot en lien avec le parcours et les lignes de code. S'il y a une incohérence, un problème existe. Ainsi, par cette complexification des ressources dans l'espace d'apprentissage, les élèves doivent trouver des solutions aux problèmes présentés en employant diverses concepts et approches tout en utilisant les ressources disponibles.



***Figure* 2** : Conception par l'élève, réalisation et partage d'un défi

Ces deux exemples démontrent bien la complexité du problème que tentent de résoudre les élèves de 12-13 ans, diverses approches qu'ils mobilisent lors de leur processus de résolution de défis, ainsi qu'une plus grande diversification des affordances de ressources qui ont été mises à leur disposition et qui ont été choisies et mobilisées par les élèves dans cet écosystème d'apprentissage nouveau d'une école du 21^{e} siècle dans laquelle les mathématiques même jouent de nouveaux rôles d'outils d'apprentissage interdisciplinaire (STIM). Ces rôles doivent fait objet des études plus systémiques et plus approfondies de la part des didacticiens.

REFERENCES

Allaire S. (2006. Les affordances socionumériques d'un environnement d'apprentissagehybride en soutien des stagiaires en enseignement secondaire. De l'analyse réflexive à la coélaboration de connaissances. Thèse de doctorat, Université Laval.

Astolfi, J. P. (1995). Essor des didactiques et des apprentissages scolaires. *Educations Janvier.*

Bélanger J-P., DeBlois, L. et Freiman, V. (2014) Interpréter la créativité du raisonnement dans les productions d'élèves en mathématiques d'une communauté d'apprentissages multidisciplinaires interactifs. *Éducation et Francophonie XLII (2),* 44-63.

Breslow, L. (2007). Lessons learned: findings from MIT initiatives in educational technology (2000-2005). *Journal of Science Education & Technology, 16*, 283- 97.

Brookfield, S., & Preskill, S. (2005). *Discussion as a way of teaching: Tools and techniques for democratic classrooms.* San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Chiasson, M. (2018). The Relationship of Learning Spaces and the Development of Computational Thinking Skill. Full Paper accepted for presentation at the American Educational Research Association (AERA) 2019 Annual Meeting.

Chiasson, M. et Freiman, V. (2017). *A learning space embracing the development of computational thinking skills of students.* Dans Proceedings of Transitions Conference: Inhibiting Innovative Learning Environments. North America, 2017. ILETC. Australia. (.. 83-87).

Cole, M. (1996). *Cultural psychology: A once and future discipline.* Cambridge, MA: Harvard.

Djambong, T., & Freiman, V. (2016). *Task-based assessment of students' computational thinking skills developed through visual programming or tangible coding environments.* Presentation at The CELDA2016 International Conference, Manheim, Germany, October, 24-27.

Denning, P. (2009). The profession of IT- Beyond computational thinking. *Communications of the ACM, 52* (6), 28-30.

Espace Mathématique Francophone (2018). *Mathématiques en scène, des ponts entre les disciplines.* Thématique du Colloque EMF-2018. https://emf2018.sciencesconf.org/resource/page/id/1

Evans, S. K., Pearce, K. E., Vitak, J., & Treem, J. W. (2016). Explicating affordances: A conceptual framework for understanding affordances in communication research. J*ournal of Computer-Mediated Communication, 22*(1), 35-52.

Freiman, V. et DeBlois, L. (2014). Le site Internet CAMI : Une ressource virtuelle pour soutenir la résolution de problèmes chez les élèves francophones du Nouveau-Brunswick. *Cahiers des sciences de l'éducation. Université de Liège, 36*, 115-142.

Freiman, V. et Chiasson, M. (2018). *Repenser à fond l'école du 21e siècle : impact des changements sur l'enseignement et l'apprentissage de mathématiques à l'ère de l'intelligence artificielle et de la cryptographie*. Actes du Colloque du Groupe de didacticiens du Québec, https://www.dropbox.com/s/bbx5y450xsaugqz/2017%20GDM%20Actes.pdf?dl=0

Freiman, V., et Manuel, D. (2013). Une ressource virtuelle de résolution de problèmes mathématiques : les perceptions d'utilisateurs et les traces d'usage. *Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication pour l'Éducation et la Formation (STICEF)* [Numéro spécial : Recherches en EIAH, politiques publiques, pratiques des acteurs (et des chercheurs)]. 2*0*, 1-34.

Freiman, V. et Michaud, D. (2009). *One mathematical formula in the science textbook: looking into innovative potential of interdisciplinary mathematics teaching.* Dans A. Rogerson (Dir.) Proceedings of the Tenth International Conference: Models in Developing Mathematics Education (p. 184-188). Dresden: Hochschule für Technik und Wirtschaft.

Freiman, V., Richard, P. R. et Jarvis, D. H. (2012). *L'enseignement des mathématiques au Nouveau-Brunswick (Secteur francophone)*. Dans J.-L. Dorier et S. Coutat (dir.), *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle.*

Actes du colloque de L'Espace mathématique francophone (EMF2012) (p. 1761-1780). Suisse : Université de Genève.

Freiman V., Savard A., Larose F., Theis L. (2012). *Les simulateurs virtuels pour soutenir l'apprentissage de probabilités : un outil pour les enseignants.* In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012 (GT6, pp. 824–837). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Gaver, W. W. (1991). *Technology affordances.* In Proceedings of the SIGCHI conference on Human factors in computing systems (pp. 79-84). ACM.

Gibson, J. J. (1977). *The theory of affordances.* Dans R. Shaw, J. Bransford (Eds) Perceiving, acting and knowing: Toward an ecological psychology. (p.127-143) Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Joint Information Systems Committee (2006). *Designing Spaces for Effective Learning: A guide to 21st century learning space design* [En ligne]. http://www.westernsprings.school.nz/New%20School/becoming_a_new_school/Resources/jisc_effective_learning_spaces.pdf

LeBlanc, M. (2012). Going beyond the classroom's walls: The electronic forum as a lever for an adequate use of the rules of mathematical reasoning. International *Journal for Mathematics in Education, 4*, 214-221.

Ministère de l'éducation et du développement de la petite enfance du Nouveau-Brunswick. (2016). *Programme d'études en mathématiques, Maternelle*.

Ministère de l'éducation et du développement de la petite enfance du Nouveau-Brunswick. (2016). *Donnons une longueur d'avance à nos élèves.* Plan d'éducation de 10 ans.

Norton, S., McRobbie, C. J. & Cooper, T. J. (2000). Exploring secondary mathematics teachers' reasons for not using computers in their teaching: five case studies. J*ournal of Research on Computing in Education, 33*, 87-109.

Norman, D. A. (1999). *Affordance, conventions, and design. interactions, 6*(3), 38-43.

Pea, R. D. (1993). *Practices of distributed intelligence and designs for education.* In G. Salomon (ed.), Distributed cognitions (pp. 47–87). Cambridge, MA: University Press.

Tapscott, D & Williams, A. D. (2006). Wikinomics: How Mass Collaboration Changes Everything. Tantor Media. ISBN-13: 9781591843672

Vygotsky, L. (1962). *Thought and language.* Cambridge, MA: MIT Press.

UN DISPOSITIF DE FORMATION INITIALE DE PROFESSEURS STAGIAIRES BASE SUR UN SYSTEME DE RESSOURCES PRIMAIRE

GEORGET* Jean-Philippe

Résumé – Les situations de recherche et de preuve entre élèves sont complexes et rarement présentes dans les pratiques des enseignants. Cette contribution présente l'expérimentation d'un dispositif de formation initiale basé sur un système de ressources dit « primaire » et de situations de formation spécifiques. Ce dispositif exploratoire basé sur la théorie des communautés de pratique et sur l'ergonomie des ressources tend à montrer sa pertinence pour le développement professionnel des enseignants.

Mots-clefs : système de ressources primaire, communauté de pratique, ergonomie des ressources enseignantes, approche documentaire

Abstract – Situations of research and proof between pupils are complex and rarely encountered in ordinary classrooms. This paper presents an experiment of a design of training activities based on what we call a primary system of resources. This design is based on the theory of communities of practices and on ergonomics characteristics of the resources. The first results seems to show the relevance of this approach

Keywords: primary system of resources, communities of practice, ergonomics ressources for teaching, documentary approach

I. INTRODUCTION

Cette contribution s'inscrit dans un projet de recherche à long terme sur les communautés de pratique intentionnelles d'enseignants, communautés en particulier centrée sur les situations de recherche et de preuve entre élèves en mathématiques (Georget, 2007, 2009). Les recherches ont montré que ces situations sont complexes et rarement mises en œuvre dans les classes ordinaires (Artigue & Houdement, 2007 ; Georget, 2009), c'est particulièrement le cas dans l'enseignement primaire où les enseignants ont rarement suivi un cursus scientifique.

Ce projet est basé sur la théorie des communautés de pratique (Wenger, 1998; Wenger, McDermott, & Snyder, 2002) et sur une approche ergonomique des ressources enseignantes (Georget, 2010). Il a débuté par l'expérimentation sur 3 ans d'une communauté de pratique intentionnelle d'enseignants de l'école primaire (Georget, 2007, 2009, 2015). Ce travail de recherche a été l'occasion d'opérationnaliser plusieurs concepts de la théorie des communautés de pratique, autant pour ce qui concerne la conception de ressources et la coordination d'une communauté de pratique que pour ce qui concerne l'analyse de son activité. Cette recherche se poursuit dans le contexte d'un dispositif de formation de professeurs des écoles stagiaires à l'enseignement des mathématiques durant une année universitaire. Ce n'est pas celui d'une communauté de pratique à proprement parler, du fait que les professeurs-stagiaires ne bénéficient pas de toute la liberté chère à Wenger, mais la théorie de ce dernier présente plusieurs leviers que nous présentons ici et qui paraissent pertinents pour concevoir ce type de dispositif.

Ce dispositif est encore dans une phase exploratoire et les aspects méthodologiques restent peu avancés, ce qui explique en partie qu'ils sont peu détaillés dans cette contribution. L'essentiel de la recherche se limite pour le moment à l'identification d'éventuelles réticences du côté des professeurs-stagiaires vis à vis de l'approche retenue et la recherche d'indicateurs de développement professionnel des professeurs-stagiaires à l'issue d'une année de formation à l'université.

* Normandie univ, Unicaen, Cirnef EA 7454 – France – jean-philippe.georget@unicaen.fr

II. CADRAGE THEORIQUE POUR UN SYSTEME DE RESSOURCES PRIMAIRE

Pour donner du corps à la notion de système de ressources primaire que nous présentons dans cette contribution, nous nous appuyons sur la théorie des communautés de pratique, sur l'approche documentaire, et sur une approche ergonomique des ressources.

1. Les apports de la théorie des communautés de pratique

Les processus de participation et de réification figurent parmi les concepts majeurs présentés par Wenger (1998). Le processus de participation réfère à « the social experience of living in the world in terms of membership in social communities and active involvement in social enterprises » (Wenger, 1998, p. 55). Quant au processus de réification, il réfère à « the process of giving form to our experience by producing objects that congeal this experience into 'thingness' » (ibid., p. 58). Les termes participation et réification désignent aussi le produit de ces processus. La participation peut revêtir de multiples formes telles la participation à une réunion, la mise en œuvre d'un projet, etc. mais aussi plus largement le simple fait de penser à la réalisation de ces tâches hors de la présence de membres de la communauté de pratique considérée. Quant aux réifications, qui permettent donc de « chosifier » et mettre en forme notre expérience, elles peuvent être, par exemple, des objets, des éléments de langages, des symboles, des attitudes, des concepts, des histoires, etc.

Un processus dialectique lie les deux processus de participation et de réification. D'une part, la réification permet la participation. C'est le cas, par exemple, d'un document décrivant une situation d'enseignement qui embarque des éléments d'expérience pratique de l'enseignement, ou encore d'une histoire racontée par un enseignant à propos de la mise en œuvre de telle ou telle situation en classe. D'autre part, la participation d'un enseignant dans une communauté permet la réification. L'enseignant interagissant de multiples manières avec les autres membres de cette communauté de pratique crée et modifie des réifications, qui a leur tour permettent aux membres d'interagir.

Un apport majeur de la théorie de Wenger est son attention portée aux membres dans la communauté qui peuvent être plus ou moins investis sans pour autant s'en séparer. Par le design du dispositif, il semble pertinent de permettre aux professeurs-stagiaires de suivre diverses trajectoires, plus ou moins impliquées dans le fonctionnement du dispositif, et de favoriser les opportunités de développement professionnel à plus ou moins long terme grâce aux dynamiques engendrées.

Ainsi, notre expérimentation se situe dans le droit fil de Wenger, McDermott, and Snyder quand ils écrivent : "planning a community is more a matter of finding the triggers to catalyze evolution than creating a full design" (2002, p. 73). Concrètement, les ressources documentaires sont pour nous l'un des déclencheurs privilégiés pour favoriser une variété de développements professionnels et de genèses documentaires (Gueudet & Trouche, 2010). Mais, du fait de ce que nous avons appelé le paradoxe d'incomplétude des ressources concernant la quantité d'information utilisable et acceptable par un enseignant (Georget, 2009), ces ressources nécessitent d'être accompagnées par des actions spécifiques.

Nous avons synthétisé sous forme d'un outil (voir figure 1) les dimensions et principes présentés par Wenger (1998) et Wenger, McDermott, & Snyder (2002) pour (re)penser et coordonner des communautés de pratique. Cet outil est particulièrement utile dans des dispositifs basés sur des ressources même si ceux-ci ne présentent pas la liberté de fonctionnement caractéristique des communautés de pratique telles que définies par Wenger.



Figure 1 *– Outil synthétique de réflexion pour l'émergence et la coordination d'une communauté de pratique (Georget, 2009, p. 53, à partir de Wenger, 1998, et Wenger, McDermott, & Snyder , 2002)*

Nous n'allons illustrer ici que quelques-unes de ces dimensions et principes. Des illustrations complémentaires sont présentées dans notre thèse dans le cadre d'une communauté de pratique intentionnelle (Georget, 2009, p. 52 et suiv.)

La dimension participation/réification est relative à la définition des concepts rappelée plus haut. L'opérationnalisation de cette dimension dans la conception d'un dispositif de formation consiste à prévoir un certain nombre de réifications permettant la participation des stagiaires au processus de formation, et à identifier le rôle possible d'autres réifications qui apparaissent dans le temps dans ce dispositif.

Cette dimension prend toute sa force quand elle est considérée avec les autres. Ainsi, la dimension conçu/émergent consiste justement à penser le dispositif – le conçu – comme un dispositif ayant un potentiel pour favoriser l'apparition d'autres réifications – l'émergent – susceptibles de favoriser la participation. De même, la dimension identification/négociabilité permet de penser le design du dispositif en repérant ce à quoi les stagiaires peuvent s'identifier facilement d'une part – par exemple les exigences des programmes scolaires, des situations traditionnellement mises en place à l'école, ou bien la mise en œuvre d'une situation-problème facile à mettre en œuvre – en laissant d'autres aspects à la négociation pour et par chaque stagiaire d'autre part – par exemple la temporalité pour la mise en œuvre durant l'année de différents aspects exigés par ces programmes, la mise en œuvre d'aménagements plus pertinents de situations traditionnelles, ou bien la mise en œuvre de ladite situation-problème.

La dimension degré de participation nous semble, elle aussi, particulièrement pertinente à opérationnaliser. Il s'agit de prendre en compte dans le design d'une formation le fait que tous les stagiaires ne vont pas s'impliquer dans les activités prévues avec la même intensité. Concrètement, ceci peut passer par le choix de projets de groupes où une latitude sera laissée à l'organisation des stagiaires, organisation où le rôle de certains sera différencié, de façon plus ou moins volontaire ou consciente. L'important paraît être ici de garantir une implication minimale de chaque stagiaire, afin de leur permettre de s'approprier des objets de la formation, dans la durée et à leur rythme, en s'appuyant à la fois sur le dispositif conçu par le formateur et sur le dispositif émergent qui se construit durant le temps de la formation. C'est aussi une manière de développer des espaces privés, c'est à dire n'impliquant que certains membres du groupe en lien, plus ou moins formel ou visible, avec des activités ayant lieu dans l'espace public du groupe de professeurs-stagiaires, et donc de jouer sur la dimension espaces privés/publics (Georget & Sabra, 2016).

Ces premières dimensions forment un pont avec la question des ressources accessibles aux enseignants, particulièrement celle des ressources documentaires.

2. Les recherches sur les ressources en didactique des mathématiques

Le terme ressource peut être pris dans un large sens, comme ce qui permet de re-sourcer un enseignant (Adler, 2000) et être confondu avec le terme de réification présenté plus haut. Dans cette contribution, il est essentiellement entendu dans le sens plus restreint de ressource documentaire, même si la globalité de notre approche nous fait considérer par ailleurs l'ensemble de ce qui peut constituer une ressource pour un enseignant.

Notre recherche a de nombreux liens avec l'approche documentaire développée par Gueudet et Trouche (2010), approche où les ressources sont prises dans un jeu de genèses documentaires, fruits de processus d'instrumentation et d'instrumentalisation sources de développement professionnel pour les enseignants.

Nous accordons aussi notre attention aux caractéristiques ergonomiques des ressources, en nous basant sur des recherches menées sur les environnements informatiques pour l'apprentissage humain (Tricot et al., 2003). Il s'agit d'évaluer par divers moyens ces caractéristiques interdépendantes que sont l'utilité, l'utilisabilité et l'acceptabilité des ressources. L'évaluation de l'utilité consiste à évaluer si ces ressources rendent le service attendu d'elles. L'évaluation de leur utilisabilité consiste notamment à évaluer si les enseignants peuvent les adapter à leur expertise et à leur contexte d'exercice. Enfin, l'évaluation de leur acceptabilité consiste à évaluer la valeur que les enseignants leur donnent dans leur système documentaire.

Notre travail de recherche a déjà montré que les ressources documentaires destinées aux enseignants, même si elles bénéficient d'une bonne appréciation des formateurs à l'enseignement des mathématiques, n'ont pas toujours les caractéristiques ergonomiques souhaitées (Georget, 2009). La critique la plus courante qui puisse leur être faite est qu'elles ne présentent souvent qu'une seule manière d'utiliser une situation d'enseignement mathématique donnée et que les options qui exploiteraient la même situation de façon moins poussée ne sont pas ou très rarement présentées. Autrement dit, l'utilisabilité des ressources peut être un frein à leur acceptabilité et à leur utilité puisqu'elles ne remplissent in fine pas le rôle prévu par leur concepteur.

3. Un système de ressources primaire et une analogie avec les fluides

Les considérations théoriques et pratiques précédentes militent pour la mise à disposition des professeurs stagiaires d'un ensemble de ressources documentaires en début d'année de formation que nous nommons ici système de ressources primaire. Il est primaire au sens où il n'est qu'un ensemble d'artefacts qui embarque diverses possibilités d'utilisation à considérer comme des potentiels de genèses instrumentales et de développement professionnel des professeurs stagiaires en cours d'année, voire au-delà.

Quel pourrait être le cahier des charges de ce système de ressources primaire ? Pour décrire ce cahier des charges, nous allons nous appuyer sur une analogie – qui n'est sans doute pas sans limite – et considérer le système de ressources primaire et le système documentaire d'un enseignant comme deux fluides qui interagissent. Le système de ressources primaire a vocation, comme deux fluides pourraient le faire entre eux, à se lier singulièrement au système documentaire de chaque professeur-stagiaire, plus ou moins partiellement et plus ou moins durablement. Ainsi, chaque professeur-stagiaire est susceptible de s'appuyer de différentes manières sur ce système primaire en fonction de son expérience et des

caractéristiques de son propre système documentaire, par exemple s'il est basé ou non sur une approche de type socio-constructiviste de l'apprentissage.

Pour filer l'analogie des fluides, le système de ressources primaire devrait sans doute avoir une certaine densité, c'est à dire contenir de nombreuses connaissances liées à l'enseignement des mathématiques, afin que chaque professeur stagiaire puisse en apprendre quelque chose et enrichir sa propre pratique en fonction de son expérience, peu importe l'importance de cette appropriation. En termes de théorie des communautés de pratique, il s'agit par exemple de jouer sur les dimensions participation/réification et degré de participation. En termes d'ergonomie (dimension utilisabilité), c'est jouer sur la prise en compte des différences d'expertise que l'on peut rencontrer au sein des professeurs-stagiaires. En début d'année de formation, certains d'entre eux ont déjà des connaissances avancées sur ce que peuvent réaliser des élèves alors qu'à l'inverse d'autres peinent à imaginer que les élèves puissent faire autre chose que ce qu'ils ont eux-mêmes connus lorsqu'ils étaient élèves.

Ce système devrait aussi être doté d'une certaine viscosité pour permettre des adhérences entre lui et le système documentaire de chaque professeur stagiaire. Cela peut se traduire par la présence d'éléments de cohérence et d'imbrication possibles entre le système de ressources et le système documentaire de chaque professeur-stagiaire afin de faciliter l'appropriation d'éléments nouveaux par ces derniers. En termes de théorie des communautés de pratique, il s'agit notamment de jouer sur la dimension identification/négociabilité comme illustré plus haut en proposant, par exemple, des situations riches du point de vue didactiques, explicitement cohérentes avec les programmes scolaires, mais faciles à mettre en œuvre en classe.

Enfin, ce système de ressources primaire devrait aussi avoir des qualités de dilatation, c'est à dire une faculté de « s'étendre » à certains endroits pour permettre aux enseignants-stagiaires de consulter de nouvelles ressources à partir de ce système primaire, ceci pour éviter que leur propre système documentaire ne se « fige » trop tôt ou trop vite. Ceci peut par exemple passer par la présentation de situations d'enseignement de façon « assez » détaillée, pour montrer leur intérêt, mais pas « trop », pour donner envie au professeur-stagiaire de consulter la référence originale d'où sont extraites ses situations.

Formulée dans les termes de l'analogie des fluides, nous posons donc la question de construire un dispositif de formation bâti autour d'un système de ressources primaire qui permettent d'influencer de manière plus ou moins profonde et plus ou moins durable le système documentaire de chaque professeur-stagiaire pendant et à la suite de sa formation initiale à l'université, et ainsi permettre un développement professionnel à court, moyen, et long terme, plus en accord avec les résultats de la recherche en didactique des mathématiques.

II. METHODOLOGIE

La méthodologie mise en œuvre vise à identifier les éventuelles réticences des professeurs-stagiaires vis à vis d'un dispositif basé sur les éléments théoriques exposés précédemment et à identifier des indicateurs de développement professionnel liés à ce dispositif.

1. Éléments de contexte et expérimentation

Le contexte de l'expérimentation est celui de notre université et concerne deux groupes de professeurs-stagiaires en formation alternante, la moitié de la semaine en stage dans une école tout au long de l'année, l'autre moitié en formation à l'École supérieure du professorat et de l'éducation de l'université. En 2016-2017, devant le constat d'un manque d'évolution des

pratiques d'enseignement des professeurs-stagiaires pendant l'année de formation, des formateurs à l'enseignement des mathématiques ont décidé de remettre à plat leur dispositif de formation. Ils ont alors axé l'essentiel de leurs modalités de formation autour d'un système de ressources primaire diffusé dès le début de l'année universitaire auprès des professeurs stagiaires et conçu dans les perspectives développées plus haut.

Ce système de ressources primaire prend la forme d'un ensemble de dossiers et de fichiers distribué principalement sous forme électronique. Cet ensemble hétérogène se compose de diaporamas de cours, de trames de séquence, de présentation de situations d'enseignement, de résumés de manières d'aborder certaines notions/techniques, etc. Il contient des références internes – c'est à dire entre les dossiers et fichiers eux-mêmes – et des références externes à ce système – par exemple des références aux programmes scolaires, à des ouvrages, à des articles, etc. Il donne à la fois des informations et des situations assez directement applicables en classe et des aperçus de ce que propose certaines ressources externes.

Les situations de formation programmées durant l'année et pendant le temps de cours en présentiel visent à favoriser la consultation et l'utilisation du système de ressources primaire, à permettre la consultation de références externes, à favoriser l'élaboration de séances et de séquences d'enseignement, à favoriser les échanges entre professeurs-stagiaires, et à favoriser les regards critiques sur les situations proposées par les manuels scolaires classiques. Deux épreuves d'évaluation écrites consistent à produire une analyse a priori et une analyse a posteriori sur une situation d'enseignement laissée au choix de chaque professeur-stagiaire mais qui doit comprendre une situation de recherche en mathématiques et s'appuyer sur des références au choix du professeur-stagiaire. Durant toute la formation, l'accent est mis aussi souvent que possible sur les réponses aux questions des professeurs-stagiaires et sur les éléments d'enrichissement de pratique d'enseignement contenus dans le système de ressources primaire.

Pour résumer, chaque groupe de professeurs-stagiaires est ici considéré comme une communauté coordonnée par le formateur. Cette communauté est considérée comme un système complexe sur lequel nous savons peu de choses, ne serait-ce que concernant le degré d'expertise de chaque professeur-stagiaire. Ainsi, nous ne pouvons pas prévoir exactement comment chaque ressource va permettre ou non le déclenchement d'une dynamique « positive » de développement professionnel. Tout au plus, étant donné leur variété et la prise en compte des dimensions du design présentées plus haut, nous considérons qu'il y a de nombreuses potentialités pour que cela arrive durant l'année à des degrés divers à court, moyen ou long terme. Face au système complexe que représente cette communauté, nous présentons par un système complexe de ressources embarqué dans un système de situations de formation centré autour ce système de ressources. Comme tout système de formation des enseignants, le système de formation conçu comprend des contraintes assez fortes, mais celui-ci prend aussi en compte la possibilité de développements professionnels différenciés selon les professeurs-stagiaires.

2. Discussion sur le recueil de données

L'évaluation des effets du design mis en place est ardue du fait de son imbrication dans le système de formation auquel participent les professeurs-stagiaires. Notre recherche se concentre pour le moment sur l'identification d'éventuelles réticences des professeurs-stagiaires vis à vis de notre approche et sur l'identification d'indicateurs de leur développement professionnel.

Nous avons collecté plusieurs types de données pour tenter, dans une première approche, d'identifier les effets les plus marquants du design. Nous avons soumis les professeurs-stagiaires (n=35) à un questionnaire après 2 mois de formation. De plus, nous avons observé et enregistré la mise en œuvre de situations de recherche et de preuve en milieu d'année (4 professeurs-stagiaires, 1 situation chacun). Ces observations ont chacune été suivie d'un entretien semi-directif post-séance enregistré. Enfin, nous avons recueilli en fin d'année l'évaluation de l'enseignement par les professeurs stagiaires, ainsi que les analyses a priori et a posteriori récoltées en cours d'année dans le cadre du processus d'évaluation universitaire des compétences des professeurs stagiaires. Les chercheurs étant aussi des formateurs, les observations et entretiens ont été croisés de façon à limiter les interférences entre ces deux rôles. Les professeurs-stagiaires étaient des professeurs n'ayant pas de difficulté particulière dans leur stage selon l'administration, ce qui peut introduire un biais dans les résultats.

Le rôle du questionnaire après 2 mois de formation était d'en savoir plus sur l'utilisation du système de ressources primaire par les stagiaires et sur leur pratique des situations de recherche et de preuve dans leur classe. Les observations et l'enregistrement des séances, les entretiens post-séance, et dans une moindre mesure, les analyses a priori et a posteriori, étaient un moyen d'étudier la pratique des stagiaires et de rechercher des liens avec le système de ressources et les situations de formation. Seuls les questionnaires et certaines données liées aux séances observées ont été traitées (notamment la présence de moments de débats mathématiques en classe). Les différentes données feront l'objet d'analyses de contenu pour identifier des traces du design retenu sur le développement professionnel et de dégager ensuite des méthodologies plus précises d'analyse de ces données. En effet, il ne s'agissait dans cette expérimentation que d'une première tentative de design censé provoquer des évolutions plus visibles qu'auparavant chez les professeurs stagiaires.

III. RESULTATS ET DISCUSSION

Le dispositif de formation conçu contient d'importantes contraintes sur la pratique des professeurs-stagiaires. À l'issue de l'année de formation, les professeurs acceptent pourtant ces contraintes et demande même un accroissement de la « pression » qui pèse sur eux, tant ils pensent qu'ils auraient pu vivre un développement professionnel plus riche ou plus rapide dès le début de l'année. L'un deux (Jim) déclare lors de l'entretien : « Je me lance, c'est le début de l'année, donc pas grave », signifiant par ces mots, éclairés par le reste de l'entretien, qu'il a ressenti une forte pression de la part de l'université au début de l'année mais qu'il avait l'excuse du débutant pour échouer. Il pensait que sa première mise en œuvre allait être une exception dans l'année pour satisfaire les attentes des formateurs. Lors de l'entretien, il déclare qu'il a finalement mis en œuvre des situations similaires dans sa classe et qu'il se sent plus à l'aise pour les mener, pour son propre bénéfice et celui de ses élèves. Les autres professeurs interviewés déclarent plus ou moins la même chose.

Les déclarations recueillies tendent donc à montrer la pertinence de notre approche mais qu'en est-il des pratiques observées ? Nous avons observé des mises en œuvre de situations de recherche et de preuve ouvertes, mais nous avons constaté que celles-ci pouvaient être améliorées sur plusieurs aspects en lien avec plusieurs ressources du système primaire. Par exemple, les débats mathématiques de ces séances étaient plus ou moins « sacrifiés » comme on peut le constater dans des classes ordinaires. Les séances manquaient aussi de réelles phases de conclusion. Autrement dit, l'influence de notre dispositif de formation sur la « qualité » des séances n'a pas été proéminente. Cette influence s'est davantage exprimée chez les professeurs stagiaires en termes de confiance, d'enthousiasme et de souhait de se développer professionnellement.

Nous considérons donc que le dispositif de formation et le système de ressources primaire présente une certaine pertinence puisque nous n'avons pas constaté de réticence de la part des professeurs-stagiaires, malgré les contraintes fortes qu'il contient, et qu'il semble développer un certain enthousiasme chez les professeurs-stagiaires susceptible d'impliquer chez eux des développements professionnels intéressants. C'est le principal résultat qui nous permet d'envisager des prolongements en matière de recherche pour affiner nos investigations.

Aujourd'hui, nos questionnements de recherche s'orientent d'une part vers l'étude des pratique des professeurs observés qui sont maintenant professeurs titulaires et d'autre part vers l'amélioration du système de ressources primaire et des situations de formation. L'amélioration du système de ressources primaire consiste à en faciliter l'accès et à améliorer certaines ressources spécifiques et certaines situations de formation pour étudier si nous pouvons observer des effets plus proéminents sur le court terme d'une année de formation qu'avec le dispositif initial.

RÉFÉRENCES

Adler J. (2000). Conceptualising Resources as a Theme for Teacher Education. Journal of Mathematics Teacher Education, 3(3), 205–224.

Artigue M, Houdement C. (2007). Problem solving in France: didactic and curricular perspectives. ZDM Mathematics Education, 39, 365–382.

Georget JP. (2007). Favoriser la pratique des activités de recherche dans les classes de cycle 3 de l'enseignement primaire : communauté de pratique, pratiques d'enseignants et échanges autour de ces pratiques. Dans N. Bednarz, C. Mary (Eds.), L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés. Espace mathématique francophone 2006. Sherbrooke : Éditions du CRP.

Georget JP. (2009). Activités de recherche et de preuve entre pairs à l'école élémentaire : perspectives ouvertes par les communautés de pratique d'enseignants. (Thèse de doctorat, Université Paris Diderot, France). Paris : IREM de Paris 7. ISBN: 978-2-86612-317-8. https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-00426603/

Georget JP. (2010). Apport de l'ergonomie des EIAH pour l'analyse et la conception de ressources. Dans A. Kuzniak, M. Sokhna (Eds.) Enseignement des mathématiques et développement : enjeux de société et de formation, actes du colloque international de l'Espace Mathématique Francophone. Revue Internationale Francophone. Numéro spécial, 2010. http://emf.unige.ch/index.php/download_file/view/286/207/

Georget JP. (2015). Apprentissages informels dans une communauté de pratique d'enseignants. In P. Buznic-Bourgeacq et L. Gerard (dir.), L'apprentissage du métier d'enseignant. Constructions implicites, espaces informels et interfaces de formation (p. 177–190). Caen : PUC.

Georget JP., Sabra H. (2016). Espaces privés et enjeux méthodologiques dans l'étude des communautés d'enseignants. Dans C. Cohen-Azria, D. Orange, MP. Chopin (Eds.) Les méthodes de recherches en didactiques. Lille : Presses Universitaires du Septentrion.

Gueudet G., Trouche L. (2010) Ressources vives, le travail documentaire des professeurs en mathématiques. Rennes : PUR.

Tricot, A. et al. (2003). Utilité, utilisabilité, acceptabilité : interpréter les relations entre trois dimensions de l'évaluation des EIAH. Environnements informatiques pour l'apprentissage humain. Éd. par C. Desmoulins et al. ATIEF INRP, p. 391–402. http://hal.ccsd.cnrs.fr/docs/00/00/16/74/PDF/n036-80.pdf

Wenger E. (1998). Communities of practice. Learning, meaning, identity. New York: Cambridge University Press.

INFLUENCE DES RESSOURCES SUR LA CONCEPTION DE L'ENSEIGNANT DU CONCEPT « VECTEUR »

HAYFA[*] Nina

Résumé – Cet article cherche l'impact que risque d'engendrer le système de ressources choisi par l'enseignant sur sa propre conception du concept « vecteur ». Deux enseignants ont été interviewés et observés durant leur travail sur le vecteur. Il était conclu que l'enseignant qui a un système de ressources plus riche présente une conceptualisation meilleure dans la mobilisation du concept voire son utilité et utilisation. En fait, le concept vecteur présente des difficultés inhérentes au concept lui-même.

Mots-clefs : vecteur, système de ressources, utilité, conception, enseignant.

Abstract – This article looks at the potential impact of the resource system chosen by the teacher on his own conception of the "vector" concept. Two teachers were interviewed and observed during their work on the vector. It was concluded that the teacher who has a richer resource system presents a better conceptualization in the mobilization of the concept or even its usefulness and use. The concept of vector presents inherent difficulties to the concept itself.

Keywords: Vector, resource system, utility, conception, teacher.

I. PROBLEMATIQUE

Il est connu que le concept « vecteur » présente des difficultés d'ordre épistémologiques (LêThi, 1997) voire d'ordre didactique (Hayfa, 2006). Le concept de vecteur contracte trois concepts : direction, sens et module. Ces derniers ne peuvent être conçus, pour un élève aussi bien que pour un enseignant même du lycée, qu'à partir d'une représentation géométrique à travers une « flèche ». Cette représentation incontournable durant l'enseignement académique est source de réduction du concept « vecteur » à son aspect lié : aux deux points qui déterminent la flèche ; l'origine et l'extrémité. Cette représentation empêche, se basant sur les normes géométriques, le sujet à concevoir qu'une flèche A et une flèche B qui sont de supports parallèles, de même sens et de même longueur, représentent le même objet mathématique « le même vecteur ». Pourtant, conformément au système d'éducation Libanais, il est demandé d'un élève de brevet et de lycée de concevoir le vecteur dans son aspect libre : toutes les flèches qui ont même direction, même sens et même module représentent le même « vecteur » (Hayfa, 2006).

Ceci dit, il est évident que la conception de l'enseignant influence celle de son élève. Au cours et après le travail sur notre thèse (pour plus que 10 ans), nous posions la question suivante à des enseignants de mathématiques[1] : « *Ayant une droite (D) dans un plan, combien de vecteurs directeurs de (D) de module 5 a-t-on ?* ». La réponse immédiate de la grande majorité est : « *une infinité car en chaque point on peut tracer un vecteur parallèle à (D) et de longueur 5* ». C'est en fait après une discussion et un appui particulièrement sur la détermination de la somme de deux vecteurs qui se représentent par deux flèches disjointes, qu'ils terminent par être convaincus qu'il y en a seulement deux.

Dans cet article, nous cherchons comment les ressources différentes des enseignants peuvent engendrer des conceptions différentes de « vecteur ». Cela surement influence les conceptions des élèves (Assaad, 2015). En effet : " *toute genèse documentaire, pour un professeur, est porteuse de développement professionnel* " (Gueudet & Trouche, 2008, p. 15).

[*] Université libanaise – faculté de pédagogie – Liban – ninhay@yahoo.fr

[1] Je suis enseignante et formatrice à la faculté de pédagogie.

Nous nous référons, dans le présent article, à l'approche documentaire qui se repose sur la compréhension des mutations engendrées par l'introduction, *particulièrement,* du numérique dans le travail des enseignants et son impact sur leur travail documentaire (Trouche & Gueudet, 2014). Le travail documentaire est le *"processus articulant étroitement conception et mise en œuvre des ressources"* (Gueudet & Trouche, 2008, p.58). De plus, ces derniers mettent en relief l'importance des interactions avec les différentes ressources, autrement dit le travail documentaire, dans le développement des connaissances de l'enseignant.

De plus, nous adoptons les « conceptions » défini par Hayfa (2006) comme suit : « *une conception n'est pas une propriété de l'élève (connaissance), ce n'est pas une connaissance que le chercheur attribue à l'élève ; c'est un modèle explicitant le type de problème sur lequel un système de traitement est valide.* » (p.64). Dans le présent article, nous étudions les conceptions engendrées par le système de ressources de l'enseignant.

Hayfa (2006, p. 184) a défini trois conceptions relatives au « vecteur », de la manière suivante :

*** La conception « vecteur lié » :** Cette conception émerge des exercices où le système d'action consiste à considérer un vecteur comme un bipoint. C'est-à-dire, si l'énoncé donne un vecteur nommé $\overrightarrow{AB}$, alors dans la technique de résolution c'est le bipoint $\overrightarrow{AB}$ qui est mis en jeu, soit dans un calcul algébrique (règle de Chasles ou calcul linéaire) soit dans un traitement graphique. Dans ce dernier cas, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ se réduit à la flèche allant du point A jusqu'au point B.

*** La conception « vecteur libre » :** Cette conception émerge des exercices où le système d'action nécessite de manipuler un vecteur dans son aspect libre. C'est-à-dire, géométriquement, quand il est nécessaire de tracer un vecteur donné en un point différent de l'origine du bipoint qui le désigne.

*** La conception « intermédiaire » :** Cette conception peut être associée aux exercices où le système d'action est conforme à la conception « vecteur libre » mais où il est enseigné dans le manuel sous forme d'algorithme à suivre sans expliciter la justification mathématique de la technique. Ainsi, la conception « vecteur libre » est apparente pour l'expert mais n'est absolument pas indispensable pour permettre à l'élève de réussir la tâche. Toutefois, la conception émergeante, étant dépendante de la justification de la technique explicitée dans le cours, peut varier d'une classe à l'autre avec le même type de tâche.

La présente étude vise à mettre en relief l'impact du travail documentaire de l'enseignant sur la conception émergeante du système de traitement des problèmes sur le vecteur. Ainsi notre question de recherche se formule de la façon suivante : comment le système de ressources de l'enseignant influence ses choix didactiques et quelle conception en émerge ?

II. METHODOLOGIE ET CONTEXTE

Nous avons fait des entretiens avec deux enseignants, que nous désignons ensuite par E1 et E2 qui enseignent deux sections de EB9 (brevet) dans une même école privée alors qui utilisent le même manuel mathématique scolaire ; ce afin de minimiser autant que possible les paramètres non contrôlables et qui risquent d'influencer les résultats. Ces entretiens visent à mettre en relief leurs systèmes de ressources.

De plus, nous avons réalisé des observations des deux sections durant l'explication et le travail sur le concept de « vecteurs ». Ces observations nous ont permis de détecter les

conceptions émergeantes de chaque enseignant aussi bien à travers les définitions des concepts visés qu'à travers la résolution des mêmes problèmes.

Il est utile de mentionner qu'au Liban, la première rencontre avec le *mot* « vecteur » est en classe de EB8 ($4^{ième}$) comme **outil** pour déterminer une translation ; en effet, au lieu de dire « la translation amenant le point A sur le point B » (en EB7, $5^{ième}$), il est dit « la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ ». En EB9 ($3^{ième}$), le vecteur commence à prendre son statut d'**objet** mathématique indépendamment de la translation. Il est à chercher la somme de deux vecteurs consécutifs ou non, nommés par deux points ou par une seule lettre : $\overrightarrow{AB}$ ou $\vec{u}$. D'où le choix de cette classe, il y a possibilité d'émergence des trois conceptions : vecteur libre, vecteur lié ou conception intermédiaire.

III. SYSTEME DE RESSOURCES DES ENSEIGNANTS

A partir des entretiens avec les enseignants voire les observations de classes, nous présentons dans la suite le système de ressource de chacun.

1. Système de ressources de E1

Nous avons mené un entretien avec E1 visant à savoir comment il a collecté ses ressources et comment il les a modifiés pour les utiliser dans son cours. L'enseignant a cherché sur Internet des éléments pour l'aider à élaborer son cours sur les vecteurs. Il a trouvé sur Youtube une vidéo sur la relation de Chasles. L'enseignant1 a explicité qu'en consultant l'internet il n'a rien trouvé d'important que la vidéo sur Youtube. La vidéo parait être utilisée seulement comme un changement d'environnement puisqu'elle n'a pas montré la spécificité du vecteur. Il a consulté un manuel scolaire, autre que celui utilisé dans l'école. Selon E1, il a trouvé dans ce manuel la définition du vecteur : « un vecteur est un segment orienté ». Il a aussi consulté des préparations du cours et des fiches supplémentaires, il en a choisi trois, élaborées les années précédentes par un groupe d'enseignants de mathématiques à l'école. De plus, il a déclaré qu'il a discuté avec un enseignant de physique et a cherché sur internet, mais n'a rien trouvé d'intéressant ; donc nous considérons que ces derniers actes ne font pas partie des ressources dans son travail documentaire. En effet, notre objectif est de mettre en relief l'impact des ressources utilisées par E1 pour construire et mettre en œuvre son cours, pour ensuite pouvoir émerger sa conception sur les vecteurs.

Durant la mise en œuvre du cours, l'enseignant a montré aux élèves la vidéo trouvée sur Youtube montrant la relation de Chasles. La vidéo montre en fait, par animation, deux vecteurs consécutifs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$, et le vecteur somme $\overrightarrow{AC}$. Cette vidéo permet l'émergence du vecteur lié. E1 a utilisé de plus les trois fiches supplémentaires portant sur la somme de deux vecteurs consécutifs et non consécutifs, la relation de Chasles et la règle du parallélogramme. Il a travaillé en parallèle des exercices du manuel scolaire.

Ainsi, les ressources utilisées par E1 sont : la vidéo, un manuel scolaire, les préparations des années précédentes et des fiches supplémentaires.

2. Système de ressource de E2

E2 a utilisé l'Internet pour collecter une grande partie de ressources qu'il a utilisées. Il s'est servi des photos tirées du moteur de recherche « Google », des images et des animations tirées du site mathématique « www.mathsisfun.com ». Il a consulté aussi les mêmes préparations des années précédentes consultées par E1. E2 a aussi utilisé dans son travail deux

fiches supplémentaires choisies par E1. Il a utilisé aussi le logiciel Cabri Géomètre 2. Concernant le lien entre vecteur et force, E2 a demandé à un enseignant de physique de lui expliquer le rôle et l'utilisation du vecteur en physique.

Durant la mise en œuvre du cours, E2 a utilisé des situations trouvées sur Internet pour définir les caractéristiques d'un vecteur, deux vecteurs égaux, deux vecteurs opposés, somme de deux vecteurs consécutifs et somme de deux vecteurs opposés à partir des activités préparées soit sur Power Point soit sur Cabri Géomètre 2. Il a en plus utilisé les deux fiches supplémentaires comme application de la relation de Chasles et de la règle du parallélogramme. Il a travaillé aussi les exercices du manuel scolaire.

Ainsi les ressources utilisées par E2 sont : Manuel scolaire, préparations des années précédentes, fiches supplémentaires, activités sur un site mathématique, images, power point, Cabri Géomètre et le programme de physique.

Nous détaillons, dans le tableau suivant, les sources consultés par chacun des deux enseignants et les ressources élaborées suite à la consultation. Nous avons décalé les manuels scolaires et les préparations des années précédentes puisqu'ils sont des références de base communes, de plus leur impact ne figure pas explicitement dans la mise en œuvre du cours en termes d'activités :

Enseignant / Sources Consultées	E1	E2
3 fiches Supplémentaires	3 fiches travaillées en classe	2 fiches travaillées en classe
Internet	Une vidéo sur la relation de Chasles	Activités sur un site mathématique sur la translation. Présentation Power Point sur la translation. Présentation Power Point sur le vecteur. Présentation Power Point sur le vecteur et la force. Présentation Power Point sur les vecteurs opposés. Présentation Power Point sur la relation de Chasles.
Programme de Physique	Pas de trace	Application du « vecteur » en physique. Présentation Power Point sur les forces, les forces opposées
Cabri Géomètre	Non utilisé	Activité sur la définition du vecteur Activité sur les vecteurs opposés. Activité sur la somme de vecteur. Activité sur la règle du parallélogramme.

Tableau 1*- Le travail documentaire de chaque enseignant*

Nous remarquons que les deux enseignants ont consulté les mêmes sources (sauf pour Cabri Géomètre), mais E2 a évidemment élaboré des ressources plus nombreuses voire plus variées que celles de E1. En effet, E2 emprunte des situations à la physique afin de faire comprendre à ses élèves la somme de deux vecteurs opposés, par exemple, mais le profit est bien loin que cela : du côté élèves, ils arriveront à investir des connaissances dans l'une des disciplines dans l'autre ; du côté enseignant, il montre qu'il conceptualise davantage les vecteurs et leurs utilisations.

De plus, E2 a bien profité des ressources numériques en vue de la construction du concept vecteur via différentes activités ayant différentes finalités.

IV. CONCEPTIONS MANIFESTEES ET DISCUSSION

Nous allons présenter le travail mené en classe de chacun des enseignants, afin de détecter à quelle conception chacun a tendance. Le même exercice peut être résolu de différentes manières, les terminologies utilisées varient d'un enseignant à l'autre, permettant ainsi de détecter la conception de chacun.

Nous avons remarqué durant l'observation que E2 explicite voire insiste sur l'aspect libre du vecteur : il répétait à plusieurs occasions que le vecteur n'a pas une position fixe et que deux vecteurs ayant même direction, même sens et même longueur représentent en effet la même translation. Ces remarques ne sont pas restées au niveau verbal, il les a mis en relief en travaillant des exercices et des activités, contrairement à E1 qui a signalé une seule fois qu'une infinité de vecteurs représentent la même translation. En fait, dire que différents vecteurs ayant même direction, même sens et même module déterminent la même translation peut engendrer deux conceptions différentes :

- vecteur libre s'il est considéré qu'une translation est déterminée par un seul vecteur, alors tout vecteur nommé représentant cette translation doit représenter le même vecteur qui la détermine ;

- vecteur lié s'il est considéré que les vecteurs qui déterminent la même translation sont des vecteurs égaux, alors des objets différents mais avec des caractéristiques similaires (ça revient au vocabulaire incontournable (Hayfa, 2006)).

Notons que E2 a présenté des activités portant sur différents contextes d'utilisation du vecteur : translation, force, terrain du football, etc. en insistant explicitement qu'un vecteur n'a pas une place fixe. Tandis que E1 a limité l'utilisation du vecteur à la translation.

Nous présentons en parallèle, dans le tableau suivant, les choix des deux enseignants sur trois tâches. Ces choix sont d'ordre verbal ou technique.

Tâche	E1	E2
Définition	un vecteur est un **segment** ayant un sens, une direction et une longueur	***une définition d'un vecteur est qu'il représente une translation***
	c'est un **segment** orienté	un vecteur a-t-il une **position définie** ?
	c'est un déplacement de A vers B, c'est une translation de A vers B	si j'ai la même translation c.-à-d. deux translations égales c.-à-d. deux vecteurs égaux
Somme de deux vecteurs consécutifs	Dans la définition d'un vecteur, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un déplacement, translation de A vers B. et le vecteur $\overrightarrow{BC}$ est une translation de B vers C *le déplacement est alors de A vers C*	Lorsqu'on décrit un vecteur, on décrit une translation de l'origine vers l'extrémité, donc la somme de vecteurs est une somme de translation.
ABCD est un parallélogramme. a) Construire Q, R, T et S tel que : $\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BR} = \overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{DS} = \overrightarrow{BD}$ b) Quelle est la nature du quadrilatère QRST ?	b)E1 cherche la nature de QRST en montrant géométriquement que ses diagonales se coupent en leurs milieux, il a dit *: **« ici, nous ne parlons pas des vecteurs, les vecteurs sont utilisés seulement pour trouver les côtés égaux. »***	b) E2 utilise les mêmes données vectorielles pour montrer que $\overrightarrow{TO} = \overrightarrow{OQ}$ et $\overrightarrow{RO} = \overrightarrow{OS}$ pour en déduire par suite que les deux diagonales [TQ] et [RS] se coupent dans leur milieu O.

Tableau 2*- choix verbales et techniques des enseignants*

Les choix des enseignants marquent la prégnance des translations dans les définitions proposées et dans la détermination de la somme de deux vecteurs.

Notons que E1 se réfère, à côté de la translation, au segment orienté ; en fait c'est une définition donnée dans les manuels libanais de l'ancien programme (avant 1997) mais cette définition était suivie par trois sortes de vecteur : lié, glissant et libre. Dans les manuels conformes au nouveau programme, après la réforme de 1997, le segment orienté n'est plus adopté. Toutefois, dans l'un des manuels les plus utilisés dans les écoles privées, les caractéristiques d'un vecteur sont : la direction, le sens, le module et le point d'application. Cette définition renvoie fortement au vecteur lié et elle parait se basée sur le vecteur physique pas sur le vecteur mathématique. Ceci dit, pour un enseignant qui se limite au contenu de ce manuel, ayant un système de ressource limité, ne peut concevoir un vecteur que sous son aspect lié. Pour construire la somme de deux vecteurs par exemple, notamment non consécutifs, il risque de concevoir la technique comme procédure prescrite à retenir sans chercher à comprendre pourquoi, ce que nous appelons « conception intermédiaire » ; par ailleurs, il est à noter l'implicite de la différence entre « le vecteur somme » et « un vecteur somme » dans l'exercice suivant : Construire la somme $\vec{u}$ + $\vec{v}$ (ayant deux flèches une nommée $\vec{u}$ et l'autre nommée $\vec{v}$. Dans ce cas, il est à choisir un point A, puis en respectant les conditions de deux vecteurs égaux tracer $\overrightarrow{AB}$ = $\vec{u}$ et $\overrightarrow{BC}$ = $\vec{v}$ alors la somme est $\overrightarrow{AC}$. Ceci en gardant cachée l'unicité ou non de la flèche tracée comme somme des vecteurs-flèches proposés.

De plus pour E1, le vecteur n'est utile que pour trouver des **côtés égaux**. Cela montre bien que pour E1, sa représentation d'utilité et d'utilisation du vecteur est trop limitée. Cette limitation d'utilité et d'utilisation voire d'aspect va engendrer sans doute une limitation chez les élèves de E1. Nous estimons que ces limitations sont les fruits des sources consultés et des ressources engendrées ; nous minimisons la conception initiale de l'enseignant déduite de sa formation initiale. Ceci car, à l'université il est enseigné les espaces vectoriels qui dépassent la possibilité de représenter leurs éléments dans le plan ou dans l'espace. Théoriquement la conception de vecteur devrait être élargie et atteindre des niveaux de conceptualisation avancés. Mais, nous estimons que l'absence de lien entre vecteur d'un espace vectoriel à l'université et vecteur du plan ou de l'espace à l'école est la cause derrière *une conception de vecteur déchirée, décomposée, cloisonnée* et, à un certain degré, des conceptions *étrangères*.

Quant à E2, la définition se base sur la translation, référence antérieure de la classe précédente. Mais, à partir de la translation il a tenu à montrer aux élèves qu'un vecteur n'a pas une position unique qu'il a formulée « position définie ». Il est bien clair que E2 mobilise la conception « vecteur libre » et tient à la faire émerger chez ses élèves. Néanmoins, le vocabulaire incontournable pour mentionner « deux vecteurs égaux » risque de créer une ambiguïté autour du concept vecteur, mais c'est un objectif d'enseignement/apprentissage à atteindre prescrit dans le curriculum libanais. Concernant la recherche de la somme de deux vecteurs, aussi il se réfère à la translation en indiquant qu'ayant un vecteur alors il s'agit d'une translation « *de l'origine vers l'extrémité, donc la somme de vecteurs est une somme de translation.* ». Evoquer l'origine et l'extrémité d'un vecteur suppose mobiliser la conception « vecteur lié », mais il est bien connu que nous sommes condamnés à la langue, au vocabulaire afin de communiquer nos idées. Ainsi, la langue/vocabulaire est l'une des origines des difficultés du concept « vecteur » (Hayfa, 2006), et qui force souvent l'émergence de la conception « vecteur lié ».

Lors la résolution du problème choisi, dans le tableau 2, E2 choisit d'investir le concept vecteur pour résoudre la partie b). Cela montre que pour E2, la représentation d'utilité et d'utilisation de vecteurs est bien plus large que celle de E1. Notons que le contrat didactique qui fait que les exercices qui suivent l'explication d'un certain concept doivent l'utiliser dans leurs résolutions, n'a pas d'effet dans cet exercice. Ce car l'application des connaissances sur le vecteur peut être réalisée dans a) seulement ; preuve en est, E1 n'a pas utilisé les vecteurs dans b). L'investissement des connaissances/data *riches* à travers l'écriture vectorielle peut permettre aux élèves aussi bien qu'à l'enseignant une conceptualisation meilleurs du concept vecteur.

V. CONCLUSION

A partir des entretiens avec les enseignants E1 et E2 qui enseignent chacun une section de EB9 (brevet) à la même école, complétés par des observations de classes de chacun tout au long du travail sur les vecteurs, nous pourrons conclure que la richesse de sources permet un enrichissement du système de ressources qui engendre une conceptualisation meilleurs du concept vecteur. Ce à deux niveaux : conception du concept lui-même et étendu/champ d'utilité et d'utilisation.

En effet, pour E1 qui a trouvé, dans un livre, une définition du vecteur comme segment orienté, il parait attaché à cette définition, probablement elle lui parait facile et tangible. Mais avec ses sources limitées, il est resté dans la conception « vecteur lié » et, pour des obligations de programme, dans la « conception intermédiaire ». De plus, sa conceptualisation du vecteur qui parait limitée a limité le champ d'utilisation de ce concept et par la suite a empêché ses élèves de susciter la richesse et le profit du « vecteur » en mathématiques. Alors que pour E2, ses sources sont diverses et variées, non limitées aux mathématiques elles vont même pour consulter la physique et ses enseignants. Ceci parait entrainer une richesse de ressources voir une *richesse* de conception. En effet, E2 a pu mobiliser la conception « vecteur libre » et a fait de son mieux pour la permettre chez ses élèves. Toutefois, se présente le paradoxe de concevoir un vecteur se représente en chaque point du plan ou de l'espace conservant la direction, le sens et le module, alors c'est le même vecteur, et présenter/enseigner les conditions pour que deux vecteurs soient égaux, alors deux objets mathématiques ont des caractéristiques similaires, comme deux segments égaux, deux triangles égaux, etc.

Pour conclure, surement le concept « vecteur » qui parait avoir un habillage géométrique/analytique à l'école même s'il est manipulé algébriquement comme un nombre, ne ressemble pas aux entités géométriques ni analytiques, il a son propre statut, ses propre règles de jeux. Toutefois, la richesse de ce concept joue double rôle : facilitateur et confus. Ajoutons à cela le rôle de la langue/vocabulaire qui risque de limiter la conceptualisation du vecteur. En fait, Hayfa (2006) a remarqué que le vecteur présente des difficultés inhérentes au concept lui-même.

Ceci dit, une question intrigante surgit : « Les ressources influencent-elles la conception de l'enseignant ou bien la conception de l'enseignant influence le choix des ressources ? »

REFERENCES

Assaad K. (2015) *Impact du travail documentaire des enseignants des mathématiques sur la conceptualisation des élèves de la notion du vecteur en EB9*. Mémoire de Master. Université Saint Joseph – Liban.

Gueudet, G., & Trouche, L. (2008). Du travail documentaire des enseignants: geneses, collectifs, communautes. Le cas mathematiques. *Education et didactique*, 2(3), 7-34.

Hayfa, N. (2006) *L'enseignement de la notion de vecteur au Liban après la réforme de 1998. Analyse anthropologique et conceptuelle sur un échantillon de manuels et d'élèves francophones.* Thèse de Doctorat. LYON I - Université Saint Joseph.

LêThi, H. (1997) Une étude institutionnelle sur l'enseignement des vecteurs au niveau secondaire au Viêt-Nam et en France. *Petit x*, 46, 19-52.

Trouche, L., & Gueudet, G. (2014, 1 17). *Approche Documentaire*. Retrieved from www.educmath.ens-lyon.fr:
http://educmath.enslyon.fr/Educmath/recherche/approche_documentaire/

DESCRIPTEURS DIDACTIQUES D'« EXERCICES DE MATHEMATIQUES » : CATEGORISATION ; UTILITE ET UTILISABILITE D'UN MODELE

JOLIVET[*] Sébastien

Résumé – cette contribution s'inscrit dans le questionnement relatif à la diffusion des ressources et plus précisément la description de celles-ci. Nous présentons le lien entre un modèle, conçu par nous, de description didactique d'exercices de mathématiques et le résultat d'une enquête sur les besoins d'utilisateurs en matière de description d'exercices de mathématiques. Toujours à partir de cette enquête nous proposons aussi une liste de métadonnées pouvant être associée à un exercice de mathématiques.

Mots-clefs : exercice de mathématiques, métadonnées didactiques, EIAH, modèle

Abstract – We aim at questioning the mathematical resource dissemination, and more particularly their description. We analyze the requirements of teacher and researcher and we present a model, which enables us to get a description based on didactics criteria.

Keywords: mathematics exercises, didactical metadata, TEL, model

I. INTRODUCTION

Nous situons cette contribution dans le champ des questions liées à la diffusion des ressources et plus précisément au niveau de leur recherche et de leur recommandation. Pour cela il est nécessaire que la ressource soit bien décrite, dans le sens où cette description permette de trouver la bonne ressource au bon moment. Nous nous intéressons plus précisément à la mise en relation entre ressources et mise en œuvre d'un projet didactique. Nous présentons le recueil de descripteurs d'exercices de mathématiques, mené auprès d'utilisateurs et d'experts en didactique. Nous évaluons aussi la capacité d'un modèle de description didactique de ressources à prendre en charge ces descripteurs.

Le terme *ressource* peut avoir une acceptation très large comme le montre par exemple la diversité des contributions dans Gueudet & Trouche (2010). Pour notre travail nous nous limitons à celles du type *exercices de mathématiques*[1].

Dans cette contribution nous présentons tout d'abord quelques approches relatives à la description de ressources (*partie* II) ; leur analyse permet de caractériser les éléments nécessaires à un modèle de description didactique d'exercices de mathématiques qui est alors brièvement présenté dans la *partie* III. La *partie IV.*1 est consacrée à la présentation de la méthode du recueil de descripteurs de ressources, besoins qui sont catégorisés dans la *partie IV.*2. La *partie IV.*3 présente une double confrontation entre ces besoins et le modèle proposé dans la *partie* III, évaluant l'utilité du modèle et son utilisabilité par des utilisateurs non experts du modèle. Nous empruntons ces termes au domaine des EIAH (Tricot et al., 2003). L'utilité questionne l'adéquation entre l'objectif défini par le concepteur et la réalisation de cet objectif lors de la mise en œuvre. L'utilisabilité, elle, est relative à la possibilité pour l'utilisateur de s'approprier l'environnement.

Le cadre théorique principal utilisé dans notre travail est la théorie anthropologique du didactique (TAD) (Chevallard, 1992, 1999) en raison du double constat suivant : - un exercice de mathématiques a pour fonction de solliciter une activité humaine, activité mathématique en l'occurrence, - il est fondamental de prendre en compte des dimensions institutionnelles lors

[*] Laboratoire d'Informatique de Grenoble, équipe Metah – France – sebastien.jolivet@univ-grenoble-alpes.fr

[1] Nous proposons une acceptation large de ce terme par exemple au sens proposé par Bittar (2017), d'*activités proposées* par opposition à tout ce qui est assimilable à du *cours* dans un manuel scolaire.

de la description des ressources. Nous mobilisons plus particulièrement l'approche praxéologique, ainsi dans la suite de ce texte nous considérons qu'une activité humaine peut être modélisée par le biais d'un quadruplet praxéologique [T ; τ ; θ ; Θ] dans lequel un type de tâches T réunit un ensemble de tâches $\{t_i\}_i$ pouvant être réalisées par au moins une technique τ qui est justifiée par un environnement technologique θ et théorique Θ. C'est en s'appuyant sur cette modélisation que nous parlons de tâches et de techniques dans les parties suivantes. Enfin la volonté d'inscrire le travail réalisé dans une perspective EIAH[2] nous conduit à intégrer l'extension du modèle praxéologique construite dans le modèle T4TEL (Chaachoua, 2018).

II. APPROCHES RELATIVES A LA DESCRIPTION DE RESSOURCES

Dans cette partie nous examinons quelques travaux relatifs à la question de la description de ressources de manière à pouvoir identifier les apports et limites de l'existant. Le premier paragraphe est relatif à des normes ou standards qui visent à décrire une classe très large de ressources, le second se réfère à un travail visant un type de ressources particulières et le troisième présente des travaux inscrits dans une perspective didactique.

Dans son travail, Loiseau (2009) présente un panorama des standards de description de ressources pédagogiques. Il ressort de cette présentation que les standards de description de ressources pédagogiques ne permettent pas une description didactiquement ou pédagogiquement pertinentes. Parmi les standards utilisés on pourra retenir le Learning Object Metadata (LOM) ou sa déclinaison ScoLOMFR qui se veulent des outils de description des ressources numériques de l'enseignement scolaire[3]. Dans ScoLOMFR on peut constater qu'une seule des neuf familles de métadonnées est centrée sur la pédagogie. Dans celle-ci les champs retenus et le vocabulaire associé sont loin de permettre une description des caractéristiques didactiques d'une ressource[4]. Ils sont aussi fortement liés à l'état de l'institution scolaire à un temps et un espace donnés.

Dans le projet européen Intergeo le choix a été fait de se focaliser sur un domaine particulier, la géométrie, et de se concentrer sur les ressources issues de la géométrie dynamique. Par ailleurs les acteurs ont aussi questionné la qualité des ressources. Comme signalé par les auteures dans (Trgalova, Jahn, & Soury-Lavergne, 2009) le projet s'est intéressé à « trois grands objectifs (…) : interopérabilité de nombreux logiciels de GD, mutualisation de ressources et démarche qualité concernant ces ressources ». La diversité des pays impliqués dans le projet, et donc des systèmes scolaires, a amené à questionner la relativité institutionnelle de telle ou telle description de ressource et les moyens de mener une recherche de ces ressources (Libbrecht & Desmoulins, 2009).

Enfin certains travaux ont concerné de manière spécifique le type de ressource « exercices de mathématiques ». Une première approche est de se centrer sur le contenu de l'exercice avec la définition d'une typologie basée sur les questions posées comme cela est proposé dans Bodin (2009) ou une centration sur les objectifs cognitifs relatifs à l'activité mathématique comme réalisé dans la taxonomie proposée par Gras (1979). Une autre approche est d'examiner les exercices en situation d'utilisation et de définir des critères permettant d'évaluer la difficulté d'un exercice en prenant en compte les éléments du contexte

[2] Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain
[3] Voir le site officiel : lom-fr.fr/scolomfr/
[4] Nous n'avons pas la place de développer davantage ici, le lecteur intéressé pourra consulter sur cette page (https://www.reseau-canope.fr/scolomfr/se-documenter.html) la carte heuristique dynamique et ses vocabulaires

d'utilisation (la classe, les apprentissages antérieurs des élèves…) comme proposé dans les travaux de Castela (2008) ou de Robert & Rogalski (2002).

En bilan de la présentation de ces quelques travaux nous retenons les éléments suivants :

- Les limites des standards et normes pointées par Loiseau nous semblent importantes pour au moins deux raisons. La première est la faiblesse, pour ne pas dire l'absence, d'éléments de nature didactique. En effet les seuls éléments présents dans la famille pédagogie relèvent au mieux du genre de tâche. La deuxième est le lien fort qui est opéré entre la ressource décrite et une institution posant ainsi la question de la pérennité temporelle et spatiale de cette description.
- La question de la qualité de la ressource, intégrée dans InterGeo, ne nous semble pas adaptée à une perspective d'indexation en raison de sa dimension subjective et de sa corrélation forte à un contexte et des modalités d'utilisation. Dans InterGeo cette question était gérée par la multiplicité de retours utilisateurs, ce qui n'est pas en lien avec notre démarche. Par contre la focale mise sur la relativité géographique du vocabulaire utilisé pour décrire et nommer, s'inscrit plus largement dans la question de la relativité institutionnelle du savoir mise en évidence dans la TAD. L'objectif d'interopérabilité entre différents systèmes nous semble aussi importante même si nous ne l'abordons pas dans cette contribution.
- Les travaux menés par Robert ou Castela nécessitent de connaître le contexte d'utilisation de la ressource pour pouvoir la caractériser, notamment en terme de difficulté. Pour notre part nous souhaitons une description indépendante de ce contexte d'utilisation. Il est toutefois pertinent d'interroger la possibilité de calculer certaines informations complémentaires liées à un contexte particulier à partir des informations initialement contenues dans la description.

Si dans le cadre de son travail, Loiseau s'intéresse à des ressources de type « texte authentique en langue étrangère » et donc à des ressources qui ne sont pas construites avec une finalité pédagogique et/ou didactique, nous nous intéressons, pour notre part, à des ressources de type exercice de mathématiques qui embarquent une intention didactique originelle (celle qui a guidé le concepteur de la ressource). La question de la (ré)association entre une ressource et une ou des intentions didactiques est donc posée.

III. UN MODELE POUR DECRIRE LES RESSOURCES

Au regard du bilan réalisé précédemment nous visons donc à proposer un modèle de description de ressources présentant les caractéristiques suivantes :

- Etre basé sur des critères didactiques,
- Etre indépendant du descripteur,
- Etre compatible (représentation et calculabilité) avec une perspective EIAH[5]
- Ne pas être lié à une institution particulière mais permettre de déterminer l'adéquation institutionnelle
- Permettre la mise en relation d'un projet d'étude d'une organisation mathématique et d'une ressource

[5] Nous signifions par-là que les différents objets manipulés doivent être définis de manière à pouvoir être représentés informatiquement et que l'on puisse effectuer des calculs sur ces représentations. La prise en compte de la perspective EAIH signifie que le travail réalisé doit pouvoir déboucher sur la production ou l'enrichissement de services (diagnostic, aide à la conception de parcours d'apprentissage…)

Nous présentons brièvement ce modèle dans Jolivet (2018) et de manière complète dans Jolivet (2018a), nous ne le détaillons pas ici. Retenons qu'il est appuyé sur un modèle praxéologique de référence (MPR) (Bosch & Gascon, 2005) du domaine des ressources à décrire et d'une représentation informatique de ce MPR (Chaachoua, Ferraton, & Desmoulins, 2013). Il propose de décrire une ressource selon trois dimensions. La *dimension tâches* comprend à la fois la structuration de l'exercice (questions, sous-questions…) et les tâches à réaliser. La *dimension ostensifs* intègre l'ensemble des objets ostensifs (Bosch & Chevallard, 1999) mobilisés dans l'exercice, qu'ils soient présents pour définir la tâche, fournir des éléments de la technique ou orienter ou imposer le choix de telle ou telle technique. Enfin, la *dimension relations entre les tâches* permet de déterminer, au travers de quatre relations si deux tâches relèvent du même type de tâches ; si une tâche est une spécialisation d'une autre ; si deux tâches relèvent d'un même type de tâche plus générique et enfin si une tâche est utile pour en réaliser une autre.

IV. DESCRIPTEURS D'UN EXERCICE DE MATHEMATIQUES ET LIENS AVEC LE MODELE

Nous présentons ici une partie des résultats[6] d'une enquête qualitative menée selon la méthode du focus group (Kitzinger, 1995). Elle visait à répondre à différentes questions dont trois sur lesquelles nous revenons dans cet article : Q1 : Quels sont les descripteurs pour décrire des exercices de mathématiques et peut-on les catégoriser ? ; Q1' : Les descripteurs sont-ils identiques selon les profils de contributeurs les définissant ? Q2 : La dimension objets ostensifs de notre modèle est-elle pertinente ? ; Q3 : notre modèle est-il utile et utilisable au regard des besoins exprimés ?

1. Méthodologie

Comme nous interrogeons notamment les différences et similitudes des descripteurs proposés selon les participants, nous avons travaillé avec deux groupes, chacun de six participants. Le premier réunit des participants qui ont en commun le fait d'être chercheur-e-s, ceux du deuxième groupe ont en commun d'être praticien-ne-s. Ne pas mélanger ces profils avait pour motivation de ne pas avoir à gérer trop de régulations, dues à des incompréhensions entre utilisation recherche et utilisation métier de vocabulaires parfois communs. Tous les participants sont amenés à utiliser, prescrire, analyser, chercher ; et plus marginalement produire ; de telles ressources.

Le focus group recherche (noté FGR par la suite) a regroupé six chercheurs, cinq en didactique des mathématiques et un en sciences de l'éducation. Le focus group praticiens (noté FGP par la suite) a regroupé six enseignants (deux en collège, deux en lycée, un à mi-temps en lycée et à mi-temps dans une ESPE et un à temps plein dans une ESPE). FGR et FGP ont été organisés selon les mêmes modalités en trois grandes phases : *phase 1* production d'une liste de descripteurs par chaque participant et enrichissement de cette liste à partir de la consigne suivante « à partir de votre expérience et en vous appuyant si nécessaire sur les énoncés mis à disposition[7], proposer le plus possible d'éléments qui vous semblent pertinents pour décrire des ressources de ce type » – *phase 2* classement, par chaque participant, de ses descripteurs en quatre niveaux d'importance et échanges – *phase 3* liaison, si possible, entre

[6] L'intégralité de cette enquête est présentée dans les chapitres XIII et XIV de (Jolivet, 2018a)

[7] Chaque participant disposait de cinquante énoncés, extraits de divers manuels de collège, qui avaient été volontairement totalement décontextualisés (suppression de toute information relative à un chapitre, une typologie d'exercice…).

les descripteurs et les trois dimensions du modèle présenté dans le paragraphe III. Les phases 1 et 2 sont totalement indépendantes du modèle de description, il est d'ailleurs présenté aux participants, sans utiliser le vocabulaire spécifique de la TAD pour le FGP, uniquement au début de la phase 3.

2. Production de descripteurs par les participants puis catégorisation par le chercheur des descripteurs

Lors de la phase 1 il était attendu que chaque participant produise une liste de descripteurs lui paraissant pertinents pour décrire un exercice de mathématiques. Pour favoriser la réflexion chaque participant disposait d'un corpus de cinquante exercices provenant de divers manuels de collège, pris dans différents chapitres et pour lesquels tout élément de contexte avait été supprimé (information renvoyant à une typologie d'exercice propre à tel ou tel manuel, référence à un chapitre…). Une fois la première liste de chaque participant produite, un temps collectif a eu lieu durant lequel chacun a pu communiquer ses descripteurs, apporter des précisions si demandées par d'autres, et éventuellement enrichir sa liste initiale de descripteurs proposés par d'autres participants. Nous nommons *descripteurs produits* ceux créés par un participant et *descripteurs empruntés* ceux repris suite à échange avec un autre participant. C'est le résultat de cette première phase du focus group que nous allons maintenant analyser.

A l'issue de la phase 1, 165 descripteurs (116 descripteurs produits et 49 descripteurs empruntés) ont été produits permettant ainsi de répondre à la première moitié de Q1. Pour traiter la deuxième moitié de Q1 (catégorisation) nous avons choisi de considérer les 165 descripteurs et pas uniquement les 116 initiaux dans la mesure où, lors des emprunts, des reformulations ont parfois eu lieu apportant un éclairage complémentaire sur le sens de tel ou tel descripteur pour l'emprunteur. Une analyse des descripteurs nous a permis de définir treize catégories. Si elles n'ont pas été définies *a priori*, elles sont cependant appuyées sur un état de l'art réalisé précédemment concernant l'existant en matière de description de ressources et partiellement présenté dans le II. Les dénominations ont été choisies par nous et sont volontairement assez neutres dans le sens où elles évitent de référer à un cadre théorique particulier. Lors de la répartition des descripteurs produits nous avons été amené à dissocier 13 descripteurs en deux ou trois nouveaux descripteurs. Ainsi ce sont 183 descripteurs qui ont été répartis dans les différentes catégories. Nous présentons brièvement la définition de ces catégories en indiquant entre parenthèses (effectif *descripteurs produits* / effectif *descripteur empruntés*). Pour certaines nous ajoutons quelques éléments significatifs d'analyse.

- Source (2 ; 3) : descripteurs relatifs à l'origine de la ressource (auteur(s), lieu de publication). Aucun descripteur ne provient du FGP, deux ont été produits par le chercheur 1 et repris par trois autres chercheurs.
- Niveau scolaire (4 ; 5) : descripteurs qui évoquent la notion de niveau associé à une ressource. Deux approches sont présentes, la première fait référence à une institution générique (classe de 4e, programmes 2015) l'autre instancie le niveau au lieu d'usage.
- Domaine (22 ; 3) : descripteurs qui font références à un élément que l'on pourrait placer sur l'échelle de codétermination du didactique proposée par Chevallard (Chevallard, 2002b). Par exemple « équation » ou « algèbre » ou « géométrie plane, théorème de Thalès ».
- Prérequis (8 ; 5) : descripteurs qui font référence à l'équipement praxéologique nécessaire à l'élève pour réaliser la ou les tâches données.
- Matériels (8 ; 1) : descripteurs qui font référence à la présence de matériels tangibles (instruments de géométrie) ou de matériels numériques (logiciels, calculatrice). Chaque

matériel peut être d'une part convoqué – non convoqué – interdit et d'autre part utile – nécessaire.

- Modalités pédagogiques (2 ; 6) : descripteurs qui interrogent d'une part l'organisation des élèves (individuel, groupe, classe entière) et d'autre part le lieu d'utilisation de la ressource. Cette catégorie est peu présente chez les chercheurs (1 ; 1) mais importante pour les praticiens (1 ; 5).
- Durée (2 ; 3) : descripteurs qui associent une durée à la ressource. Cette durée peut être a priori ou constatée sur un ensemble d'usages.
- Nature (5 ; 1) : descripteurs qui caractérisent la ressource pour ce qu'elle est en s'appuyant soit sur du vocabulaire métier (activité flash, tâche complexe…) ou du vocabulaire issu de la didactique (problème ouvert).
- Visuel (18 ; 5) : descripteurs qui font référence à des éléments visibles. Ils mobilisent notamment des références généralistes (mode de Bruner ; registres sémiotiques de Duval ; ostensifs de Bosch et Chevallard) ou spécifiques (dessin – figure).
- Fonction (28 ; 3) : descripteurs qui définissent la ressource au travers de son objectif didactique, nous rattachons cette catégorie aux moments didactiques définis par Chevallard (2002a) (travailler une technique ; construire le bloc technologico-théorique).
- Activité (24 ; 5) : descripteurs qui définissent la ressource par l'activité qu'elle porte. Nous rattachons cette catégorie à une taxonomie des activités cognitives en mathématiques, par exemple celle de Gras (1979). Par exemple « modéliser » ; « (…) raisonner, conjecturer ».
- Difficulté (5 ; 7) : descripteurs qui renvoient à la difficulté de la ressource.
- Non classé (6 ; 2) : cette catégorie regroupe les 8 descripteurs (moins de 5% de l'effectif total) qui ne peuvent être ni regroupés ni liés aux catégories précédentes. Exemple « Les éventuels préjugés sociaux véhiculés par les ressources (racisme, sexisme) ».

Ainsi nous pouvons répondre positivement à la question Q1, d'une part en raison de la diversité des descripteurs produits (plus d'une quinzaine par participant en moyenne) et d'autre part en raison de la possibilité qu'il y a eu de définir un nombre raisonnable de catégories permettant de les organiser presque tous. Par ailleurs, nous avons noté une ambiguïté possible quant à la catégorie de rattachement pour seulement moins de 10% (sur 183) des descripteurs. Concernant la question Q2, nous interprétons le volume important de descripteurs de la catégorie visuel comme un élément amenant une première réponse positive à cette question.

3. Liens entre le modèle et les besoins utilisateurs

Pour répondre à Q3 (utilité et utilisabilité), au regard des descripteurs produits, nous avons procédé à une mise en relation modèle – descripteurs. Concrètement il s'agit, pour chaque descripteur, de répondre à la consigne suivante « pensez-vous possible de retrouver les informations de votre descripteur à partir des informations contenues dans une ou plusieurs dimensions du modèle ? Si oui, laquelle ou lesquelles ? ». Cette mise en relation a été réalisée avec deux points de vue que nous avons ensuite comparés. Tout d'abord les participants aux focus group ont, individuellement, mis en relation leurs descripteurs et le modèle. Par la suite le chercheur, sans prendre connaissance des relations réalisées par les participants, a aussi relié les 165[8] descripteurs au modèle. Nous avons ensuite procédé à une comparaison entre les traitements réalisés selon les deux points de vue.

[8] Nous avons travaillé à ce moment-là avec les 165 descripteurs initiaux et non plus avec les 183 obtenus lors de la répartition dans les catégories.

Parmi les résultats de cette étude comparative nous retenons en particulier :

- Pour les participants aux focus groups, seuls 12 descripteurs sur 165 ne peuvent pas être obtenus à partir des informations issues du modèle, 14 pour le chercheur. Dans les deux cas cela représente moins de 10% des descripteurs. On trouve en particulier les descripteurs en lien avec l'origine de la ressource.
- Pour 47 descripteurs les participants et le chercheur ont opéré exactement la même mise en relation (i.e. mêmes dimensions mobilisées et mêmes dimensions non mobilisées) entre les dimensions du modèle et le descripteur. Pour 73 autres descripteurs il y a une différence sur une seule dimension (i.e. mobilisée pour le participant et non mobilisée par le chercheur ou vice-versa).
- Dans seulement 7 cas le chercheur et le participant n'ont qu'une ou aucune valeur en commun.
- Quand il y a divergence entre le chercheur et le participant dans la majorité des cas c'est que le chercheur mobilise au moins une dimension supplémentaire du modèle par rapport au participant.

Nous concluons de cette étude que la réponse à Q3 est positive. D'une part le modèle construit semble utilisable assez simplement par des non experts du modèle et d'autre part il permet *a priori* de répondre à la très grande majorité des besoins de description d'une ressource exprimés par les participants aux focus-groups. Relativement à Q2, la *dimension objets ostensifs* est mobilisée 49 fois (30%) par les participants et 76 fois (46%) par le chercheur. Si l'écart n'est pas négligeable, les deux valeurs plaident pour l'existence de cette dimension. La question est maintenant évidemment celle de la méthode pour relier la description d'un exercice obtenue selon le modèle aux différents descripteurs. Ceci est un autre aspect de notre travail que nous ne présentons pas dans cette contribution.

V. CONCLUSION

En terme de résultats nous disposons donc d'un modèle qui permet d'une part de prendre en compte les objectifs de qualité de la description didactique d'une ressource de type exercice, et qui d'autre part semble permettre de calculer une part importante des éléments relatifs aux besoins exprimés par des utilisateurs de ressources de ce type. Par ailleurs, l'utilisation du modèle sur un nombre significatif d'exercices issus de différentes sources, actuellement en phase de réalisation, devrait permettre de confirmer l'utilisabilité du modèle produit.

Concernant la méthodologie, les participants aux focus groups ne représentent pas l'ensemble des utilisateurs, par exemple nous n'avons pas encore intégré à notre enquête les éditeurs de ressources qui ont des besoins spécifiques, cependant nous avons obtenu un résultat quantitativement et qualitativement significatif. Nous pourrions, mais cela ne fait pas sens par rapport à notre travail immédiat, compléter l'enquête réalisée par une étude quantitative, sur une population plus large, à partir des descripteurs obtenus par notre approche qualitative.

Parmi les questions et perspectives soulevées par ce travail nous en soulignons deux. La première est la possibilité d'alimenter, partiellement, de manière automatique un ensemble de métadonnées standardisé (type ScoLOM.Fr par exemple) à partir des éléments contenus dans la description basée sur le modèle. La seconde est celle liée au pendant de l'indexation qu'est la recommandation : quelle mise en relation d'une ressource décrite à l'aide du modèle avec un ou plusieurs projets didactiques ? Trois axes principaux sont exploités pour ce travail en

cours : la théorie de l'intentionnalité de Portugais (1999), les moments didactiques de Chevallard (Chevallard, 2002b) et la notion d'étayage (Bruner, 1983).

REFERENCES

Bittar, M. (2017). A Teoria Antropológica do Didático como ferramenta metodológica para análise de livros didáticos. *Zetetiké*, *25*(3).

Bodin, A. (2003). Comment classer les questions de mathématiques ? In *Communication au colloque international du Kangourou, Paris*. Consulté à l'adresse www.irem.univ-mrs.fr/IMG/doc/Classification_des_enonces_mathematiques.doc

Bosch, M., & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherche en didactique des mathématiques*, *19*(1), 77-124.

Bosch, M., & Gascon, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. Dans A. Mercier & C. Margolinas (Eds.). In *Balises pour la didactique des mathématiques : cours de la 12e école d'été de didactique des mathématiques* (p. 107‑122). La Pensée Sauvage.

Bruner, J. S. (1983). *Le développement de l'enfant : savoir-faire, savoir dire*. Paris: PUF.

Castela, C. (2008). Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'enseignement. *Recherche en didactique des mathématiques*, *28*(2), 135-182.

Chaachoua, H. (2018). T4TEL : Un cadre de référence pour la formalisation et l'extension du modèle praxéologique. In *Actes du 6e congrès pour la Théorie Anthropologique du Didactique*. Autrans.

Chaachoua, H., Ferraton, G., & Desmoulins, C. (2013). Utilisation du modèle praxéologique de référence dans un EIAH. In G. Cirade, M. Artaud, M. Bosch, J.-P. Bourgade, Y. Chevallard, C. Ladage, & T. A. Sierra (Éd.), *Evolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société* (p. 301-324). Toulouse, France. Consulté à l'adresse https://citad4.sciencesconf.org/

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherche en didactique des mathématiques*, *12*(1), 83‑121.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*(2), 221-265.

Chevallard, Y. (2002a). Organiser l'étude. 1.Structures & Fonctions. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, & R. Floris (Éd.), *Actes de la XIe école d'été de didactique des mathématiques* (p. 3-22). La Pensée Sauvage, Grenoble.

Chevallard, Y. (2002b). Organiser l'étude. 3. Ecologie & régulation. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, & R. Floris (Éd.), *Actes de la XIe école d'été de didactique des mathématiques* (p. 41-56). La Pensée Sauvage, Grenoble. Consulté à l'adresse http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Organiser_l_etude_3.pdf

Gras, R. (1979). *Contribution à l'étude expérimentale et à l'analyse de certaines acquisitions cognitives et de certains objectifs didactiques en mathématiques* (Thèse de doctorat). Université de Rennes I.

Gueudet, G., & Trouche, L. (2010). *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques* (Juin 2010). Presses Universitaires de Rennes et INRP.

Jolivet, S. (2018a). *Modèle de description didactique de ressources d'apprentissage en mathématiques, pour l'indexation et des services EIAH* (Thèse de doctorat). Communauté Université Grenoble Alpes, Grenoble.

Jolivet, S. (2018b). Un modèle de description de ressources, basé sur des critères didactiques et inscrit dans une perspective EIAH. In *Pré Actes du 6e Congrès International sur la*

Théorie Anthropologique du Didactique (p. 456-466). Autrans. Consulté à l'adresse https://citad6.sciencesconf.org/data/pages/Pre_proceedings_citad_7.pdf

Kitzinger, J. (1995). Qualitative research. Introducing focus groups. *BMJ: British medical journal*, *311*(7000), 299‑302.

Libbrecht, P., & Desmoulins, C. (2009). A Cross-curriculum Representation for Handling and Searching Dynamic Geometry Competencies. In D. Dicheva, R. Mizoguchi, & J. Greer (Éd.), *Semantic Web Technologies for e-Learning* (p. 136-155). IOS Presse.

Loiseau, M. (2009). *Élaboration d'un modèle pour une base de textes indexée pédagogiquement pour l'enseignement des langues* (Thèse de doctorat). Université Stendhal - Grenoble III, Grenoble. Consulté à l'adresse https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00440460

Portugais, J. (1999). L'intentionnalité et le cognitif. In G. Lemoyne & F. Conne (Éd.), *Le cognitif en didactique des mathématiques* (p. 71-102). Québec, Canada: Les presses de l'Université de Montréal.

Robert, A., & Rogalski, M. (2002). Comment peuvent varier les activités mathématiques des élèves sur les exercices ? Le double travail de l'enseignant sur les énoncés et sur la gestion de classe. *Petit x*, (60), 6-25.

Trgalova, J., Jahn, A. P., & Soury-Lavergne, S. (2009). Analyse de ressources pédagogiques pour la géométrie dynamique et évaluation de leur qualité : le projet Intergéo. In *Actes du Colloque Espace Mathématiques Francophone 2009* (p. 924-934). Dakar. Consulté à l'adresse http://emf.unige.ch/files/9214/5329/8083/EMF2009_GT6_Trgalova.pdf

Tricot, A., Plegat-Soutjis, F., Camps, J.-F., Amiel, A., Lutz, G., & Morcillo, A. (2003). Utilité, utilisabilité, acceptabilité : interpréter les relations entre trois dimensions de l'évaluation des EIAH. In *Actes de la conférence EIAH* (p. 391-402). Strasbourg.

LA NOTION DE SUPPORT, AU CENTRE D'UN MODÈLE DES SITUATIONS D'ENSEIGNEMENT/APPRENTISSAGE, RESSOURCE POUR COMPRENDRE ET POUR FAIRE

LEROYER Laurence [*]

Résumé – À partir des résultats d'une recherche consacrée à la question des ressources dans le travail des formateurs d'enseignants et plus spécifiquement lorsqu'ils élaborent des scénarios de formation en mathématiques, nous avons élaboré une modélisation où « supports de formation » et « postures de formateur » sont articulés. Étendue aux situations de classe, cette modélisation constitue une ressource pour penser la transmission des savoirs à partir des supports de formation ou d'apprentissage.

Mots-clefs : ressources, support de formation, support d'apprentissage, posture de formateur, posture d'enseignant

Abstract – Our research on the resources in the training design work of teacher trainers and more particularly in mathematics led us to develop a conceptual model in which trainer postures and training supports are linked. We extended this model to teaching situations. This conceptual model constitutes a resource to think of transmission of the knowledge from training supports or learning supports.

Keywords: resources, learning support, training support, teacher postures, trainer postures

Lorsqu'un formateur doit concevoir une action de formation ou lorsqu'un enseignant doit élaborer une séquence ou séance d'enseignement, une même question se pose à eux : celle des supports, supports de formation à destination des formés pour l'un et supports d'apprentissage à destination des élèves pour le second. Le choix des supports qui vont sous-tendre l'activité des formés ou des élèves est important. Ces supports assurent une médiation entre le formateur et les formés ou entre l'enseignant et les élèves. Ils participent de la transmission des savoirs.

Pour faire ce choix, formateurs et enseignants disposent de nombreuses ressources dont des « ressources pour enseigner » qui « portent des intentions spécifiques de leurs concepteurs et des institutions impliquées dans leurs conceptions ou leurs usages » ou bien encore des « ressources conçues par l'enseignement » comme par exemple des productions d'élèves (Gueudet et Trouche, 2010, p. 357). Au cours de leur travail de conception, formateurs et enseignants vont interagir avec ces ressources en les sélectionnant, les modifiant, etc. pour produire leur(s) support(s) de formation ou d'apprentissage qui sous-tendront leur action professionnelle. Nous basant sur l'approche instrumentale (Rabardel, 1995), nous considérons le support de formation ou d'apprentissage comme un artefact matériel constitué d'un médium (papier, son, vidéo..) et d'informations. Associé à des schèmes d'utilisation, il constituera un instrument de formation ou un instrument d'enseignement. En référence à l'approche documentaire du didactique (Gueudet et Trouche, 2008), le support de formation peut être entendu comme des ressources recombinées qui, associé à des schèmes, selon une classe de situations données, conduit à la production d'un document.

Depuis une dizaine d'années, le travail documentaire des enseignants en mathématiques a fait l'objet de recherches. Deux ouvrages en témoignent : celui de Gueudet et Trouche (2010) et celui de Remillard, Herbel-Eisenmann & Lloyd (2009). D'une manière non exhaustive, ces travaux portent sur : l'usage des ressources par les enseignants, l'analyse des ces ressources

[*] Université de Caen Normandie, ESPE de l'académie de Caen, CIRNEF (EA 7454) – France – laurence.leroyer01@unicaen.fr

par ces derniers, les effets sur les élèves selon ces usages, le mode de conception des ressources qu'il soit collectif ou individuel ou bien encore la diffusion des ressources.

Dans la conférence d'ouverture du XXXXI^{ème} colloque Copirelem, Bueno-Ravel et Gueudet (2014) s'intéressent aux ressources destinées aux professeurs des écoles mais aussi aux formateurs. Notre propos s'inscrit dans la continuité d'une recherche exploratoire sur la question des ressources dans le travail des formateurs lorsqu'ils conçoivent des actions de formation en mathématiques. Les résultats de cette recherche nous ont amenée à articuler la question des supports de formation avec celle des postures de formateurs nous conduisant à l'élaboration d'une modélisation, généralisée à l'ensemble des situations où des phénomènes d'enseignement/apprentissage sont en jeu (situation de classe, situation de formation d'enseignants, situation de formation de formateurs). Nous présenterons, dans un premier temps, cette modélisation dans sa forme initiale puis généralisée. Dans un second temps, l'analyse d'un scénario et des supports de formation conçus par un formateur nous permettra de mettre en évidence la contribution de cette modélisation à une meilleure compréhension des interactions entre formateurs (ou enseignants dans la forme généralisée) avec les ressources. Cette modélisation organisée autour de la notion de support qui interroge la capacité à penser la transmission des savoirs à partir des supports tant par les formateurs que par les enseignants constitue également pour ces derniers une ressource « pour faire » dont l'usage est potentiellement source de développement professionnel. Nous mettrons en évidence en quoi cette modélisation constitue une « ressource » pour faire. La présentation de perspectives de recherche conclura notre propos.

I. GENESE, CONCEPTION ET GENERALISATION DE LA MODELISATION

1. Une modélisation qui s'origine dans un travail de recherche sur les ressources dans le travail des formateurs en mathématiques

La modélisation que nous allons présenter est issue d'une recherche exploratoire interrogeant la question des ressources dans le travail de conception d'action de formation en mathématiques par des formateurs du premier et du second degré (conseillers pédagogiques et formateurs académiques[1]). Le corpus de cette recherche est constitué d'entretiens au cours desquels nous demandions aux formateurs, en s'appuyant sur une action de formation en mathématiques qu'ils avaient conçue et allaient mettre en œuvre, d'expliciter celle-ci en s'appuyant sur leur déroulé de formation et les supports de formation utilisés. Ces deux éléments s'ajoutaient ainsi au corpus. Lors de ces entretiens, des questions visaient également à identifier les caractéristiques des formateurs : parcours professionnel et universitaire, place des mathématiques dans ces parcours, sentiment de compétences en mathématiques du point de vue des savoirs disciplinaires et didactiques, formation personnelle et institutionnelle en mathématiques, conceptions relatives au savoir, aux formés, à la formation.

Dans cette recherche, nous avons observé que les supports de formation conçus par les formateurs ainsi que l'usage de ces supports différaient selon leurs conceptions relatives au savoir, aux formés et à la formation. Ceci nous a conduit à penser un lien entre les supports de formation conçus par les formateurs et les postures de formateurs (Leroyer, 2016, à paraître).

[1] Les conseillers pédagogiques exercent dans le premier degré. Auparavant professeurs des écoles, leurs missions sont l'accompagnement pédagogique des maîtres et des équipes d'école, la formation initiale et continue des enseignants et la mise en œuvre de la politique éducative. Les professeurs formateurs académiques exercent dans le second degré. Ils ont à la fois une mission d'enseignement – ou d'éducation s'ils sont conseillers principaux d'éducation (CPE) – auprès d'élèves, et une mission de formation initiale ou continue auprès des enseignants (ou CPE). Les compétences de formateurs sont reconnues par une certification professionnelle spécifique.

Prenant appui sur la modélisation des postures de formateurs de Bailleul et Thémines (2013), nous avons retravaillé et développé celle-ci en articulant postures de formateurs et supports de formation (Leroyer et Georget, 2017). Pour Bucheton et Soulé (2009) la posture est « un schème préconstruit du "penser-dire-faire" », convoqué par le sujet pour répondre à une tâche donnée. Cette posture est « construite dans l'histoire sociale, personnelle et scolaire du sujet ». Elle est « à la fois du côté du sujet dans un contexte donné, mais aussi de l'objet et de la situation, ce qui en rend la saisie difficile et interdit tout étiquetage des sujets ». Ainsi, en fonction du système de ressources et de contraintes de l'activité, le formateur peut potentiellement adopter différentes postures au cours de la formation et d'une formation à l'autre. Nous présentons ci-dessous cette modélisation.

2. Une modélisation où support de formation et postures de formateurs sont articulés

Selon Bailleul et Thémines (2013), le formateur, lorsqu'il conçoit une formation, est conduit à se poser plusieurs questions qui portent sur : les savoirs à étudier et à transmettre, la logique de leur présentation, la place donnée aux formés et les activités proposées. Dans la modélisation, présentée figure 1 ci-après, ces questions se traduisent par la présence de quatre dimensions : les savoirs référés aux savoirs professionnels, l'organisation/opérationnalisation, les formés et les tâches.

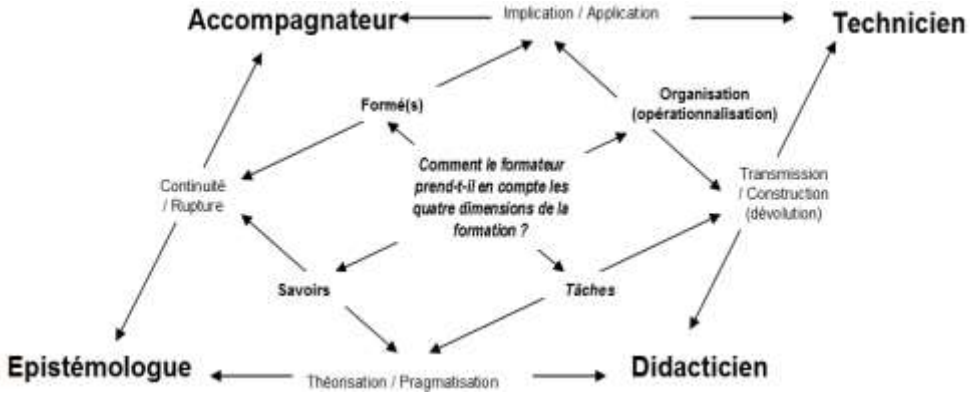


Figure 1 *– Quatre postures de formateur (d'après Bailleul et Thémines, 2013)*

Entre ces quatre dimensions, des tensions sont identifiées. Ainsi, du point de vue de la prise en compte du formé relativement aux savoirs, si les besoins exprimés par les formés, leur histoire professionnelle sont pris en compte dans la formation pour faire évoluer leur rapport au savoir, la continuité est privilégiée. Si ce n'est pas le cas, la rupture est privilégiée Du point de vue de la fonction des savoirs relativement à la tâche proposée, si les savoirs sont une fin en soi, la théorisation est privilégiée. Si les savoirs sont une réponse à un problème professionnel, c'est la pragmatisation qui est privilégiée. Du point de vue de la place donnée aux formés relativement à l'organisation, si les formés sont acteurs, l'implication est privilégiée. Si ce n'est pas le cas, c'est l'application qui est privilégiée. Du point de vue de la logique sur laquelle se fonde l'organisation et la tâche proposée, si l'organisation et les tâches visent à amener les formés à construire les savoirs, la construction est privilégiée et dévoluée aux formés. Si l'organisation choisie et les tâches visent la transmission des savoirs aux formés, la transmission est alors privilégiée.

A partir de ces tensions, quatre postures de formateurs sont distinguées. La caractérisation par des mots emblèmes de ces différentes postures marque la façon de privilégier les quatre dimensions de la formation.

- L' « accompagnateur » privilégie la prise en compte des besoins exprimés par les formés, de leur histoire dans une recherche de continuité et en les impliquant ;

- L' « épistémologue » privilégie les savoirs présentés sans véritable prise en compte des formés (rupture) et les savoirs constituent une fin en soi ;

- Le « didacticien » privilégie des tâches qui visent la construction du savoir par les formés dans un souci pragmatique où le savoir est une réponse à un problème professionnel ;

- Le « technicien » privilégie des savoirs transmis que les formés appliquent. Il a la volonté de maîtriser le processus d'enseignement du point de vue temporel, des techniques ou des processus mis en œuvre par les formés.

Envisageant que les supports de formation cristallisent[2] en les matérialisant les postures de formateurs, nous avons pensé qu'un support de formation puisse comporter quatre dimensions relativement aux quatre postures identifiées : une dimension épistémologique relativement à la posture d'épistémologue, une dimension didactique relativement à la posture de didacticien, une dimension technique relativement à la posture de technicien et une dimension relationnelle relativement à la posture d'accompagnateur (cf. figure 2, ci-après).

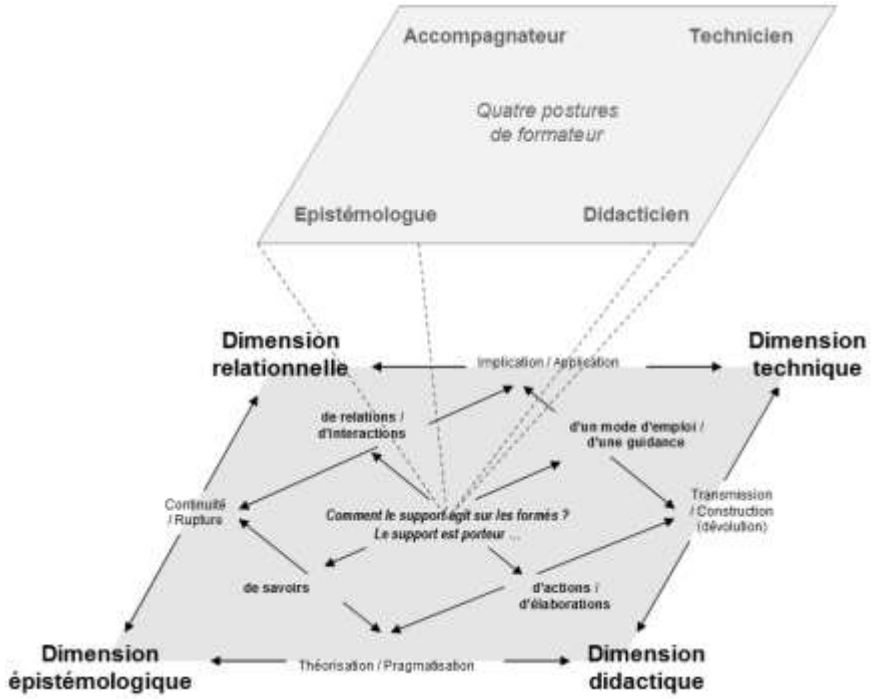


Figure 2 *– Les supports de formation, une cristallisation des postures de formateur*

Chaque dimension du support de formation a été définie au regard des effets produits par le support chez les formés. En lien avec la dimension épistémologique, si le support contribue à développer des savoirs, il est porteur explicitement de savoirs professionnels. En lien avec la dimension didactique, si le support génère des actions qui sous-tendent l'élaboration de savoirs par les formés, il est porteur d'actions et d'élaborations. En lien avec la dimension technique, si le support conduit les formés à respecter une certaine temporalité, technique ou un processus spécifique, il est porteur d'un mode d'emploi, d'une guidance. En lien avec la dimension relationnelle, si le support génère des relations entre les formés, il est porteur d'interactions.

[2] Au sens de faire converger des éléments épars

A l'identique de la modélisation sur les postures de formateurs, des tensions peuvent apparaître entre les différents éléments portés par le support. Ainsi, si le support est porteur d'une guidance, les formés seront conduit à appliquer ce qui leur est demandé à l'inverse d'un support porteur d'interactions conduisant les formés à s'impliquer.

3. *Une modélisation généralisable à l'ensemble des situations où des phénomènes d'enseignement/apprentissage sont en jeu*

Si les savoirs visés pour les formés par les formateurs diffèrent des savoirs visés par les enseignants pour leurs élèves, des similitudes dans la conception de leur action de formation ou d'enseignement existent du point de vue de la question des ressources et du choix des supports de formation pour l'un et d'apprentissage pour l'autre. À partir de ce parallèle établi entre situations de formation et situations d'enseignement, nous avons donc postulé que la modélisation initiée à partir d'une recherche sur l'activité de conception des formateurs pouvait être généralisée à trois niveaux : celui de la classe, celui de la formation d'enseignants et celui de la formation de formateurs. En effet, dans chacun de ces niveaux, des processus d'enseignement/apprentissage médiés par des supports ont lieu.

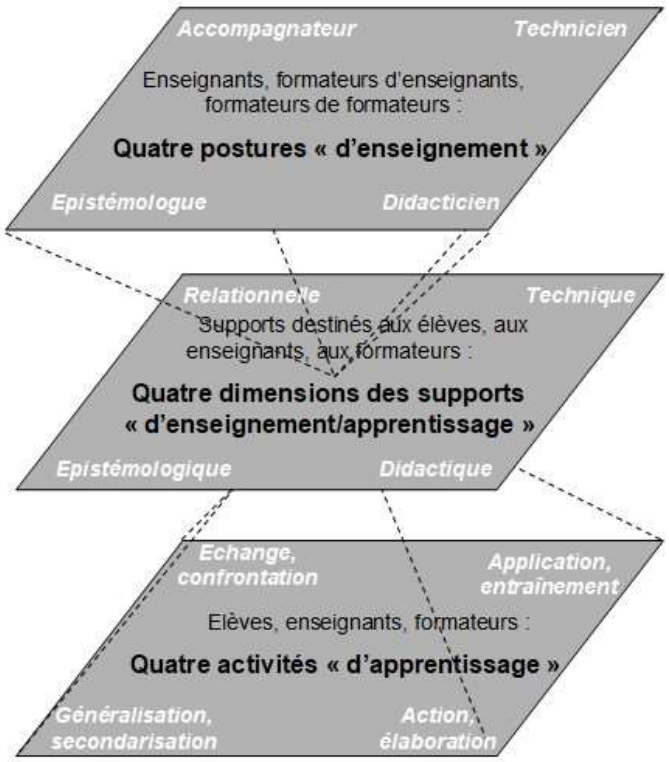


Figure 3 *– Penser la transmission des savoirs à partir des supports d'enseignement/apprentissage*

Ainsi, dans une situation de conception d'une séquence/séance d'enseignement ou d'un scénario de formation d'enseignants ou de formateurs, les supports à destination des élèves, des enseignants ou des formateurs sont envisagés comme cristallisant les postures de formateurs de formateurs, de formateurs d'enseignants ou d'enseignants, et provoquant différents types d'activité chez les élèves, les enseignants ou les formateurs. Dans cette modélisation, les supports assurent la médiation des savoirs entre l'enseignant et l'élève ou entre le formateur et le formé. C'est pourquoi nous avons intitulé cette modélisation « penser la transmission des savoirs à partir des supports d'enseignement/apprentissage », titre qui réfère également à la fonction de ressource « pour comprendre » et « pour faire » que nous allons exposer dans la partie suivante.

II. UNE MODELISATION A LA FOIS RESSOURCE « POUR COMPRENDRE » ET RESSOURCE « POUR FAIRE »

Pour appréhender la fonction de ressource « pour comprendre » mais aussi de ressource « pour faire » de la modélisation, nous exposons deux exemples référant à un même niveau de situation, celui de la formation. La modélisation, également éprouvée au niveau de la classe, nous a conduit à présenter lors de notre communication un exemple relatif à ce niveau.

1. Un exemple illustrant la dimension ressource « pour comprendre »

Dans notre thèse, centrée sur le rapport au support d'enseignement[3] des enseignants du premier degré lorsqu'ils préparent leur enseignement en mathématiques (Leroyer, 2013), nous avons élaboré une typologie de ces usages précisant ceux définis par Brown (2009). Si nous avons mis en évidence l'influence de certaines variables sur ces usages (opinion des enseignants sur les supports d'enseignement, niveau de classe, relation à la discipline), les conceptions de l'enseignant relatives au savoir, aux apprenants, à l'apprentissage et à l'enseignement n'ont pas été interrogées. En interrogeant les supports d'enseignement/apprentissage, la modélisation permet d'appréhender les choix des enseignants ou formateurs quant aux savoirs à étudier et à transmettre, la logique de leur présentation, ainsi que la place donnée aux élèves et aux activités proposées. Nous proposons la relecture d'un cas issu de notre corpus lié à notre recherche sur la question des ressources dans le travail des formateurs permettant de mettre en évidence comment les supports d'enseignement / apprentissage, réfèrent à ces choix et aux conceptions qui peuvent les sous-tendre.

À partir de l'analyse des supports et de leur fonction au sein de la formation déduite par rapport aux tâches prescrites présentes dans le scénario de formation, nous analysons les dimensions dominantes des supports de formation proposés. Puis, à partir de l'analyse des entretiens où les intentions des formateurs et leur rapport aux savoirs, aux formés, aux tâches, et à l'organisation apparaissent, nous identifions les postures de formateurs. Enfin, nous confrontons ces deux analyses, ce qui nous permet d'apprécier l'adéquation entre les dimensions des supports de formateurs observées et les postures de formateurs identifiées.

Nous nous intéressons ici au scénario et aux supports de formation conçus par Agnès dans le cadre d'un stage intitulé « Enseigner la géométrie à l'école primaire » dont l'objectif central vise à « assurer la continuité des apprentissages en géométrie de la maternelle au cycle 3 ». L'analyse des supports de formation et de leur fonction pointe une dominance des dimensions relationnelles et didactiques des supports conçus par Agnès. Ainsi, dès le début de la formation, elle met en activité les formés. Ils doivent résoudre des situations problèmes, écrites sur une feuille, avec du matériel géométrique (tétracubes, géoplans associés avec des feuilles comportant des grilles pointées, polydrons, pentaminos associés avec des feuilles quadrillées et enfin des blocs géométriques). Ils ont aussi une feuille A4 où sont écrites les situations problèmes à résoudre. Suite à ce travail, Agnès opère une mise en commun : les formés indiquent les réussites et difficultés rencontrées. A l'aide de ces supports, elle les conduit donc à vivre l'activité en posture d'élèves mais également à appréhender les savoirs engagés et les difficultés potentiellement rencontrées par les élèves. Les échanges lors et à partir de ce travail conduisent les enseignants à construire des connaissances sur les obstacles

[3] Nous avons défini le rapport au support comme l'ensemble des relations liées aux supports d'enseignement édités (manuels, fichiers, guide du maître, etc.) qu'un enseignant, considéré comme individu, entretient avec les contraintes et les ressources du contexte professionnel dans lequel il évolue ainsi que celles liées aux formes communes de cette vie professionnelle.

liés aux apprentissages géométriques mais également sur le matériel pour enseigner la géométrie et ses usages possibles. De même, à partir des grilles de référence du socle commun, des programmes dans le domaine de la géométrie et des verbes relevés et définis (reproduire, décrire, représenter, etc.), les formés doivent ensuite élaborer pour chaque matériel une progression pour les trois cycles. Agnès donne pour cela une fiche comportant un tableau vierge à deux entrées à compléter (verbes relevés/cycles concernés). Le support proposé invite les formés à interagir entre eux pour compléter le tableau à partir de ce qu'ils ont fait, ce qu'ils font dans leur classe. Mais, par leur implication, il les conduit également à l'élaboration de progressions qui vont sous-tendre leur action professionnelle.

L'analyse des entretiens met en évidence deux postures dominantes, celle d'accompagnateur et celle de didacticien. Agnès accorde une place importante à la pratique. Elle dit ainsi qu'« il faut mettre en situation pour se poser le problème », qu'« il faut se poser des questions par des situations concrètes ». Ceci est en lien avec sa réponse lorsque nous lui posons la question du rôle du formateur : « c'est avant tout de questionner […] leur pratique pour les faire évoluer ». Elle observe que cette manière d'agir est récurrente dans ses formations, et que « c'est en faisant qu'on apprend ». Elle indique toutefois qu'il faut aussi « apporter » aux formés, « être source parfois de propositions ».

2. Un exemple illustrant la dimension ressource « pour faire »

Dans le cadre d'une formation de formateurs, nous avons demandé aux formés d'élaborer un scénario de formation. Puis, après leur avoir présenté la modélisation, nous avons demandé d'interroger – par inférence sur les supports de formation qu'ils avaient conçus – leurs postures de formateur. Les propos des formés suite à ce travail témoignent des apports potentiels de la modélisation. En voici un exemple : « j'ai pensé à un scénario d'action de formation (réalisé antérieurement) et je me dis j'étais complètement à côté ou j'ai raté des paramètres et je pense que cette analyse enfin cette modélisation permet une analyse de nos actions ». Un autre ajoute : « c'est intéressant […] nous qui sommes en fonction quand on fait une animation pédagogique, une formation et bien du coup de se dire, tiens ce jour là j'étais plutôt çà ou ça. […]. Cela peut être intéressant d'avoir une relecture plutôt personnelle […]. C'est aussi travailler notre réflexivité de formateur, on peut pas prétendre de vouloir l'enseigner si on n'est pas nous même dedans régulièrement » (Leroyer et Georget, 2017). Afin d'exemplifier l'usage de la modélisation par des enseignants comme « ressource pour faire », nous avons présenté une formation réalisée auprès d'enseignants spécialisés prenant pour objet la conception d'une séance de mathématiques et dans laquelle la modélisation doit permettre aux formés de conscientiser leur action et d'acquérir des indicateurs pour analyser leur pratique. L'analyse des effets de la modélisation à partir des propos des enseignants mais également de leurs productions a sous-tendu notre communication.

III. PERSPECTIVES DE RECHERCHE : DÉVELOPPER LA CAPACITÉ À PENSER LA TRANSMISSION DES SAVOIRS À PARTIR DES SUPPORTS EN FORMATION INITIALE

L'usage de la modélisation comme cadre d'analyse en situation de formation de formateurs permet d'observer des résultats concluants, nous envisageons de poursuivre sa mise à l'épreuve notamment en formation initiale où les enjeux sont importants.

Grâce au numérique, la possibilité d'accéder facilement et rapidement à des supports d'enseignement conçus par les éditeurs scolaires, l'institution scolaire mais également par des pairs et des collectifs d'enseignants nécessite que les futurs enseignants développent un regard

critique. Or, dans une recherche sur la professionnalisation des enseignants en formation initiale, nous avons constaté que l'attention portée au regard critique sur les supports d'enseignement apprentissage par les étudiants se détériorait (Leroyer & Bailleul, 2017). L'usage de cette modélisation en formation permettrait aux étudiants : de réfléchir le choix des supports d'enseignement/apprentissage, choix référant à leurs conceptions de l'enseignement, de l'apprentissage, des apprenants et de penser ainsi la question de la transmission des savoirs en interrogeant également les effets des supports sur l'activité des élèves.

REFERENCES

Bailleul M., Thémines J.F. (2013) L'ingénierie de formation : formalisation d'expériences en formation d'enseignants. In A. Vergnioux, A. (Ed.), *Traité d'ingénierie de la formation* (pp. 85–112). Paris : L'Harmattan.

Brown M.-W. (2009) The teacher-tool relationship – Theorizing the Design and use of Curriculum materials. In J. Remillard, B. Herbel-Eisenmann & G. Lloyd (Eds.), *Mathematics Teachers at work, Connecting Curriculum Materials ans Classroom Instruction* (pp. 17–36). New York : Routledge.

Bucheton D., Soulé Y. (2009) Les gestes professionnels et le jeu des postures de l'enseignant dans la classe : un multi-agenda de préoccupations enchâssées, *Education & Didactique*, 3(3), 29–48.

Bueno-Ravel L., Gueudet G. (2014) Quelles ressources pour les professeurs des écoles et leurs formateurs ? Apports de la recherche en didactique, 15-36. In *Actes du XXXXI*^{ème} *colloque COPIRELEM des formateurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres*, IREM de Bordeaux.

Gueudet G., Trouche L. (2008) Du travail documentaire des enseignants : genèses, collectifs, communautés, le cas des mathématiques, *Education & Didactique*, 2(3), 7–34.

Gueudet G., Trouche L. (2010) *Ressources vives, le travail documentaire des professeurs en mathématiques*. Rennes : PUR.

Leroyer L. (2013) Le rapport au support dans le travail de préparation en mathématiques des enseignants du premier degré. *Education & Didactique*, 7(1), 147–164.

Leroyer L. (2016) La question des ressources pour la formation dans le travail des conseillers pédagogiques. Communication présentée au 43^{e} colloque international copirelem, Le Puy en Velay, France.

Leroyer L. (à paraître) La question des ressources dans le travail de conception des formateurs d'enseignants: cadres théoriques et perspectives de recherche. In I. Verscheure, M. Ducrey-Monnier & L. Pelissier (Eds.), *Enseignement et formation : éclairage de la didactique comparée*. Toulouse : Presses universitaires du Midi.

Leroyer L., Bailleul M. (2017) Les supports d'enseignements dans la représentation du métier chez des professeurs d'école débutants. In R. Gras & J.C. Régnier (Eds.), *L'analyse statistique implicative : des sciences dures aux sciences humaines et sociales* (pp. 411–421). Toulouse, Cépadues.

Leroyer L., Georget J.P. (2017) De l'analyse du travail des formateurs à l'élaboration d'une modélisation, outil pour la formation de formateurs. Communication présentée au 4^{e} colloque international de Didactique Professionnelle, Lille, France, juin.

Rabardel P. (1995) *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Armand Colin.

Remillard J., B. Herbel-Eisenmann B., Lloyd G. (2009) *Mathematics Teachers at work, Connecting Curriculum Materials and Classroom Instruction*. New York : Routledge.

ANALYSE DE CHOIX DE CONCEPTION D'UNE RESSOURCE PORTANT SUR L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE

MANGIANTE-ORSOLA[*] Christine

Résumé – Dans cet article, nous nous intéressons à une ressource conçue par le LéA de Valenciennes Denain portant sur l'enseignement de la géométrie. Notre intention est de mettre au jour certains des choix faits par les auteurs de cette ressource pour faciliter l'appropriation de situations produites par la recherche, que ce soit à travers les hypothèses de travail fixées en amont du processus de conception ou à travers le contenu même de cette ressource et les indications données aux enseignants susceptibles de l'utiliser.

Mots-clefs : ressource, géométrie, pratiques enseignantes, vigilance didactique, institutionnalisation

Abstract – In this paper, we will discuss a resource designed by Léa de Valenciennes Denain on teaching geometry. Our intention is to bring out some of the choices made by the authors of this resource to facilitate the appropriation of situations produced by research, whether through the working hypotheses set up before the design process or through the content itself of this resource and the indications given to teachers who may use it.

Keywords: resource, geometry, teachers' practices, didactical vigilance, institutionnalisation

I. INTRODUCTION

La ressource dont il est question dans cet article a été conçue dans le cadre du LéA (Lieu d'éducation Associé à l'IFE[1]) de Valenciennes Denain qui vise à concevoir une ressource pour l'enseignement de la géométrie du CE2 au CM2 et à interroger les conditions de diffusion dans l'enseignement ordinaire de situations conçues en respectant les hypothèses élaborées par la recherche. Ce projet est porté par une équipe pluricatégorielle (chercheurs, conseillers pédagogiques de circonscription, maîtres formateurs) et prend appui sur des travaux de recherche menées dans le Nord Pas de Calais et qui ont développé au début des années 2000 une approche de la géométrie à l'école élémentaire visant à mieux accompagner les élèves dans le changement de regard nécessaire à porter sur les figures géométriques (Perrin-Glorian, Godin, 2014).

Nous présenterons tout d'abord les hypothèses de travail du groupe ainsi que le dispositif mis au point pour produire cette ressource puis nous choisirons quelques extraits afin de questionner les choix (implicitement) fait par les auteurs de cette ressource et en dégagerons quelques éléments d'analyse à propos de l'aide qu'elle vise à apporter aux enseignants au regard de l'exercice de la vigilance didactique.

II. PRESENTATION DU DISPOSITIF DE CONCEPTION DE LA RESSOURCE

1. Des premières observations aux choix de conception

La plupart des situations de restauration de figures sur lesquelles le groupe de recherche du Nord Pas de Calais a été amené à réfléchir sont le fruit d'expérimentations menés dans des classes de maitres formateurs associés au projet et prenant part activement au travail de conception. Ces situations sont très riches du point de vue des apprentissages potentiels pour les élèves mais elles sont assez éloignées des pratiques[2] ordinaires et présentent un certain

[*] Laboratoire de Mathématiques de Lens-Université d'Artois – France – christine.mangiante@espe-lnf.fr

[1] Institut Français de l'Education

[2] Dans tout le texte, nous utilisons le mot « pratiques » selon la définition donnée par Robert et Rogalski (2002). Les pratiques désignent « tout ce que l'enseignant ou l'enseignante met en œuvre avant, pendant et après la classe

nombre de difficultés pour un enseignant non initié à cette approche. Suite à des observations d'implémentations de ces situations dans des classes ordinaires, nous avons décidé de concevoir une ressource visant à faciliter leur appropriation par les enseignants.

Le dispositif de conception de cette ressource que nous avons conçu repose sur un certain nombre d'hypothèses de travail dont voici la liste :

- ***Concevoir une situation destinée à faciliter l'entrée dans la démarche***

Constatant que les situations initialement produites par le groupe de recherche étaient pour certains enseignants trop éloignées de leurs pratiques usuelles, nous avons décidé de « penser une certaine « continuité » dans l'enrichissement des pratiques (Leclercq, Mangiante-Orsola, 2014) c'est-à-dire de prévoir des changements de pratiques successifs suffisants au regard des apprentissages potentiels des élèves mais suffisamment limités pour ne pas trop déstabiliser les pratiques existantes (notre intention était d'accroître progressivement la marge de manœuvre des enseignants). Nous avons donc commencé à réfléchir à une première situation susceptible d'amener les enseignants à questionner leurs pratiques sans trop les déstabiliser.

- ***Observer pour mieux comprendre ce qui peut faire obstacle à l'appropriation***

Conscients que malgré les précautions que nous serions amenés à prendre à propos de cette première situation, des obstacles pouvaient apparaitre et constituer des freins à son appropriation, nous avons fait le choix de tester cette première situation dans le cadre d'un dispositif laissant une place importante à l'observation de pratiques effectives.

- ***Croiser nos différents « points de vue »***

Considérant par ailleurs que nous devions veiller à prendre en compte à la fois les besoins des enseignants et les attentes des chercheurs, nous avons conçu un dispositif de travail porté par une équipe pluri-catégorielle au sein de laquelle les maîtres formateurs (qui sont à la fois enseignants et formateurs) sont susceptibles de jouer un rôle important dans la mesure où ils peuvent expérimenter les situations dans leur classe et ainsi enrichir nos analyses de leurs observations.

- ***Tester les situations auprès d'enseignants non-initiés à la démarche***

Enfin, souhaitant confronter nos propositions à l'enseignement ordinaire nous avons prévu de tester ces situations auprès d'enseignants de moins en moins initiés à la démarche : nous avons commencé par travailler avec des enseignants dans le cadre de la formation continue puis avec d'autres enseignants que nous avons seulement accompagnés dans la découverte de la ressource et envisageons à terme de tester la ressource auprès d'enseignants n'ayant suivi aucune formation, ni aucun accompagnement.

2. Présentation du dispositif

Chercheurs et formateurs pilotent ensemble le dispositif. Le point de départ du travail de conception de la ressource est la trame d'une situation proposée par les chercheurs pour aider les enseignants à s'approprier une certaine approche de l'enseignement de la géométrie. Cette première version de la ressource fait l'objet d'échanges entre chercheurs et formateurs afin d'être enrichie d'indications pour l'enseignant. La version ainsi obtenue est présentée à des enseignants dans le cadre d'une séance de formation continue. Ces derniers testent dans leur classe la situation proposée (via la formation et la ressource) accompagnés par un ou plusieurs membres du LéA. L'analyse croisée entre chercheurs, formateurs et enseignants des observations réalisées permet d'ajuster et d'enrichir peu à peu la ressource initiale pour obtenir une nouvelle version. Ainsi, le processus de conception est organisé selon des boucles itératives : il s'agit de penser ensemble une situation, mettre en œuvre, analyser, repenser,

(conceptions activées au moment de la préparation des séances, connaissances diverses, discours mathématique et non mathématique pendant la classe, gestes spécifiques, corrections de productions d'élèves, etc.) ».

remettre en œuvre, ré-analyser…et ce processus est répété pour plusieurs situations d'enseignement.

Ainsi, conformément aux hypothèses de travail pointées précédemment, le travail mené au sein du LéA a débuté par la conception et la mise en œuvre d'une situation d'enseignement susceptible d'aider les enseignants à s'approprier notre démarche. De plus, le dispositif donne une place importante à l'observation conjointe de pratiques effectives afin d'identifier d'éventuels obstacles à l'appropriation de la situation proposée. Soulignons enfin que depuis septembre 2017, nous testons cette première version auprès de nouveaux enseignants. Ces derniers étant seulement accompagnés au moment de la présentation générale du projet, cela nous permet de confronter un peu plus notre ressource aux pratiques ordinaires.

Nous allons maintenant poser, en tant que chercheur, un regard plus distancié sur cette ressource afin d'analyser certains des choix implicitement faits pour prendre en charge certains des besoins décelés chez les enseignants et ainsi tenter de faciliter leur appropriation des situations proposées.

III. ANALYSE DU CONTENU DE LA RESSOURCE

1. Mise au point de l'outil d'analyse

Nos observations en tant que formatrice nous amènent à estimer que l'enseignement de la géométrie est généralement centré sur l'acquisition du vocabulaire, la connaissance de certaines propriétés et la maîtrise des instruments usuels. Nous constatons, de manière plus générale, que les enjeux d'apprentissage sont difficilement perçus par les enseignants et que par suite ces derniers ont dû mal à cerner les savoirs à institutionnaliser. Notre intention est de repérer ce que la ressource produite dans le cadre de notre LéA vise (implicitement) à prendre en charge et (en creux) ce qui est laissé à la charge de l'enseignant à propos du processus d'institutionnalisation.

Nous faisons le choix d'aborder cette question en prenant appui sur la notion de vigilance didactique définie par Charles-Pézard « comme une sorte d'ajustement permanent de la part du professeur faisant appel aux deux composantes cognitive et médiative des pratiques et s'exerçant dans les trois niveaux global, local et micro[3] » (Charles-Pézard, 2010, p.210).

Butlen, Charles-Pézard et Masselot (2009 ; 2012) définissent cinq niveaux d'exercice de la vigilance didactique qui, s'ils sont atteints, pourraient favoriser les apprentissages mathématiques : installation d'une paix scolaire (niveau 1), proposition de problèmes consistants et aménagement de temps de recherche (niveau 2), explicitation de procédures (niveau 4), hiérarchisation de procédures et synthèse, institutionnalisation (niveau 5).

Nous focalisant sur le processus d'institutionnalisation, nous cherchons à identifier des éléments constitutifs à l'exercice de la vigilance didactique dans des séances de géométrie relativement à ce processus. Dans cette perspective, nous retenons des travaux Butlen, Charles-Pézard et Masselot, que pour exercer une certaine vigilance didactique, l'enseignant doit prendre en compte les explicitations de procédures par les élèves (nous notons ce premier

[3] Les trois niveaux d'organisations des pratiques sont définis ainsi par Masselot et Robert (2007)
▪ un niveau appelé ici micro, souvent automatique, voire inconscient, celui des gestes professionnels comme les formes des discours, l'écriture au tableau, les déplacements,
▪ en opposition à ce qui prend place au niveau local, celui de la séance de classe, qui met en jeu des déroulements à la fois prévus et comportant des improvisations permanentes,
▪ à compléter par le niveau global, celui des préparations et des projets globaux qui souvent tiennent compte de tout ce que l'enseignant sait déjà, a expérimenté, veut faire, et anticipe pour les classes qu'il a en ce moment.

élément : iii.)[4], veiller à faire émerger un discours sur les procédures afin de les comparer, de les hiérarchiser (élément noté iv.) et identifier le savoir à institutionnaliser (v.). Mais, ces trois éléments nous semblent insuffisants au regard des travaux de Allard (2015) qui ont montré combien les enseignants avaient des difficultés à penser l'institutionnalisation en tant que processus (qui ne se réduit pas à un moment particulier de la séance) et à l'organiser en tant que tel. C'est pourquoi nous avons ajouté un élément (noté i.) à ce propos. Enfin, parce que les observations réalisées dans les classes des enseignants participant à notre projet montrent que certains d'entre eux restent centrés sur l'aspect manipulatoire de la tâche au détriment des connaissances visées par cette tâche, nous avons ajouté un dernier élément : la nécessité pour l'enseignant de veiller à articuler les actions sur le matériel et les connaissances géométriques en jeu (ii.).

Par ailleurs, nous cherchons des appuis théoriques pour caractériser le type d'aide visé par la ressource. Pour ce faire, nous adaptons à notre propre questionnement les distinctions faites dans le cadre de la double approche à propos des aides apportées aux élèves dans la résolution d'une tâche mathématique. Selon Vandebrouck (2008) et Chappet-Pariès (2004), les aides peuvent revêtir deux fonctions selon qu'elles « favorisent l'engagement de l'élève dans la résolution de la tâche » – on parle d'aides « procédurales », ou qu'elles sont tournées vers les apprentissages des élèves – on parle d'aides « à visée constructive ». Les aides apportées aux élèves portent sur une tâche mathématique, le plus souvent via une intervention orale de l'enseignant, alors que les aides évoquées ici portent sur une tâche d'enseignement via un document écrit. Adaptant cette distinction, nous considérons deux types d'aides : aider pour que l'enseignant « réussisse » à mettre en œuvre la séance et aider pour que l'enseignant « comprenne ».

Ainsi, notre questionnement est double. Nous cherchons d'une part à identifier les éléments constitutifs à l'exercice de la vigilance didactique que la ressource vise à prendre en charge et d'autre part à caractériser l'aide proposée par la ressource. Soulignons que nous limitons notre analyse à la situation présentée dans la ressource comme celle susceptible d'aider les enseignants à « entrer dans la démarche »[5]. Ce statut un peu particulier nous incite à penser qu'elle est la plus significative des choix opérés par l'équipe au regard de l'aide apportée à l'exercice de la vigilance didactique.

2. Présentation de la situation « triangles sur quadrilatère »

L'objectif de la séquence « triangles sur quadrilatères » est d'amener les élèves à analyser une figure complexe (figure 1) grâce à une activité de restauration de figure[6]. La séquence se déroule en quatre étapes. A chaque étape, il est demandé aux élèves de restaurer une figure (toujours la même) mais à partir d'une partie déjà tracée de la figure (une amorce) et d'instruments différents (figure 2). Cette figure est une figure complexe dans laquelle on peut identifier un quadrilatère quelconque et des triangles. Certains côtés de ces triangles sont portés par les diagonales du quadrilatère. Il n'y a pas d'angles droits sur cette figure.

[4] Choix de numérotation en cohérence avec les niveaux définis par Butlen, Charles-Pézard et Masselot.
[5] Dans la ressource, d'autres situations sont présentées mais de manière plus succincte.
[6] Une activité de restauration de figure consiste à reproduire une figure à partir d'une partie déjà tracée de la figure (l'amorce) à l'aide d'une règle non graduée, éventuellement d'un compas, et d'instruments qui permettent de reporter des longueurs sans les mesurer (une bande de papier avec un bord droit) ou des parties de la figure (ici des gabarits).

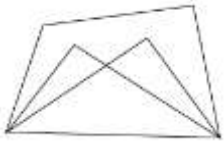


Figure 1. *– Figure modèle*

Dans la première phase, les élèves restaurent la figure à partir des gabarits des deux grands triangles et d'une règle non graduée. Le quadrilatère cadre est donné (c'est l'amorce). L'alignement des côtés des petits triangles est alors pris en charge par le matériel (certains côtés des grands triangles sont constitués de deux côtés alignés des petits triangles). Les élèves n'ont pas à l'utiliser explicitement.

Dans la deuxième phase, une autre amorce est donnée. Les élèves disposent du gabarit grignoté de l'un des deux petits triangles ainsi que de la règle non graduée. Cela les conduit à prolonger les côtés du petit triangle déjà tracé et donc à utiliser explicitement l'alignement des segments (côtés des petits triangles) pour pouvoir placer le gabarit.

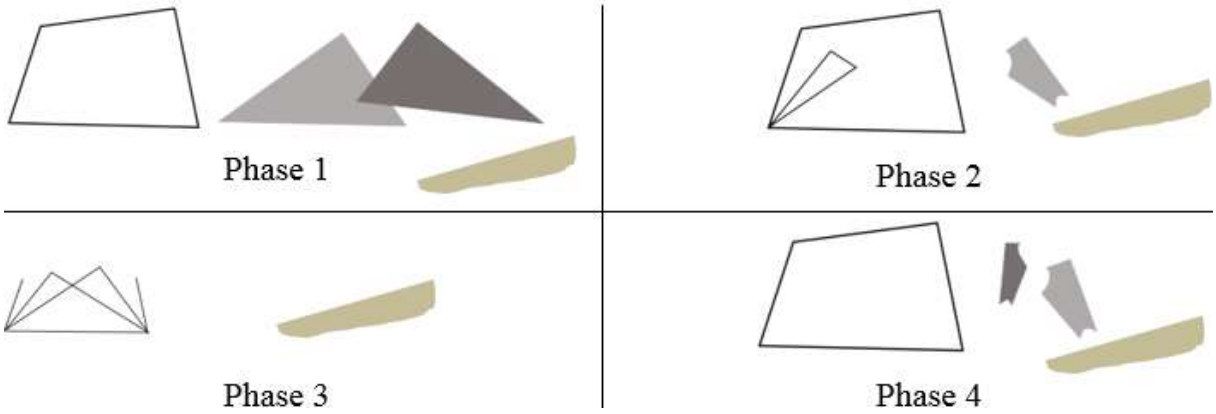


Figure 2. *– Amorce et instruments mis à disposition pour chacune des phases*

Dans la troisième phase, c'est encore une autre amorce qui est donnée (amorce qui est de taille réduite par rapport à la figure modèle afin d'éviter les reports de longueurs) et seule la règle non graduée est à disposition. Là encore, les élèves doivent prolonger des côtés mais ils doivent de plus prendre en compte l'alignement de segments (les côtés de triangles) avec des points : en effet, ils doivent utiliser le fait que les côtés des triangles sont portés par les diagonales du quadrilatère et donc que les sommets manquants sont à l'intersection d'un côté et d'une diagonale du quadrilatère.

Dans la quatrième phase, le choix de l'amorce et des instruments (les gabarits grignotés des deux petits triangles ainsi que la règle non graduée) conduit les élèves à réinvestir cette connaissance en traçant au préalable les diagonales du quadrilatère.

Ainsi, d'une phase à l'autre, la connaissance de la figure modèle s'enrichit.

3. Analyse d'extraits de la ressource

Nous choisissons de limiter notre analyse à la rubrique « amener vos élèves à identifier ce qui est important » qui clôt le descriptif de chacune des quatre phases de la séquence car elle nous semble être la plus significative des indications données à propos du processus

d'institutionnalisation[7]. Nous organisons cette analyse grâce à un tableau dont nous reproduisons ici un extrait (figure 3).

INDICATIONS	ELEMENTS DE JUSTIFICATION	ANALYSE
Phase 1 : Réaliser un assemblage par chevauchement		
On peut voir dans la figure modèle, différents triangles : deux petits, deux grands, un moyen …. 	*(Cela permet aux élèves de s'entrainer à repérer les différentes figures simples dans cette figure complexe, à acquérir une certaine flexibilité du regard et de s'entrainer à décrire ce qu'ils voient en employant un langage précis)*	-Justification relative aux enjeux de la séquence. Passage du niveau micro, au niveau local voire global/Enjeux maths/Illustration-Explicitation
Si on cherche à placer les deux gabarits simultanément, on est obligé de « *les faire se chevaucher* ». 	*(Cela permet aux élèves de réaliser ici un assemblage par chevauchement, ce qui est moins fréquent que des assemblages par juxtaposition)* *Nous préférons dire que les gabarits « se chevauchent » plutôt que dire qu'ils « se superposent » pour ne pas laisser penser qu'il s'agit de placer les deux gabarits « l'un au-dessus de l'autre » de manière à ce que l'un masque l'autre.*	-Justification relative au caractère peu usuel de ce type de tâche (la notion de contrat didactique importante ici reste implicite). -Justification relative à précision du vocabulaire. Passage du niveau micro, au niveau local voire global/Contrat, éviter ambiguïté/Formulation, illustration-explicitation

Figure 3. – *Extrait du tableau permettant le traitement des données recueillies*

Nous relevons tout d'abord les indications données aux enseignants (colonne 1 du tableau présenté figure 3) ainsi que la présence éventuelle de justifications (colonne 2) en lien avec ces indications. Puis, nous en faisons l'analyse (colonne 3).

Afin d'identifier les éléments constitutifs de l'exercice de la vigilance didactique concernés par les indications données, nous étudions le texte de la ressource pour y distinguer la description précise d'actions que les élèves doivent réaliser sur le matériel, les énoncés de méthodes ou raisonnement, les éléments de savoir et d'éventuelles indications données quant à la gestion des différents temps de mises en commun et leur articulation.

Nous relevons également la présence (ou l'absence) d'éléments de justification et le cas échéant les connaissances mathématiques ou didactiques en jeu ; le niveau d'explicitation/mise en fonctionnement de ces indications/justifications.

Nous notons enfin si les indications sont données avec un degré d'explicitation important ou non et si les éventuelles justifications avancées concernent le niveau local, global ou micro des pratiques.

L'analyse menée sur les extraits retenus nous amène à faire plusieurs constats.

Tout d'abord, nous relevons à propos des éléments constitutifs à l'exercice de la vigilance didactique pris en charge que l'accent est mis dans ces extraits sur les savoirs à institutionnaliser (v.) grâce à de nombreux éléments de savoirs qui prennent la forme de formulations proposées entre guillemets à l'enseignant. Par exemple, il est écrit à propos de la phase 1 qu'il convient de dire que les deux grands triangles doivent « se chevaucher », à propos de la phase 2, que « les côtés des triangles sont alignés » ou encore à propos de la phase 3, que « les points d'intersection obtenus sont les sommets du quadrilatère » et plus généralement, « qu'un point s'obtient par l'intersection de deux droites ».

Nous constatons ensuite que l'articulation entre les différentes phases est pointée à travers la présentation de ce qui est « à faire remarquer absolument » ou « pour préparer la phase suivante », ce qui tend à mieux mettre en évidence la nécessité de penser l'institutionnalisation en tant que processus et à le gérer en tant que tel (i.) même si cela reste assez implicite. Par exemple, il est conseillé à l'enseignant de demander à ses élèves à la fin de la phase 1 de « repasser en couleur les contours des grands triangles en insistant sur ceux

[7] Notons toutefois qu'il ne s'agit pas d'une analyse exhaustive des indications données par la ressource à propos du processus d'institutionnalisation. D'autres indications peuvent être données dans d'autres rubriques.

constitués de deux segments alignés (deux côtés de petits triangles) ». Cela permet en effet de visualiser sur la figure l'alignement de certains segments (certains des côtés des petits triangles) et ainsi de favoriser la prise en compte de cet alignement lors de la phase suivante au moment où les élèves auront à prolonger les côtés du petit triangle. Nous relevons néanmoins peu d'indications à propos de la gestion du processus d'institutionnalisation (ii., iii., iv.) mais cela peut être indiqué ailleurs dans le descriptif de la séquence (notamment dans des conseils annexes).

Par ailleurs, nous constatons la présence d'indications données avec un degré d'explicitation parfois très important sous forme d'exemples précis, de photos voire de vidéos. Par exemple, des indications très précises sont données aux enseignants pour aider les élèves à employer un vocabulaire adapté. Il est en effet écrit : « si un élève dit : « on fait comme ça… » ou « on met la règle comme ça » ou « c'est penché » ou « c'est le truc » …vous pouvez répondre « je ne sais pas ce que c'est "ça" » ou « qu'est-ce que ça veut dire penché ». Des extraits de films viennent de plus illustrer les indications données. En outre, de nombreuses justifications sont données à un niveau qui peut être global, local ou micro. On remarque notamment que chacune des formulations proposées est accompagnée d'une justification. Celle-ci peut porter sur la nécessité d'expliciter les propriétés de la figure ou sur les méthodes à utiliser. Par exemple, dans la phase 3, il est indiqué qu'il convient d'amener les élèves à dire que « certains côtés des triangles sont situés sur les diagonales du quadrilatère » parce que cela leur permet « de prendre conscience des alignements ». De même, il est indiqué qu'il convient de faire remarquer aux élèves qu'ils ont « d'abord tracé les diagonales pour pouvoir positionner les deux gabarits » parce que cela leur permet de « prendre conscience qu'il faut planifier la chronologie des gestes à réaliser sur le matériel ». La présence d'indications données à un grain très fin fréquemment accompagnées de justifications permet d'attester que la ressource vise à expliciter pour former (aide « à visée constructive »), du moins dans les extraits étudiés.

Nous faisons alors le choix d'étudier de plus près la manière dont la ressource permet à l'enseignant de faire des liens entre des indications données à des degré d'explicitation plus ou moins important et des justifications données à des niveaux (global, local, micro) différents et cela nous conduit à mettre au jour deux mouvements, inverses l'un de l'autre, dans le choix des indications données (figure 4).

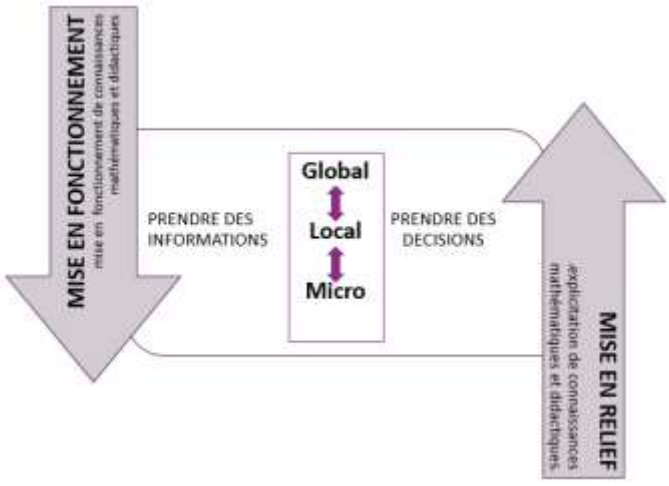


Figure 4 – *Double mouvement.*

En effet, d'une part, nous repérons des éléments de justification de tâches (données à un niveau global ou local et qui convoquent des connaissances mathématiques et/ou didactiques) complétées par des indications qui sont des illustrations de ces tâches via des exemples précis,

photos ou extraits vidéos (données à un niveau micro) et qui donnent à voir des « mises en fonctionnement » par des enseignants de connaissances mathématiques et didactiques. Par exemple, un extrait vidéo montrant une enseignante en classe donne à voir comment faire, concrètement et sur cette situation précise, pour tenir compte de l'injonction donnée à un niveau global « Lorsqu'on sollicite les élèves pour les amener à expliciter leur procédure, il convient d'être exigeant sur les mots employés ».

D'autre part, nous repérons des indications données à propos de ce qu'il convient de dire ou de faire, suivies d'éléments de justification en lien avec des choix globaux ou locaux, sur la logique sous-jacente au déroulement proposé. Cela permet une « mise en relief » des indications et justifications données à travers l'explicitation de connaissances mathématiques et didactiques. Par exemple, lorsqu'il est recommandé au lecteur d'amener les élèves à repérer dans la figure modèle, différents triangles : deux petits, deux grands, un moyen … il est indiqué entre parenthèses que « cela permet aux élèves de s'entrainer à repérer les différentes figures simples dans cette figure complexe, à acquérir une certaine flexibilité du regard et de s'entrainer à décrire ce qu'ils voient en employant un langage précis ».

IV. CONCLUSION

Cet article met en évidence certains des choix fait à travers une ressource pour faciliter l'appropriation de situations produites par la recherche, que ce soit à travers les hypothèses de travail fixées en amont du processus de conception ou à travers le contenu même de cette ressource. Cette ressource se veut être une *ressource pour se former*.

Prenant appui sur la notion de vigilance didactique, nous avons relevé dans les extraits étudiés à la fois des indications à un niveau d'explicitation important donnant à voir une *opérationnalisation* de connaissances mathématiques et didactiques et des éléments de justification permettant une *mise en relief* de ce qui justifie les choix des concepteurs de la ressource.

Le double mouvement ainsi mis au jour nous conduit à considérer que cette ressource repose implicitement sur l'hypothèse selon laquelle les enseignants ont besoin pour pouvoir exercer leur vigilance didactique à la fois d'indications précises (car sans indication précise, ils pourraient ne pas savoir comment s'y prendre concrètement) et de prise de recul sur ces indications (car sans cela, ils pourraient agir sans nécessairement comprendre ce qui justifie ces choix).

Ce résultat nous renvoie à la notion de vigilance didactique elle-même et à la comparaison suggérée par Pézard lorsqu'elle écrit qu'« une bonne vigilance didactique assure un déroulement de classe piloté prioritairement par les mathématiques, au plus près des apprentissages visés » (Pézard, 2010, p. 214).

En effet, de la même manière qu'un bon pilote a besoin de connaître avec précision où terminer sa course tout en ayant un point de vue plus global sur son parcours, l'enseignant a besoin d'identifier avec précision les apprentissages visés tout en ayant connaissance des enjeux d'apprentissages à plus ou moins long terme et des grandes étapes de l'itinéraire cognitif prévu pour les élèves. De plus, parce qu'un « bon pilote » doit être capable de s'adapter face aux imprévus, l'enseignant doit pouvoir prendre des informations sur l'activité des élèves au regard des mathématiques visés et à réagir aux propositions des élèves toujours par rapport à une analyse des mathématiques en jeu.

Tout ne peut pas être dit dans un texte aussi complet soit-il et tout ne peut pas être pris en charge par une ressource aussi détaillée soit-elle. C'est pourquoi, il nous semble intéressant de

continuer à étudier ce que notre ressource vise (implicitement) à prendre en charge et (en creux) ce qui est laissé à la charge de l'enseignant au regard de l'exercice de la vigilance didactique.

REFERENCES

Allard C. (2015) Étude du processus d'institutionnalisation dans les pratiques de fin d'école primaire, le cas des fractions. Thèse. Université Paris-Diderot.

Butlen D., Charles-Pezard M., Masselot P. (2009) Gestes et routines professionnels, un enjeu pour intervenir sur les pratiques enseignantes, Communication présentée à Espace Mathématique Francophone, Dakar, Sénégal.

Chappet-Paries M. (2004) Comparaison de pratiques d'enseignants de mathématiques, Recherches en Didactique des Mathématiques, 24(2-3), 251-284

Charles-Pezard M., Butlen D., Masselot P. (2012) Professeurs des écoles débutants en ZEP - Quelles pratiques ? Quelle formation ? Paris : La Pensée Sauvage.

Charles-Pezard M. (2010) Installer la paix scolaire, exercer une vigilance didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques 30(2), 197-260.

Leclercq R., Mangiante-Orsola C. (2012) Étude d'un dispositif articulant production de ressources et formation continue en géométrie : quels effets sur les pratiques des enseignants ? Actes du colloque COPIRELEM, Nantes.

Masselot P., Robert A. (2007) le rôle des organisateurs dans nos analyses didactiques de pratiques de professeurs enseignant les mathématiques Recherche et formation 56,15-31

Perrin-Glorian M.J., Godin M. (2014) De la reproduction de figures géométriques avec des instruments vers leur caractérisation par des énoncés. Math-école 222, 26-36.

Robert A., Rogalski J. (2002) Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. La revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies 2(4), 505-528.

Vandebrouck F. (2008) Résultats sur l'activité des élèves en classes de seconde, in Vandebrouck et al (Ed) La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants, Toulouse : Octarès, pp.197-225.

ANALYSE DES TÂCHES PROBABILISTES PROPOSÉES DANS UNE COLLECTION DE MANUELS SCOLAIRES DU PRIMAIRE AU QUÉBEC

MARTIN[*] Vincent – MALO[**] Mélanie – THIBAULT[***] Mathieu

Résumé – Dans ce texte, nous rapportons une analyse des tâches probabilistes proposées dans une collection de manuels scolaires utilisés au primaire au Québec. Les résultats montrent que les tâches probabilistes ne représentent qu'un mince pourcentage des tâches proposées dans la ressource et qu'elles sont surtout inscrites dans l'approche théorique, alors que l'ouverture vers l'articulation avec l'approche fréquentielle est rare.

Mots-clefs : École primaire, Manuel scolaire, Enseignement des probabilités, Tâches probabilistes

Abstract – In this text, we report an analysis of probabilistic tasks proposed in a collection of textbooks used in elementary school in Quebec. The results show that the probabilistic tasks represent only a small percentage of the tasks proposed in the resource and that they are mainly included in the theoretical probabilistic approach, whereas the opening towards articulation with the frequentist approach is rare.

Keywords: Primary school, Textbooks, Teaching of probability, Probabilistic tasks

I. CONTEXTE

L'utilisation du manuel scolaire occupe une place importante dans l'enseignement-apprentissage des mathématiques (Côté, 2015). Pour Lebrun (2006), cela s'explique notamment par une perception de fiabilité de ce matériel de la part des enseignants. Pour leur part, Lebrun et Niclot (2009) affirment que les manuels ont le pouvoir de faire stagner ou de transformer les situations d'apprentissage offertes aux élèves. Dans ce sens, Lebrun, Bédard, Hasni et Grenon (2006) soutiennent que, en guidant les pratiques enseignantes, le manuel utilisé pourrait même influencer la manière dont les élèves apprennent. Toutefois, l'analyse de certains manuels a mis en évidence d'importantes lacunes dans de telles ressources, alors que les approches didactiques sur lesquelles ils s'appuient et les contenus disciplinaires qu'ils exposent ne reposent pas nécessairement sur des savoirs didactiques issus de la recherche (Lebrun *et al.*, 2006).

Dans une enquête visant à décrire les pratiques déclarées d'enseignement des probabilités au primaire et au secondaire au Québec, Martin et Thibault (2017) ont notamment cherché à connaitre la fréquence d'utilisation de ressources comme le manuel scolaire. Or, ces auteurs ont fait ressortir que 68 % des 248 enseignants du primaire ayant répondu au questionnaire électronique disaient recourir souvent ou presque toujours au manuel scolaire ou au cahier d'exercices pour l'enseignement des probabilités, tandis qu'un peu moins de 8 % ont déclaré ne jamais utiliser ce type de ressources dans ce contexte. Toutefois, dans une recension des travaux de recherche ayant porté sur l'apprentissage et l'enseignement des probabilités, Martin et Thibault (2016) ont exposé que peu d'études ont porté sur les caractéristiques didactiques des tâches probabilistes issues des ressources utilisées par les enseignants.

Ainsi, nous posons la question de recherche suivante : quelles sont les caractéristiques didactiques des tâches probabilistes proposées dans les ressources utilisées au Québec pour l'enseignement des mathématiques à l'école primaire ? Notre étude s'inscrit donc dans des réflexions guidant le groupe de travail sur la conception, la diffusion et l'usage des ressources dans l'enseignement des mathématiques. En effet, nous étudions une ressource

[*] Université du Québec à Trois-Rivières – Québec – vincent.martin@uqtr.ca
[**] Université du Québec à Trois-Rivières – Québec – melanie.malo@uqtr.ca
[***] Université du Québec à Montréal – Québec – mathieu.thibault@uqam.ca

textuelle qui a été conçue et diffusée pour soutenir l'enseignement des probabilités offert au primaire, même si notre analyse reste en amont de l'usage effectif des enseignants.

II. CADRE DE RÉFÉRENCE

En cohérence avec l'approche instrumentale (Rabardel, 1995), nous voyons le manuel avant tout comme un artefact, soit un objet matériel. Dans l'enseignement des probabilités, un enseignant peut utiliser le manuel comme un instrument, c'est-à-dire comme une construction psychologique résultant de l'établissement d'une relation instrumentale avec l'artefact. Ce processus par lequel l'artefact devient un instrument est appelé la genèse instrumentale. Il s'accompagne de l'élaboration de structures qui permettent à un individu (l'enseignant) d'organiser son action pour que l'instrument (le manuel) puisse servir de médiateur entre le sujet (les élèves) et l'objet (les probabilités). Cependant, en faisant l'analyse des caractéristiques didactiques des tâches probabilistes proposées dans une collection de manuels scolaires, nous étudions les caractéristiques didactiques de l'artefact et non pas la genèse instrumentale qui s'opère lorsqu'un enseignant en fait l'utilisation.

En ce qui a trait aux caractéristiques didactiques des tâches probabilistes que nous avons analysées, nous nous sommes intéressés à des notions comme l'incertitude, la variabilité et l'équiprobabilité, qui caractérisent spécifiquement le domaine des probabilités. Nous avons également porté un regard spécifique sur les différentes approches probabilistes et leur articulation. En général, les travaux réalisés en didactique des mathématiques distinguent trois grandes approches probabilistes (Batanero, 2014). L'approche théorique amène à calculer la probabilité à partir du rapport entre le nombre de cas favorables et possibles d'un événement lorsque tous les cas sont équiprobables. Dans l'approche fréquentielle, on observe une fréquence relative se stabiliser à la suite d'une série de données compilées, ce qui permet de tendre vers la probabilité de l'évènement. L'approche subjective amène un individu à évaluer la force d'une croyance à travers une analyse intuitive de l'information dont il dispose.

Nilsson et Eckert (2016) avancent que les probabilités sont souvent enseignées au primaire selon l'approche théorique. Pourtant, selon Martin et Thibault (2017), les enseignants du primaire ayant répondu à leur enquête ont dit recourir à la fois à l'approche fréquentielle (73 %) et à l'approche théorique (48 %) dans leur enseignement des probabilités. D'ailleurs, l'articulation de ces deux approches est mise de l'avant par certains chercheurs (par exemple, Martin et Theis, 2016; Prodromou, 2012), car celle-ci permet d'établir des liens entre la tendance observée par les fréquences des résultats d'expériences aléatoires et l'inférence d'une probabilité théorique. Batanero (2014) soutient qu'une telle articulation permet d'aborder la notion de variabilité échantillonnale et la perspective non déterministe des probabilités. Cette articulation est d'ailleurs suggérée dans le *Programme de formation de l'école québécoise* (PFEQ) au primaire (Gouvernement du Québec, 2006).

III. MÉTHODOLOGIE

Nous avons analysé les tâches probabilistes proposées dans une collection de manuels scolaires approuvée par le Ministère de l'Éducation du Québec, publiés entre 2001 et 2003 et largement répandus au primaire. Cette collection est composée de 12 manuels qui couvrent l'ensemble des 6 années du primaire, et ce, à raison de 2 manuels par année. Nous avons également considéré certaines ressources complémentaires aux manuels, à savoir deux cahiers d'apprentissage (qui existent seulement pour le 1er cycle) et six cahiers d'exercices (un par niveau). L'ensemble de ces documents représente pour nous la ressource ciblée pour notre analyse. Pour réaliser l'analyse didactique des tâches probabilistes proposées dans cette

ressource, nous avons élaboré une grille centrée sur des éléments conceptuels. Celle-ci a été utilisée pour coder les tâches répertoriées et ainsi relever un certain nombre de leurs caractéristiques didactiques. La grille, présentée en annexe, est composée de près d'une cinquantaine de questions et sous-questions conditionnelles (si oui, alors…). Elle a été élaborée à partir de celle de Côté (2015) et ajustée à la suite de trois phases de tests de codage pour 47 tâches. Nous avons codé les 131 tâches explicitement identifiées comme des tâches probabilistes par les auteurs de la ressource ciblée[1]. Une tâche correspond généralement à une question principale (par exemple le n°1), parfois divisée en quelques sous-questions (par exemple: a, b, c, d). Notons que nous avons fait l'analyse de ce que Mary et Theis (2010) ont nommé les tâches prescrites, c'est-à-dire telles qu'elles apparaissent *a priori*. Nous n'avons donc pas pris en compte les décalages qu'il pourrait y avoir entre la tâche prescrite et l'activité effective de l'élève ou les éventuelles attentes de l'enseignant.

IV. RÉSULTATS

1. Portrait général de la place des probabilités dans la ressource

Afin d'établir un portrait général de la place occupée par les probabilités dans la ressource ciblée, le tableau 1 présente la répartition des tâches probabilistes qui y sont proposées par niveau et par cycle (de deux ans).

Année	Tâches prob.	Par niveau	Par cycle	Collection
1re année (6-7 ans)	0	0 sur 440 (0 %)	31 sur 839 (3,7 %)	131 sur 3130 (4,2 %)
2e année (7-8 ans)	31	31 sur 399 (7,8 %)		
3e année (8-9 ans)	19	19 sur 532 (3,6 %)	41 sur 1082 (3,8 %)	
4e année (9-10 ans)	22	22 sur 550 (4,0 %)		
5e année (10-11 ans)	3	3 sur 608 (0,5 %)	59 sur 1209 (4,9 %)	
6e année (11-12 ans)	56	56 sur 601 (9,3 %)		

Tableau 1 *– La répartition des tâches probabilistes proposées dans la ressource*

Nous constatons d'abord que les tâches probabilistes représentent un pourcentage assez faible (4,2 %) de l'ensemble des tâches proposées dans la ressource pour tout le primaire. Si, dans le PFEQ du primaire (Gouvernement du Québec, 2006), l'enseignement de cinq domaines mathématiques distincts est prescrit, force est de constater que la place des tâches du domaine des probabilités est inéquitable au sein de la ressource étudiée. Nous observons également une augmentation du pourcentage de tâches probabilistes proposées à travers les trois cycles, soit du 1er vers le 3e cycle, passant de 3,7 % à 3,8 % puis à 4,9 %. Cette progression fait écho à l'organisation des savoirs essentiels liés aux probabilités qui est faite dans le PFEQ du primaire. Sur les sept savoirs essentiels probabilistes identifiés dans le PFEQ (Gouvernement du Québec, 2006, p. 138), trois sont traités au 1er cycle, cinq au 2e cycle et six au 3e cycle. Enfin, nous remarquons le faible pourcentage de tâches probabilistes en 5e année (0,5 %), ce qui s'avère cohérent avec un fonctionnement par cycle. En effet, la collection pourrait miser sur la 6e année pour équilibrer le nombre de tâches probabilistes proposées au 3e cycle. Considérant que les probabilités sont incluses dans l'épreuve ministérielle à la fin de la 6e année, il se pourrait que les probabilités soient investies dans la 2e année du cycle.

[1] Parmi les 134 tâches identifiées comme appartenant au domaine des probabilités dans la ressource ciblée, nous avons rejeté 3 tâches qui ne sont pas liées aux probabilités, mais plutôt au domaine de l'arithmétique.

2. Les tâches probabilistes inscrites dans l'approche théorique

Sur l'ensemble des tâches probabilistes proposées dans la ressource ciblée, 55 % des tâches sont inscrites uniquement dans l'approche théorique. Trois types de tâches inscrites dans cette approche ressortent de notre analyse.

Tâches de calcul. Certaines tâches demandent explicitement de calculer une ou plusieurs probabilités théoriques. La figure 1 illustre un exemple de tâche de calcul, proposée en 6e année (3e cycle). Ainsi, dans le contexte d'une pige de cartes, l'élève doit calculer les probabilités théoriques associées à des évènements aléatoires (par exemple la probabilité de tirer une carte rouge ou noire pour identifier l'évènement le plus probable) afin d'arriver à se prononcer sur la véracité de quelques affirmations inscrites dans l'approche théorique.


Imagine que les 12 cartes ci-contre sont étalées sur une table et que leur face est cachée.

a) Par rapport à ces cartes, lequel des énoncés suivants est faux ? Marque-le d'un X.

1) J'ai plus de chance de tirer une carte rouge qu'une carte noire.
2) J'ai une chance sur 6 de tirer un as.
3) J'ai autant de chance de tirer un valet qu'un roi.

b) Jérémie affirme : « J'ai 5 chances sur 12 de tirer une figure ! »
Cette affirmation est-elle vraie ? _____
Comment expliques-tu ce fait ? _____
_____

c) Combien de chances sur six as-tu de tirer un roi ou un valet ? _____

Figure 1 *– Exemple de tâche de calcul*

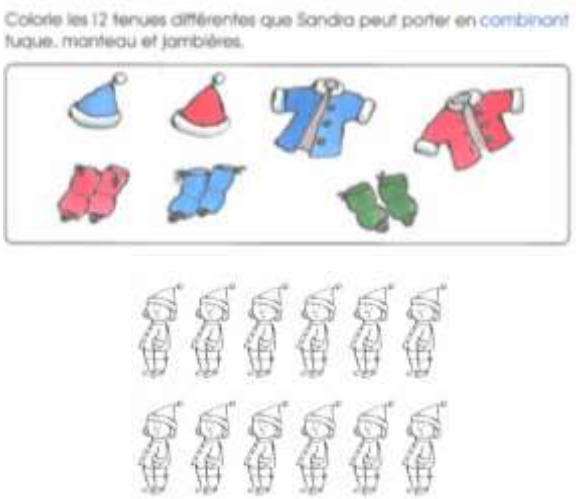
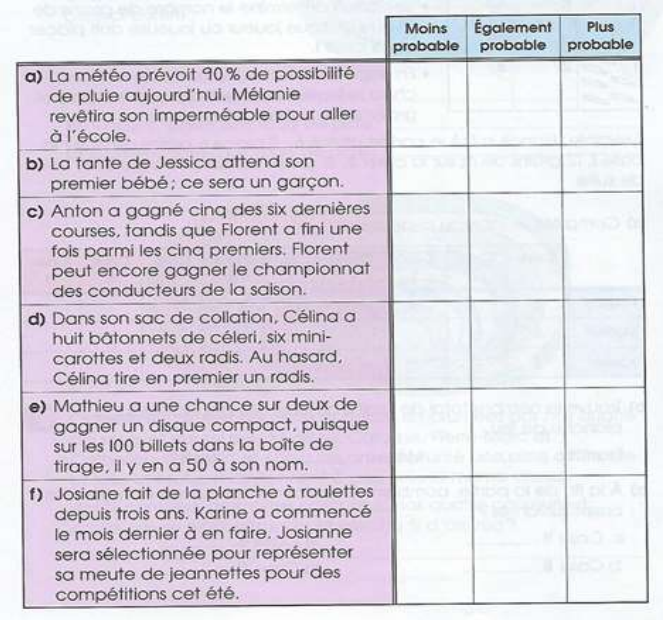


Figure 2 *– Exemple de tâche de dénombrement*

Tâches de dénombrement des cas possibles. Des tâches inscrites dans l'approche théorique ne requièrent pas directement le calcul d'une probabilité théorique, mais entrainent plutôt un dénombrement des cas possibles à travers une représentation liée à des contraintes. La figure 2 illustre un tel exemple de tâche proposée en 2e année (1er cycle). Dans un contexte lié à l'habillement, l'élève doit représenter les 12 façons possibles de s'habiller en choisissant une tuque, un manteau et des jambières. Pour soutenir l'élève dans la réalisation qualitative de cette tâche, un personnage est représenté 12 fois pour permettre de colorier les différents items et arriver à représenter exhaustivement l'ensemble des combinaisons possibles.

Tâches liées au vocabulaire. Des tâches portent explicitement sur le vocabulaire probabiliste. La figure 3 illustre un exemple de tâche de vocabulaire, proposée en 3e année (2e cycle). Dans cette tâche, l'élève doit lire les énoncés et déterminer s'il juge l'évènement aléatoire « moins probable », « également probable » ou « plus probable ». Ces expressions, qui visent à soutenir une réflexion qualitative sur les évènements et leur probabilité théorique, font partie de la douzaine de termes composant le lexique probabiliste mis de l'avant dans le PFEQ. Remarquons que les évènements sont inscrits dans des contextes de la vie quotidienne de l'enfant (par exemple la météorologie, une naissance, etc.), probablement pour aider l'enfant à développer son raisonnement probabiliste en référant à des éléments familiers.



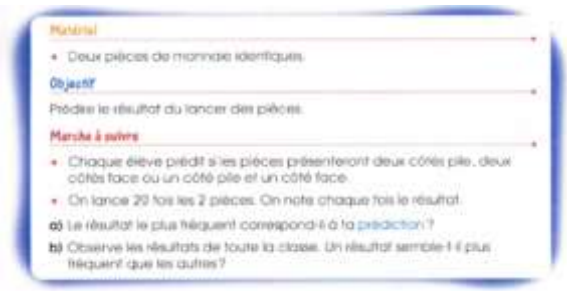
	Moins probable	Également probable	Plus probable
a) La météo prévoit 90 % de possibilité de pluie aujourd'hui. Mélanie revêtira son imperméable pour aller à l'école.			
b) La tante de Jessica attend son premier bébé ; ce sera un garçon.			
c) Anton a gagné cinq des six dernières courses, tandis que Florent a fini une fois parmi les cinq premiers. Florent peut encore gagner le championnat des conducteurs de la saison.			
d) Dans son sac de collation, Célina a huit bâtonnets de céleri, six mini-carottes et deux radis. Au hasard, Célina tire en premier un radis.			
e) Mathieu a une chance sur deux de gagner un disque compact, puisque sur les 100 billets dans la boîte de tirage, il y en a 50 à son nom.			
f) Josiane fait de la planche à roulettes depuis trois ans. Karine a commencé le mois dernier à en faire. Josianne sera sélectionnée pour représenter sa meute de jeannettes pour des compétitions cet été.			

Figure 3 *– Exemple de tâche de vocabulaire*

3. Les tâches probabilistes inscrites dans l'approche fréquentielle

Parmi les tâches probabilistes proposées dans la ressource, 11 % des tâches sont inscrites uniquement dans l'approche fréquentielle. Deux types de tâches inscrites dans cette approche ressortent de notre analyse.

Tâches avec des essais à réaliser. Des tâches commandent de réaliser des essais pour réfléchir à la probabilité d'un ou de plusieurs évènements aléatoires. La figure 4 illustre un tel exemple de tâche proposée en 3^{e} année (2^{e} cycle). L'élève doit y lancer 20 fois une paire de pièces de monnaie identiques après avoir formulé une prédiction quant à l'évènement le plus probable parmi les trois résultats pouvant être obtenus (pile-pile, face-face et pile-face). Les résultats des essais doivent être notés pour que l'élève puisse comparer sa prédiction avec le résultat ayant été obtenu le plus souvent dans les 20 essais. Enfin, les résultats de la classe doivent être combinés pour vérifier quel type de résultat a été obtenu le plus fréquemment. Il est possible de croire que cette mise en commun, qui provoque une importante augmentation de la taille de l'échantillon, permettra à l'élève de constater que le résultat le plus fréquent est du type pile-face, car il peut être obtenu avec pile-face ou face-pile en tenant compte de l'ordre. Ceci amène l'idée que les trois types de résultats ne sont pas équiprobables.



Matériel

- Deux pièces de monnaie identiques.

Objectif

Prédire le résultat du lancer des pièces.

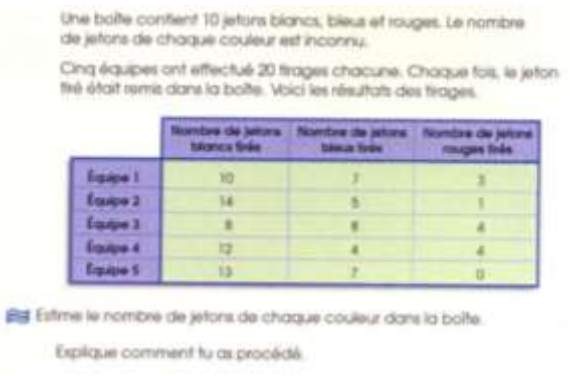
Marche à suivre

- Chaque élève prédit si les pièces présenteront deux côtés pile, deux côtés face ou un côté pile et un côté face.
- On lance 20 fois les 2 pièces. On note chaque fois le résultat.

a) Le résultat le plus fréquent correspond-il à la prédiction ?

b) Observe les résultats de toute la classe. Un résultat semble-t-il plus fréquent que les autres ?

Figure 4 *– Exemple de tâche demandant la réalisation d'essais*



Une boîte contient 10 jetons blancs, bleus et rouges. Le nombre de jetons de chaque couleur est inconnu.

Cinq équipes ont effectué 20 tirages chacune. Chaque fois, le jeton tiré était remis dans la boîte. Voici les résultats des tirages.

	Nombre de jetons blancs tirés	Nombre de jetons bleus tirés	Nombre de jetons rouges tirés
Équipe 1	10	7	3
Équipe 2	14	5	1
Équipe 3	8	8	4
Équipe 4	12	4	4
Équipe 5	13	7	0

Estime le nombre de jetons de chaque couleur dans la boîte.

Explique comment tu as procédé.

Figure 5 *– Exemple de tâche présentant des essais déjà réalisés*

Tâches avec des essais déjà réalisés. Des tâches demandent de réfléchir à la probabilité d'un ou de plusieurs évènements aléatoires à partir d'un échantillon d'essais déjà réalisés. La figure 5 illustre un exemple de tâche présentant des essais déjà réalisés, proposés en 6e année (3e cycle). Dans un contexte de tirage de jetons avec remise, on présente à l'élève les résultats des 20 tirages réalisés par chacune des 5 équipes en mentionnant le nombre de jetons blancs, bleus et rouges tirés. On demande alors à l'élève d'estimer le nombre de jetons de chaque couleur que contient le sac, ce qui demande de prendre en considération la variabilité des résultats et de dégager les valeurs autour desquelles les fréquences relatives semblent graviter.

4. Les tâches probabilistes ouvrant sur une articulation des approches

Seulement 13 tâches analysées (10 %) ouvrent explicitement sur une articulation des approches fréquentielle et théorique. La figure 6 illustre un exemple de tâche proposée en 6e année (3e cycle) qui ouvre sur une telle articulation. En utilisant une paire de dés à six faces, les élèves doivent faire 30 lancers et noter les sommes obtenues, puis tracer un diagramme à bandes pour représenter leurs résultats. Ils doivent ensuite combiner leurs résultats avec ceux des autres élèves, puis tracer un nouveau diagramme à bandes pour représenter les résultats de toute la classe. Enfin, ils doivent déterminer le diagramme qui présente des résultats qui se rapprochent le plus des probabilités théoriques de la situation.

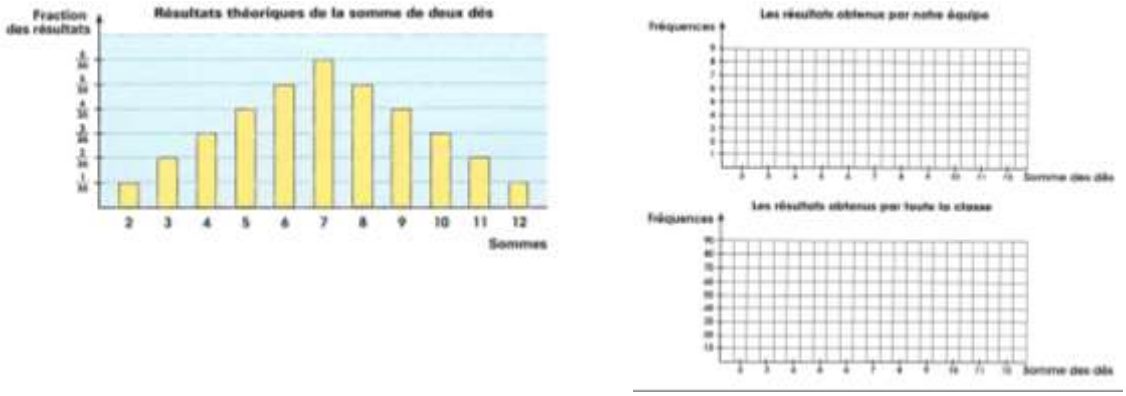


Figure 6 *– Exemple de tâche ouvrant sur une articulation des approches*

Cette tâche, qui commande la réalisation d'essais et leur comparaison avec les probabilités théoriques, permet de provoquer une tension entre les approches fréquentielle et théorique. Elle est très structurée, alors que le nombre d'essais et le type de représentation sont prescrits. De plus, les probabilités théoriques sont fournies *a priori* aux élèves, ce qui leur épargne la nécessité de les calculer et les amène simplement à les comparer aux fréquences relatives qui émergent des essais réalisés. Il est probable que l'exercice de mise en commun, qui devrait permettre de réduire la variabilité des données en augmentant la taille de l'échantillon, permette à l'élève de constater que les fréquences relatives issues de l'échantillon d'ensemble seront plus proches des probabilités théoriques que celles issues des résultats individuels.

V. REMARQUES CONCLUSIVES

Dans notre analyse des caractéristiques didactiques des tâches probabilistes proposées dans la ressource ciblée, la majorité des tâches (55 %) se trouvent uniquement inscrites dans l'approche théorique et une faible part des tâches (11 %) est uniquement inscrite dans l'approche fréquentielle. De plus, rares sont les tâches (10 %) qui ouvrent explicitement sur

une articulation de ces deux approches, ce qui nous apparait comme une occasion ratée d'enrichir l'expérience d'apprentissage des probabilités. Ainsi, se retrouvant devant le défi que représente cette articulation et ne rencontrant que peu d'occasions explicites de la réaliser au fil de la ressource, les enseignants pourraient intuitivement se limiter à une juxtaposition de ces approches en cohérence avec l'alternance des tâches respectivement inscrites dans l'une ou l'autre des approches. Même si l'articulation de ces approches est souhaitable, elle constitue un important défi didactique pour les enseignants (Martin et Theis, 2016). En effet, l'approche fréquentielle implique une variabilité dans la fréquence ou dans les résultats observables d'un échantillon d'essais à l'autre, tandis que dans l'approche théorique, une même situation dans de mêmes conditions entraine toujours la (seule) probabilité théorique. Ces ancrages épistémologiques distincts qui caractérisent ces approches impliquent des logiques et des manières de faire qui sont différentes, ce qui nécessite un changement de posture chez l'enseignant pour réaliser une véritable articulation.

Comme cela a été suggéré par Lebrun *et al.* (2006), le manuel scolaire peut guider les pratiques enseignantes. Il est donc possible que les pratiques d'enseignement des probabilités des enseignants soient influencées par une ressource comme celle que nous avons ciblée, alors que celle-ci dicterait la nature et les caractéristiques de l'expérience d'apprentissage des probabilités offerte aux élèves. La ressource pourrait donc, comme le laissent entendre Lebrun et Niclot (2009), influencer les situations d'apprentissage offertes aux élèves et même jouer sur la manière dont les élèves apprennent. L'expérience d'apprentissage des probabilités offerte aux élèves se trouverait surtout inscrite dans l'approche théorique si la ressource utilisée par l'enseignant se trouve majoritairement inscrite dans cette approche et que peu d'ouverture semble faite pour une articulation avec l'approche fréquentielle. Ceci s'avérerait cohérent avec le constat fait par Nilsson et Eckert (2016) à l'effet qu'au primaire, l'enseignement des probabilités se fait souvent surtout dans l'approche théorique. Pour raffiner nos constats, il serait pertinent d'analyser l'évolution par année scolaire du savoir en jeu dans les tâches probabilistes de la ressource. En réfléchissant à l'organisation des caractéristiques didactiques des tâches composant l'expérience d'apprentissage des probabilités offerte aux élèves dans la ressource, nous pourrions réfléchir à la progression des tâches probabilistes en cohérence avec leur inscription dans les approches probabilistes et avec leur ouverture à l'articulation.

Par ailleurs, en cohérence avec l'approche instrumentale de Rabardel (1995), nous avons étudié des caractéristiques de l'artefact et non pas l'instrument découlant de la genèse instrumentale qui s'opère lorsqu'un enseignant s'approprie et transforme l'artefact (manuel) pour l'exploiter comme un instrument dans sa pratique d'enseignement. Or, en écho au texte de cadrage du groupe de travail, il convient de se demander si la ressource serait utilisée par des enseignants telle qu'elle a été conçue et diffusée? Sous quelles conditions cette ressource pourrait-elle subir des modifications et des adaptations ? N'est-il pas probable que l'enseignant, doté d'une certaine « agentivité[2] didactique », utilise les tâches comme un point de départ de son enseignement des probabilités ? Ce faisant, il jouerait sur les variables didactiques des tâches pour les utiliser à ses propres fins, c'est-à-dire comme un moyen de réaliser ses intentions didactiques. L'utilisation effective de la ressource faite par l'enseignant pourrait expliquer (au moins en partie) l'écart entre les résultats de notre analyse et ceux de Martin et Thibault (2017). En effet, ces derniers ont rapporté dans leur enquête que la majorité des participants enseignant au primaire disaient surtout recourir à l'approche

[2] L'agentivité est la faculté d'action d'un individu, c'est-à-dire sa capacité à agir sur le monde, les choses, les êtres, à les transformer ou les influencer. Il s'agit donc de la perception de soi comme acteur du monde qui fait arriver des choses, et pas seulement comme quelqu'un à qui il arrive des choses.

fréquentielle dans leur enseignement des probabilités, alors que notre analyse des tâches probabilistes proposées dans la ressource montre que la plupart des tâches sont uniquement inscrites dans l'approche théorique. Ainsi, une tâche comme celle présentée à la figure 1, qui est *a priori* inscrite dans l'approche théorique, pourrait par exemple être modifiée pour s'inscrire (au moins partiellement) dans l'approche fréquentielle. Ainsi, plutôt que de demander à l'élève de calculer des probabilités théoriques dans un contexte fictif de tirage de cartes, l'enseignant pourrait amener l'élève à réaliser des tirages pour voir des fréquences relatives se stabiliser. L'enseignant pourrait même aller jusqu'à utiliser la tâche pour favoriser l'articulation des deux approches en proposant d'établir des relations entre les résultats théoriques et les essais réalisés. Nous croyons donc qu'il serait pertinent d'étudier le processus de genèse instrumentale associée à l'utilisation de la ressource par des enseignants, c'est-à-dire le processus par lequel ceux-ci s'approprient et transforment l'artefact pour l'exploiter comme un instrument dans leurs pratiques d'enseignement des probabilités.

RÉFÉRENCES

Côté, L. (2015). Analyse de contenu de manuels scolaires en lien avec l'enseignement-apprentissage de la notation exponentielle. Mémoire de maitrise en éducation, Université de Sherbrooke, Québec.

Batanero, C. (2014). Probability teaching and learning. Dans S. Lerman (dir.), Encyclopedia of mathematics education (p. 491‑496). Dordrecht (Pays-Bas): Springer.

Gouvernement du Québec (2006). Programme de formation de l'école québécoise : Éducation préscolaire - Enseignement primaire. Québec: Ministère de l'éducation.

Lebrun, M. (2006). Le manuel scolaire : un outil à multiples facettes. Québec : PUQ.

Lebrun, J., Bédard, J., Hasni, A., & Grenon, V. (2006). *Le matériel didactique en pédagogie : soutien à l'appropriation ou déterminant de l'intervention éducative.* Québec : PUL.

Lebrun, J., Niclot, D. (2009). Les manuels scolaires : réformes curriculaires, développement professionnel et apprentissages des élèves. Revue des sciences de l'éducation, 35(2), 7–14.

Martin, V., Theis, L. (2016). L'articulation des perspectives fréquentielle et théorique dans l'enseignement des probabilités : regard sur un changement de posture chez un enseignant du primaire. Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et de la technologie, 16(4), 1-14.

Martin, V., Thibault, M. (2016). Regards québécois sur sept décennies de recherche liée à l'apprentissage et à l'enseignement des probabilités. Annales de didactiques et de sciences cognitives, 21, 79‑116.

Martin, V., Thibault, M. (2017). Enquête sur les pratiques déclarées d'enseignement des probabilités au primaire et au secondaire au Québec: esquisse d'un portrait statistique. Actes du Colloque du Groupe de didactique des mathématiques du Québec. Montréal.

Mary, C., Theis, L. (2010). Implicites dans la tâche mathématique : les décalages entre les activités potentielles, attendues et effective chez l'élève. Actes du Colloque du Groupe de didactique des mathématiques du Québec (p. 171-181). Moncton.

Nilsson, P., Eckert, A. (2016). Interactive experimentation in probability - opportunities, challenges and needs of research. Actes du «Thirtheenth International Congress on Mathematical Education, Hambourg, Allemagne.

Prodromou, T. (2012). Connecting experimental probability and theoretical probability. ZDM Mathematics Education, 44(7), 855-868.

Rabardel, P. (1995). Les hommes et les technologies; approche cognitive des instruments contemporains. Paris, Armand Colin.

LA « FICHE D'OBSERVATION D'UN FAIT DIDACTIQUE », UNE RESSOURCE DANS LE TRAVAIL COLLABORATIF PROFESSEURS/CHERCHEURS

MERCIER[*] Alain –QUILIO[**] Serge

Résumé – Un dispositif permettant aux professeurs de « rendre compte d'une observation qui a étonné l'observateur » est devenu, dans un LéA (Lieu d'éducation Associé à l'Institut Français de l'Education), entre une École d'Application et un laboratoire de recherche, le moyen d'observation indispensable au travail collaboratif et au développement d'une expérience professionnelle partagée permettant de mettre au point des enseignements fiables et robustes. Un cas sera présenté, en exemple des productions du groupe.

Mots-clefs : Fiche d'observation d'un fait, analyse ascendante de la transposition, expérience professionnelle des professeurs, production collaborative de ressources.

Abstract – A device allowing professors to 'report a surprising observation for the observer' has become an observation tool usefull for the collaborative work of researchers and teachers from the LeA St. Charles School and for the development of a shared professionnal experience, allowing the design of reliable and solid teaching. An example of the productions of the group will be presented.

Keywords : Observation device of a didactic fact, ascendant analysis of didactic transposition, professional content knowledge of teachers, collaborative production of teaching resources.

I. PROLEGOMENES

Je ne suis pas content des traductions lamentables de Brousseau et en particulier des non-traductions comme celle du terme "milieu". Cela suppose en effet que personne n'y ait pensé en anglais alors que le terme existe de toute éternité en français...

Comme je n'y crois pas je cherche et je trouve... en écologie, l'équivalent d'une situation est un écosystème, et la théorie écologique d'un écosystème c'est qu'il offre des *niches* pour des populations. Si donc l'on considère qu'une situation offre une niche pour des connaissances et des savoirs c'est à dire d'abord pour des actions (qui sont les observables manifestant des connaissances) alors, *les actions sont les effets d'une mobilisation des ressources de la niche*. Et justement le terme anglais est celui-là. Et les ressources que l'on mobilise, c'est celles que fournit le milieu ou plus précisément la niche, qui est le système des ressources disponibles dans la situation. Ainsi, *le milieu* d'une situation didactique c'est… *les ressources de l'élève* dans la situation. Quand aux ressources du professeur, c'est bien sûr l'autre face de la question.

Mais si l'on travaille sur la situation du professeur et qu'on pense que le milieu c'est pour l'action ce qu'on pourrait appeler un *sociosystème, social et cognitif*, un sociosystème orienté vers la mobilisation et la production de savoirs lorsqu'il est didactique. Il y a donc dans le milieu trois types d'objets :

- un ensemble de moyens matériels qui fait sens en appelant des actions (*settlement*),
- l'ensemble des actions appelées (*setting*),
- l'ensemble des règles et principes auxquelles ces actions conviennent (*covenant*).

[*] Institut Français de l'Education, ENS-Lyon – France – alain.mercier@ens-lyon.fr
[**] ESPE de Nice – France – serge.quilio@gmail.com.

Ainsi *avec un milieu il y a un contrat*, et la paire [milieu, contrat] décrit une situation. Le professeur met en place ces éléments de manière à ce que l'ensemble fasse pour l'élève *un espace de jeu* (d'action dite libre, mais de fait organisée par le sociosystème), ce qui lui permet d'orienter l'action des élèves vers le savoir. Car les élèves vont mobiliser dans leur jeu les ressources que le professeur a mises à leur disposition et qui vont leur faire rencontrer leur ignorance : la nécessité de savoir et les moyens d'agir à partir de ce qu'ils savent, en rusant avec les ressources qui leur sembleront « naturelles ». Ils auront donc appris dans un jeu d'action (ou situations). Nous dirons alors que toutes les situations portent un jeu organisant l'action en proposant à la fois un « setting » et un « settlement » organisés par un « covenant » : un sociosystème ouvrant sur la production de réponses : connaissances personnelles et des savoirs partagés.

Quant aux ressources du professeur, si elles sont utiles elles définissent elles aussi un milieu social et cognitif pour son action ;:on peut étendre la notion au jeu du professeur avec le jeu des élèves. Tels sont les prolégomènes à ce qui va suivre maintenant et qui a trait au professeur et à une intervention sur le milieu de son action, par la collaboration instituée d'un collectif de professeurs avec des chercheurs.

II. LE TRAVAIL COLLABORATIF PROFESSEURS/CHERCHEURS

A la création de l'Institut Français de l'Education (IFé), l'option des autorités a été d'arrêter la « recherche fondamentale sur l'enseignement » au profit de travaux pouvant produire des résultats utiles à plus court terme. C'est ainsi que l'idée d'associer des établissements à des équipes de chercheurs autour d'un projet commun a été formalisée sous l'acronyme « LéA » pour « Lieu d'éducation Associé (à l'IFé) ». Pour les personnels de l'équipe Apprentissage, Didactique, Education et Formation, à Marseille, qui relevaient de l'IFé et travaillaient en didactique des mathématiques, cette idée a permis la réalisation d'un projet ancien : reprendre les travaux de Brousseau à l'École Michelet, afin d'éprouver les contraintes auxquelles ils avaient satisfait et d'apprécier leur valeur générique (Quilio and Mercier 2010). La proximité géographique d'une École d'Application, restée intacte vingt ans après la suppression des Écoles Normales d'Instituteurs, et dont le directeur était membre de l'équipe de recherche, a facilité les contacts. Les premiers travaux internationaux sur les « lesson studies » (Winsløw 2012) nous engageaient sur cette voie ; l'école Saint-Charles est devenue le premier des LéA.

1. Le LéA « Saint-Charles »

L'idée était d'engager tous les professeurs de l'école autour de l'un d'eux, en profitant du fait que leur statut de « Maîtres Formateurs » leur donnait du temps pour observer et se réunir. Les premiers travaux prirent pour *ressource* les travaux d'ingénierie du COREM[1] pour l'école associée, et portèrent donc sur la réplication, en CE1, du travail de Brousseau sur la soustraction puis, l'année suivante, sur la réplication en CM1 du travail sur la multiplication. Mais, malgré la présence d'observateurs dans les classes de « l'expérimentation », il s'avérait impossible au groupe de comprendre les difficultés précises rencontrées par les professeurs, et de mettre à profit les explications et les observations faites par les chercheurs.

Il fallut donc imaginer un moyen pour que chacun des acteurs puisse apprendre des autres et former une expérience partagée des problèmes rencontrés. Mais les chercheurs ayant

[1] Centre pour l'Observation et la Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques. Il fut dirigé par Guy Brousseau, puis Marie-Hélène Salin.

observé que les propositions de Brousseau et son équipe n'étaient plus adaptées aux connaissances des élèves d'aujourd'hui, il fallait aussi renoncer à l'ingénierie initiale. L'école Saint-Charles avait l'aval de l'IFE et une convention, passée entre l'Inspection Académique des Bouches du Rhône et l'Université de Provence, instituait la coopération, mais son efficacité demandait le moyen d'engager personnel les personnes dans une action commune. Nous avons alors décidé de produire ensemble un texte d'enseignement permettant à une équipe de professeurs, impliqués dans une collaboration avec une équipe de recherche en didactique, la réplication de l'enseignement que nous allions produire : *une ressource pour les professeurs, et les conditions de son usage*. Nous étions engagés dans un projet orthogonal à la production d'ingénieries à vocation phénoménotechnique qui était la norme en didactique depuis Brousseau. Notre projet était nouveau, bien que porté par l'idée ancienne (Mercier, Lemoyne, and Rouchier 2001) d'un *génie didactique* produit sous le contrôle des utilisateurs comme des théories disponibles. Malgré les connaissances didactiques des professeurs IMF de l'école, qui étaient utiles pour mettre au point les séquences d'enseignement, il nous fallait aussi *une ressource pour l'observation* capable d'engager la formation d'une pensée commune sur les problèmes rencontrés en pratique, de produire des observations dont tous puissent

- faire l'analyse, chacun de son point de vue,
- et partager l'analyse afin de faire évoluer les moyens d'enseignement.

C'est cette ressource et ses conditions d'usage que nous présentons ici.

2. Le principe d'apprentissage réciproque

La nécessité de réussir une coopération sur le long terme pour réaliser un projet ambitieux a conduit à un travail sur les enjeux de chacune des instances engagées, professeur formateurs d'un côté, chercheurs de l'autre. Pour les premiers, il s'agissait d'interroger leur légitimité de maîtres experts recevant de jeunes stagiaires afin de leur montrer un enseignement exemplaire. Pour les seconds, il s'agissait d'interroger la pertinence de leurs idées sur l'enseignement des mathématiques et sur le contenu des situations qui avaient fondé la Théorie des Situations Didactiques, (TSD) (Brousseau et al. 1997).

Le groupe décida alors de mettre en œuvre un « principe d'apprentissage réciproque » selon lequel les difficultés de mise en œuvre rencontrées par les professeurs montraient aux chercheurs des insuffisances dans la compréhension de situations apparemment bien décrites, et les difficultés des chercheurs à décrire *a priori* les situations proposées montraient aux professeurs les insuffisances des théories didactiques face à la complexité des problèmes pratiques. Chacun avait donc à apprendre des autres.

3. La suspension du jugement, condition de la production de faits d'observation

Les observations rapportées oralement par les chercheurs-observateurs comme par les observateurs-professeurs apparaissaient biaisées par le fait qu'elles portaient cette idée : j'observe que le professeur qui a pris telle décision aurait pu décider autrement (sous-entendu mieux, plus efficacement). Cela n'est pas acceptable dans un groupe de travail fondé sur le principe d'une égale légitimité des participants à apporter des éléments d'analyse et des réponses pratiques aux questions que pose l'intention d'enseigner un savoir donné. Les participants voulaient bénéficier de ce que (Mercier et al. 2001) ont appelé « le génie didactique » des professeurs, leur capacité à inventer des moyens d'enseignement, tout autant que du génie didactique des didacticiens, pour obtenir des moyens robustes dont on pourrait rendre compte de l'efficacité.

Il devenait donc indispensable, comme cela avait été le cas naguère (Mercier and Salin 1988), de comprendre les contraintes du système de décisions à l'œuvre dans la situation observée et de suspendre le jugement immédiat de tout acteur potentiel sur une action qu'il aurait pu conduire. La mise à distance du jugement devait être produite par un dispositif *ad hoc*, un *appareil d'observation* qui orienterait le regard de tout observateur sur ce que nous avons appelé *un fait advenu dans un système didactique* (Professeur, Élève, savoir). Cet appareil devrait donc donner à observer des actions du professeur ou des élèves en situation, relativement à un enjeu de l'enseignement. Ces observations seraient considérées comme *des traces* à pister, parce qu'elles ne correspondraient pas aux attentes venues d'un fonctionnement ordinaire du système observé et qu'elles auraient ainsi attiré l'attention de l'observateur. Récoltées, ces traces attesteraient de *faits*, qualifiés de *didactiques* après qu'elles aient été interprétées comme les effets d'une institution sur le rapport d'un élève, d'un groupe d'élèves, ou d'un professeur, à un enjeu de l'enseignement ou à un apprentissage.

Cet appareil est devenu indispensable à notre travail collaboratif de production et d'étude de leçons, puisqu'il nous permet de produire, aujourd'hui encore, les *faits didactiques* qui sont les objets de notre travail commun. Yves Chevallard l'avait utilisé au début des années 1980, lorsque la didactique naissante faisait référence à la clinique médicale : il est inspiré des notes d'observation cliniques des médecins du XIXe, lorsque toute la profession médicale collectait des faits d'observation relatifs au développement des maladies identifiées et aux traitements capables d'en changer l'évolution. Cet effort collectif avait permis au corps médical d'observer au-delà des seuls patients regroupés dans les cliniques hospitalières et de mettre en place la sémiologie qui permettent d'observer des traces du fonctionnement d'un corps, d'être surpris de certaines variations et d'en faire des symptômes en attribuant un dysfonctionnement au porteur de ces symptômes, de suivre les effets d'un traitement..

Pour nous aussi, didacticiens praticiens et chercheurs travaillant en collaboration sur un temps long, les faits d'observation « clinique »[2] attesteront à la fois des lois de fonctionnement et des dysfonctionnements du système didactique observé et sur lequel nous prétendons intervenir en professionnels de cet objet. Nous présentons donc une telle fiche et la manière dont, dans le groupe de travail collaboratif, le fait initial devient la trace d'un symptôme de dysfonctionnement du système didactique observé et le départ d'une série de décisions conduisant à l'évolution de nos propositions.

Ces fiches d'observation suspendent l'analyse immédiate des chercheurs et les jugements des professeurs, en reportant ces gestes à la prochaine rencontre de travail. *Ce sont des artefacts qui produisent les faits didactiques de notre travail collaboratif d'observation clinique*, ces faits constituent les éléments matériels du milieu de la collaboration engagée, le collectif de travail institué par un contrat entre l'IFE et l'Académie Aix-Marseille en constitue le lieu cognitif, comme nous allons le montrer maintenant sur un cas exemplaire (Figure 1).

FICHE D'OBSERVATION D'UN FAIT DIDACTIQUE EN MATHEMATIQUES
Qualité de l'observateur : enseignant observant et enregistrant avec une caméra vidéo **Conditions de l'observation** : Ecole d'application Lieu : Gardanne, CP, classe expérimentant les situations de la progression produite par le LéA Saint-Charles

[2] Initialement clinique signifie : « au lit où vit le malade, couché » mais aujourd'hui et en didactique le terme désigne les observations « sur les lieux mêmes de la vie didactique des élèves des professeurs et des savoirs, en classe ».

Date : 15 mai 2014
Durée approximative : 1 heure
Matériaux recueillis : enregistrement vidéo

Intitulé officiel de l'activité : Module 9 séance 5 de la progression ACE : addition, technique opératoire

Acteurs : quelques élèves

Matériel utilisé : ardoises

Description du fait didactique

Contexte, déroulement succinct :

Le professeur demande aux élèves d'utiliser la notation en d et u (par exemple, 35=3d5u) pour calculer des soustractions simples. Mais les élèves ont l'habitude de poser eux-mêmes des questions qu'ils s'essaient à résoudre, dans « le journal du nombre ».

Episode choisi : (en rapport à un fait qui a étonné ou questionné l'observateur)

Une élève de CP avancée joue de la notation en d et u pour développer par elle-même l'addition en colonnes avec retenues : 34 + 47 donne 7 dizaines et 11 unités,



Image 1 – 34+47 = 7d (plus) 11u

Grâce à l'ardoise, l'élève efface le 1 qui dénote la dizaine dans la somme 11, et le reporte dans la colonne des dizaines (entouré d'un rond), corrigeant le 7d 11u en 7d 01u, puis en enlevant le « 0 » inutile.



Image 2 –« 11u = 1d (plus) 1u… »
L'élève va donc proposer le résultat, 8d 1u.

Nature du questionnement engendré par cette observation :
Le professeur n'a rien vu, mais l'élève a *démontré* la technique de retenue !

Figure 1 *- Une fiche d'observation utilisée dans le travail collaboratif*

Deux questions donc : Ce qu'a fait l'élève correspond-t-il à une démonstration ? Pourquoi le professeur n'a-t-il rien vu de cela ?

III. DES FAITS AUX PHENOMENES

La répétition de l'observation d'un fait semblable devient, dans ces conditions, un élément important qui signifie pour tous « un problème devant être étudié profondément ». Mais on ne comprendrait rien à la ressource ainsi créée si l'on ne disait pas que ces faits d'observation

sont rapportés l'écologie didactique des contraintes que le fait révèle. Cela demande une « analyse ascendante de la transposition didactique », qui correspond à ce que Chevallard, dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD), attribue à une analyse des niveaux de détermination[3]. En effet, l'observation est celle du professeur-observateur qui enregistre en vidéo[4]. Mais, dans la même classe, l'enregistrement montre que *d'autres élèves se sont engagés dans un calcul délicat* : ils dénombrent de très nombreux cubes, en formant des dizaines. Il y a onze dizaines et cela pose un problème inattendu, dont le chercheur qui visionne la vidéo va rendre compte. Le fait didactique observé ainsi, après coup, par le chercheur alerté sur le fait initial, sera rapproché de l'observation initiale. L'ensemble va permettre de montrer un phénomène venu des choix d'enseignement réalisés, et de prendre une décision partagée dans l'expérience commune des professeurs et des chercheurs du LéA. L'enseignement ainsi construit devient l'œuvre commune, il fait sens pour tous et il devient possible d'en rendre compte : c'est, en tous cas, ce que nous avons fait aujourd'hui (Mercier and Quilio 2018). L'observation initiale ayant été partagée, d'autres arrivent, sur cette même question. Voici un extrait d'une autre fiche (figure 2).

Au moment d'exposer le travail réalisé, l'élève au tableau écrit : 10 d 14 u (10 barres de 10 cubes et encore 14 cubes). Un autre élève E' s'écrie (à l'intention : *Pourquoi c'est allé jusqu'à 10 d ? Tu nous avais dit qu'on pouvait pas faire plus que 10.*

P : (écrit) 10 d 14 u et rappelle: « décomposer 14 en 10+4 ».

E : (écrit) 10 d 14 u

$$\underline{10 + 4\ u}$$

$$110 + 4$$

P : Tu dois faire voir tous les10 dans 10 d 14 u ».

E : (écrit) 10 d+10+4 = 114.

P : Ce n'est pas comme 10 d 4 u=104 précédent.

E : (écrit) 10+10+10+10+4+10+10+10+10+10+10+10 autour de la décomposition 10+4. Il poursuit = 100.

P : rappelle qu'il s'agit d'écrire en dizaines et unités et qu'il faut « compter le nombre de 10 qu'il y a ».

E (compte et écrit) 11 d… puis se ravise et écrit 10 d 5 u puis dessous 105 u et enfin 105. « Le 1 je l'ai mis avec le 4 pour faire 5 parce que le 11 ça dépasse 10 »

Figure 2 - *L'analyse ascendante de la transposition, appuyée sur l'identification d'un phénomène observé*

Comme on le voit ici, la règle enseignée pour la manipulation de d et u a tué la théorie de la numération au lieu de la développer et de la montrer. Et quand le professeur se trouve avoir besoin du secours de l'outil théorique, voilà qu'il l'a perdu lui aussi, il n'arrive qu'à indiquer l'existence d'une erreur, sans pouvoir montrer son origine comme le ferait un professeur sûr des savoirs qu'il peut appeler. Du coup, l'élève invente des manipulations dénuées de sens.

Pourquoi ? Nous pensons que la notation qui était une description de la numération décimale de position : 78 =7 d 8 u ou 7 dizaines *plus* 8 unités, venue de ce que d et u ont été introduits comme « le système d'unités de compte pour les quantités d'objets d'une collection, qui se comptent par unités » est devenu le support d'une procédure implicite mais contractuelle. Elle a en effet servi dans plusieurs exercices : *« on écrit le nombre en indiquant d et u et à la fin on enlève ces indications pour avoir le résultat. »*

[3] « Un fait didactique est un fait social total : il engage une société comme totalité – si peu intégrée soit-elle. En vérité, les forces de liaison que fait travailler – en les renforçant en tel point, en les diminuant en tel autre – tel épisode didactique vont au-delà même de la société, jusqu'au niveau de la civilisation : tout geste didactique participe ainsi, en puissance au moins, je veux dire en droit, de ce que Freud a nommé le travail de la civilisation (die Kulturarbeit). » (Chevallard 2007)

[4] Nous avons montré ailleurs (Forest and Mercier 2012) que les enregistrements vidéo aussi peuvent être des ressources dans la formation des professeurs, nous les utilisons ici comme ressources dans le travail collaboratif.

Mais la règle n'est pas intelligible à l'aide seule de d et u, il faut y ajouter le fait que *les nombres de d et de u doivent être inférieurs à dix,* comme un élève le fait remarquer. Cette condition de validité n'est qu'une « règle de bon comportement » qui ne permet pas à tous les élèves de régler la question des retenues ! Elle ne vient pas d'une étude de la numération décimale de position. Le traitement de 11 d demande la traduction de cette notation en 1 c 1 d, mais la notation de cent n'a pas été donnée, parce que l'idée de noter les groupements n'est pas devenue systématique ! Cela, un élève s'en est indigné, mais le professeur, peu habitué à s'aventurer ainsi très au-delà de ce qui a été enseigné, parce que d'ordinaire ce ne sont pas les élèves qui proposent des problèmes, n'a pas imaginé qu'il s'engageait dans une passe délicate, dont seule l'élève observée aurait pu le sortir, s'il l'avait repérée.

Comment faire avec 11 d 4 u ? La seule possibilité qui ne s'appuierait ni sur l'introduction de « c » ni sur une écriture en colonnes serait d'avoir écrit que 1 d = 1 d + 0 u = 1×10 + 0×1, ce qui est hors de portée en CP. La notation des « unités de compte » n'est donc pas sans dangers, et ces dangers n'avaient pas été anticipés par le travail en commun. Le débat collectif des professeurs et des chercheurs produit une correction immédiate des consignes relatives a cette écriture : « Il faut enseigner que 12 = 10+2 mais *si on écrit cela avec les unités de compte* on doit écrire : *12 u = 10 u+2 u = 1 d+2 u,* afin de pouvoir faire jouer cette notation dans des calculs.

En remontant un peu encore dans les mathématiques, professeurs et chercheurs se rappellent qu'un nombre s'écrit comme *un polynôme arithmétique de base 10*, ce qui permet de ne garder que les coefficients si le polynôme est réduit. En revanche, ils décident la notation 12 = 1 d 2 u est dangereuse et dorénavant cette connaissance fait partie de l'expérience professionnelle des professeurs engagés dans le travail. On peut maintenant travailler l'écriture 11 d + 4 u en la transformant : 11 d + 4 u = 10 d + 1 d + 4 u, ce qui aurait pu conduire à 1014 si l'on avait oublié que 10 d = 1 c tout comme 10 u = 1 d, et si l'on n'avait pas noté que les comptes d'unités de compte différentes s'ajoutent !

Ainsi, d et u doivent être enseignées comme rien de plus qu'*un moyen d'interpréter les écritures décimales en nommant « les unités du compte »,* sachant donc qu'un nombre est toujours « un résultat de compte » même quand on ne l'écrit pas en le faisant suivre d'une indication d'unité. Ce moyen est commode pour contrôler des opérations en colonnes et des retenues, mais il est parfois lourd dans les calculs en ligne et sera rapidement abandonné pour laisser place à la formation des pratiques expertes que nous connaissons tous.

IV. CE QUE NOTRE RESSOURCE PERMET DE PRODUIRE

Pour enseigner, il faut que le professeur dispose d'une théorie des mathématiques que font les élèves, et cette théorie n'est pas dans les livres de mathématiques ! De nombreuses recherches ont montré ces phénomènes, en particulier dans le cadre de la TAD comme dans celui du PCK (Pedagogical Content Knowledge) dont nous avons montré l'intérêt (Silvy et al., 2013). Mais si la TAD s'est développée dans un ESPE (École Supérieure Professionnelle de l'Education) et a été utilisée pour la formation des professeurs, le PCK décrit une propriété de la culture professionnelle des professeurs d'un système d'enseignement : elle oppose par exemple professeurs des États-Unis d'Amérique et professeurs de République Populaire de Chine. Comment former un savoir professionnel des professeurs qui leur permette de coopérer avec des chercheurs, pour produire un meilleur enseignement, c'est la question que nous avons abordée de front.

Le travail coopératif des professeurs et des chercheurs ne peut produire des manières nouvelles stables, fondées sur une expérience professionnelle solide, que si ces groupes

engagent la production de leurs moyens d'enseignement en observant les issues de leurs choix. Ils ne peuvent le faire seulement par une analyse *a priori* des effets qu'ils espèrent et des décisions à prendre. Il leur faut réussir à observer les effets de leurs choix et à apprendre ensemble ce qu'il est possible de faire en observant les élèves et les questions qu'ils posent. La forme d'enseignement que nous développons ainsi n'est pas figée, ce n'est pas le produit d'un calcul d'ingénieur, c'est l'invention et la mise au point, avec les élèves, de questions sur lesquelles une classe peut enquêter. Mais la compréhension de ce qu'il se passe, qui ne peut être complètement prévu, demande à la fois :

- l'observation sans jugement que permet la « fiche d'observation »,
- le travail d'analyse ascendante de la transposition qui permet de comprendre au fond les problèmes rencontrés et transformant les faits recueillis en phénomènes didactiques,
- et la recherche d'une intervention efficace permettant de traiter les difficultés identifiées.

L'organisation des conditions scolaires de l'*enquête des élèves «* accompagnée » par un professeur sous le contrôle collectif de ses collègues et de chercheurs est une manière absolument nouvelle de réaliser, dans le monde francophone, les « lesson studies » (Winsløw 2012) qui ont donné en Asie et ailleurs les résultats que l'on sait. Nous n'avons pas, en France, les moyens de ce dispositif, qui demande la disponibilité des professeurs dans l'établissement sur tout le temps de leur travail. Les nombreux professeurs avec qui nous coopérons aujourd'hui, bien au-delà de l'école initiale, ne se rencontrent qu'une fois par semaine pour la mise en place d'un enseignement nouveau, puis une fois par mois seulement. Mais ils peuvent éprouver pour eux-mêmes les effets du travail, parce qu'ils apprennent à suivre les effets de leur enseignement et qu'ils peuvent, lorsqu'ils sont surpris par ce qu'ils observent, verser une observation au compte du groupe et alerter une équipe large dont l'expertise est assurée. La *fiche d'observation*, qui bien sûr doit être utilisée dans le cadre d'un travail collaboratif large, dans le temps long de l'observation clinique d'un système qui dure et d'une histoire qui se produit de nouveau d'année en année, est devenue un moyen incontournable de la production des ressources de cette collaboration.

Nous avons pu viabiliser pour les élèves le parcours de leur étude des nombres comme mesures de grandeurs, et leur offrir des domaines de pratiques à explorer dans des situations en classe (ici, les opérations sur les nombres que permet la numération décimale de position) et des outils théoriques pour définir collectivement des techniques efficaces (ici, les algorithmes des calculs). C'est un savoir d'expérience que les professeurs avec qui nous collaborons ont acquis. Ils l'ont fait grâce à l'observation des enseignements que des professeurs ont préparés en équipes. Ce travail, sur plus de dix ans, par des équipes de tous les niveaux de l'enseignement élémentaire, nous a conduits, chercheurs, à une vision nouvelle des problèmes actuels de cet enseignement. Les comptes rendus des enquêtes sur les mathématiques à l'œuvre dans les faits didactiques que nous avons analysés sont maintenant eux aussi des ressources que nous avons validées avec les professeurs. Nous avons pu oser ainsi des choix radicaux pour l'enseignement des mathématiques (Mercier et Quilio, 2018) dont l'efficacité, en particulier dans les zones où l'enseignement est reconnu difficile, commence à être statistiquement démontrée par des travaux indépendants.

Devant le développement rapide du nombre des classes qui suivent nos propositions d'enseignement aujourd'hui (plusieurs centaines) nous voulons maintenant implémenter un site où la « *Fiche d'Observation d'un Fait Didactique qui a étonné l'observateur* » est, en ligne, la ressource permettant d'engager des interactions que nous espérons viables et utiles : ce sera à l'adresse <http://www.mathematiques-elementaires-pour-lecole>.

REFERENCES

Brousseau, G., N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, and V. Warfield. 1997. *Theory of Didactical Situations in Mathematics: Didactique Des Mathématiques, 1970-1990*. Kluwer academic publishers.

Chevallard, Yves. 2007. "Éducation & didactique : une tension essentielle." *Éducation et didactique* 1(vol 1-n°1):9–28.

Forest, D. and A. Mercier. 2012. "Classroom Video Data and Resources for Teaching: Some Thoughts on Teacher Education." *From Text to'Lived'Resources* 215–230.

Mercier, A., G. Lemoyne, and A. Rouchier. 2001. *Le Génie Didactique: Usages et Mésusages Des Théories de L'enseignement*. Bruxelles: De Boeck Université.

Mercier, Alain and Serge Quilio. 2018. *Mathématiques Élémentaires Pour L'école, Nombres, Mesures, Calculs*. Presses Universitaires de Rennes (PUR). Rennes.

Mercier, Alain and Marie Hélène Salin. 1988. "L'analyse a Priori, Outil Pour L'observation." in *Actes de l'Université d'Eté "didactique."* Olivet: IREM D'Orléans.

Quilio, Serge and Alain Mercier. 2010."Une phase du jeu du trésor dans une zone de discrimination positive: La mise en œuvre d'un collectif de pensée en moyenne section de maternelle dans la réalisation d'un code pour la désignation d'une collection d'objets." Presented at the Colloque AREF, September 15, UNIGE, Genève.

Winsløw, Carl. 2012. "A Comparative Perspective on Teacher Collaboration: The Cases of Lesson Study in Japan and of Multidisciplinary Teaching in Denmark." Pp. 291–304 in *From Text to'Lived'Resources*. Springer.

ANALYSE DE LA STRUCTURE D'UN SYSTEME DE RESSOURCES, ARTICULATION ENTRE ASPECT DYNAMIQUE ET ASPECT STATIQUE : CAS D'UNE ENSEIGNANTE DE MATHEMATIQUE

SAYAH* Karima

Résumé – Nous approchons le système de ressources de l'enseignante en nous appuyant sur des concepts déjà présents dans l'approche documentaire (Gueudet et Trouche, 2009). Nous mettons en évidence des aspects statiques et des aspects dynamiques de ce système. Nous proposons un modèle d'articulation entre le système de ressources et des composants de leur schèmes (Vergnaud, 1991), notamment les règles d'action et les invariants opératoires.

Mots-clefs : Approche documentaire, système de ressources, approche systémique, schème.

Abstract – An integration of the resources of Sésamath took place in the mathematical workshop of an Algerian college by a former. We are approaching the teacher's resource system based on concepts already present in the documentary approach (Gueudet and Trouche, 2009). We consider static and dynamic aspects of this resource system. We propose a model of articulation between the system of resources and their schemes's components (Vergnaud, 1991), specially the rules of action and the operating invariants.

Keywords : Documentary approach, resource system , systemic approach, scheme.

I. INTRODUCTION

Notre travail de recherche se situe à un moment particulier de réforme du système éducatif algérien, marqué par une approche par les compétences et par une introduction des TICE à tous les niveaux. Notre questionnement prend sa source dans les difficultés suscitées par la mise en œuvre de cette réforme, à la fois du point de vue de l'approche par compétences et du point de vue de l'intégration des TICE, en particulier pour l'enseignement des mathématiques.

Nous nous intéressons aux ressources de Sésamath[1], leur adaptation et leur traduction dans un milieu arabophone. Nous analyserons leur impact sur le système de ressources de l'enseignant de mathématiques et sur son développement professionnel.

Nous considérons dans cette communication plus particulièrement la représentation schématique du système de ressources de Nadine, enseignante stagiaire de mathématiques en langue arabe, pour les niveaux de sixième et cinquième année au collège Imtiyaz. Cette représentation schématique de son système de ressources fait à la fois l'objet d'analyse du schème « sélection, adaptation et traduction d'une ressource de Sésamath » et du schème « mise en oeuvre d'une ressource de Sésamath ». Pour l'analyse de son système de ressources, notre méthode s'inspire de l'analyse systémique (Le Moigne, 1977) et porte sur deux volets : une analyse statique qui consiste à définir les éléments constitutifs du système et leurs relations et sous l'aspect fonctionnel ou dynamique marqué par des règles d'actions et des événements qui agissent sur ces constituants.

II. CADRE THEORIQUE

Dans cette section, nous présentons les cadres théoriques mobilisés, nous présentons d'abord l'approche documentaire du didactique, articulée avec la notion de schème de

* Université Claude Bernard Lyon 1 – France – lasmars@yahoo.fr

[1] Sésamath, association de professeurs de mathématiques qui développe et diffuse des ressources pour l'enseignement des mathématiques :http://www.sesamath.net/

Vergnaud (1996). Nous poursuivons par le modèle de connaissance de Shulman (1986) où nous inférons les connaissances pédagogiques aux invariants opératoires.

Approche documentaire du didactique

Gueudet & Trouche (2008) portent une attention particulière à l'activité professorale et à la documentation des professeurs de mathématiques, en particulier du point de vue de leur travail documentaire collectif et de leur développement professionnel. Ils considèrent que le travail du professeur se nourrit des ressources disponibles dans le collectif pour construire ce qui est nécessaire pour faire son métier. Ils considèrent aussi que le professeur, dans son travail documentaire, dispose d'un ensemble de ressources de diverses natures qui vont donner naissance, pour une classe de situations donnée, au cours d'une genèse documentaire, à un document. Le travail documentaire du professeur est considéré comme le moteur d'une genèse documentaire, qui développe une nouvelle ressource (composée d'un ensemble de ressources sélectionnées, modifiées, recombinées). Toute genèse documentaire, pour un professeur, est porteuse de développement professionnel. En ce sens que l'enseignant acquiert de nouveaux savoirs, de nouvelles compétences et de nouvelles pratiques (Gueudet, & Trouche, 2008). L'approche documentaire est un cadre théorique pertinent pour comprendre le travail du professeur autour de ses ressources voire autour de son système de ressources.

Ressource-document versus système de ressources- système documentaire

L'approche documentaire distingue la ressource du document. Par ressource nous désignons tous les éléments de l'ensemble (matériels, numériques, cahiers et manuels de Sésamath). Ces éléments constituent les ingrédients, des « input » dont l'enseignant a besoin pour créer son propre document, son « Output ». Cette conception se déroule dans un cycle fini pouvant faire retour aux actions et/ou ressources « les input » .

Les ressources constituent le disponible pour l'enseignant, il s'en approprie, les transforme, les adapte pour construire son document. Contrairement à la ressource, le document a un objectif d'enseignement, une intention didactique, pour traiter une classe de situations adaptée à un contexte (exemple intégrer des activités de géométrie dynamique à l'aide d'un logiciel dédié). Pédauque (2006) définit un document par son usage, son intention et par l'information qu'il porte :

> « l'affaire du document n'est ni sa matière, ni sa forme, mais son usage..... Le document n'est ni un texte, ni une image, ni l'image d'un texte. De même que nous avons appris que tout objet pouvait, selon le regard qu'on porte sur lui, devenir ou non objet de contemplation esthétique, de même que n'importe quel objet peut, selon la valeur qu'on lui apporte, devenir un objet patrimonial, tout peut devenir document. Un document n'est pas n'importe quoi, mais n'importe quoi peut le devenir, dès lors qu'il apporte une information, établit une preuve, bref, dès qu'il fait autorité ». (p. 12)

Au cours de son travail documentaire, l'enseignant dispose d'une variété de ressources matérielles et/ou numériques, combinées dans des contextes différents qui donnent naissance à un/des document(s) au cours d'une genèse documentaire. Le document issu de cette transformation doit répondre à une intention didactique, aux besoins de l'enseignant, à des règles organisatrices de son usage. A ce niveau nous pouvons conclure que le document est la fusion de ressources recombinées et de son schème d'utilisation (Gueudet et Trouche 2008, p. 59).

Ces mêmes auteurs distinguent deux parties dans le schème, une partie observable et une partie invisible. La partie observable des schèmes sont les régularités dans les activités des enseignants dans le cadre de divers contextes, relevant de la même classe de situations

désignée par ces auteurs par le nom « usages ». La partie invisible représente essentiellement les connaissances du professeur.

Document = Ressources recombinées + schème d'utilisation (Gueudet et Trouche 2008, p. 59).

Dans cet article, nous nous focalisons sur les travaux de Vergnaud pour élargir la notion de schème. Cette notion a été empruntée à la philosophie de Kant puis développée par Piaget dans ses recherches sur le développement cognitif chez l'enfant et Vergnaud (1990), en l'articulant à la notion de situation : « c'est une organisation invariante de l'activité pour une classe de situations données » (Vergnaud, 1991, p. 36). Vergnaud (1996) décrit ce concept «schème » et l'englobe autour de ses constituants : son but, des sous buts et des anticipations, des règles d'actions de prises d'informations et de contrôles, des invariants opératoires (concept-en-acte et théorème-en-acte) et des possibilités d'inférences, ce qu'il généralise par l'organisation de l'activité pour une classe de situations donnée. Nous décrivons dans la section suivante ces éléments pour une meilleure compréhension du concept « schème ».

Définir un schème revient donc à :

> « Observer une activité en situation et regarder comment cette activité est engendrée au fur et à mesure, selon les actions précédentes, selon les prises d'informations et les contrôles, selon les branchements possibles de l'activité. Et il faut pour cela dénicher les concepts-en-actes et les théorèmes-en-actes qui sont alors mobilisés» (Vergnaud, 2009). (P. 8)

Connaissance, modèle de connaissances et développement professionnel des enseignants de mathématiques

Le modèle de Shulman (1986) analyse les connaissances de l'enseignant plus explicitement en tenant compte de divers aspects institutionnels, culturels et sociaux. Nous avons tenté de présenter cette structure de connaissances de manière à refléter l'imbrication des connaissances requises pour l'enseignant de mathématiques. L'inclusion des connaissances spécifiques à la discipline mathématique reflète bien les « Pedagogical Content Knowledge » (PCK). Les connaissances spécifiques aux comportements des élèves requièrent de la part de l'enseignant des connaissances sur les finalités et les buts (quels élèves former en mathématiques, et pour quel(s) besoin(s) de la société) et des connaissances pédagogiques générales (la psychologie d'apprentissage).

Nous optons pour le modèle de Shulman (1986) pour analyser les connaissances professionnelles de l'enseignant de mathématiques où nous considérons le concept de PCK, comme outil clé pour approcher les invariants opératoires des schèmes mobilisés par l'enseignant pour une classe de situation.

III. METHODOLOGIE

Gueudet et Trouche (2008) ont développé une méthode pour l'analyse du travail documentaire de l'enseignant, basée sur un suivi continu de ses activités sur une durée significative mais principalement axée sur le principe de la réflexivité du recueil de données. L'enseignant est considéré comme acteur principal dans ce recueil et dans son retour réflexif sur ses propres pratiques. Nous nous inspirons de cette méthodologie pour le suivi et l'analyse du travail documentaire de nos terrains expérimentaux.

Nous soulignons que l'investigation réflexive est centrée sur l'aspect individuel du travail documentaire. Dans le cadre de notre recherche nous nous intéressons aux pratiques collectives des enseignants et nous devons donc penser à une méthodologie qui incite à une

réflexivité sur les activités communautaire (Sabra, 2011). Nous considérons les composantes collectives de ce travail et nous prenons en compte les systèmes d'activités de l'enseignant de mathématiques dans les diverses communautés.

Notre méthodologie se base donc sur un principe réflexif de recueil de ressources utilisées ou produites par l'enseignant au cours de son travail documentaire, ressources individuelles ou communautaires, il convient donc de recueillir de manière aussi étendue que possible ses ressources pendant la durée du suivi. De part la contrainte de mener des interviews et des observations à domicile chez l'enseignant pour le suivi documentaire, nous nous attachons donc à élaborer une méthodologie adaptée où nous envisageons de collecter les ressources matérielles des professeurs : celles qu'ils ont utilisées et celles qu'ils ont élaborées au fil de leur travail. Nous désignons :

- par ressource primaire toute ressource institutionnelle telles que les manuel scolaire, les guides d'accompagnement ;
- par ressource mère, toute ressource de départ que l'enseignant mobilise pour préparer un enseignement donné (Hammoud, 2012). Nous retenons cette définition mais nous considérons que ces ressources sont optionnelles et ne sont pas institutionnelles (ressources du ministère). Elles le sont via d'autres institutions ce qui caractérise les ressources fiables d'autres ressources disponibles dans le système de ressources de l'enseignant. Nous prenons comme exemple les ressources de Sésamath, les manuels étrangers, les résultats de recherches en didactique, etc. ;
- par ressource intermédiaire, toute ressource nouvellement créée, modifiée, recombinée, ajustée dans un contexte individuel et/ou collectif et qui évolue dynamiquement dans le système. Cette évolution se poursuit et nous considérons que l'évolution de la ressource intermédiaire dans le temps, tend vers la stabilité pour donner naissance à une ressource stabilisée ;
- enfin par ressource en veille, toute ressource inactive sur une période, dans le sens où elles ne subit aucune action.

Nous suivons donc, toutes les ressources matérielles engagées dans les étapes du cycle de vie d'un document, nous suivons aussi toutes les activités autour de ces ressources. Notre méthodologie se base donc sur un principe de connectivité lié aux contraintes soit institutionnelles soit techniques soit personnelles.

Analyser l'évolution du système de ressources de l'enseignant demande une régularité et une continuité d'observables dans le temps et dans les lieux. Nous suivons les enseignants sur une ou deux années durant lesquelles nous observons les effets de l'intégration des ressources de Sésamath sur le temps long. On veut choisir un collectif qui vient de les intégrer et un collectif qui les a intégrées depuis longtemps. Nous suivons l'intégration de ces ressources dans sa langue d'origine dans une classe non institutionnelle, puis traduite en langue arabe dans une classe institutionnelle. Il s'agit de faire un suivi de longue durée au sein de communautés diverses sur le travail documentaire des enseignants, un suivi en présentiel (réunion, formation, observation de séance de travail, etc.).

Notons enfin que nos principes méthodologiques pour le recueil de données prennent aussi en considération la récupération des informations en cas d'entretiens non réalisables à domicile.

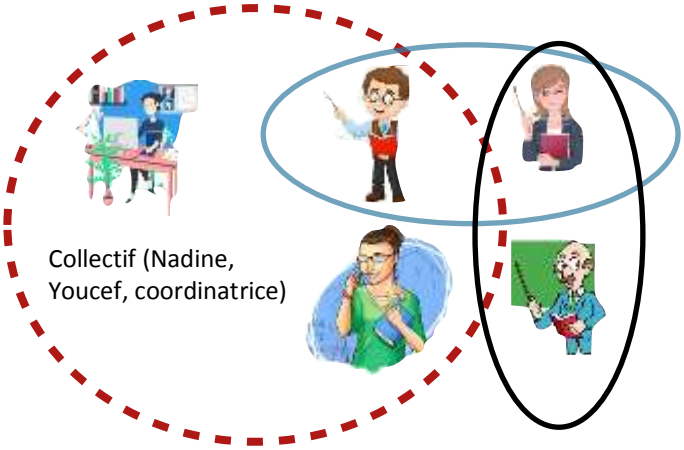


Figure 1*- Collectifs suivis*

Nous présentons dans cet article les données relatives au suivi sur deux années de Nadine, un suivi individuel et communautaire (voir Figure 1) les pointillés en rouge représentent le collectif Nadine, Youcef et la coordinatrice. En effet Nadine est membre de la communauté Cop(Sésamath) pour la sélection, l'adaptation et la traduction de ressources de Sésamath dans les classes institutionnelles. Nous avons suivi son travail documentaire à la maison et au collège dans ses classes institutionnelles, ses interactions avec le collectif où nous avons axé notre regard sur les étapes d'appropriation des ressources de Sésamath à différents moments. Durant cette période, nous mettons en évidence l'évolution de son système, et nous analysons l'appropriation de ressources de Sésamath. Pour l'analyse de son système de ressources, nous nous sommes inspirées de l'approche systémique (Le Moigne, 1977) pour structurer la partie statique du dit système. Pour comprendre sa dynamique, nous inférons à la fois les données issues des différents entretiens, des représentations schématiques de son système de ressources (RSSR), au début et à la fin de chaque année et enfin des observations vidéos pour définir les éléments des schèmes pour les différentes classes de situations données.

La section suivant présente quelques résultats de notre analyse.

IV. QUELQUES RESULTATS

Nous nous basons sur les observations de travail du collectif, les entretiens et les représentations schématiques du système de ressources de Nadine, élaborées à différentes étapes de suivi.

Nos entretiens ont ciblé des données à recueillir se rapportant à nos questions de recherches : système de ressources, travail collectif, approche par les compétences et enfin usage des ressources de Sésamath (voir tableau 1). Pour suivre l'évolution de l'occurrence de ces thèmes durant la période (année 1 et année 2) de son suivi, nous avons traduit, codé et analysé les transcriptions en vue d'une analyse quantitative par thème et sous-thèmes que nous avons analysé à l'aide du logiciel RQDA2. Cette analyse a été croisée avec l'analyse qualitative des différentes RSSRs.

[2] RQDA : is a R package for Qualitative Data Analysis, Logiciel libre pour l'analyse de données qualitative, www. http://rqda.r-forge.r-project.org/

Thèmes	Codes	Sous-thèmes	Sous-code
Système de ressources	**SRES**		
		Ces ressources primaires sont jugées insuffisantes pour enseigner par les compétences	RPAP
		Les ressources de Sésamath sont évoquées comme ressources critiques	RPCR
Travail collectif	**WCOL**		
		Travail collectif évoqué comme aide pour enseigner par les compétences	WAPC
		Evoqué comme proposition sur les activités nécessaires pour réaliser la traduction et l'adaptation des cahiers Sésamath	WSES
Approche par les compétences dans l'enseignement des mathématiques	**APC**		
		En quoi le travail autour des ressources Sésamath peut appuyer l'enseignement par les compétences	APCS
Usage des ressources Sésamath			RSES
		Les ressources sésamath évoquées comme ressource motivant un travail collectif	SESW
		Usage des ressources Sésamath évoquées comme ressources complémentaire qui comble le manque de certaine notion dans les ressources primaires	SESC

Tableau 1*- Extrait de la grille d'analyse des entretiens*

Le système de ressources de Nadine est perçu comme un monde composé de monde d'objets (ensemble de ressources matérielles tels que les manuels scolaires, guide, ressources de Sésamath) et de relation entre ces objets qui représentent des interactions. Un système est un ensemble d'éléments en interactions dynamiques, organisé en fonction d'un but. Le Moigne (1977) le définit plus explicitement : est quelque chose (identifiable); qui fait quelque chose(s) (activité (s)) et qui est doté d'une structure; qui évolue dans le temps, dans quelque chose (environnement) et pour quelques choses (finalité(s)). Pour structurer le système de ressources de Nadine, nous nous sommes basés sur les différents entretiens qu'on a croisé avec ses différentes RSSRs.

Pour ce faire, Nadine utilise des ressources primaires institutionnelles (le guide et la progression), elle fait aussi appel à des ressources mères (telles que les ressources de Sésamath) d'autres ressources stabilisées (anciens sujets), mais son système dispose aussi de ressource en veille tels que des livres parascolaires.

Nous avons observé Nadine lors de son travail dans le collectif pour sélectionner, adapter et traduire les ressources de Sésamath, puis la mise en oeuvre de ces ressources produites dans ses classes institutionnelles. Nous nous intéressons à l'analyse du schème « Sélection, adaptation, et traduction de la ressource de Sésamath ». Cette analyse porte sur deux niveaux d'abstraction (Nanci & al., 2001), le niveau conceptuel des ressources répondant aux

questions quoi ? et pourquoi ? et le niveau organisationnel répondant aux questions qui ? fait quoi ? quand ? et comment. Pour notre cas le schème « adaptation et traduction d'une ressource de Sésamath » a été analysé sur la base de la représentation schématique, sur l'observation des séances de travail avec la coordinatrice et les collègues et sur les entretiens réalisés à différents moments de son suivi. Ce schème doit répondre à quatre critères (Vergnaud, 1991) : le but et ses sous buts, les invariants opératoires, les règles d'action et les inférences. Les règles d'action engendrent l'activité de Nadine au fur et à mesure du déroulement de la séquence d'interaction avec ses collègues et la coordinatrice, ces règles sont des règles d'actions, de prises d'information ou de contrôles.

Quant aux invariants opératoires ils représentent les concepts en acte ou les théorèmes en actes identifiés par ces PCKs durant les différentes étapes de son suivi. Par exemple lors de son entretien Nadine rajoute : « je sais que mes élèves sont plus motivés à travailler sur MathenPoche », un théorème en acte pourra être formulé par : « Les ressources de Sésamath suscitent plus de motivation chez les élèves ». Un autre exemple pourra découler de la visite guidée de sa représentation schématique finale où Nadine rajoute : « ici j'ai rajouté les ressources de Sésamath, activités, QCMs, vu que certains cours de nos manuels ne traitent pas toutes les notions, …», nous déduisons un autre théorème en acte : « les ressources de Sésamath sont évoquées comme ressources complémentaires et d'appui pour combler au manque dans les ressources institutionnelles » (voir Tableau 2

Schème : sélection d'une ressource de Sésamath pour l'intégrer dans sa classe institutionnelle	
But :intégrer et s'approprier les ressources de Sésamath dans le programme institutionnel, dans sa séance de « *TD Maths* »	Sous but 1 : diversifier ses ressources Sous but 2 : remédier aux difficultés de ses élèves
Anticipation	Enrichissement de son système de ressources
Invariants opératoires	Concept en acte : - Proximité des programmes Algériens et Français ; - Motivation de ses élèves ; - Position des notions manquantes ou réduites dans les programmes des classes supérieures (futures). Théorèmes en acte : - Les ressources Sésamath suscitent plus de motivation chez les élèves ; - L'usage des ressources de Sésamath est lié à la diversification des activités ; - L'usage des ressources de Sésamath peut combler au manque de ressources ; - Mettre les élèves dans des situations problèmes, les poussent à réfléchir ; - Les situations problèmes font partie intégrante des ressources de Sésamath ; - L'usage des ressources de Sésamath est lié à la proximité de programme entre ces ressources et le programme institutionnel.
Inférences et règles d'actions	- Si les membres de la communauté décident pour une ressource alors je l'adopte. - Si je sélectionne une ressource alors mes élèves n'auront pas de difficultés à la comprendre ; - Ou je pousserai mes élèves à se rappeler des notions préalablement enseignées durant l'année en cours ou durant les années antérieures.

Tableau 2*- Eléments du schème «sélection d'une ressource de Sésamath»*

V. CONCLUSION

Nous nous sommes appropriés l'approche documentaire à laquelle nous avons tenté d'apporter notre contribution, pour éclairer le travail documentaire de l'enseignant, suivre l'évolution de son système de ressources et de son développement professionnel mais surtout comprendre la dynamique de son système de ressources. Nous avons proposé une taxonomie des ressources selon leurs fonctions dans le système de ressources : ressource mère, primaire, intermédiaire et stabilisée. Nous avons attribué le concept de ressource en veille, pour toute autre ressource présente dans le système mais temporairement inactive. Durant son suivi, le système de ressources de Nadine, initialement analysé autour de ressources primaires, intermédiaires et peu de ressources stabilisées se voit évoluer vers un système de ressources différencié par leurs rôles. Les PCKs, identifiés au fil de son suivi, nous ont permis de définir des théorèmes en acte et de définir les règles de fonctionnement de son système de ressources.

REFERENCES

Gueudet G., & Trouche L. (2008). Du travail documentaire des enseignants: genèses, collectifs, communautés. Le cas des mathématiques. Education et Didactique, 2, 7-33.

Gueudet G., & Trouche L. (2009). Conception et usages de ressources pour et par les professeurs : développement associatif et développement professionnel. *Dossiers De l'Ingénierie Educative 65, 78-82.*

Hammoud R. (2012). *Le*
travail collectif des professeurs en chimie comme levier pour la mise en œuvre de démarches d'investigation et le développement des connaissances professionnelles. Contribution au développement de l'approche documentaire du didactique. Thèse de Doctorat. Université Lyon1. Consulté le 11/01/2013 à http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/76/29/64/PDF/ThA_se_Rim-version_finale.pdf

Le Moigne J. (1977). *La théorie du système général.* Paris : PUF.

Nanci D., B. Espinasse. Avec la collaboration de B. Cohen, J.C. Asselborn & H. Heckenroth (2001), *Ingénierie des systèmes d'information : merise deuxième génération.* Paris : Vuibert.

Pédauque R. T. (coll.) (2006). *Le document à la lumière du numérique*. Caen : C & F éditions.

Sabra, H. (2011). *Contribution à l'étude du travail documentaire des enseignants de mathématiques: les incidents comme révélateurs des rapports entre documentations individuelle et communautaire*. Thèse de Doctorat. Université Lyon 1. Consulté le 12/10/2013 à http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/76/85/08/PDF/These_Hussein_Sabra_07decembre2011.pdf.

Shulman L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher*, 15(2), 4-14.

Vergnaud G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques* 10(2.3), 133-170.

Vergnaud G. (1996). Vers une théorie intégrée de la représentation. In G.L. Baron et E. Bruillard (Eds.), Informatique et éducation: regards cognitifs, pédagogiques et sociaux. *Textes issus du séminaire Informatique et formation des enseignants.* Paris : INRP.

Vergnaud G. (2009). Le concept d'algorithme en psychologie: entretien réalisé par Nicolas Paratore. Consulté le 02/09/2017 à http://paratore-nicolas.com/articles/concept_algo-3.pdf

RESSOURCES PRODUITES ET DIFFUSEES PAR LA COPIRELEM POUR LA FORMATION DES PROFESSEURS DES ECOLES

EYSSERIC* Pierre

Résumé – Depuis bientôt un demi-siècle, la COPIRELEM produit régulièrement des ressources pour la formation des professeurs des écoles. Celles-ci sont diffusées sous forme numérique ou sous forme de documents papier. Concernant les apprentissages mathématiques pour les élèves de 3 à 11 ans, les ressources publiées au cours des dix dernières années portent notamment sur le nombre à l'école maternelle, des scénarios de formation en géométrie, la numération et le calcul mental.

Mots-clefs : nombre, géométrie, numération, calcul mental, formation.

Abstract – For nearly half a century, COPIRELEM regularly produces resources for the training of school teachers. These are disseminated by a support association, ARPEME, either in numerical form or in the form of paper documents. Concerning mathematical learning for students aged from 3 to 11, the resources published over the past ten years include the number in kindergarten, training scenarios in geometry, numeracy and mental computation.

Keywords: number, geometry, numeration, mental computation, training.

I. INTRODUCTION

L'objectif de la COPIRELEM (Commission Permanente des IREM pour l'Enseignement Élémentaire) est de faire progresser l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. Depuis plus de 45 ans, cette commission œuvre pour impulser, coordonner et diffuser, auprès des enseignants et de leurs formateurs, les travaux de recherche en didactique des mathématiques concernant l'école primaire. Ce travail se matérialise par des publications régulières diffusées par l'ARPEME[1], les plus connues étant les actes du colloque annuel de la COPIRELEM et les annales corrigées du CRPE[2]. Nous souhaitons ici valoriser d'autres ressources, plus spécifiquement à destination des enseignants et des formateurs, produites par les membres de cette commission au cours des dix dernières années.

Ces ressources naissent en réponse à des questions sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques que se posent aussi bien les formateurs que les enseignants. Nous mettons ici en évidence certains aspects relatifs à la conception et à l'usage de ces ressources, notamment pour tenter de répondre à quelques questions telles que : comment une ressource est-elle conçue pour répondre à un besoin ? comment l'usage d'une ressource peut-il contribuer au développement des praxéologies de son utilisateur (ici le formateur et l'enseignant) ?

II. CALCUL MENTAL A L'ECOLE PRIMAIRE, RESSOURCES ET FORMATION

Cette brochure est une réponse à la demande de formateurs de disposer d'activités de formation initiale et continue et de supports de synthèse pour amener les professeurs des écoles, novices et chevronnés, à comprendre l'intérêt du calcul mental en classe et leur donner les moyens de le mettre en œuvre.

* COPIRELEM – ESPE Aix Marseille Université – France – pierre.eysseric@univ-amu.fr

[1] Association pour l'élaboration et la diffusion de ressources pédagogiques sur l'enseignement des mathématiques à l'école

[2] Concours de Recrutement des Professeurs des Écoles

III. SCENARIO DE FORMATION SUR L'ENSEIGNEMENT DE LA NUMERATION

Cette brochure présente une situation d'homologie au cours de laquelle les formés (en formation initiale ou continue), engagés dans des activités transposées de celles d'élèves de cycle 2, peuvent faire émerger des difficultés d'apprentissages, des connaissances mathématiques et didactiques ainsi que des gestes professionnels (consigne, rôle de la manipulation pour construire le sens, explicitation des procédures, synthèses intermédiaires, modalités possibles de différenciation en classe, etc.). Ce travail de réflexion a aussi conduit la COPIRELEM à répondre à l'appel de la DGESCO[3] pour produire un parcours M@gistère portant sur l'enseignement de la numération.

IV. CARTE MENTALE DES SITUATIONS DE FORMATION EN GEOMETRIE

Dans une carte mentale construite à partir du logiciel Xmind, contenus d'enseignement et situations de formation sont mis en relation ; cette entrée par les situations de formation est complétée par des analyses de manuels, de productions d'élèves, de vidéos de classe, etc.

Diffusée depuis juin 2014 par téléchargement sur le site de l'ARPEME, cette ressource peut être complétée par chaque utilisateur, en fonction des besoins de formation. Objet d'ateliers lors des colloques COPIRELEM de 2013 et 2014, elle constitue une aide à la conception de modules de formation dans le domaine de la géométrie plane.

V. MALLETTE NOMBRE A L'ECOLE MATERNELLE

Il s'agit d'une mallette *numérique* de ressources pour l'apprentissage du nombre en MS et en GS, élaborée dans le cadre d'un projet COPIRELEM-CREAD-IFE soutenu par la DGESCO. Celui-ci a impliqué des équipes constituées d'enseignants de terrain, de formateurs et de chercheurs provenant de plusieurs académies. Ces ressources, organisées sous la forme d'une carte mentale sont disponibles en ligne (http://www.arpeme.fr/m2ep/). Ce travail a conduit la COPIRELEM à répondre à l'appel de la DGESCO pour produire un parcours M@gistère pour les formateurs (formation de formateurs) sur le contenu de cette mallette.

VI. CONCLUSION

Ces ressources sont nées de besoins exprimés soit par les formateurs, soit par l'institution. Elles sont présentées sous des formes favorisant leur adaptabilité et, dans une dialectique information-formation, elles peuvent ainsi contribuer à une évolution des pratiques professionnelles des enseignants comme des formateurs.

REFERENCES

COPIRELEM (2012) *Calcul mental à l'école primaire*. Ressources et formation, Paris : ARPEME.

COPIRELEM (2014) *Construction de module de formation : géométrie plane.* Ressources et formation, Paris : ARPEME. En téléchargement sur www.arpeme.fr.

COPIRELEM (2015) *Numération à l'école primaire. Un scénario de formation*. Ressources et formation, Paris : ARPEME.

[3] Direction Générale de l'Enseignement Scolaire

COPIRELEM (2015) *Mallette maternelle. La construction du nombre. R*essources et formation, Paris : ARPEME. En téléchargement sur www.arpeme.fr .

LA RESSOURCE COMME OBJETS-AVEC-LESQUELS-PENSER : EXEMPLE D'UN JEU MATHÉMATIQUE

HÉROUX[*] Sabrina et MAHEUX[**], Jean-Francois

Résumé – Un intérêt grandissant pour les ressources en didactique des mathématiques demande l'élaboration de cadres afin d'en conceptualiser le rôle et les effets chez les apprenants. Une approche qui semble avoir été peu explorée jusqu'ici se trouve dans les travaux de Papert (1981) qui met en évidence le concept d'objet-avec-lequel-penser[1]. Cette affiche présente l'idée de Papert et en offre une nouvelle interprétation dans le cadre d'un jeu mathématique vu comme une ressource.

Mots-clefs : Papert, Objet-avec-lequel-penser, Jeu mathématique

Abstract — The interest in mathematics education for resources requires the development of frameworks to conceptualize their role and effects. Papert's work (1981) puts forward the concept of object-to-think-with. This poster presents Papert's idea and its use to analyse a mathematical game as a resource.

Keywords: Papert, Object-to-think-with, Mathematical game

I. LES RESSOURCES COMME OBJETS-AVEC-LESQUELS-PENSER

L'intérêt grandissant pour les ressources demande l'élaboration de cadres afin d'en conceptualiser le rôle et les effets (e.g. Gueudet et Trouche, 2008). Celui de Rabardel (1995) par exemple met l'accent sur l'appropriation et la transformation de ressources par lesquelles on conçoit l'apprentissage en lien avec les modes opératoires prévus par le concepteur de l'outil. Dans cette approche, la ressource sépare (l'activité de) l'individu et l'objet (de cette activité), qui doivent être reliés par une intention : le « motif » de l'activité (Roth, 2007). Ce dernier point fait une nuance importante avec le regard posé sur les outils par Papert (1981). Papert attribue un rôle essentiel à la ressource qu'il qualifie d'inséparable de l'activité (e.g. mathématique), mais questionne implicitement l'idée de motif au sens de (Roth, 2007). Nous nous intéressons donc à l'exemple du jeu mathématique comme ressource.

Préoccupé de faire vivre aux enfants des expériences mathématiques sans une direction prédéterminée, Papert voit dans l'outil un objet-avec-lequel-penser qui est *contexte* pour l'activité *quelle qu'elle soit*. Pour Papert, l'outil est néanmoins porteur de « semences » favorisant l'émergence de certaines idées : sans avoir à devenir le sujet explicite de l'activité des enfants, ces idées peuvent s'intégrer à leur pensée par l'exposition au travail avec l'objet-avec-lequel-penser (e.g. Logo). Il caractérise donc ces objets en parlant de la manière dont ils permettent l'expérimentation autour des idées mathématiques et favorisent l'intuition. Il explique par contre que l'objet-avec-lequel-penser ne peut être réduit aux connaissances qu'il met potentiellement en jeu, ouvrant plutôt sur d'autres savoirs (e.g. mathématiques), et qu'il est aussi en relation avec l'expérience avec le monde de façon plus large.

II. LES JEUX COMME RESSOURCES

Nous proposons d'utiliser la notion d'objet-avec-lequel-penser pour examiner des jeux comme une ressource utilisée par l'enseignant. Voici l'exemple du jeu *Barrage* que nous avons expérimenté avec des élèves de 6-7 ans. Dans ce jeu, les joueurs doivent déposer des jetons sur la planche en essayant de bloquer l'adversaire. Dans la deuxième phase, on déplace ses jetons pour former des barrages et capturer les jetons de l'adversaire. Parmi les idées

[*] Université du Québec à Montréal – Canada – sabrina.heroux@gmail.com
[**] Université du Québec à Montréal – Canada – jfmaheux@mail.com
[1] Autre traduction possible de object-to-think-with

mathématiques au cœur de *Barrage* se trouvent des concepts liés à la combinatoire, le joueur devant considérer différents arrangements. En pratique, ces concepts interviennent implicitement et les joueurs procèdent généralement d'abord par essais-erreurs expérimentant de façon intuitive. On observe ensuite l'émergence de stratégies (e.g. la concentration des jetons) suggérant qu'un travail analytique sur les possibilités se fait bel et bien, qu'on pourrait modéliser par des graphes. En même temps, il est clair que *Barrage* ne peut être réduit à ces notions : par exemple, on distingue des stratégies offensives et défensives dont l'analyse sur le plan mathématique est complexe. De même, *Barrage* devient l'occasion d'un travail d'anticipation (penser plusieurs coups à l'avance, deviner les réactions de l'adversaire) qui déborde le travail purement mathématique, et font du jeu un contexte où s'exerce une activité qu'on pourrait dire en lien avec l'expérience du monde de façon plus large.

La notion d'objet-avec-lequel-penser nous invite à regarder les façons de faire et de penser qui émergent durant l'utilisation d'un jeu par des élèves. On peut voir quels sont les éléments du jeu et de son contexte qui donnent prise à ces idées et les manières dont un jeu donné, en problématise certains aspects. Le motif ludique de l'activité de jeu place les idées mathématiques au second plan, mais elles n'en demeurent pas moins présentes. Le jeu comme objet-avec-lequel-penser met en présence des notions en leur fournissant un contexte « naturel » dirait Papert (1981). S'agit-il d'un type particulier de ressource ?

III. ADDENDUM

La présentation de cette affiche a permis de soulever certains débats constructifs au sein du groupe de travail et ce dans les discussions tout au long de la semaine.

Tout d'abord, la proposition que je fais avec mon jeu mathématique comme une ressource du point de vue des élèves a fait réaliser une problématique émergente. En effet, une réflexion plus avancée s'impose sur ce qui peut distinguer une ressource pour l'enseignant d'une ressource pour les élèves et si l'on doit les séparer. Cette dichotomie n'a pas encore été résolue et pourrait faire l'objet d'une réflexion d'ici la prochaine rencontre.

Ensuite, le cadre théorique de Papert qui était utilisé dans l'affiche a permis de soulever une question sur les différents cadres que l'on peut utiliser pour parler des ressources. En effet, l'idée de ressource repose beaucoup sur les travaux de Gueudet et Trouche (2008) et Rabardel (1995) qui sont des assises théoriques présentent dans le groupe de travail. Toutefois, l'idée de ressources est apparue dans une certaine perspective et d'autres cadres peuvent être amenés pour enrichir le regard que le groupe de travail porte sur le concept. Toutefois, il n'est pas si évident de connecter les différentes théories ensemble et de faire dialoguer des perspectives différentes. Cette thématique suscite d'ailleurs l'attention de plusieurs chercheurs depuis plusieurs années.

Cette affiche a permis de présenter un nouveau point de vue, la ressource pour l'élève, avec un nouveau cadre théorique, celui de Papert. Des réflexions sont donc sur la table afin de poursuivre l'exploration de ce concept.

REFERENCES

Papert, S. (1981). *Jaillissement de l'esprit*. Québec : Flammarion.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies*. Armand Colin.

Gueudet, G., & Trouche, L. (2008). Du travail documentaire des enseignants : Genèses, collectifs, communautés. *Education et didactique*, 2 (3), 7-33.

Roth, W. M. (2007). On mediation: Toward a cultural-historical understanding. *Theory & Psychology*, 17 (5), 655–680.

PRESENTATION DE LA BASE PUBLIMATH

LANGUEREAU[*] Hombeline, GARDES[**] Marie-Line

Résumé – La base de données PUBLIMATH recense les publications destinées à la communauté mathématique (enseignants, enseignants-chercheurs, formateurs, professeurs stagiaires, etc). En avril 2019 il y a près de 29 000 fiches PUBLIMATH, dont environ 10 000 sont des fiches de documents disponibles en ligne. Nous proposons de présenter cette base, de montrer quelles sont les possibilités de recherche et de proposer aux participants de contribuer à l'alimentation de cette base.

Mots-clefs : diffusion de ressources, base de données, culture professionnelle, culture mathématique, IREM

Abstract – The PUBLIMATH database lists publications intended for the mathematical community. In April 2019 there are nearly 29,000 PUBLIMATH files, of which 10,000 are document cards available online. We propose to present this database, to show the possibilities of research and to propose to the participants to help develop this database.

Keywords: resource diffusion, database, professional culture, mathematical culture, IREM

I. PRESENTATION

PUBLIMATH est un moteur de recherche et une base de données, accessible gratuitement en ligne (http://publimath.irem.univ-mrs.fr/), référençant des publications sur l'enseignement, l'histoire et la popularisation des mathématiques. Elle contient notamment les publications des Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (IREM), de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (APMEP), des sociétés savantes (telles que la Société mathématique de France (SMF) ou la société de mathématiques appliquées et industrielles (SMAI)) mais également d'éditeurs privés (manuels, ouvrages ou revues). Elle est développée depuis 1996 par la Commission Inter-IREM (C2I) APMEP PUBLIMATH et pilotée par l'ADIREM[1] et l'APMEP, avec les soutiens de la Commission Française pour l'Enseignement des Mathématiques (CFEM) et de l'Association de Recherche en Didactique des Mathématiques (ARDM).

La base de données PUBLIMATH est née de la volonté de valoriser les publications des IREM dont la diffusion, malgré leur intérêt, restait confidentielle. Un groupe d'enseignants a alors réfléchi à l'informatisation des bibliothèques des IREM. Cela a donné naissance, en janvier 1997, à la première version de la base de données PUBLIMATH, référençant essentiellement les publications des IREM. Elle s'est ensuite enrichie au fil des années avec un référencement plus large de publications sur l'enseignement et la popularisation des mathématiques. Le 9 mars 2019, PUBLIMATH comptabilise 28 759 références, 10 788 sont des ressources disponibles en ligne. Les objectifs principaux de cette base sont de recueillir et de conserver les références de publications, sources des connaissances et des savoirs sur l'enseignement et la popularisation des mathématiques d'une part, et de contribuer à la documentation de l'enseignant de mathématiques et à sa culture professionnelle d'autre part.

II. CONTENU DE LA BASE DE DONNEES

Pour chaque publication référencée dans la base de données, une fiche bibliographique est créée comportant : les références bibliographiques classiques (titre, auteur, éditeur, type de la

[*] IREM – Université de Franche-Comté – France– hombeline.languereau@univ-fcomte.fr
[**] UCBL Lyon 1, ISCMJ, Université de Lyon – France – marie-line.gardes@univ-lyon1.fr
[1] Assemblée des Directeurs d'IREM

publication, langue), un résumé objectif et informatif, une liste de mots-clés et des informations spécifiques sur le public visé par l'article, le niveau scolaire et l'âge des élèves dont il peut être question dans l'article et éventuellement (pour les fiches caractérisées par le symbole @) un lien vers un site où le document est disponible en ligne, ou vers la Bibliothèque Numérique qui propose certains documents des IREM et de l'APMEP en version numérique et libre.

Notons que certains mots-clés font partie du glossaire. Il s'agit de notices d'informations (environ 3700) sur un mot-clé donnant une définition, des éléments de bibliographie, un lien vers la fiche d'un document de la base ainsi que des liens vers des sites externes permettant d'approfondir le sujet.

Cette base de données présente donc parmi ses spécificités : un référencement ciblé dans le domaine de l'enseignement, de la didactique, de l'histoire et de la popularisation des mathématiques, des références bibliographiques classiques et spécifiques, une recherche plein texte ainsi que par mots-clés, des documents numérisés et un glossaire.

III. CONCEPTION ET DIFFUSION DE LA BASE DE DONNEES

La conception et la diffusion de cette base est rendue possible par la diversité des fonctions et des compétences des membres de la CII PUBLIMATH qui est composée d'enseignants de niveaux primaire, secondaire et universitaire, de formateurs ESPE et d'enseignants-chercheurs en mathématiques et en didactique des mathématiques. Chacun apporte son expertise, technique ou scientifique et peut apporter sa contribution à toute fiche. Les tâches principales de conception et de diffusion consistent :

- à maintenir la base de données ;
- à actualiser certaines données (fiches, glossaires, documents numérisés) ;
- à enrichir la base de données en rédigeant et en éditant de nouvelles fiches bibliographiques et notices de glossaires ;
- à enrichir la base de données en numérisant les documents des IREM et de l'APMEP ;
- à communiquer dans des colloques.

A ces tâches, s'ajoutent des actions spécifiques en vue d'améliorer l'ergonomie de la base pour l'utilisateur. Par exemple, la page d'accueil a fait l'objet de remaniements récents afin que tout internaute ait directement accès à la bibliothèque numérique ainsi qu'aux formulaires de proposition de fiches. L'évolution des technologies amène à faire migrer la base de données sur de nouvelles machines, le développement de l'utilisation des smartphones amène les membres à réfléchir sur une version pour faciliter la consultation sur ces appareils. L'évolution de la base porte non seulement sur des aspects techniques mais aussi sur des aspects de fond. Actuellement, l'effort se porte sur la mise en place de l'ontologie conçue partir de celle de ZDM (Zentralblatt für Didaktik der Mathematik) et améliorée pour notre base depuis quelques années.

La présentation de la base PUBLIMATH dans le cadre EMF contribue à renforcer les liens avec la communauté mathématique, et en particulier didactique.

REFERENCES

Commission Inter-IREM-APMEP PUBLIMATH (2018). La base de données et la commission Publimath, *Bulletin de l'APMEP*, 525-526, p.154-160.

Groupe de travail 7 (GT7) Technologies pour l'enseignement et la formation

BILAN DU GROUPE DE TRAVAIL N°7
TECHNOLOGIES POUR L'ENSEIGNEMENT ET LA FORMATION

Responsables

SOURY-LAVERGNE[*] Sophie – VENANT[**] Fabienne

Correspondant CS

EMPRIN[*] Fabien

L'objectif initial de ce groupe de travail consacré aux technologies pour l'enseignement et la formation a été d'identifier les nouvelles problématiques ayant émergé depuis une dizaine d'années à propos de ces technologies numériques qui ne sont plus nouvelles mais suscitent toujours un questionnement vif dans la recherche francophone et des attentes fortes, en particulier de la part du terrain. En 2006, la conférence ICMI (Hoyles & Lagrange, 2010) faisait le point sur les questions de conception des technologies et sur ses usages dans les processus d'apprentissage, d'enseignement et de formation. En 2009, Michèle Artigue faisait le point sur l'influence des technologies sur l'enseignement des mathématiques, en mettant l'accent sur le fait qu'il fallait prendre en compte non seulement le contenu des enseignements mais aussi les pratiques (Artigue 2009).

Ainsi, le groupe de travail n°7, a voulu faire l'inventaire des approches théoriques développées et mobilisées au cours de la dernière décennie : quelles théorisations sont investies par les chercheurs et quels développements théoriques récents sont apparus ? En particulier, il s'est agit de prendre en compte à la fois les contenus enseignés et les pratiques des élèves, des enseignants, des formateurs et des chercheurs, qui se sont développées dans les domaines relatifs aux processus de conception de technologies, aux apprentissages avec les technologies, aux situations d'enseignement et aux processus de formation et de développement professionnel.

A partir des sept contributions retenues, cinq communications et deux affiches, et la participation de 22 personnes, chercheurs, enseignants, formateurs et étudiants aux cinq sessions, le groupe de travail n°7 a pu aborder : les processus de conceptions des technologies, les savoirs mathématiques en jeu, les situations d'apprentissages, l'évolution des pratiques des enseignants, de leur compétences professionnelles et les pratiques de formation.

I. QUESTIONS DE CONCEPTION DES TECHNOLOGIES ET DES SITUATIONS D'APPRENTISSAGE, D'EVALUATION ET FORMATION

A propos de la conception des technologies et des situations d'apprentissage, d'évaluation et formation, avec les micro-mondes (Healy & Kynigos 2010), un nombre important de logiciels et jeux existe maintenant dans l'objectif de faire apprendre des mathématiques (Soury-Lavergne & Maschietto 2015) (Ladel & Kortenkamp 2015) (Moyer-Packenham

[*] Institut Français de l'Éducation ENS de Lyon, S2HEP Université de Lyon, Université Grenoble Alpes – France – sophie.soury-lavergne@ens-lyon.fr
[**] UQAM – Canada – venant.fabienne@uqam.ca
[*] Université de Reims Champagne-Ardenne – France – fabien.emprin@univ-reims.fr

2016). De nouvelles technologies sont aussi apparues, rendant insuffisante la distinction entre numérique et non numérique. Par exemple, les robots ou les interfaces tactiles ont des propriétés tangibles et numériques. Quelles sont les recherches qui étudient ces nouvelles opportunités et la façon dont elles sont utilisées pour concevoir des situations d'apprentissage ? De nouveaux domaines comme l'algorithmique, la programmation ou la robotique sont-ils abordés par les questionnements sur l'enseignement des mathématiques avec les technologies ? Notamment, les technologies sont-elles utilisées au service d'enseignements pluridisciplinaires ? En ce qui concerne l'apprentissage, la question des tâches proposées aux élèves est cruciale (Leung & Bolite-Frant 2013. Quelles sont les problématiques d'apprentissage, en particulier relatives aux situations didactiques et aux tâches travaillées récemment ? La conception des technologies éducatives a fait apparaître la nécessité d'une collaboration entre experts relevant de champs distincts (informatique, didactique, sciences cognitives, ergonomie...). Cette collaboration entre experts est l'objet de la contribution de Venant, Richard, Gagnon et Henríquez Rivas, à propos du développement d'un système d'aide à la démarche de preuve en géométrie. Ce travail collaboratif peut également intégrer les utilisateurs, et ce très tôt dans le processus de conception, aussi bien les enseignants que les apprenants, selon des méthodologies de recherche collaborative orientée par la conception (Sanchez & Monod-Ansaldi, 2014). Quelle est la nature des questions didactiques émergeant au cours de ce processus, que ce soit au niveau de l'intégration de fonctions didactiques précises telles que le guidage de l'élève, ou celui des interactions futures entre l'outil numérique et les apprenants ? Venant *& al.* montrent comment la collaboration permet d'aborder la modélisation des processus de résolution de problème sous forme de graphe et de traiter les question de genèses sémiotiques et discursives sous-jacentes à l'activité de démonstration.

II. QUESTIONS D'ENSEIGNEMENT ET DE PRATIQUES ENSEIGNANTES

A propos de l'enseignement et des pratiques des enseignants, les difficultés d'intégration des technologies numériques dans les pratiques des enseignants constatées en 2006 sont toujours présentes, en particulier au premier degré. Les travaux sur les enseignants avec les technologies (Drijvers *& al.* 2010) (Clarck-Wilson *& al.* 2014) montrent la variété des pratiques et des questionnements scientifiques. La contribution de Gueudet et Lebaud entre dans ce cadre là, en présentant la conception et l'usage d'une grille d'analyse de ressources initiés par des chercheurs et repris par des enseignants. Le but de cette grille est de mesurer le potentiel de développement de l'autonomie des élèves dans les scénarios de classe intégrant le numérique. C'est aussi l'autonomie des élèves qui est visée par la classe virtuelle, développée sur la plateforme WIMS, par Gnansounou & Mesquita et l'IREM de Paris. Prévue pour les élèves de 2^{d} d'un lycée technique parisien, la question est de savoir si l'organisation des ressources à partir des contenus et des capacités attendues des programmes, les rendra utiles pour d'autres enseignants.

La technologie ne fait pas, ou peu, l'objet de références fortes à des utilisations prescrites. Il est donc particulièrement intéressant d'analyser les usages qui se développent dans un cadre institutionnel (Lagrange 2013). Par exemple, la contribution de Zhu explore comment la succession des tâches avec la géométrie dynamique dans une séquence peut être utilisée comme moyen d'accéder aux connaissances des enseignants. Comment les technologies favorisent-elles les interactions possibles entre les savoirs disciplinaires ? Certaines technologies numériques, comme le tableau blanc interactif, bien que conçues dans le but de favoriser l'interactivité technique et didactique, ont pour effet de renforcer dans un premier temps les pratiques monstratives (Train, 2013). Est-ce le cas pour d'autres technologies ? Est-

ce que l'intégration des technologies favorise certains types de pratiques enseignantes, en particulier en ce qui concerne l'évaluation ? Quelle influence ont-elles sur la nature des mathématiques enseignées ? L'affiche d'Aichtaich, Diyer et Najib propose un modèle théorique, issu des travaux de Lebrun *& al.* (2016), et considère que l'ajout d'une composante « évaluation » améliore le processus d'apprentissage des élèves dans un dispositif incluant du numérique (application au cas des suites numériques).

III. QUESTIONS DE FORMATION ET DE DEVELOPPEMENT PROFESSIONNEL

A propos de la formation et des dispositifs de développement professionnel pour les enseignants, les questions relatives aux collectifs et à la co-conception des technologies rejoignent celles du groupe 6 sur la conception, la diffusion et l'usage des ressources. Cependant, un questionnement spécifique aux technologies a pu prendre place dans ce groupe. Comment les technologies favorisent-elles l'articulation des dimensions individuelles et collectives dans les interactions d'enseignement et de formation ? L'intégration des technologies dans l'enseignement ne peut se faire sans un questionnement important des pratiques professionnelles, nécessitant un accompagnement continu des enseignants au plus près de leur enseignement (Gueudet *& al.* 2011) (Besnier, 2016). L'introduction de certains logiciels dédiés, en géométrie par exemple, repose sur une instrumentation loin d'être évidente ni pour les élèves, ni pour les enseignants (Soury-Lavergne, 2006) (Geeraerts *& al.*, 2014). Comment la formation technologique des enseignants prend-elle en compte ce nécessaire équilibre entre expertises technique et didactique (Venant, 2015) ? Quelle est la place donnée à la réflexion sur les usages technologiques dans le développement professionnel des enseignants (Lagrange, 2013) ? Les nouvelles modalités de formation, telles que les MOOC (Aldon, 2015) ou les simulations de classe (Abboud-Blanchard et Emprin, 2009), ont un rôle dans la mise en place de cet accompagnement. Ces dispositifs ont des effets sur la qualité de l'apprentissage des étudiants, le développement professionnel des enseignants et le changement institutionnel (Burton *et al.*, 2011).

A propos des solutions travaillées pour accompagner l'utilisation des technologies et leur intégration dans les pratiques enseignantes, la première étape est d'y donner accès, en particulier lorsque l'équipement est réduit. Au Congo-Brazzaville, Malonga Moungabio, Tsika Kimbatsa, Mouyama Ngoma et Denys suivent l'expérimentation d'un équipement léger constitué de micro-serveurs fonctionnant sans connexion Internet pour pouvoir former des enseignants à l'utilisation de la plateforme WIMS. Dans leur contribution, ils expliquent comment cet équipement est susceptible d'être un moyen d'impulser une communauté de pratiques, au sens de Wenger (1998), entre les enseignants, les inspecteurs et les formateurs-chercheurs du projet. L'autre contribution se rapportant aux questions de formation et de développement professionnel est celle d'Haspekian à propos de l'usage de Scratch par un enseignant d'école primaire. Elle a traité la question de la double genèse instrumentale de l'enseignant en prenant le point de vue des repères didactiques qui structurent l'action enseignante et permettent de réduire les distances et gérer l'inédit créé par l'introduction du logiciel.

REFERENCES

Artigue, M., (2009) *L'influence des logiciels sur l'enseignement des mathématiques : contenus et pratiques*, Conférence d'ouverture séminaire DGESCO, Paris.

Abboud-Blanchard, M., & Emprin, F., (2009). Pour mieux comprendre les pratiques des formateurs et de formations TICE. *Recherche & formation*, 62(3), 125–140.

Besnier, S. (2016, June). Le travail documentaire des professeurs à l'épreuve des ressources technologiques : Le cas de l'enseignement du nombre à l'école maternelle. Thèses de doctorat de l'Université de Bretagne Occidentale, Rennes.

Burton, R., Borruat, S., Charlier, B., Coltice, N., Deschryver, N., Docq, F . & Villiot-Leclercq, E. (2011). Vers une typologie des dispositifs hybrides de formation en enseignement supérieur. *Distances et savoirs*, vol. 9,(1), 69-96.

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H., & Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 75(2), 213–234.

Geeraerts L., Venant F. & Tanguay D (2014). Subterranean structures of technological tools and teaching issues in geometry. *Edulearn* 2014., pp. 257-264.

Gueudet, G., Saby, N., & Soury-Lavergne, S. (2011). Usage des technologies et formation professionnelle des enseignants à l'université. *Revue internationale des technologies en pédagogie universitaire / International Journal of Technologies in Higher Education*, 9(1-2), 92–100.

Hoyles, C., & Lagrange, J.-B. (Eds.). (2010). *Mathematics education and technology: rethinking the terrain: the 17th ICMI study*. New York: Springer.

Ladel, S., & Kortenkamp, U. (2015). Development of conceptual understanding of place value. In X. Sun, B. Kaur, & J. Novotna (Eds.), The Twenty-third ICMI Study: Primary Mathematics Study on Whole Numbers (pp. 323–333). Macau, China: ICMI.

Lagrange, Jean-Baptiste (dir.). (2013). Les technologies numériques pour l'enseignement. Usages, dispositifs et genèses. Toulouse : Octares

Lebrun M., Lison C. et Batier C. (2016) Les effets de l'accompagnement techno pédagogique des enseignants sur leurs options pédagogiques, leurs pratiques et leur développement professionnel. *Revue internationale de pédagogie de l'enseignement supérieur*, 32-1.

Leung, A., & Bolite-Frant, J. (2015). Designing Mathematics Tasks: The Role of Tools. In A. Watson & M. Ohtani (Eds.), *Task Design In Mathematics Education* (pp. 191–225). Cham: Springer International Publishing.

Moyer-Packenham, P. (Ed.). (2016). *International perspectives on teaching and learning mathematics with virtual manipulatives.* New York, NY: Springer Berlin Heidelberg.

Sanchez, E., & Monod-Ansaldi, R. (2014). Recherche collaborative orientée par la conception. Un paradigme méthodologique pour prendre en compte la complexité des situations d'enseignement-apprentissage. *Éducation et Didactique*, 9(2), 73–94.

Soury-Lavergne, S. (2006). Instrumentation du déplacement dans l'initiation au raisonnement déductif avec Cabri-géomètre. In N. Bednarz (Ed.), *Espace Mathématique Francophone EMF2006.* Sherbrooke Canada: Université de Sherbrooke.

Soury-Lavergne, S., & Maschietto, M. (2015). Articulation of spatial and geometrical knowledge in problem solving with technology at primary school. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 47(3), 435–449.

Train, G., (2013) *Le tableau blanc interactif, un outil pour la classe de mathématiques ?* Thèse de doctorat de l'Université Paris-Diderot - Paris VII.

Venant, F. (2015). Instrumentation didactique des futurs enseignants de mathématiques. Exemple de la covariation. In *Actes du colloque CIEAEM 67*, Aoste.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice: learning, meaning and identity*. Cambridge: Cambridge University Press.

ANNEXE

LISTE DES TEXTES DU GT 7 PAR ORDRE ALPHABETIQUE DU PREMIER AUTEUR

GUEUDET, G. & LEBAUD, M-P.

Numérique et développement de l'autonomie des élèves en mathématiques : un outil pour l'analyse de ressources

HASPEKIAN, M.

Un cas d'étude avec scratch à l'école primaire : distance et repères

MALONGA MOUNGABIO, F., TSIKA KIMBATSA, P., MOUYAMA NGOMA, M. & DENYS B.

Développement des usages du numérique éducatif dans le contexte de l'enseignement des mathématiques au Congo–Brazzaville

VENANT, F., RICHARD, P. R., GAGNON, M. & HENRIQUES, C.

Enjeux sémiotiques dans la conception d'une aide à la résolution de problème de preuve

ZHU, F.

Séquence de tâches mathématiques avec la géométrie dynamique

AFFICHES

ACHTAICH, N., DIYER, O. & NAJIB, K.

Un nouveau modèle d'apprentissage dynamique, application à un concept mathématique

GNANSOUNOU, A., MESQUITA, A. L., BAHEUX, C., CHENEVOTOT-QUENTIN, F., DENYS B. & GALISSON M-P.

Exemples de ressources pour le travail d'élèves en seconde. Une classe virtuelle à l'IREM de Paris

NUMÉRIQUE ET DÉVELOPPEMENT DE L'AUTONOMIE DES ÉLÈVES EN MATHÉMATIQUES : UN OUTIL POUR L'ANALYSE DE RESSOURCES

GUEUDET[*] Ghislaine – LEBAUD [**] Marie-Pierre

Résumé – De nombreuses ressources de type scénario de classe sont disponibles pour les enseignants sur Internet ; certaines proposent des usages en classe d'outils informatiques. Nous nous intéressons ici à l'analyse de telles ressources, du point de vue de leur potentiel pour le développement de l'autonomie des élèves. En appui sur des recherches en didactique portant notamment sur l'autonomie, nous avons élaboré une grille d'analyse. Nous présentons ici sa conception et illustrons son emploi.

Mots-clefs : analyse de ressources, autonomie, pratiques des enseignants, ressources en ligne, usages du numérique

Abstract – A profusion of digital resources proposing lesson plans are available for teachers on the Internet; some of them propose classroom uses of digital technologies. The work presented here concerns the analysis of such resources, with a focus on their potential for the development of students' autonomy. Drawing on research in mathematics education concerning in particular autonomy, we have designed an analysis grid. We present here its design and illustrate its use.

Keywords: analysis of resources, autonomy, teachers' practices, online resources, use of digital technologies

I. INTRODUCTION

La volonté institutionnelle, en France, de soutenir l'intégration du numérique dans les pratiques des enseignants a conduit récemment à un appui sur la recherche en éducation par des appels à projet ciblés. Le projet Interactions Digitales pour l'Enseignement et l'Education (IDEE[1]) dont est issu le travail présenté ici a été retenu dans ce cadre. Le volet du projet dans lequel nous travaillons vise à étudier à quelles conditions des usages du numérique permettent de soutenir le développement de l'autonomie des élèves à l'école primaire et au collège, tout en réduisant les inégalités éducatives liées à l'origine sociale des élèves (ou du moins en évitant de les accroître). Il s'agira ensuite de concevoir des ressources et des formations pour aller vers de tels usages. Trois disciplines sont concernées par le projet : anglais, mathématiques et sciences physiques et chimiques.

Le travail présenté ici correspond au début du projet. Nous considérons que les interactions entre professeurs et ressources sont susceptibles de conduire à des évolutions de pratiques en classe. C'est pourquoi nous nous intéressons à l'analyse de ressources de type scénarios de classe, intégrant le numérique, en termes de potentiel pour le développement de l'autonomie des élèves. Notons qu'ici, le terme « numérique » recouvre aussi bien des logiciels spécifiques (logiciels de géométrie dynamique, tableurs etc.) que des outils concernant toutes les disciplines (vidéos, mur collaboratif virtuel etc.). En appui sur des recherches en didactique et des travaux sur l'analyse de ressources en ligne, nous avons conçu une grille d'analyse adaptée à ce projet. Après avoir introduit les travaux auxquels nous nous référons, nous

[*] CREAD, ESPE de Bretagne, Université de Bretagne Occidentale – France – ghislaine.gueudet@espe-bretagne.fr

[**] CREAD, UFR mathématiques, Université de Rennes 1 – France – marie-pierre.lebaud@univ-rennes1.fr

[1] Opération soutenue par l'État dans le cadre du volet e-FRAN du Programme d'investissement d'avenir, opéré par la Caisse des Dépôts

présentons ici cette grille, son processus de conception, et donnons un exemple de son application.

II. PERSPECTIVE THÉORIQUE ET TRAVAUX LIÉS

1. Perspective théorique et question de recherche

Nous nous plaçons de manière générale dans la perspective de l'approche documentaire du didactique (Gueudet & Trouche 2008). Nous considérons que lors des interactions des professeurs avec des ressources prennent place deux processus associés d'instrumentation et d'instrumentalisation. L'instrumentation traduit une forme d'influence des caractéristiques des ressources sur les pratiques des professeurs. L'instrumentalisation traduit un mouvement inverse : le professeur choisit et modifie les ressources en fonction de ses connaissances et de ses pratiques habituelles.

Dans cette perspective, l'intérêt porté dans le projet IDEE aux évolutions des pratiques des professeurs allant vers des usages du numérique favorisant l'autonomie des élèves nous amène à nous intéresser aux ressources de type scénario de classe (c'est-à-dire proposant des situations mathématiques et leur mise en œuvre) disponibles pour les professeurs et susceptibles, à travers des processus d'instrumentation, d'amener de telles évolutions de pratiques. Quelles doivent être les caractéristiques de ces ressources ? Ainsi la question de recherche que nous étudions ici peut être formulée comme suit :

> Quelles sont les caractéristiques à prendre en compte, pour analyser le potentiel d'une ressource de type scénario de classe en termes d'usage du numérique favorisant l'autonomie des élèves dans une perspective de réduction des inégalités éducatives?

Cette question nous amène à considérer en particulier deux types de recherches en didactique des mathématiques, reliées à un tel questionnement : premièrement des travaux concernant l'analyse de ressources ; deuxièmement des travaux concernant l'autonomie des élèves.

2. Analyser des ressources de type scénario de classe

Pour l'analyse d'une ressource de type scénario de classe, nous nous référons principalement aux travaux effectués dans le cadre du projet Intergeo (en particulier à Trgalová, Soury-Lavergne, & Jahn 2011 et Trgalová & Jahn 2013). Ces travaux ont effectué une étude approfondie des modalités pertinentes pour l'évaluation de la qualité d'une ressource pédagogique, qualité considérée comme dépendant aussi bien des caractéristiques intrinsèques de la ressource que de son contexte d'usage. Ils ont amené à l'élaboration d'un questionnaire destiné aux utilisateurs de ressources sur la plate-forme Intergeo[2]. Les rubriques retenues pour ce questionnaire sont particulièrement pertinentes pour notre travail, puisqu'il s'agit bien de ressources de type scénario de classe, qui de plus ont recours à la géométrie dynamique et donc au numérique. Les rubriques (9 au total) retenues dans ce questionnaire recouvrent plusieurs dimensions : l'ergonomie de la ressource, sa clarté, sa complétude ; la facilité de prise en main par un utilisateur ; la qualité du point de vue des contenus mathématiques ; la pertinence de l'utilisation de la géométrie dynamique.

[2] http://i2geo.net

Ces dimensions font partie des caractéristiques à prendre en compte dans notre travail également (en élargissant au numérique au-delà de la géométrie dynamique). Cependant elles ne recouvrent pas l'aspect d'autonomie, essentiel dans notre questionnement et qui nécessite une étude spécifique.

3. L'autonomie vue par les recherches en didactique des mathématiques

Dans le contexte institutionnel en France, l'autonomie a été introduite comme compétence transversale dans le socle commun en 2006 (MEN, 2006). Les travaux se référant explicitement à l'autonomie en didactique des mathématiques et proposant une définition de ce concept ne sont pas très nombreux. En revanche l'idée d'autonomie est implicitement présente dans beaucoup de recherches, qu'il s'agisse d'étudier si des élèves sont autonomes, ou de proposer des moyens de développer l'autonomie (ces deux aspects n'étant pas distingués par les auteurs).

Yackel & Cobb (1996) distinguent les élèves autonomes en mathématiques, qui utilisent leurs « capacités intellectuelles lorsqu'ils doivent prendre des décisions mathématiques » (p.473) et les élèves hétéronomes qui se fient aux affirmations d'une autorité extérieure. Cette définition amène à s'interroger sur les caractéristiques d'un enseignement amenant l'élève à ne pas rechercher une validation extérieure. Elle évoque ainsi de nombreux travaux dans lesquels l'autonomie n'est pas explicitée comme telle : notamment ceux qui se réfèrent au contrat didactique (Brousseau 1998), en termes de responsabilité de l'élève vis-à-vis du savoir. Nous avons ainsi étudié précédemment (Gueudet & Lebaud 2015) les conséquences possibles du numérique en termes de contrat didactique, dans le cadre d'une étude sur les démarches d'investigation, qui peuvent aussi être vues comme une modalité d'enseignement visant à développer une forme d'autonomie des élèves.

Ben Zvi & Sfard (2007) proposent de considérer les mathématiques comme un discours, et leur apprentissage comme entrée dans le discours d'une communauté. Ils distinguent alors l'apprentissage au niveau objet, extension de discours connus, pour lequel l'autonomie peut se manifester par une mobilisation individuelle par l'élève de ses connaissances. En revanche l'apprentissage au niveau méta désigne l'entrée dans un discours nouveau. Dans ce contexte l'autonomie n'est pas une caractéristique individuelle ; elle est liée au travail d'un collectif, qui peut inclure d'autres élèves ou le professeur. Ce travail nous a amenées à distinguer l'autonomie pour la mobilisation de connaissances déjà là, et celle liée à la découverte de savoirs nouveaux. Nous avons également intégré dans les caractéristiques retenues un recours judicieux au travail collectif des élèves.

Nous souhaitons souligner le fait que l'autonomie n'est pas une caractéristique stable d'un élève, mais plutôt un processus dépendant du contexte et d'interactions avec divers collectifs. Élaborer une définition de l'autonomie fait partie du travail mené dans le projet IDEE. À cette étape elle pourrait se formuler comme « processus qui permet à l'élève, dans un contexte donné et au sein d'un système d'interactions, d'organiser son travail et de mobiliser des ressources (internes ou externes) pour accomplir une tâche donnée en développant éventuellement des moyens nouveaux ».

III. CONTEXTE ET METHODE

La méthode suivie pour l'élaboration de la grille d'analyse est également celle retenue dans Intergeo (Trgalová & Jahn 2013) : une élaboration initiale, puis un processus cyclique de tests et d'améliorations. Cette méthode est complétée en outre dans notre projet IDEE par la confrontation entre grilles des trois disciplines : mathématiques, anglais et sciences physiques.

De plus, des collègues sociologues spécialistes des inégalités éducatives sont intervenues pour l'ajout de critères spécifiques à cet aspect.

Pour l'élaboration de la version initiale, nous avons repris les dimensions retenues dans le projet Intergeo, en adaptant dans un premier temps les critères liés à l'emploi de la géométrie dynamique à celui du numérique en général et en rajoutant une dimension consacrée à l'autonomie de l'élève. Pour cette dimension, les critères retenus sont issus de la revue de littérature évoquée ci-dessus.

Nous avons testé cette première grille sur des ressources de la plate-forme CARTOUN (CARTOgraphie des Usages Numériques). Celle-ci a été ouverte fin 2014 par l'académie de Rennes[3] afin d'aider à la mutualisation de pratiques pédagogiques utilisant le numérique. Chaque ressource (désignée sur CARTOUN par le terme « activité ») est géolocalisée permettant à chacun.e de savoir où elle a été mise en place ; de plus, l'enseignant.e qui la soumet accepte d'être joint.e par courriel, voire d'accueillir des collègues dans sa classe pour qu'ils/elles observent une mise en œuvre de cette activité. L'objectif affiché de CARTOUN est de créer des dynamiques de proximité et d'échanges de pratiques. En novembre 2017, CARTOUN contient 890 ressources pour l'académie de Rennes dont 150 en mathématiques. Une ressource CARTOUN (désignée par le terme « fiche d'activité ») donne, outre des informations factuelles (niveau, discipline, logiciels utilisés, etc.), un scénario pédagogique qui doit faire apparaître l'intérêt de l'emploi du numérique. Cette plate-forme nous permet donc de tester notre grille pour différentes ressources ayant une même structure de présentation ; nous avons en outre choisi dans le cadre du projet IDEE de nous centrer sur le cycle 4 (élèves de 12 à 15 ans).

Les cycles de tests (par des chercheurs impliqués dans IDEE ; plusieurs chercheurs confrontent systématiquement leurs notations sur la même ressource) et d'améliorations de la grille mise en fonctionnement pour différentes ressources nous ont amenées à des modifications significatives. En particulier, les critères portant sur l'autonomie des élèves ont été redistribués sur deux dimensions, alors que nous les avions isolés dans un premier temps. Nous en reparlons dans la partie suivante.

Nous avons ensuite soumis la version obtenue à deux enseignantes de lycée, expertes dans l'utilisation du numérique en classe. La grille n'est pas a priori destinée à des enseignant.e.s, elle est élaborée à des fins de recherche et sera utilisée dans un second temps pour l'élaboration d'un guide pour la conception de ressources. Cependant il était important de recueillir les avis de ces collègues sur cette grille : celles-ci peuvent signaler, par exemple, l'oubli d'un aspect qui pour elles est essentiel dans le choix d'une ressource. Ce n'était pas le cas ici, les remarques des enseignantes n'ont conduit qu'à des modifications de détails.

Finalement, la grille a été complétée par des critères concernant la prise en compte des inégalités éducatives, issus de recherches précédentes en sociologie de l'éducation. Nous donnons des exemples ci-dessous.

Notre grille ainsi construite est maintenant proposée aux enseignant.e.s concepteurs.rices de ressources du projet IDEE. La mettre en regard avec des activités en cours de construction et de test dans les classes amènera probablement des évolutions ultérieures, la recherche que nous présentons ici est en cours.

---

[3] Depuis 2016, CARTOUN est déployé sur toute la France, les ressources restant classées par académie.

IV. GRILLE D'ANALYSE DES RESSOURCES

Nous avons finalement retenu cinq dimensions :

1. La ressource propose une description claire et riche pour le professeur (clarté)
2. La ressource est facile à prendre en main et adaptable (prise en main)
3. Le contenu disciplinaire est riche du point de vue didactique (richesse didactique)
4. L'utilisation du numérique est pertinente et cohérente avec l'activité prévue (numérique)
5. L'activité proposée peut favoriser l'autonomie pédagogique des élèves (autonomie)

Par souci de concision nous ne décrivons ici que les trois dernières dimensions qui sont plus spécifiques à notre questionnement. Le contenu correspondant de la grille est présenté dans les figures ci-dessous. Les couleurs désignent, respectivement : bleu, prise en compte des inégalités éducatives ; jaune, critère comptant en bonus ; vert, critère spécifique de la discipline (ici mathématiques).

1. Utilisation du numérique

Les critères retenus dans le projet Intergeo pour l'emploi du numérique sont spécifiques à l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique qui doit donc apporter une réelle plus-value par rapport au papier-crayon : par exemple en permettant au professeur de proposer des représentations qui ne seraient pas disponibles sinon, ou en permettant à l'élève d'accéder à de telles représentations. Mais dans le cadre de notre travail, la grille doit également évaluer des activités qui ne pourraient pas être faites sans le numérique, comme l'apprentissage d'un logiciel ou certaines activités portant sur l'algorithmique par exemple.

Nous avons donc distingué deux cas dans cette dimension de l'utilisation du numérique : soit les activités peuvent être faites sans le numérique, soit elles ne le peuvent pas. Dans le premier cas, nous rajoutons, par rapport au deuxième cas, des critères concernant la valeur ajoutée du numérique.

4. L'utilisation du numérique est pertinente et cohérente avec l'activité mathématique prévue	
Cas 1 : activité qui peut être faite sans le numérique	**Cas 2 : activité qui ne peut pas être faite sans le numérique**
Le numérique permet aux élèves d'effectuer différents essais et de tester leur validité	
Le numérique permet au professeur d'accéder au travail des élèves et /ou de le montrer à la classe	
Le numérique permet au professeur de prendre en compte la diversité des élèves : par exemple personnaliser son parcours.	
Dans le cas où un travail avec le numérique est prévu à la maison, celui-ci peut se faire sur un smartphone	
Le numérique permet aux élèves d'échanger ou de travailler collectivement BONUS	
Le numérique permet aux élèves de travailler dans différents lieux (avec possibilité d'emploi d'un smartphone si il y a un travail à la maison) BONUS	
Le numérique permet au professeur de proposer des représentations, des informations qui ne seraient pas disponibles sinon	
Le numérique permet aux élèves d'accéder à des représentations, des informations qui ne seraient pas disponibles sinon	
Le numérique est nécessaire pour l'atteinte de l'objectif annoncé	

Figure 1 *- L'utilisation du numérique est pertinente et cohérente avec l'activité prévue*

Le fait que le travail à la maison puisse être fait sur un Smartphone est un critère concernant la réduction des inégalités éducatives. En effet, la proportion d'adolescents possédant un téléphone portable est plus élevée dans les milieux défavorisés que dans ceux d'origine sociale favorisée (Le Mentec & Plantard 2015). La possibilité de travail collectif grâce au numérique est considérée comme un bonus : en effet elle correspond généralement à des types de logiciels particuliers (par exemple écriture collective) ; l'absence de recours à de tels logiciels ne doit pas être sanctionnée.

2. Contenu mathématique et autonomie

Il est naturellement essentiel dans une telle analyse d'examiner le contenu mathématique proposé, et le lien entre ce contenu et l'autonomie des élèves. Notre revue de travaux a montré que certaines caractéristiques de l'autonomie étaient liées au contenu proposé – et nous parlons alors d'autonomie didactique – tandis que d'autres (comme la possibilité de rythmes différents) étaient plus proches de la compétence décrite par l'institution (MEN 2006), que nous nommons autonomie pédagogique.

Nous avons ainsi identifié la « richesse du contenu » comme étant liée au développement de l'autonomie didactique. En référence aux travaux de Ben Zvi & Sfard (2007), nous avons considéré que l'autonomie de l'élève prenait des formes différentes selon que le savoir en jeu était nouveau ou non. Nous avons alors, comme dans le cas de l'utilisation du numérique, séparé deux types d'activités : les situations de recherche (découverte de savoirs nouveaux) et les situations d'entraînement (mise en fonctionnement de connaissances déjà là). Pour les situations de recherche, nous avons valorisé les activités demandant aux élèves une prise d'initiative, c'est-à-dire une mise en fonctionnement des connaissances de niveau au moins mobilisable (Robert, 1998).

3. Le contenu disciplinaire est riche du point de vue didactique	
Cas 1 : situation de recherche	**Cas 2 : entraînement.**
Les contenus disciplinaires correspondent bien aux objectifs et prérequis annoncés	
L'activité proposée permet de travailler certaines des compétences : chercher / modéliser / représenter / raisonner / calculer / communiquer	
L'activité proposée utilise divers registres de représentation et des conversions de registres	
Des productions demandées aux élèves permettent au professeur d'accéder à leur cheminement Des éléments d'évaluation formative sont proposés	
L'activité proposée permet aux élèves une prise d'initiative BONUS	L'activité proposée permet aux élèves de travailler des automatismes BONUS
L'activité proposée permet à l'élève d'expérimenter et/ou conjecturer	
L'activité proposée permet à l'élève d'utiliser différentes stratégies, il y a plusieurs solutions possibles.	

Figure 2 – *Le contenu disciplinaire est riche du point de vue didactique*

Pour la dimension « Autonomie pédagogique » (Figure 3), la même référence au travail de Ben Zvi et Sfard (2007) nous a conduites à prendre en compte le recours possible au travail collectif. Nous avons de plus intégré en référence à la définition de l'autonomie de Yackel & Cobb (1996) les critères de validation par l'élève sans recours à l'enseignant.e, mais aussi la possibilité de s'auto-évaluer. La possibilité offerte à l'élève de prendre en charge son apprentissage dans un parcours lui proposant l'accès à différentes ressources, sans nécessiter un recours systématique à l'enseignant, est valorisée dans cette dimension. Le fait que l'élève puisse de lui-même choisir entre plusieurs parcours possibles est indiqué en bonus.

5. L'activité proposée peut favoriser l'autonomie pédagogique des élèves
L'activité prévoit la possibilité de rythmes différents
L'activité prévoit des aides en cas de difficultés
Les aides proposées sont variées : textes, images, vidéos etc.
L'activité laisse à l'élève la possibilité de prendre des initiatives
Les élèves peuvent savoir si leur travail est valide sans appeler le professeur
La ressource intègre un ou des supports pour l'auto-évaluation
Des aides sont fournies pour la prise en main du logiciel si besoin, et ces aides intègrent des éléments visuels
L'activité prévoit un recours à certaines formes de travail collectif BONUS
L'élève peut faire des choix pour personnaliser son parcours BONUS

Figure 3 *Autonomie pédagogique*

Nous avons parlé des cinq dimensions retenues et des critères les décrivant, mais nous souhaitions obtenir une évaluation facilement lisible de la qualité d'une ressource en termes d'usage du numérique favorisant l'autonomie. Nous allons donc maintenant nous intéresser à notre construction du profil d'une ressource obtenu au moyen de cette grille.

V. UTILISATION DE LA GRILLE, EXEMPLE

Le fonctionnement général de la grille est le suivant : chaque critère reçoit une note entre 0 (pas du tout) et 3 (tout à fait). Pour chacune des 5 dimensions, on attribue alors à la ressource une lettre : A, B, C, D en fonction du pourcentage du score total de cette dimension (total calculé hors critères bonus). A est attribué entre 75 et 100%, B entre 50 et 75%, etc.

Nous donnons ici un exemple synthétique, concernant l'application de la grille à une ressource CARTOUN intitulée « Équations du premier degré : logiciel et méthodologie », destinée au cycle 4 (plus particulièrement aux classes de 4^{e} et de 3^{e} ; l'auteur est Luc Le Boulanger). Il s'agit de proposer aux élèves un travail individuel sur la résolution d'équations du premier degré, en s'aidant s'ils le souhaitent du logiciel gratuit Thot[4] qui prend en charge pas à pas les calculs. Les élèves ont à leur disposition, en plus du logiciel, une fiche d'exercices ; une fiche de rappels de cours ; une fiche de prise en main du logiciel. L'autonomie fait partie des compétences des élèves indiquées par l'auteur de la ressource.

Clarté	Prise en main	Richesse didactique	Numérique	Autonomie
C	B	B	A	A

Figure 4 *– Application de la grille à la ressource « Équations du premier degré »*

Concernant la richesse du contenu et l'autonomie didactique, cette ressource correspond clairement au cas d'un entraînement mobilisant des savoirs déjà connus. La note B correspond ici à un score de 8 sur 12 (67%) : en effet, si la ressource permet bien de travailler la compétence calculer, et de renforcer des automatismes, elle amène à travailler dans le seul registre algébrique (Duval, 1995) ; de plus les prérequis n'étant pas clarifiés, on ne peut rien dire sur la correspondance entre ces prérequis et le contenu proposé.

4 http://www.emmanuelmorand.net/thot/telechargement.php

Concernant l'utilisation du numérique, cette ressource correspond au cas où l'activité peut être faite sans le numérique : il est explicitement dit que les élèves ont recours à l'aide du logiciel seulement s'ils le souhaitent. La note A attribuée correspond au score de 16 sur 18 (89%). L'apport du numérique est clair : le logiciel permet aux élèves de faire des essais pour la résolution d'équations et d'avoir un retour. Chaque élève peut faire ces essais à son rythme. Le logiciel permet d'accéder à des représentations dynamiques des équations. Seul le deuxième critère concernant la possibilité pour le professeur d'accéder au travail des élèves ne semble pas satisfait.

Finalement, en ce qui concerne l'autonomie pédagogique des élèves, la ressource obtient également la lettre A, qui correspond aussi à un score de 16 sur 18 (94%). En effet, même si la ressource n'intègre pas de support pour l'auto-évaluation (critère noté 0), et s'il est difficile pour les élèves de savoir si leur travail est valide sans appeler le professeur (critère noté 1), un bonus de 3 points est obtenu sur le critère « l'élève peut faire des choix pour personnaliser son parcours ». En effet le choix de l'emploi du logiciel relève de la responsabilité de l'élève.

On retient ainsi que cette ressource fait une utilisation pertinente du numérique. Elle favorise l'autonomie pédagogique des élèves, mais pourrait mieux soutenir leur autonomie didactique en mobilisant plusieurs registres de représentation.

VI. CONCLUSION

La question de recherche que nous avons étudiée ici était formulée comme : « Quelles sont les caractéristiques à prendre en compte, pour analyser le potentiel d'une ressource de type scénario de classe en termes d'usage du numérique favorisant l'autonomie des élèves dans une perspective de réduction des inégalités éducatives ? »

Le processus de construction de la grille a mis en évidence plusieurs éléments de réponse à cette question. (1) Le potentiel d'une ressource, en termes d'usages du numérique en classe, passe par son appropriation par des professeurs : d'où des dimensions de clarté et de facilité de prise en main. (2) L'apport du numérique est pris en compte à travers les possibilités spécifiques qu'il offre pour l'activité mathématique de l'élève. Dans cette dimension nous n'avons pas explicitement mentionné l'autonomie : elle pourrait être vue comme la possibilité pour l'élève d'atteindre son objectif, ce point pourra être approfondi dans des travaux ultérieurs. (3) La richesse du contenu est liée à une forme d'autonomie didactique des élèves, qui peut se traduire par des prises d'initiative pour des situations de recherche, ou par une mobilisation de savoirs connus sans aide extérieure. (4) Pour une autonomie de type pédagogique, il s'agit d'observer les possibilités de personnalisation, d'accès à des aides, et d'auto-évaluation.

La grille construite en intégrant ces critères nous permet de procéder à l'analyse de ressources existantes. Elle a aussi vocation à intervenir pour la conception de ressources, éventuellement en suggérant des améliorations de ressources existantes, mais surtout en guidant la conception de ressources visant le développement de l'autonomie des élèves au moyen du numérique. Elle a d'ores et déjà été utilisée en ce sens dans le projet IDEE. Elle sera également testée dans le contexte de la formation initiale et continue des enseignants, ce qui pourra conduire à de nouvelles évolutions.

REFERENCES

Ben-Zvi, D. & Sfard, A. (2007). Ariadne's thread, Daedalus' wings and the learner's autonomy. Education & Didactique 1(3), 117-134.

Brousseau, G. (1998). La théorie des situations didactiques. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Duval, R. (1995). Sémiosis et pensée humaine. Berne : Peter Lang.

Gueudet, G., & Trouche, L. (2008). Du travail documentaire des enseignants : Genèses, collectifs, communautés. Le cas des mathématiques. Education & Didactique, 2(3), 7-33.

Gueudet, G., & Lebaud, M.-P. (2015). Usage des technologies et investigation en mathématiques : quels contrats didactiques possibles ? Recherches en éducation 21, 81-94. http://www.recherches-en-education.net/spip.php?article308

Le Mentec M, & Plantard, P. (2015). INEDUC : pratiques numériques des adolescents et territoires. Networks and Communication Studies, NETCOM, 28(1-2), 217-238. https://journals.openedition.org/netcom/1799

Ministère de l'Éducation Nationale (2006). Le socle commun des connaissances et des compétences. http://cache.media.education.gouv.fr/file/51/3/3513.pdf

Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. Recherches en didactique des mathématiques, 18(2):139–189.

Trgalová, J., & Jahn, A. P. (2013). Quality issue in the design and use of resources by mathematics teachers. ZDM, 45(7), 973–986.

Trgalová, J., Soury-Lavergne, S., & Jahn, A. P. (2011). Quality assessment process for dynamic geometry resources in Intergeo project: rationale and experiments. ZDM 43(3), 337–351.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. Journal for Research in Mathematics Education, 27(4), 58-477.

UN CAS D'ETUDE AVEC SCRATCH A L'ECOLE PRIMAIRE : DISTANCE ET REPERES

HASPEKIAN* Mariam

Résumé – Dans le prolongement de nos travaux sur le développement professionnel avec les TIC, nous étudions cette fois l'introduction Scratch en primaire. Cette nouvelle mise à l'épreuve de nos outils d'analyse vise à en prolonger l'élaboration et, mis en perspective avec nos études précédentes, de discuter l'idée de *repères didactiques*, pour modéliser la pratique enseignante en termes de distance et repères.

Mots-clefs : pratiques enseignantes, informatique, Scratch, repères didactiques, distance instrumentale.

Abstract – In continuation of our research on the development of teaching practices with ICT, we study this time, the case of Scratch integration in primary school. This new testing of our analysis tools allows extending their elaboration: by putting the results in perspective with our previous studies, we discuss the idea of didactic "landmarks", in order to model the teaching practice in terms of distance and landmarks.

Keywords: teaching practices, Scratch, computer science, didactical landmark, instrumental distance.

I. INTRODUCTION ET CONTEXTE DE LA RECHERCHE

Algorithmique, programmation, robots, logiciels tels Scratch, entrent dans les nouveaux programmes mathématiques français (primaire et secondaire). Il n'est plus seulement mention de nouvelles technologies, mais d'apprentissage informatique. Cette mutation peut perturber les pratiques en place pour que de nouvelles se développent. Qu'apprend-on à cette occasion des pratiques enseignantes avec les technologies ? Nous saisissons ainsi ce contexte changeant comme occasion de comprendre mieux les situations de développement professionnel, pour progresser dans leur modélisation théorique. Pour cela, nous étudions ici les débuts d'un enseignant incorporant Scratch en CE2, en mobilisant le cadre de l'approche instrumentale (Artigue 2002, Guin & Trouche 2004, Lagrange 2000), avec les outils issus de nos travaux antérieurs : l'idée de *double genèse instrumentale* et de *distance*. Ceci permet d'en prolonger l'élaboration en dégageant l'importance des *repères* didactiques (Haspekian, 2017), contre-pied de la distance, et opérant comme références dans les dynamiques en jeu le long de ces genèses instrumentales.

II. DISTANCE ET DOUBLE GENESE INSTRUMENTALE

Nous présentons ici plus avant l'idée de *distance aux pratiques*, ainsi que la distinction *genèse instrumentale personnelle-professionnelle*, en nous référant au contexte de recherche qui leur a donné naissance, l'intégration du tableur en mathématiques (Haspekian, 2006).

L'idée de distance instrumentale se veut souligner qualitativement l'impact de l'introduction de « nouveau » dans des pratiques installées, et mesurer quantitativement le déséquilibre produit par cette introduction en termes d'écart à ces pratiques : en effet, selon l'approche instrumentale, un nouvel outil technologique ne sera pas neutre, notamment sur les conceptualisations en jeu. La distance instrumentale identifiée dans le tableur, dans le cas de l'enseignement de l'algèbre, explique les résistances et difficultés d'intégration dans les pratiques enseignantes, ou encore les tendances des enseignants à évoluer avec le tableur vers des pratiques réduisant la distance (Haspekian, 2006). Dans nos travaux précédents, un autre cas de distance provoquée par du « nouveau » dans des pratiques anciennes, a été celui de l'algorithmique au lycée qui, bien qu'il ne s'agisse pas ici d'un outil TIC mais d'un domaine

*Université Paris Descartes, Sorbonne Paris Cité, mariam.haspekian@parisdescartes.fr

entier, montrait des phénomènes analogues à ceux d'une distance instrumentale[1], nous menant à étendre celle-ci à une « *distance aux pratiques usuelles en mathematiques* » (Haspekian & Nijimbéré, 2016). Pour la définir (Haspekian, 2017), nous utilisons les *5 composantes* de la Double Approche (Robert & Rogalski, 2002), cadre qui modélise les pratiques en étudiant les contraintes *institutionnelles* et *sociales* pesant sur les choix que prend l'enseignant, selon sa propre *personne* (histoire, représentation de l'apprentissage, de la discipline), pour organiser le travail des élèves aux niveaux *cognitif* (choix de contenus, d'approche…) et *médiatifs* (gestion du temps, de l'espace…). Les facteurs qui contribuent à créer une distance se déclinent sur ces composantes. Le tableur en algèbre présente par exemple une distance aux niveaux : cognitif, personnel, institutionnel.

La genèse instrumentale (Rabardel, 1995) caractérise la relation d'un sujet à un artefact le long de son activité avec celui-ci. Appliquée au cas d'un sujet enseignant et d'un outil mathématique tel le tableur, *deux activités différentes* entrent en jeu : l'une personnelle (GIpe) menant pour l'enseignant (comme pour l'élève), à un tableur-instrument au service du travail mathématique, l'autre professionnelle (GIpro) s'ajoutant à la personnelle, menant cette fois le tableur vers un outil au service d'une autre activité, celle d'enseigner les mathématiques (fig1). Cet instrument didactique, bien que provenant du même artefact tableur, diffère du personnel. Tous deux existent pour le sujet enseignant. La GIpro consiste à développer des fonctions didactiques de l'outil, généralement non prédéfinies (encore moins dans le cas d'outils importés dans le monde éducatif tel le tableur), et les intégrer dans ses pratiques en cours. Pour illustrer cette différence de nature d'instrument auquel chacune des deux genèses mène, l'exemple des calculatrices de poche est assez révélateur. Pour devenir instrument didactique, de nombreuses situations, maintenant classiques, dites de « calculatrice contrainte » (dans l'affichage, l'utilisation…) ont vu le jour dans la littérature professionnelle comme en recherche (exemple Caron 2007, Del Notaro & Floris 2011) : situations de « touches cassées », calculatrices « défectueuses »... C'est bien l'objectif didactique d'enseignement (ici des mathématiques) qui produit cette « calculatrice » didactique, bien différente de la calculette usuelle, qui n'est ordinairement, ni défectueuse, ni avec des touches cassées...

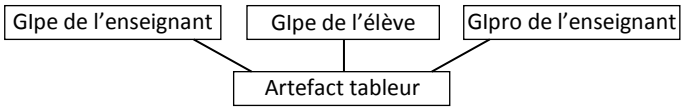


Figure 1 *- Differents instruments à partir d'un même artefact via une GIpro pour l'activité didactique du professeur et des GIpe (élèves et enseignant) pour l'activité mathématique*

Les GIpe et GIpro ne sont pas indépendantes et interfèrent l'une sur l'autre. Elles dépendent aussi de celles des élèves (Haspekian, 2014) : des schèmes doivent se développer pour organiser et accompagner les GIpe avec le tableur, outil de travail mathématique. Pointant ce nécessaire accompagnement, Trouche (2004) dégage les *orchestrations instrumentales* qui sont les configurations et modes d'exploitation de l'outil définis par l'enseignant. Celles-ci évoluent au fil d'expériences, le long d'une GIpro où des schèmes de l'activité s'enrichissent de connaissances sur les GIpe élèves et l'usage possible de l'outil.

Récemment, ces notions ont été appliquées à l'analyse des pratiques de 5 enseignants découvrant des robots pédagogiques ou Scratch[2]. Nous reprenons ici l'un des cas observés,

[1] tensions et résistances, pratiques de juxtaposition (devoirs maison, activités isolées…) minimisant la distance.
[2] une présentation plus détaillée du cas de René avec les difficultés des élèves est donnée dans (Haspekian & Gélis, soumis)

René avec Scratch. L'objet de ce texte est de dégager l'idée de *repères didactiques*, discutée au §V, à partir de la mise en perspective de ces analyses avec nos travaux précédents.

III. CHOIX DES DONNEES ET METHODOLOGIE DE LA RECHERCHE

1. Contexte et méthodologie

Les données viennent du projet DALIE[3] consacré à l'informatique à l'école primaire. Une équipe de chercheurs (France et Grèce) ont ainsi observé des enseignants volontaires, mais sans formation, ni consignes précises, pour utiliser Scratch ou des robots (Bee-bots, Thymio…) avec des élèves de 6-9 ans. Nous cherchons à cerner l'activité avec l'outil, les difficultés rencontrées, la façon dont naissent et se déploient les genèses en jeu, notamment les liens entre GIpe (professeurs et élèves) et GIpro (enseignant). Notre méthodologie, inspirée de Drijvers & al. (2013), consiste à analyser les orchestrations en place, leurs évolutions, par :

- l'analyse des tâches données dans l'environnement technologique en termes de techniques, schèmes et savoirs mathématiques et informatiques en jeu,
- les rôles de ceux-ci dans les genèses instrumentales des élèves,
- les éventuelles difficultés possibles et les interactions dans leur gestion par l'enseignant,
- l'articulation avec l'environnement papier-crayon ou les autres instruments déjà en place.

Nous avons alors recueilli plusieurs types de données : vidéos de classe, entretiens pré-post séances des enseignants, leurs documents préparatoires, et des entretiens avec les élèves.

2. Le logiciel Scratch

Pour les concepteurs[4], le logiciel Scratch, profondément influencé et inspiré de Logo, permet une approche ludique de l'algorithmique. Selon eux, la programmation par déplacements de blocs est accessible aux plus jeunes, permettant d'apprendre d'importants concepts mathématiques telle la notion de variable en algèbre (Resnick 2007, p.21). Ainsi, Benton *et al.* (2017) utilisent Scratch pour approcher un ensemble conséquent de concepts mathématiques dont celui d'algorithme. Les programmes français y font aussi régulièrement référence à différents âges et toujours en lien avec les notions mathématiques. Par exemple, dès 6 ou 7 ans, il est proposé de « *coder des déplacements à l'aide d'un logiciel de programmation adapté* » (MEN 2015, p.86) afin d'amener dès l'âge de 8 ans « *à la compréhension, et la production d'algorithmes simple*s. » (*ibid.*). A partir de 9 ans, les programmes de mathématiques mentionnent à plusieurs reprises une initiation à la programmation via « *les déplacements d'un robot ou ceux d'un personnage sur un écran* », initiation qui se poursuit en mathématiques sur tout le collège : « *Au cycle 4, les élèves s'initient à la programmation, en développant dans une démarche de projet quelques programmes simples, sans viser une connaissance experte et exhaustive d'un langage ou d'un logiciel particulier. En créant un programme, ils développent des méthodes de programmation* », afin que les élèves, dès 12 ans, revisitent *« les notions de variables et de fonctions sous une forme différente, et s'entraînent au raisonnement* » (*ibid.*, p.378). Il est

[3] Didactique et apprentissage de l'informatique à l'école - ANR-14-CE24-0012
[4] http://scratchfr.free.fr/, Scratch a été développé par le MIT Media Lab.

alors intéressant d'observer quelles exploitations de ces outils développent des enseignants non experts, professeurs de mathématiques ou d'école, tel René ici.

3. René et Scratch

Les données ici (vidéos et entretien à chaud post-séance) se placent au tout début de la GIpro de René : sa 2e séance Scratch, la 1e étant une découverte libre par les élèves. Quels objectifs mathématiques, informatiques et instrumentaux prévoit alors René, avec quelles orchestrations ? Par ailleurs, la séance est répétée sur deux créneaux avec chacun une moitié de classe. Cette répétition d'une même séance sur deux moitiés de la même classe la rend intéressante pour notre problématique : nous accédons en direct à un moment de développement de sa GIpro, René réinvestissant avec le 2e groupe certains repères pris avec le premier. En quelque sorte, nous observons la GIpro se dérouler sous nos yeux.

IV. PRINCIPAUX RESULTATS

Nous synthétisons ici les deux principaux résultats : les liens entre GIpe trop peu avancée et GIpro de René, et l'évolution visible de sa Gipro dès le cours de la séance avec le groupe 1.

1. Une GIpe trop peu avancée : conséquences sur la GIpro

Dans la séance prévue par René, les élèves devaient répondre à 2 consignes qui, au stade de leurs GI avec Scratch et de leurs connaissances mathématiques à ce niveau scolaire, comportaient trois points d'achoppement prévisibles[5]. En effet, les élèves n'ayant pas encore les connaissances instrumentales suivantes : (**a**) Existence de coordonnées pour contrôler minimalement les positions d'un personnage à l'écran. Ceci est en lien avec des connaissances mathématiques clairement mentionnées dans les programmes (repérage dans un plan) que les élèves n'avaient pas encore. (**b**) Nécessité, selon les commandes utilisées, de définir une position initiale (cas de la commande « Aller à… » utilisant des références absolues et non relatives), idem pour l'orientation si le programme la modifie. Cette connaissance instrumentale ne va pas de soi dans la mesure où un programme incomplet ne se perçoit qu'au 2e lancement (l'objet est alors immobile). (**c**) Existence de "scripts parallèles" associés à chaque objet, connaissance là encore non intuitive (seule une page de scripts est affichée à la fois) mais nécessaire pour contrôler 2 objets ou plus.

La consigne visait-elle alors à faire émerger ces connaissances ? Les vidéos et entretiens montrent que René, n'ayant pas lui-même identifié ces trois points, n'avait pas préparé la séance dans cette approche. Lors des interactions, il a les mêmes interrogations que les élèves, découvrant (**a**), (**b**) et (**c**), réalisant plus ou moins leur importance en direct. Mais cette faible connaissance de Scratch, loin de créer de l'inconfort, est utilisée par René pour montrer aux élèves l'importance de chercher, tester, ne pas se décourager...

Cette GIpe, encore trop peu avancée, a deux conséquences sur la GIpro de René : dans sa gestion des GI des élèves, et dans sa définition des objectifs d'apprentissage avec Scratch. En effet, ses aides face aux difficultés des élèves avec les connaissances (**a**), (**b**) et (**c**) non anticipées, ne peuvent efficacement faire avancer les GI des élèves. Divers épisodes, au fil des deux séances, montrent René cherchant l'origine des problèmes pour lesquels il est sollicité. Il réussit parfois à les analyser sur le vif, c'est le cas de (**b**), mais de façon incomplète (les objets déplacés par translation mais pas par rotation), mais le plus souvent, les problèmes sont soit

[5] Bouger 2 lutins simultanément puis successivement avec une seule commande de départ (vise à faire dépendre l'action du 2e lutin de celle du 1er, par exemple en les faisant communiquer par la commande «message»).

mis sur le compte de commandes défaillantes, soit écartés sans plus d'explication, le dysfonctionnement restant ainsi non compris des élèves qui ne peuvent alors développer avec Scratch les schèmes d'action qui mettent en jeu ces connaissances. Enfin, les objectifs de René avec Scratch ne visent ni les mathématiques, comme on aurait pu le penser avec le repérage et le déplacement dans un plan, ni l'informatique, non identifiée à ce stade par René. Par exemple, son vocabulaire est instable : « *coordonnées* » devient parfois « *codes du personnage* » ou encore « *codes du mouvement* ». Néanmoins, René a bien des objectifs d'apprentissage, ceux-ci se situent pour partie dans une discipline qu'on pourrait qualifier de « substitution », le Français (lire et comprendre les commandes, projet d'écriture d'un récit, importance de la chronologie d'une histoire, du séquencement des actions…), ou sont décalés vers des objectifs transversaux aux apprentissages disciplinaires (chercher un problème, essayer et ajuster, développer des interactions entre pairs).

2. Prise de repères et évolution de la GIpro

Les premiers stades de la GIpro de René avec Scratch le montrent prendre des repères lors des premières interactions, et les réinvestir plus tard ou avec le second groupe. Par exemple, si la connaissance (**c**), approchée en milieu de séance 1, n'est plus mentionnée ensuite, René évolue clairement sur (**a**) : les interactions montrent qu'il découvre, en début de séance 1, l'affichage des coordonnées à l'écran. En fin de session, il les pointe directement (sans pour autant chercher le système sous-jacent les générant) : *« Si tu le vois plus, ça veut dire que les coordonnées x et y que t'as mises sont en-dehors de la page (…) là, regarde, là t'as les coordonnées de la flèche. Si tu déplaces, les coordonnées changent. »*. Avec le groupe 2, il anticipe alors et mentionne cette fois (**a**) dès le début, lors de l'introduction collective : *« j'vais gagner un peu de temps par rapport au groupe précédent : voyez si on met la flèche ici….* » . Dans l'entretien post-séances, il nous confirme la découverte pendant la session (1) : *« les coordonnées du pointeur étaient affichées à l'écran ! »*; *« Regarde, là ici, là, x zéro, y zéro ! J'l'avais pas vu mais en fait quand tu déplaces t'as la position exacte ! »*.

De même, bien que plus tard (session 2), René saisit la connaissance (**b**). Mais une fois ce repère pris, il identifie aussitôt les difficultés associées à des positions non initialisées. Dans un échange avec un élève, il exprime clairement le regret de ne pas l'avoir spécifié collectivement comme il l'a fait pour **(a)** : *« y a un p'tit point où tu, euh, où d'ailleurs qu'on n'a pas précisé en commun… »*. Si la question liée à une position initiale dans des programmes avec déplacements est ainsi identifiée, le besoin similaire d'initialiser une orientation dans des programmes avec rotations reste non identifié, laissant les élèves concernés bloqués. Le tableau1 synthétise les prises de repères sur **(a), (b), (c)**, qui s'enrichissent le long des 2 séances :

Prise de repères	Séance 1er groupe	Séance 2e groupe
a : Coordonnées Repère	Coord : NON au début, prise de conscience dans la séance Repère : NON	Coord. : OUI et va plus loin, demandant pour ce groupe : « départ et arrivée différents » Repère : NON
b : Nécessité d'initialiser une position ou orientation de départ	NON	NON au départ, mais prise de conscience durant la séance pour les déplacements. Non pour les orientations.
c Scripts parallèles	NON au début, puis OUI	OUI et NON

Tableau 1 *- Evolution dans le temps des GIpe-pro de René sur les connaissances (a), (b) ou (c)*

3. Leviers pour gérer les séances le temps de prendre des repères en parallèle

René a 14 ans d'expérience, ses pratiques sont en bonne partie stabilisées et cohérentes (Robert & Rogalski, 2002). L'irruption de ce nouvel outil déstabilise ces équilibres pour évoluer vers une nouvelle stabilité préservant la cohérence dans l'exercice du métier. Quels

processus jouent dans cette évolution ? L'analyse ci-dessus en montre un premier mécanisme : la prise de repères sur l'usage de Scratch. Nous en décrivons ici un second : la réduction de la distance portée par Scratch.

L'activité constructive (Samurçay et Rabardel, 2004) se déroulant lors des séances mêmes, comment René les gère-t-il alors le temps d'une prise de repères ? Il dit lui-même avoir besoin de temporiser pour connaître plus. Notre hypothèse est que René a suffisamment de repères par ailleurs (i.e. hors technologies), pour lancer des séances innovantes sans être déstabilisé, séances qui donneront elles-mêmes de nouveaux repères. En effet, selon nous, ses choix d'apprentissage visés avec Scratch (ni mathématiques, ni informatiques, mais transversaux ou visant le Français) ne sont pas fortuits : ils s'expliquent, à nouveau, en termes de repères acquis par l'enseignant, *minimisant la distance* que le logiciel introduit à ses pratiques usuelles. René est en effet très à l'aise dans l'enseignement du Français, où il a l'habitude de mener des projets, et choisir des visées transdisciplinaires (travail en groupe, socialisation des élèves, projet de classe) permet de même de retrouver des repères familiers et qui peuvent se transférer aisément, car exempts de concepts sous-jacents, ou de concepts trop dépendants d'une discipline donnée.

V. DISCUSSION ET PERSPECTIVES POUR LA RECHERCHE ET LA FORMATION

1. Distance et repères

Les processus mis en œuvre par René, face à la distance générée par Scratch, permettent de revenir sur la problématique de l'intégration des TIC en prolongeant, par l'idée de *repères*, le travail sur la notion de *distance* évoquée plus haut avec l'intégration du tableur ou de l'algorithmique. En effet, la réduction de la distance pour retrouver des repères auxquels se référer, observée ici, est autre phénomène commun avec ces recherches (Tab.2). Les recherches précitées s'analysent ainsi aisément à l'aune de cette notion. Par exemple, le facteur qui rendait la distance instrumentale du tableur trop grande, freinant son intégration en algèbre, avait été analysé comme étant épistémologique. De fait, le tableur en algèbre fait perdre trop de repères sur cette dimension-là, ce qui avait mené l'enseignante observée à tourner son intégration du tableur vers les statistiques où la distance est moins grande qu'en algèbre. Les repères didactiques éclairent ainsi l'idée de distance : s'il y a distance (à des pratiques installées) perturbant l'enseignant, et pas simple nouveauté s'ajoutant, sans vagues, aux pratiques en cours, c'est parce que des repères sont déjà là. Cette tension distance-repères acquis par l'enseignant nous semble donc utile pour expliquer des phénomènes relevés dans les situations d'intégration des TIC : difficultés, résistances, réduction de la distance.

Distance introduite	Impact de la distance sur les objets et connaissances	Pratiques enseignantes	Réduction de la distance-Rôle des repères
Par le tableur en algèbre	2 mondes algébriques distincts	- Changement : niveau supérieur de classe - Changement : introduction sur des contenus anciens et non nouveaux - Changement de domaine : statistiques	- Niveau : réduit les difficultés d'instrumentalisation - Contenus anciens : réduit la quantité de nouveau et de repères à acquérir - Distance ou perte repères moins importante en statistiques qu'en algèbre
Algorithmique lycée	domaine attaché à programmation et informatique	- Confiné devoirs-maisons, évitement - Pratiques juxtaposées, séparées du reste	- Resistance par des pratiques préservant les repères des pratiques usuelles
Scratch à l'école primaire	Contenus mathématiques non identifiés	- Déplacement vers la discipline français - Ou vers des objectifs plus transverses (travail en groupe, explorer, essai-erreurs…)	- Objectifs d'apprentissage détournés pour retrouver, via des contenus bien connus, des repères d'enseignement

Tableau 2 *- Phénomènes de réduction de la distance dans les 3 recherches*

Parler de « distance à… » suppose ainsi l'existence en amont d'un ensemble de repères auxquels les pratiques nouvelles se réfèrent. Ces repères préexistants (qui peuvent ainsi être construits, reconstruits, perturbés, modifiés, recherchés…) permettent à l'enseignant de naviguer au quotidien. Notre définition inclue cette idée de guidage de l'activité ultérieure : un repère didactique[6] est un élément, conscient ou non, de savoir professionnel, acquis par l'enseignant, et qui le guide dans son action. Cette fonction de guidage est essentielle. Il ne s'agit pas simplement de connaissances permettant de retrouver un équilibre localement perturbé par l'introduction de l'outil. En nommant « repères » ces connaissances construites, nous souhaitons pointer ce rôle de balises effectives pour l'activité de l'enseignant, toutes les connaissances n'ayant pas cette fonction-là. Nous cherchons aussi à distinguer la nature des différents types de repères existants. Pour cela, les facteurs de distance, catégorisés par les composantes de la Double Approche, fournissent une structuration théorique des repères qui peuvent ainsi être : institutionnels, cognitifs, médiatifs... Pour que l'intégration d'un nouvel outil puisse, celui-ci ne doit alors pas créer une trop grande distance aux pratiques sur ces diverses composantes où l'enseignant a des repères. Dans chacune d'elle, contrant cette tension distance-repères qui peut donc s'avérer un frein à l'intégration si trop peu de repères demeurent, on trouve à l'opposé des légitimités (Tab.3), facteurs favorisant potentiellement l'intégration : légitimités sur les plans socio-institutionnel, didactique (cognitif et médiatif) ou personnel (notamment *épistémologie* et *représentations* du professeur).

Composantes	+ : Légitimité du « nouveau »	- : Tension repères-distance
Socio-institutionnel -Institutionnelle -Sociale	-Légitimité Institutionnelle : *programmes, inspection, examens* -Légitimité Sociale : *évolutions sociétales, modernité, prégnance de la technologie*	nécessitent une appropriation : des repères à construire, même si les programmes en donnent.
Didactique -Cognitive -Médiative	-Légitimité Cognitive *(ex : LDG et figure géométrique, tableurs et entrée dans l'algèbre…)* -Légitimité Médiative *(ex : gain de temps dans le tracé des constructions géométriques, calcul d'un grand nombre de données, simulation d'expériences aléatoires, calculs automatisés, tracés de courbes, illustration…)*	A priori (enseignant ordinaire) : → repères cognitifs à acquérir → repères médiatifs à acquérir Des GIpro à développer, en termes d'orchestration notamment pour gérer les GI des élèves
Personnelle – Epistémologie et – Représenta° de l'enseignant	- Légitiment ou freinent - *(variable suivant les enseignants)* -Légitimité Epistémologique : sur les disciplines impactées (épistémologie de la discipline et *épistémo* de l'enseignement/ apprentissage de cette discipline). La tension ici est fonction de la distance que représente le nouveau aux disciplines usuellement enseignées -Légitimité dans les Représentations : non spécifiquement disciplinaires)	

***Tableau 3** - Légitimités, repères et distance à l'ancien : la distance aux pratiques pose problème si trop peu de repères demeurent aux niveaux institutionnel, cognitif et mdiatif (facteurs négatifs). Cette perte est compensée par les légitimités perçues/conférées sur ces composantes ou sur la composante sociale (facteurs positifs), et éventuellement par la composante personnelle (facteurs positifs ou négatifs selon la personne).*

Au final, l'intégration (qualitative et quantitative) de nouveau (artefact, domaine, discipline) résulte pour chaque sujet de cette mise en balance entre les légitimités perçues et les différentes tensions distance-repère de ces composantes.

La distance est problématique lorsque les repères sont bousculés sans que de nouveaux ne soient envisagés. Ceux-ci peuvent se créer soit par la formation, les ressources, soit en les imaginant soi-même ou en tentant malgré tout l'expérience. Comme pour les schèmes dans lesquels ces connaissances vont intervenir, un 1er essai créera de nouveaux repères pouvant donner une activité bien différente au 2e essai, etc. A plus grande échelle, l'expérience multipliée de nouvelles situations peut doter l'enseignant de repères assez robustes pour agir face à une situation inédite, pourvu qu'elle ne soit pas trop distante de ce qui a été vécu dans cette expérience, ou qu'il puisse l'en approcher. Autrement dit, un enseignant expérimenté a

[6] Le terme « didactique » est pris ici au sens courant, pour préciser que les éléments considérés sont ceux qui ont trait à l'enseignement-apprentissage (y compris gestion de classe par exemple).

non seulement plus de repères, mais est susceptible d'en transposer-adapter d'anciens pour s'en créer de nouveaux plus rapidement et facilement qu'un novice, ce qui interroge la formation.

2. Perspectives pour la recherche et la formation

Le cas de René mis en perspective avec d'autres recherches apporte des éléments de compréhension des pratiques intéressant tant la recherche que la formation. En situation où le contexte éloigne les enseignants de leurs pratiques habituelles (nouvel artefact tel le tableur en l'algèbre, ou nouveau domaine tel l'algorithmique en mathématiques, ou nouvelle discipline telle l'informatique à l'école), l'inédit est géré à l'aide de repères soit construits au fil des séances, soit anciens, via des stratégies de réduction de la distance permettant de revenir en terrain connu. Repères didactiques et distance sont ainsi en jeu dans ces terrains.

Pour creuser au niveau théorique, il faudrait continuer à investiguer, appuyée de cette méthodologie, ce que recouvrent ces repères et leurs rôles dans les pratiques en observant d'autres cas, ainsi que les prochaines expériences de ceux déjà observés (de quels types sont les repères élaborés : repères de gestion de classe? disciplinaires? transdisciplinaires?...) et analyser l'évolution de leurs GI. En outre, des liens seraient à creuser avec d'autres notions comme les *schèmes* (ici professionnels ; en lien avec la théorie de l'Activité), ou les travaux anglo-saxons sur les *connaissances* (modèle TPACK[7]), et ceux sur les *beliefs*[8] (Fives and Gill, 2015), qui éclairent des processus plus inconscients.

Du point de vue de la formation, si les repères didactiques s'avèrent cruciaux, plusieurs questions se posent : comment en faciliter l'acquisition ? Certains peuvent-ils plus facilement s'acquérir en autonomie que d'autres ? Peut-on raisonnablement miser sur l'expérience seule pour créer des repères didactiques d'enseignement de concepts informatiques ? Les enseignants ne paraissant pas en difficulté grâce à la mise en place de stratégies de « substitution », quelle raison les ferait se tourner vers des savoirs qu'ils n'ont pas même repérés et qu'est-ce qui pourrait leur donner ces repères ? Ces réflexions indiquent des pistes pour les ressources et plus généralement pour les formations sur les besoins des enseignants d'élaborer de nouveaux repères didactiques, en appui ou non sur des situations antérieures. Les cas étudiés ici indiquent en effet que ces ressources et formations doivent jouer sur les différentes dimensions des repères, dimensions qu'il ne faudrait pas séparer pour espérer des changements dans les pratiques : 1) connaissances disciplinaires des domaines, des praxéologies possibles et 2) connaissances didactiques en lien avec ces domaines (cognitifs, médiatifs, instrumentaux, y compris de gestion de classe qui rentre dans le médiatif et dans l'instrumental avec les orchestrations, mais aussi de gestion de classe au sens plus large). Selon nous, si certains repères didactiques peuvent s'acquérir par le développement des GIpro et GIpe de l'enseignant, un accompagnement en formation et ressources est nécessaire pour que des repères conceptuels se mettent en place.

REFERENCES

Durand M., Dupont J., & Soli M. (2016) Dimensions culturelles de l'alignement des canetons. In L. Theis (Éd.), *Actes du colloque Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* (pp. 3333-4444). Alger : Université d'Alger.

[7] Koehler&Mishra 2009 (développement du modèle PCK de Shulman 1986), non basés sur la Double Approche
[8] croyances

Artigue M. (2002) Learning Mathematics in a CAS Environment: The Genesis of a Reflection about Instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning 7* (3), 245-274.

Benton L., Hoyles C., Kalas I. et al. (2017) Bridging Primary Programming and Mathematics: Some Findings of Design Research in England. *Digital Experiences in Math Education 3*(2), 115-138.

Caron F. (2007) Au cœur de « la calculatrice défectueuse » : un virus qu'on souhaiterait contagieux ! *Petit x 73*, 71-82.

Del Notaro L. & Floris R. (2011) Calculatrice et propriétés arithmétiques à l'école élémentaire. *Grand N 87*. 17-49.

Drijvers P., Godino J. D., Font V., & Trouche L. (2013) One episode, two lenses. A reflective analysis of student learning with computer algebra from instrumental and onto-semiotic perspectives. *Educational Studies in Mathematics, 82* (1), 23-49.

Guin D, Trouche L. (eds.) (2002) *Calculatrices symboliques. Faire d'un outil un instrument du travail mathématique, un problème didactique*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Haspekian M. (2017) Computer science in mathematics new curricula at primary school: new tools, new teaching practices? In G. Alon & J. Trgalova (Eds.), *Proceedings of ICTMT 13-2017* (pp.23-31). Lyon: Université de Lyon 1.

Haspekian M. (2014) Teachers' instrumental geneses when integrating spreadsheet software. In Clark-Wilson, Robutti, Sinclair (eds.) *The Mathematics Teacher in the Digital Era* (pp.241-275). Dordrecht : Springer.

Haspekian M. (2006) Evolution des usages du tableur. In *Rapport intermédiaire de l'ACI-EF Genèses d'usages professionnels des technologies chez les enseignants*, disponible à : http://gupten.free.fr/ftp/GUPTEn-RapportIntermediaire.pdf.

Haspekian M., Gélis JM. (soumis) Introduction de l'informatique dans les programmes de mathématiques : nouveaux outils, nouvelles pratiques ? *STICEF*, soumis mars 2017.

Haspekian M., Nijimbéré C. (2016) Favoriser l'enseignement de l'algorithmique : une question de distance aux mathématiques ? *Education et Didactique, 10*(3), 121-135.

Lagrange J.B. (2000) L'intégration d'instruments informatiques dans l'enseignement : Une approche par les techniques. *Educational Studies in Mathematics 43*(1), 1-30.

Ministère de l'éducation nationale (2015) Programme d'enseignement du cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2), du cycle de consolidation (cycle 3) et du cycle des approfondissements (cycle 4). *Bulletin Officiel du 26 novembre 2015.*

Rabardel P. (1995) *Les hommes et les technologies : Approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Armand Colin.

Resnick M. (2007) Sowing the seeds for a more creative society. *Learning & Leading with Technology, 35* (4), 18–22.

Robert A., Rogalski J. (2002) Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques: Une double approche. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 2* (4), 505-528.

Trouche L. (2004) Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations, *International Journal of Computers for Mathematical Learning 9*, 281-307.

Samurçay R., Rabardel P. (2004) Modèles pour l'analyse de l'activité et des compétences : propositions. In R. Samurçay & P. Pastré (dir.), *Recherches en didactique professionnelle* (pp. 163-180). Toulouse : Octarès.

DÉVELOPPEMENT DES USAGES DU NUMÉRIQUE ÉDUCATIF DANS LE CONTEXTE DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES AU CONGO – BRAZZAVILLE :

CAS DE LA PLATEFORME WIMS

MALONGA MOUNGABIO[*] Fernand – TSIKA KIMBATSA [*] Paul
MOUYAMA NGOMA [*] Milca – DENYS [**] Bernadette

Résumé – De plus en plus, de nombreux outils technologiques sont créés pour une diversification des pratiques pédagogiques. Nous rapportons ici les éléments d'une étude *en cours* sur une expérimentation concernant la mise en place, dans un nombre limité d'établissements, de micro-serveurs rendant l'usage de la plateforme WIMS possible sur un ensemble d'ordinateurs, sans connexion internet. L'étude vise aussi à examiner les types de tâches, sur WIMS, en vue de développer le raisonnement et l'autonomie des élèves.

Mots-clefs : Numérique éducatif ; WIMS ; Classe virtuelle ; Enseignement ; Mathématiques.

Abstract – An ever-increasing number of technological tools are being created to meet the needs of diverse teaching practices. We report on the elements of an ongoing study concerning an experiment in which a micro-servers were set up in a small number of institutions, thereby enabling the use of the WIMS platform on a group of computers with no need for Internet connections. The study also examines the types of tasks, on WIMS, which can develop the students' reasoning and autonomy.

Keywords: Digital educational ; WIMS ; Virtual classroom ; Education ; Mathematics.

I. INTRODUCTION

L'informatisation de la vie professionnelle, ainsi que la diffusion des Technologies de l'Information et de la Communication (TIC) dans la vie quotidienne, permettent la multiplicité des sources d'informations et de culture qui ne laissent pas insensibles les responsables du système éducatif de la République du Congo[1] : pour ceux-ci, les nouvelles technologies apparaissent comme un levier pour l'amélioration de la qualité de l'enseignement (SSE, 2015).

Se pose donc le problème à la fois de révision des curricula et de formation des formateurs et des enseignants qui doivent participer à l'intégration des nouveaux outils technologiques. De plus, dans les programmes des enseignements primaire et secondaire, l'utilisation des Technologies de l'Information et de la Communication dans l'Enseignement (TICE) ne fait pas encore partie des compétences exigibles.

De plus en plus, des projets de formation et de sensibilisation à l'usage des TICE sont réalisés. C'est le cas du projet « Production des Ressources Numériques pour l'Enseignement des Mathématiques en Afrique Centrale (PReNuM-AC) » qui fournit des éléments nécessaires à la réalisation de notre étude, en particulier en ce qui concerne l'utilisation de la plateforme WIMS (Web Interactive Multipurpose Server).

[*] Université Marien Ngouabi, ENS – République du Congo – malongaf@gmail.com
[*] Université Marien Ngouabi, ENS – République du Congo – paultsikakimbatsa@gmail.com
[*] Université Marien Ngouabi, ENS – République du Congo – arcencieltambour@gmail.com
[**] Groupe de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques en Afrique, Université Paris Diderot – France – bernadette.denys@univ-paris-diderot.fr
[1] République du Congo que nous appelons aussi Congo-Brazzaville.

En effet, notre étude s'appuie sur une formation à l'utilisation de la plateforme WIMS par un groupe d'enseignants évoluant dans des établissements publics dits « lycées d'excellence[2] ».

Avant de présenter nos questions de recherche, nous précisons quelques éléments du contexte sur l'origine de notre recherche, notamment notre participation au projet.

II. PROJET « PReNuM-AC »

L'étude que nous présentons ici se situe dans le cadre des suites du projet « PReNuM-AC) ». Ce projet, réalisé de 2012 à 2015, s'est appuyé localement sur l'Ecole Normale Supérieure (ENS) de Brazzaville (République du Congo) et sur l'Ecole Normale Supérieure de Yaoundé (République du Cameroun) ainsi que sur les inspecteurs pédagogiques de mathématiques des deux pays. Les organismes universitaires en France impliqués dans ce projet sont l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (IREM) et le Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR) de l'Université Paris Diderot.

Le projet PReNuM-AC a visé le développement des usages des outils en ligne (plate-forme de formation, base d'exercices et document d'évaluation) pour remédier à l'isolement des enseignants de mathématiques. Le projet a été centré sur la production et la diffusion de ressources pour l'enseignement des mathématiques en classe de Terminale Scientifique, comportant notamment des exercices provenant de la plateforme WIMS.

Le développement de ce projet rejoint les intentions des responsables du système éducatif du Congo-Brazzaville concernés par les questions d'intégration des outils technologiques dans l'enseignement.

III. PROBLÉMATIQUE

Notre problématique consiste à examiner les modalités d'intégration de l'utilisation de la plateforme WIMS dans la pratique des enseignants.

1. Question de recherche

Notre principale question est la suivante :

Comment concevoir une formation d'enseignants à l'utilisation de WIMS, dans le but de mettre en place des situations d'apprentissage complémentaires[3], adaptées aux élèves des lycées d'excellence ?

Trois questions fondamentales en découlent :

- En quoi la plateforme WIMS peut-elle contribuer à la diversification des apprentissages ?
- Quels sont les savoirs sur la pratique enseignante, nécessaires pour le développement des activités d'apprentissage complémentaires ?
- Quels sont les types de situations d'apprentissage à choisir à partir de la plateforme WIMS ?

[2] Les « lycées d'excellence » sont des établissements publics créés dans le souci de promouvoir l'excellence, relever le niveau du système éducatif, poursuivre la formation d'une élite dans les domaines scientifique, littéraire et artistique.

[3] Par « apprentissage complémentaire », nous entendons l'ensemble des mécanismes visant à acquérir des savoirs et savoir-faire non explicités par les contenus des programmes scolaires.

2. Objectif de l'étude

Notre objectif est de former un groupe d'enseignants intervenant dans des lycées d'excellence, à l'utilisation de WIMS sur un ensemble d'ordinateurs portables, sans connexion internet et sans installation particulière.

Aussi, nous nous proposons d'examiner les possibilités de mettre en place une communauté de pratique au sens de Wenger (1998). Cette communauté de pratique à l'utilisation de WIMS est formée d'enseignants[4] de l'Ecole Normale Supérieure de Brazzaville, des inspecteurs de mathématiques et des enseignants de mathématiques des lycées d'excellence. En effet, dans ces établissements, les enseignants ont un accès facile à l'outil informatique, via les salles multimédias de leurs établissements respectifs.

Cette communauté a pour missions :

- d'analyser les potentialités didactiques offertes par WIMS dans le contexte de l'apprentissage des mathématiques dans les lycées du Congo-Brazzaville.

- d'élaborer des situations de classe pour participer au développement de l'autonomie des élèves à travers des tâches de résolution des problèmes.

Ce travail en communauté doit permettre de participer au développement des compétences techniques et cognitives des enseignants, novices dans l'usage du numérique éducatif.

IV. CADRE THEORIQUE ET METHODOLOGIE

La communauté de pratique à l'utilisation de WIMS que nous entendons mettre en place est composée d'acteurs non-experts dans le domaine des TICE. Les travaux à mener dans le groupe devraient conduire l'activité qui sous-tend le *processus d'intériorisation des compétences techniques et cognitives*, nous nous appuyons sur l'approche instrumentale de Rabardel (1995 ; 2005). Cette approche s'appuie sur la distinction artefact outil/instrument et sur la genèse instrumentale.

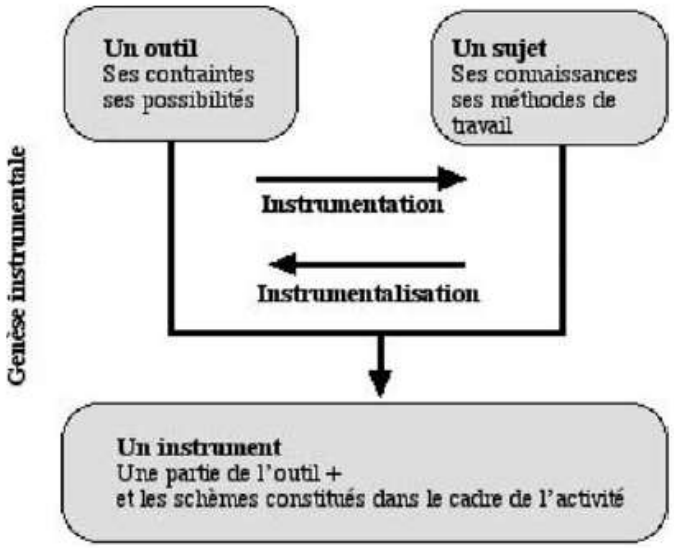


Figure 1 *– La genèse instrumentale, combinaison de deux processus.*

La genèse instrumentale est le processus de construction des instruments.

[4] Il s'agit des membres de l'Unité de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques

> « La construction de l'instrument doit se comprendre dans un double mouvement [voir la figure 1] : un mouvement *d'instrumentalisation* dirigé vers l'outil (l'usager met l'outil "à sa main", l'adapte à ses habitudes de travail) et un mouvement *d'instrumentation* dirigé vers l'usager (les contraintes de l'outil contribuent à structurer l'activité de l'usager) ». (Trouche, 2004).

Ce cadre théorique doit nous permettre d'analyser le processus de genèse instrumentale d'un groupe d'enseignants utilisant des outils offerts par la plateforme WIMS.

V. METHODOLOGIE

1. Choix d'utilisation de l'outil WIMS

WIMS est un outil d'apprentissage en ligne qui, en utilisant un navigateur Internet, permet d'accéder à une base d'exercices interactifs et de créer des classes virtuelles. La structure de WIMS est particulièrement intéressante pour les activités d'enseignement des mathématiques, dans lesquelles le serveur permet d'analyser individuellement le comportement des élèves, et de proposer des activités adaptées à chacun d'eux selon le niveau de difficultés.

L'accès à Internet nécessaire à l'utilisation de WIMS n'est pas garanti dans nombre de structures scolaires au Congo-Brazzaville. Nous avons donc eu recours à l'utilisation des boitiers Gygabyte Brix GB-BXBT-2807. Chacun d'eux joue le rôle de micro-serveur, dans lequel on y a installé WIMS et un dispositif de connexion à distance (wifi).

Utiliser un micro-serveur Gigabyte pour faire des mathématiques présage des difficultés tant du point de vue des enseignants[5] que des élèves[6]. Ainsi nous avons fait le choix de travailler avec les enseignants évoluant dans les lycées publics dits lycées d'excellence.

2. Mise en place d'une formation d'enseignants à l'usage de WIMS

Le choix de notre cadre théorique nous conduit à faire une analyse du déroulement de la formation (Artigue, 2002) afin de déceler les différentes genèses instrumentales.

Nous proposons une formation à 20 enseignants et inspecteurs : 12 enseignants évoluant dans 4 établissements dits d'excellence et 8 inspecteurs de mathématiques.

VI. ANALYSE DE LA FORMATION ET DES SITUATIONS D'APPRENTISSAGE

La formation a pour but de définir des stratégies d'élaboration des situations d'apprentissage selon des critères de pertinence. Cette formation s'organise en 3 étapes :

- choix de thèmes de formation, laissé à la charge des participants,
- analyse et choix de types de situations d'apprentissage,
- élaboration d'une mise en scène de la situation choisie.

1. Choix de thèmes

Cette étape permet, à partir des échanges entre enseignants et inspecteurs, de recenser les notions des programmes de lycée dont la mise en œuvre est reconnue complexe ou difficile.

[5] Les enseignants doivent intégrer ce nouvel outil dans leurs pratiques de classes et exécuter les contenus d'enseignement.

[6] Les élèves ont la responsabilité de s'inscrire dans des classes virtuelles, résoudre des problèmes interactifs programmés par leurs enseignants

La notion de fonction numérique en classe de première C[7], dans son approche qualitative, a vite retenu l'attention des participants à la formation. Ils constatent que, lors de l'étude des fonctions, les élèves exécutent des tâches suivant le schéma classique :

fonction→ fonction dérivée → tableau de variations → courbe

Figure 2 *– Schéma classique de l'étude d'une fonction en première scientifique*

Les élèves éprouvent beaucoup de difficultés dans des situations où on part, par exemple, de la courbe de la fonction dérivée (représentation graphique), si on leur demande d'en déduire des informations sur la fonction à étudier (monotonie, signe, etc.).

2. Analyse et choix des situations

Cette étape se déroule en deux phases.

Phase 1 : Initiation à l'utilisation du micro-serveur

La première phase est la phase d'initiation à l'utilisation du micro-serveur Gigabyte. La formation permet de mieux cerner le fonctionnement des boitiers Gigabyte et les différentes applications qui y sont installées.



Image 1 *– Boîtier Gygabyte GB-BXBT-2807*

Phase 2 : Utilisation de la plateforme WIMS

Cette deuxième phase consiste à s'approprier les fonctionnalités de la plateforme WIMS, puis à analyser et sélectionner les exercices destinés aux élèves.

Les participants à la formation sont conduits à se connecter au micro-serveur pour explorer la plateforme WIMS, notamment la création des classes virtuelles et des feuilles d'exercices.

Une classe virtuelle est un espace privé sur le serveur WIMS, protégé par des mots de passe. L'enseignant, "auteur" et responsable de la classe, y propose du travail à ses élèves, essentiellement des exercices avec variables aléatoires et corrections automatiques.

A partir de cette classe virtuelle, l'enseignant peut également dialoguer avec les élèves (message du jour, forum, cahier de texte, questionnaires...) et suivre leur travail (notes, statistiques d'activités).

Les exercices et documents sont :

- soit importés dans une classe virtuelle à partir des ressources disponibles dans la base WIMS,
- soit créés par l'enseignant directement dans sa classe virtuelle.

[7] Première scientifique

Après cette phase, les participants à la formation sont amenés à explorer sur la plateforme WIMS, les ressources existantes en rapport avec la notion de fonction. Deux types de situations d'apprentissage ont été choisis.

Le premier type fait appel à une correspondance entre la courbe d'une fonction *f* et celle de la fonction dérivée de *f*.

Le deuxième type fait appel à une correspondance à établir entre la courbe d'une fonction *f* et celles d'autres fonctions associées à *f*, telles que $f(-x)$, $f(x-1)$, $-f(x)$.

3. Élaboration d'une mise en scène de la situation choisie

A cette phase, la charge revient à chaque participant d'élaborer une mise en scène de la situation. Le travail fournit comporte une classe virtuelle, une feuille d'exercices contenant des exercices sur les fonctions.

VII. PRESENTATION D'UN EXEMPLE DE SITUATION

1. Exemple d'une mise en scène d'une situation

Nous présentons ci-dessous l'exemple d'une mise en scène d'une situation élaborée par un enseignant. La feuille d'exercices créée contient deux exercices choisis dans la base d'exercices de WIMS dont les titres sont respectivement « Détermination d'une fonction » et « Fonctions graphiques ». Ci-dessous, nous présentons le contenu du premier exercice.

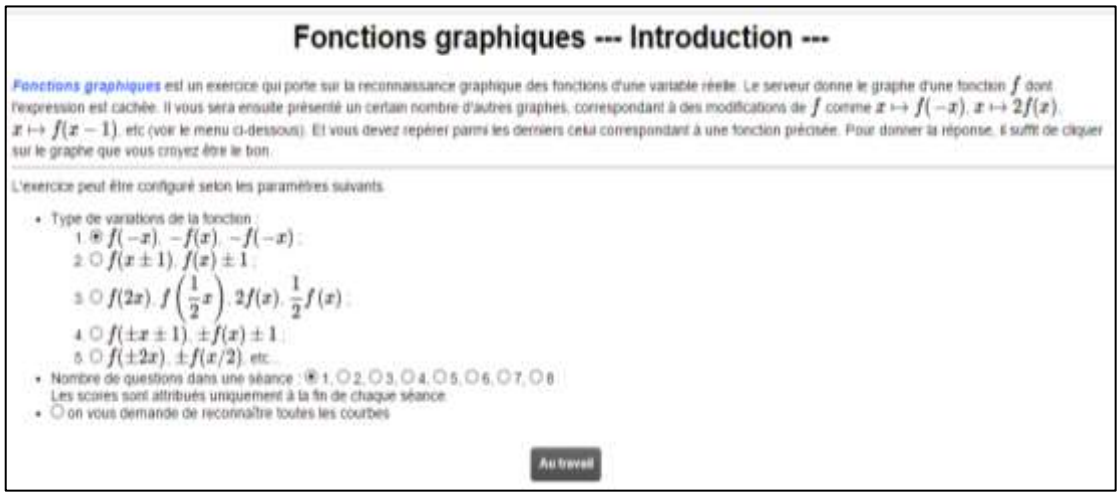


Image 2 *– Page de présentation de l'exercice*

Cette page permet de choisir le degré de complexité de l'exercice en indiquant le nombre de séances et le type de variations de fonction.

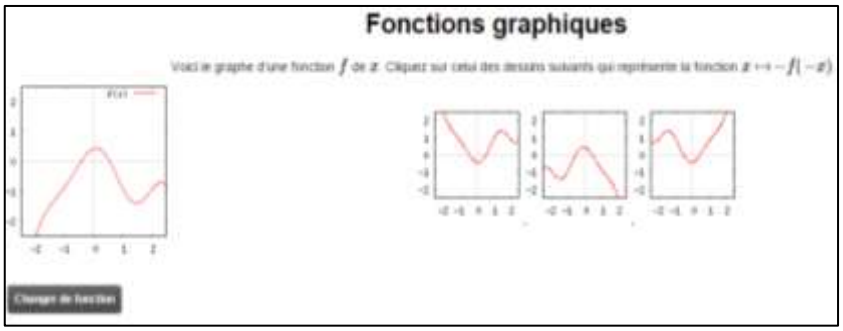


Image 3 *– Contenu de la première séance*

Cet exercice permet de travailler sur la correspondance entre la courbe d'une fonction f donnée et des courbes candidates à être celle de la fonction $x \mapsto -f(-x)$.

2. Analyse de la situation

L'inventaire des savoirs nécessaires à la réalisation de cette situation permet de juger de sa pertinence. En effet, pour le traitement de cette situation, l'apprenant doit mobiliser ses connaissances sur la symétrie par rapport à l'axe des abscisses et la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées. Par lecture graphique, on parvient à établir la correspondance entre la courbe de la fonction *f* et celle de la fonction $x \mapsto -f(x)$. Le choix de cette situation résulte de son caractère novateur pour les élèves qui sont habitués au schéma classique (cf. **Figure 2** – Schéma classique de l'étude d'une fonction en première scientifique.

Nous reprenons le schéma proposé par Trouche (2004) décrivant la genèse expérimentale.

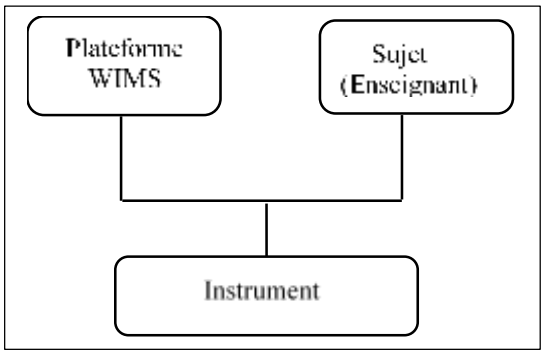


Figure 3 *– schéma de la génèse instrumentale*

Des interactions entre la plateforme WIMS (artefact) et le sujet (enseignants/inspecteurs) permet de constater la création de nombreux instruments. Par exemple, une classe virtuelle vient d'une action du sujet sur la plateforme. Cette classe devient un outil d'évaluation pour le créateur de la classe (sujet) qui peut contrôler a posteriori le travail de ses élèves ; en effet, les la présence de l'enseignant (sujet) n'est plus nécessaire pendant le travail des élèves puisque WIMS permet une traçabilité des tâches réalisées par l'élève.

VIII. CONCLUSION

Notre étude consiste à expérimenter l'apport d'un dispositif informatique dans la pratique des enseignants qui doivent travailler pour mettre en place des exercices interactifs visant le développement de l'autonomie et le raisonnement des élèves du secondaire évoluant dans des lycées d'excellence au Congo-Brazzaville.

La formation mise en place a conduit les enseignants et inspecteurs, novices aux usages de WIMS, à un développement de la dialectique entre l'artefact, ici la plateforme WIMS, et le sujet (enseignants/inspecteurs). Ce dernier élabore des instruments au sens de Rabardel sous forme de classes virtuelles dans lesquelles il peut insérer des feuilles d'exercices interactifs.

L'analyse de la formation nous permet de constater que l'intégration des schèmes d'utilisation associés à l'artefact ne va pas de soi. En effet, la plupart des participants à la formation n'ont pas un rapport courant avec les outils informatiques. Cependant, d'une manière générale, on peut considérer que le processus de genèse instrumentale des enseignants et inspecteurs formés à l'usage de WIMS se fait sans trop de difficultés en raison de leur maîtrise des savoirs mathématiques mis en jeu dans le choix des exercices interactifs.

Cette étude montre que le recours à WIMS permet d'aborder autrement l'apprentissage de la notion de fonction, ce qui enrichit les pratiques des enseignants. Penser à intégrer les TICE dans le système d'enseignement des mathématiques impose aux enseignants d'envisager des échanges entre pairs, créant ainsi des conditions de développement des communautés des pratiques : on ne doute pas de leur rôle important dans le management de la connaissance.

RÉFÉRENCES

Artigue M. (2002). Ingénierie didactique : quel rôle dans la recherche en didactique aujourd'hui, *Revue Internationale des Sciences de l'Education*, n°8, 59-72.

Emprin, F. (2005). *Formation initiale et continue pour l'enseignement des mathématiques avec les TICE : cadre d'analyse des formations et ingénierie didactique*. Thèse de Doctorat. Université Paris-Diderot.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains.* Paris : Armand Colin.

Rabardel, P. (2005*), Instrument Subjectif et développement du pouvoir d'agir*. In Parbel P. et Pastre P. (eds) Modèles du sujet pour la conception, dialectiques activité-développement, Octarès, 11-31.

Trouche L. (2004). Environnements informatisés et mathématiques : Quels usages pour quels apprentissages ? *Educational Studies in Mathematics* 55: 181–197. Kluwer Academic Publishers

Wenger, E. (1998). *Communities of practice: learning, meaning and identity*. Cambridge: Cambridge University Press.

ENJEUX SÉMIOTIQUES DANS LA CONCEPTION D'UNE AIDE À LA RÉSOLUTION DE PROBLÈME DE PREUVE

VENANT[*] Fabienne – RICHARD[**] Philippe R.
GAGNON[**] Michel – HENRÍQUEZ RIVAS[**] Carolina

Résumé – Nous montrons comment les questions didactiques et informatiques qui émergent dans la conception d'un système de tuteur intelligent pour l'apprentissage de démonstration interagissent et se complètent. Le développement du système QED-Tutrix a nécessité une collaboration entre didacticiens et informaticiens, que nous présentons à travers la mise en place du processus d'accompagnement et de validation du travail de démonstration de l'étudiant, conformément au contrat didactique de la classe.

Mots-clefs : Tuteur intelligent, géométrie, démonstration, travail mathématique, genèse sémiotique

Abstract – We show how the didactic and computing questions that emerge in the design of an intelligent tutor system for demonstration learning interact and complement each other. The development of the QED-Tutrix system has indeed revealed the need for collaboration between didacticians and computer scientists, of which we give an overview through the implementation of the process of accompaniment and validation of the student's demonstration work, in accordance with the didactic contract of the class.

Keywords: Intelligent tutoring system, geometry, proof, mathematical work, semiotic genesis

Notre réflexion s'inscrit dans le questionnement sur la conception des technologies éducatives proposé dans le texte de cadrage du groupe 7. Nous proposons ici de montrer comment les questions didactiques et informatiques qui émergent dans la conception d'un système tuteur intelligent pour l'apprentissage de la démonstration s'inter-influencent et se complètent. L'élaboration du système QED-Tutrix a, en effet, fait apparaitre la nécessité d'une collaboration entre didacticiens et informaticiens dont nous donnons un aperçu à travers la question de l'accompagnement et de la validation du travail de démonstration de l'élève par le logiciel, dans le respect du contrat didactique de la classe. QED-Tutrix est conçu de façon à laisser à l'apprenant une liberté totale dans l'exploration du problème à résoudre, et dans le choix de la preuve, tout en lui proposant un accompagnement adapté à ses choix, et en respectant le contrat didactique habituel de la classe (Leduc et *al.*, 2016). Pour cela, le système doit être capable de suivre l'activité mathématique de l'élève, en s'appuyant sur ses propres résolutions des problèmes choisis. Cette phase de l'accompagnement pose aux informaticiens des défis liés à la représentation et à l'organisation des différents itinéraires de résolution pour un problème donné. Nous montrons ici comment une réflexion didactique peut, et doit, accompagner la résolution de ces défis, qui repose sur un processus d'extraction d'informations et d'appréhension des objets mathématiques à partir de l'énoncé de problème, que nous appelons genèse sémiotique en référence au modèle théorique des espaces de travail mathématiques (Kuzniak et Richard, 2014). Cette réflexion peut déboucher sur la question de l'élaboration de conjectures, de validation et d'acceptabilité d'une démonstration en contexte scolaire.

I. LA DEMONSTRATION : UNE ACTIVITE GEOMETRIQUE

La géométrie, plus particulièrement dans un contexte de démonstration, est souvent abordée comme une science qui constitue une « partie des mathématiques ayant pour objet l'étude de l'espace et des figures pouvant l'occuper » au sein de laquelle « les principes sont simples et

[*] Université du Québec Montréal – Canada – venant.fabienne@uqam.ca
[**] Université de Montréal – Canada – philippe.r.richard@umontreal.ca
[**] École Polytechnique de Montréal – Canada – michel.gagnon@polymtl.ca
[**] Universidad de La Frontera, Temuco – Chile – email carolina.henriquez@ufrontera.cl

absolument vrais sans aucune restriction » (TLFI). Selon cette définition, on pourrait croire que l'apprentissage de la géométrie s'effectue par adhésion aux concepts ou aux processus issus du modèle théorique existant, sans trop d'égard à la réalité de l'espace et des formes. Cependant l'apprentissage passe par une pratique qui s'ancre dans la réalité, par le fait même d'exercer une activité concrète. Dans cette perspective, résoudre un problème de preuve est une activité finalisée qui permet à l'élève d'effectuer son travail de mathématicien, en développant son sens géométrique. L'activité de démonstration favorise en effet la compréhension de la nécessité épistémique des propriétés (Coutat et *al.*, 2016), l'implémentation des concepts géométriques et le développement des compétences cognitives de l'élève (Richard et *al.*, 2016). Cependant, ainsi que le souligne Brousseau (2011), pour qu'une notion mathématique soit le fruit d'une activité mathématique, « il faut aussi que des alternatives plausibles lui soient opposables et que son choix soit le résultat d'une anticipation possible ». C'est pourquoi nous voulons que, au sein du système tutoriel, l'élève soit confronté à des problèmes complexes. Nous considérons qu'un problème est complexe quand il répond aux différentes exigences définies par Richard et *al.* (2011) : existence de différents processus de résolution (exigence heuristique) qui mobilisent un réseau de concepts et de processus mathématiques (exigence cognitive), reposent sur une approche argumentative et un raisonnement à plusieurs niveaux ou des routines non calculatoires (exigence discursive) et permettent de développer des compétences qui vont au-delà de la simple reproduction (exigence de compétence). Nous centrons notre exposé sur l'exigence heuristique, soit l'existence de différents processus de résolution, et la façon de la mettre en œuvre au sein d'un système tuteur. Pour pouvoir guider l'élève dans la résolution d'un problème complexe, QED-Tutrix doit anticiper l'ensemble de ces processus puis reconnaitre celui dans lequel l'élève s'engage. Nous présentons ci-dessous les choix de modélisation informatique qui se sont imposés dès le début de la conception du système.

II. MODELISATION DES PROCESSUS DE RÉSOLUTION : GRAPHE HPDIC

Lorsqu'un élève effectue son travail de mathématicien à l'école, le modèle des espaces de travail mathématique (Kuzniak et Richard, 2014) reconnaît spécifiquement l'activation de trois genèses, entre un plan épistémologique et un plan cognitif (**Figure 1**). Ces genèses permettent d'apprécier des questions comme celles de la création du sens, de la validation de propriétés ou de l'usage d'outils techniques en termes de coordination des genèses. Nous intéressons ici aux genèses sémiotiques et discursives sous-jacentes à l'activité de démonstration.

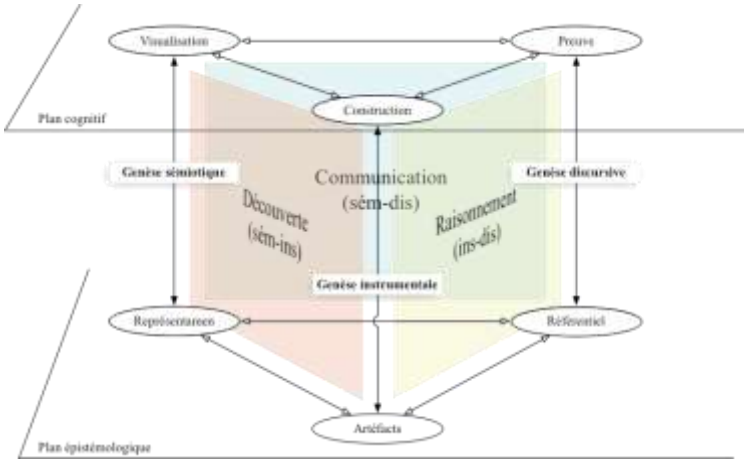


Figure 1 *– L'Espace de Travail Mathématiques et ses genèses.*

La genèse sémiotique est le processus par lequel les signifiants, qu'ils soient textuels ou figuraux, acquièrent leur statut d'objets mathématiques opérationnels. La genèse discursive est le processus par lequel les propriétés et les résultats organisés dans le référentiel théorique sont actionnés afin d'être disponibles pour le raisonnement mathématique et les validations discursives. Au sein du système tutoriel, ces genèses sont prises en charge par deux processus d'extraction et de traitement de l'information : extraction des hypothèses et des conclusions à partir de l'énoncé du problème (genèse sémiotique), et organisation de ces dernières en démonstrations acceptables sous forme d'un graphe d'inférence et d'un texte argumenté (genèse discursive). Une inférence est une opération logique consistant à conclure la vérité d'une proposition à partir d'autres propositions prises comme hypothèses, et d'une propriété ou d'une définition prise comme justification.

Considérons le problème suivant : ABCD est un parallélogramme de centre O ; On appelle M le milieu de [AB] et N le milieu de [DC] ; Démontrer que (OM) est parallèle à (BC).

La figure 2 présente, sous forme de graphe, une inférence à partir de deux hypothèses présentes dans l'énoncé du problème : *ABCD est un parallélogramme*, *O est le centre du parallélogramme*. Or, « le centre de symétrie d'un parallélogramme est le point d'intersection des diagonales », donc O est l'intersection des diagonales [AC] et [BD].

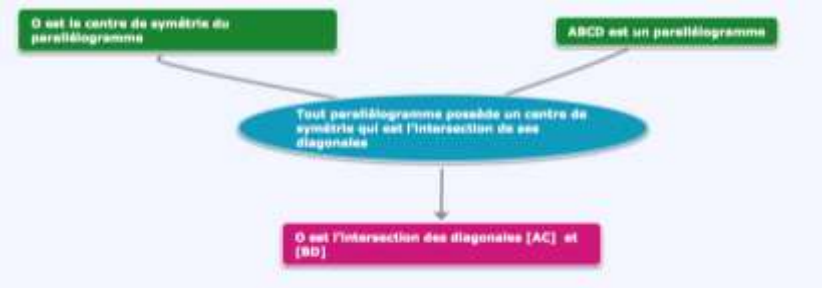


Figure 2 *– Représentation d'une inférence sous forme de graphe.*

Une preuve complète peut être représentée par un graphe rendant compte de l'enchainement des inférences qui la constitue. Deux inférences s'enchainent quand la conclusion de la première devient une hypothèse pour la suivante. Elle prend alors le statut de résultat intermédiaire. Nous appelons un tel graphe un graphe HPDIC car il contient des Hypothèses, des Conclusions, des résultats Intermédiaires et des Conclusions. (Leduc 2016, Tessier-Baillargeon 2016). Les propriétés et définitions acceptables sont consignées dans un fichier qui constitue le référentiel théorique du système. La constitution de ce fichier informatique est le fruit du travail des didacticiens de l'équipe et repose sur des observations en classe et de manuels scolaires.

III. MODELISER LA GENESE SEMIOTIQUE

La construction du graphe HPDIC constitue la pierre angulaire de l'architecture de QED-Tutrix. Le défi est de le générer, à partir d'un énoncé de problème. Il faut pour cela extraire le résultat à démontrer, mais aussi l'ensemble des hypothèses, et résultats intermédiaires qui vont intervenir dans les démonstrations possibles, et de les structurer en un enchainement d'inférences dont les justifications sont toutes issues du référentiel théorique. La figure 3

présente un graphe HPDIC[1] représentant six preuves possibles pour le problème mentionné dans la partie II.

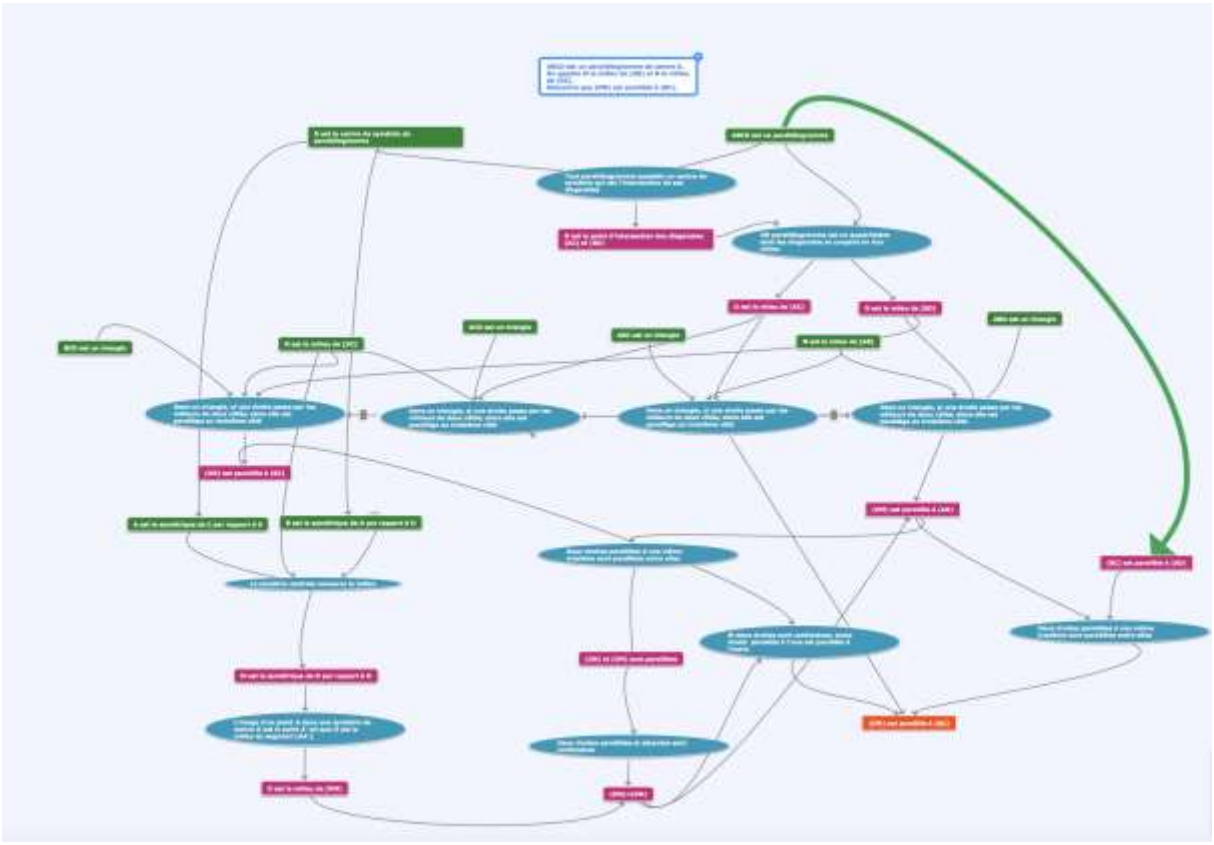


Figure 3 *– Exemple de graphe HPDIC*

On trouve dans ce graphe plusieurs types d'information :

- Les hypothèses explicites, comme *ABCD est un parallélogramme.* Ce sont les informations qui sont directement accessibles dans le texte, moyennant une analyse linguistique.
- Les hypothèses implicites. Ce sont des hypothèses qui ne nécessitent pas un pas d'inférence, mais dérivent directement des propriétés d'un objet présent dans une hypothèse lexicale. Par exemple *(AB) est parallèle à (CD)* est sous-entendu par *ABCD est un parallélogramme*.
- Les hypothèses dérivatives. Ce sont les hypothèses qui posent des objets intermédiaires que l'on doit considérer ou construire pour avancer dans un pas de démonstration. Ces objets sont potentiellement présents dans une hypothèse lexicale, mais ne sont pas explicitement décrits. Par exemple *ABC est un triangle* est porté par *ABCD est un parallélogramme*, qui sous-entend implicitement que les points ABCD ne sont pas alignés.
- Les hypothèses contextuelles. Ce sont les hypothèses qui dérivent implicitement du contrat didactique. Par exemple, *ABC est un triangle* est aussi une hypothèse contextuelle. Dans cette hypothèse, on suppose en effet qu'on ne considère pas le cas limite où les points A, B, C et D sont alignés. De même, dans le graphe de la figure 2, l'hypothèse *[AD] est parallèle à [BC]* est une hypothèse contextuelle. En toute rigueur,

[1] Une version plus lisible de ce graphe est disponible à l'adresse :
https://www.mindomo.com/mindmap/067937c9f30f47269cd3b9e3b7779d30

la propriété *être parallèle* ne s'applique pas à aux segments, mais aux droites qui les supportent. Cependant, certains enseignants acceptent la proposition *[AD] est perpendiculaire à [BC]* car elle découle de l'expression « les côtés opposés sont parallèles » utilisée dans la définition du parallélogramme plutôt que « les droites supports des côtés opposés sont parallèles ».

- Une conclusion explicite : le résultat à démontrer est ici clairement exprimé dans le texte. D'autres cas de figure sont envisageables, ainsi que le résume la figure 3 ci-dessous.

La génération du graphe HPDIC à partir de l'énoncé du problème débute par l'extraction des informations textuelles explicites à partir d'une analyse syntaxique. Il peut aussi s'agir d'informations graphiques codées directement sur une figure incluse dans l'énoncé. Dans notre exemple, il s'agit :

- d'une conclusion explicite indiquant clairement le résultat à démontrer : *(OM) est parallèle à (BC),*
- de trois hypothèses explicites: *ABCD est un parallélogramme, M est le milieu de [AB]* et *O est le centre du parallélogramme*.

Cette première tâche, bien que simple en apparence, n'est pas du tout triviale. Sur le plan informatique, elle soulève quelques questions relatives au traitement automatique de la langue. Le logiciel doit par exemple calculer le sens du verbe *appeler* qui indique ici une hypothèse, mais qui pourrait tout aussi bien indiquer une conclusion ou un résultat intermédiaire dans d'autres énoncés comme celui-ci :« Soit ABC est un triangle. La perpendiculaire à (AB) passant par C coupe (AB) en K, la perpendiculaire à (AC) passant par B coupe (AC) en J. Comment appelle-t-on le point d'intersection de (KC) et (BJ) ? Justifie ta réponse. ». Il faut également reconstruire l'information *O est le centre du parallélogramme* à partir de la construction syntaxique *de centre O* rattachée à *parallélogramme,* ou repérer le résultat à démontrer en tant que complément d'objet du verbe *démontrer*.

Une fois les informations lexicales extraites, le système doit prendre en charge l'extraction des hypothèses implicites. Une première étape est le traitement de l'implicite définitoire, c'est-à-dire le fait que tout objet géométrique en sous-entend d'autres qui constituent ses caractéristiques. Dans notre exemple, le parallélogramme sous-entend quatre sommets, quatre côtés consécutifs, quatre angles, deux diagonales (qui sont en fait les caractéristiques du quadrilatère) ainsi que deux paires de côtés opposés parallèles. À cet implicite définitoire, s'ajoute souvent un implicite dénominatif, qui permet d'instancier ces caractéristiques générales dans des objets géométriques particuliers. Dans notre exemple, l'expression *ABCD est un parallélogramme* permet d'instancier les caractéristiques du parallélogramme : les quatre sommets sont A, B, C et D, les quatre angles sont DAB, ABC, BCD et CDA, les quatre côtés consécutifs sont [AB], [BC], [CD] et [DA], les diagonales sont [AC] et [BD], les côtés opposés et parallèles sont d'une part [AB] et [CD], et d'autre part [BC] et [AD]. Dans le même ordre d'idée, l'hypothèse *BCD est un triangle* est porteuse implicitement des informations suivantes : BCD a trois sommets, trois côtés et trois angles, qui sont respectivement A, B et C, [BC], [CD] et [BD], et ABC, BCA et CAB.

Dans la figure 2, la flèche épaisse à droite, représentant la déduction de la proposition *(AD) et (BC) sont parallèles* à partir de la seule proposition *ABCD est un parallélogramme* constitue donc un raccourci inférentiel résultant de ces deux implicites. En réalité, le logiciel devra passer au travers des étapes suivantes :

1. Extraire du texte l'expression *ABCD est un parallélogramme* en tant qu'hypothèse lexicale.

2. Extraire du référentiel théorique la définition de l'objet parallélogramme : « un parallélogramme est un quadrilatère dont les deux côtés opposés sont parallèles ».
3. Extraire du référentiel théorique les caractéristiques du quadrilatère.
4. Reconnaître la dénomination ABCD et réaliser qu'une instanciation de parallélogramme doit être faite.
5. Instancier les caractéristiques d'un quadrilatère en nommant les côtés opposés, côtés consécutifs et diagonales.
6. Instancier la deuxième partie de la définition du parallélogramme en gérant l'implicite contextuel et générer les deux propositions possibles *[BC] et [AD] sont parallèles* ou *(BC) et (AD) sont parallèles.*

Ces considérations informatiques éclairent les considérations didactiques sur la lecture d'énoncé. L'élève qui résout le problème est lui aussi en prise avec l'extraction des objets mathématiques, et de leurs caractéristiques, à partir des informations contenues dans l'énoncé. La question de l'importance du vocabulaire et des pratiques langagières dans l'appréhension des objets mathématiques prend ici tout son sens (Venant et *al.*, 2015, Gobert, 2013). La traduction informatique des propriétés et des hypothèses exige une grande précision dans la définition des objets et l'utilisation du vocabulaire, alors que le langage courant peut parfois accepter d'assimiler certains concepts comme côté et segment, ou même droite et segment, dans l'expression des propriétés de parallélisme par exemple. L'extraction des informations textuelles, et la gestion des implicites, se concrétisent souvent dans la réalisation d'une figure. Ainsi, qu'une figure accompagne ou pas l'énoncé, l'élève va en tracer une pour lui-même. Le rôle de la figure peut éventuellement aller plus loin. L'élève peut en effet construire tout ou partie de son raisonnement de façon instrumentale (Richard et *al.*, à venir). La modélisation informatique que nous avons réalisée permet de mettre au jour des enjeux didactiques présents dès les premières phases de la résolution de problème, incluant l'importance de l'articulation des registres sémiotiques (Duval, 1991). De plus, la question des raccourcis inférentiels soulève celle de la validité d'une preuve, en lien avec le contrat didactique : Quels sont les implicites ? Quel est le niveau de rigueur attendu ou que peut-on considérer comme trivial? Certaines hypothèses dans une inférence peuvent-elles être considérées comme facultatives ? Quels cas limites traite-t-on ?

Le logiciel, quant à lui, appréhende ces questions en surgénérant des hypothèses, anticipant au maximum celles qui sont implicites. Une fois extraites, toutes les hypothèses et conclusions sont mises en instance discursive, mais seules certaines hypothèses seront retenues dans le graphe complet, c'est-à-dire seulement celles qui produisent un effet dans l'ensemble des démonstrations possibles. L'obtention du graphe complet, c'est-à-dire l'ajout de tous les chemins acceptables au sein du graphe, relève de la genèse discursive. Le graphe HPDIC doit contenir toutes les inférences, ou pas de démonstration, qu'un didacticien ou un enseignant jugerait acceptables en fonction du problème à résoudre, du contexte scolaire et de l'apprentissage visé. Cette exigence d'intégration dans un contexte d'enseignement ou d'apprentissage n'est pas banale. Dans la théorie des situations didactiques en mathématiques (Brousseau, 1998), et plus particulièrement au regard de la notion de contrat didactique, on considère que l'élève et l'enseignant ont des responsabilités réciproques par rapport aux connaissances en jeu. On peut certes parler de règles dans un partage (asymétrique) de responsabilités, certaines étant bien connues de tous, mais la plupart sont implicites, pouvant résulter bien plus d'une habitude de classe que d'une contrainte nécessaire. Ainsi, sur le plan du discours, et plus précisément dans une logique déductive, l'enseignant peut tolérer plusieurs types de raccourcis inférentiels, parce que cela faciliterait la lecture d'une preuve ou la rendrait pédagogiquement plus efficace. De plus, l'élève qui s'initie progressivement au

discours déductif risque de trouver ses propres raccourcis inférentiels, dans un équilibre qui évolue au fur et à mesure que lui et ses compagnons s'habituent au discours déductif en mathématique. La question de la lisibilité d'une preuve ou celle de l'acceptabilité d'un raisonnement sont donc étroitement liées au contrat didactique, c'est-à-dire à la géométrie en tant qu'activité (Font, Richard et Gagnon 2018). Les défis didactiques que soulèvent les genèses sémiotiques et discursives informatiques sont résumés dans la figure 5.

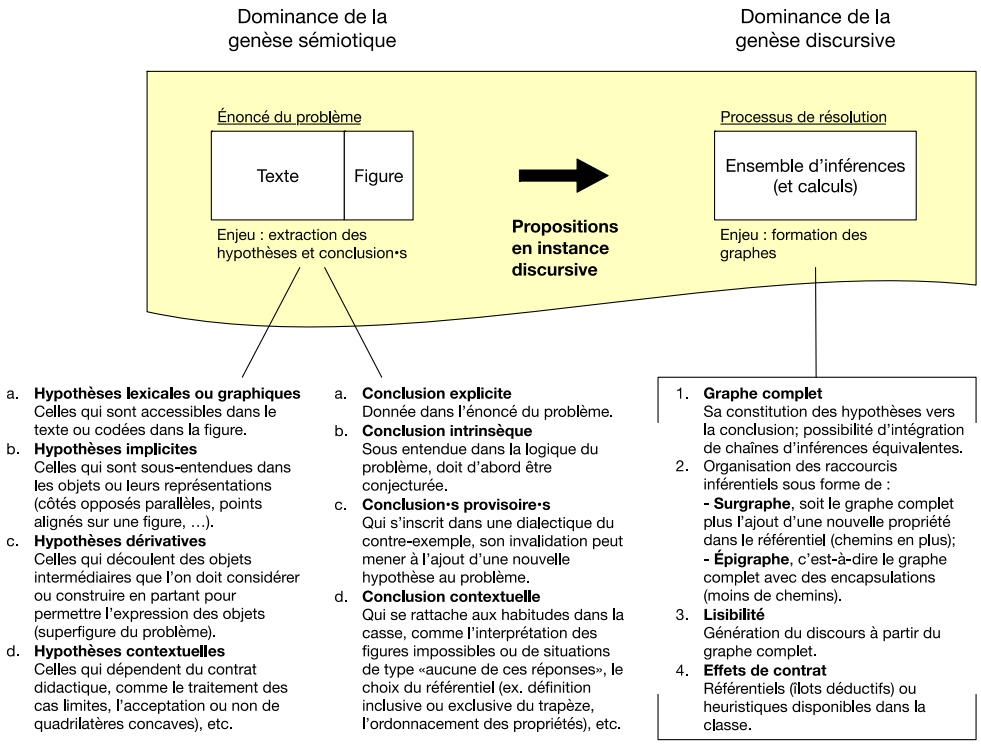


Figure 4 *– Genèses sémiotiques et discursives dans QED-Tutrix*

IV. CONCLUSION

Notre réflexion se situe au carrefour de l'informatique et de la didactique. La conception de QDEX prend en compte l'usager très tôt dans le processus pour pouvoir le guider au mieux. Dans cette optique, les genèses sémiotique et discursive informatiques doivent reprendre les caractéristiques de celles de l'usager et être à la fois complémentaires et très imbriquées, afin de mener à des preuves acceptables et lisibles, mais aussi de permettre la caractérisation d'un éventuel blocage de l'élève en termes de résultats à démontrer et de propriétés à utiliser. C'est une étape indispensable pour pouvoir proposer à l'élève un problème connexe qui lui permettra de dépasser son blocage. L'idée de répondre à un blocage de l'élève en lui proposant la résolution opportune de problèmes constitue une solution effective à l'une des difficultés majeures de l'enseignement : éviter de donner des réponses en même temps que les questions lorsque l'élève est en difficulté. En ce sens, notre projet soulage théoriquement un paradoxe de Brousseau (1998), que l'on appelle «paradoxe de la dévolution» : tout ce que fait l'enseignant pour faire produire, par les élèves, les comportements qu'il attend tend à diminuer l'incertitude de l'élève et par là, à priver ce dernier des conditions nécessaires à la compréhension et à l'apprentissage de la notion visée; si l'enseignant dit ou signifie ce qu'il veut de la part de l'élève, il ne peut plus l'obtenir que comme exécution d'un ordre et non par l'exercice de ses connaissances et de son jugement.

La notion de dévolution, en tant que levier didactique pour l'enseignant et condition indispensable pour le développement de l'autonomie de l'élève, gagne en force et reprend ici l'idée qu'un problème connexe appartient à l'espace de travail du problème racine et que l'enseignant cherche à rendre cet espace à l'élève en lui laissant la responsabilité de la résolution. Le développement de l'autonomie dans l'apprentissage est un enjeu social majeur.

REFERENCES

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (2011). « La théorie des situations didactiques en mathématiques », *Éducation et didactique*, vol. 5, no. 1.

Coutat, S., Laborde, C. et Richard, P. R. (2016). L'apprentissage instrumenté de propriétés en géométrie : propédeutique à l'acquisition d'une compétence de démonstration, *Educational Studies in Mathematics.*

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Berne : Peter Lang.

Font, L., Richard, P.R. & Gagnon, M. (2018). Improving QED-Tutrix by Automating the Generation of Proofs. In *Theorem proving components for Educational software* in the *Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science* (EPTCS Post-Proceedings).

Gobert, S. (2013). Construire des significations dans et par le langage. Bronner A. et alii. (Coord.). *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage.*, La Pensée Sauvage.

Kuzniak. A., et Richard, P.R. (2014). Spaces for Mathematical Work. Viewpoints and perspectives. *Revista latinoameri- cana de investigación en matemática educativa,* 17(4).

Leduc, N. (2016) *Développement d'un tutoriel intelligent pour aider à élaborer des preuves en géométrie*. Thèse de doctorat. École Polytechnique de Montréal.

Richard, P. R. Fortuny J.M., Gagnon, M., Leduc, N. Puertas, E. et Tessier-Baillargeon, M. (2011). Didactic and theoretical-based perspectives in the experimental development of an intelligent tutorial system for the learning of geometry. *ZDM Mathematics Education* 43: 425.

Richard, P. R., Oller Marcén, A. M. et Meavilla Seguí, V. (2016). The concept of proof in the light of mathematical work. *ZDM Mathematics Education* 48:843–859.

Richard, P. R., Gagnon, M. et Fortuny, J. M. (2018). Connectedness of problems and impasse resolution in the solving process in geometry: a major educational challenge. Dans P. Herbst, U. H. Cheah, K. Jones et P. R. Richard (Éds), *International perspectives on the teaching and learning of geometry in secondary schools*. Springer.

Richard, P.R., Venant, F. et Gagnon, M. (à paraître). Issues and challenges about instrumental proof. In Gila Hanna, David Reid et Michael de Villiers (Eds.) *Proof Technology in Mathematics Research and Teaching*, Springer book series Mathematics education in the digital era.

Tessier Baillargeon, M. (2016). *GeoGebraTUTOR : Développement d'un système tutoriel autonome pour l'accompagnement d'élèves en situation de résolution de problèmes de démonstration en géométrie plane et genèse d'un espace de travail géométrique idoine.* Thèse de doctorat. Université de Montréal.

TLFI. Définition du mot *géométrie*. Trésor de la langue français informatisé : http://stella.atilf.fr/Dendien/scripts/tlfiv5/advanced.exe?8;s=1604356215; Page consultée le 3 décembre 2017.

Venant, F., Tremblay, O et Labrecque A.-A. (2015). Le lexique au carrefour des mathématiques et du français: pistes pour travailler vocabulaire courant et mathématique. *Bulletin de l'Association de Mathématique du Québec*.

SÉQUENCE DE TACHES MATHEMATIQUES AVEC LA GEOMETRIE DYNAMIQUE

ZHU[1]* Fangchun

Résumé – Nous étudions les connaissances des enseignants pour utiliser la géométrie dynamique à travers les tâches qu'ils conçoivent et l'ordre dans lequel ils les proposent à leurs élèves. Nous considérons, à partir d'exemples français et chinois, que les différents rôles que peut jouer la géométrie dynamique dans les tâches mathématiques ainsi que les choix d'orchestration révélés par l'ordre de ces tâches sont des moyens de caractériser la pratique et les connaissances des enseignants.

Mots-clefs : Géométrie dynamique, orchestration instrumentale, tâche, séquence

Abstract – In the study, we analyze teachers' knowledge in choosing and organizing mathematics tasks in dynamic geometry environment. We consider the different roles dynamic geometry plays in mathematics tasks and then I analyze the orchestrations shown in the sequence of these mathematics tasks. These orchestrations would reflect the characters of teaching practices which is related to teachers' knowledge. Two examples from France and China are selected in the study.

Keywords: Dynamic geometry, instrumental orchestration, task, sequence

En France et en Chine, les professeurs mathématiques sont encouragés à utiliser les logiciels de géométrie dynamique dans les classes des mathématiques. Par exemple, dans le programme chinois, les technologies sont les ressources importantes pour les professeurs comme les ordinateurs et les logiciels. Presque dans tous les contenus mathématiques chinois, on peut regarder le rôle de la technologie. Bien que les enseignants soient encouragés a intégrer la technologie dans leurs pratiques pédagogiques, les enseignants ont beaucoup de difficultés pour faire cours avec les nouvelles technologies.

Avec l'essor des technologies numériques, de nombreuses recherches se sont développées sur la question de leurs usages et de leurs effets dans l'apprentissage des mathématiques. Depuis les années 80, l'impact des TICE sur l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques a pris une place majeure dans la littérature. Pour Trouche (2003), il y a trois raisons à cela : le potentiel des nouveaux outils, l'évolution de l'équipement des élèves et les injonctions institutionnelles. Ces raisons sont toujours valides en 2017 et pourtant les usages et les pratiques ne sont toujours pas majoritaires. Notre étude considère que les enseignants sont une des clefs de l'introduction des technologies dans les classes (Goos et Soury-Lavergne 2010) et propose d'étudier les connaissances des enseignants relatives aux usages et pratiques de la géométrie dynamique

Quelles sont les connaissances nécessaires aux enseignants pour faire un usage de la géométrie dynamique qui tire parti de son potentiel ?

Dans ce papier, j'essaie de trouver des résultats sur les différents types de tâches mathématiques utilisées par l'enseignant, car il s'agit d'une partie importante de la connaissance de l'enseignant.

Nous proposons de traiter cette question à partir d'une étude des tâches conçues ou choisies par les enseignants. Plus particulièrement nous allons nous intéresser au rôle qu'y joue la géométrie dynamique et à l'ordre dans lequel les différentes tâches et la technologie interviennent.

En effet, Laborde (2000) prend l'exemple du rapport entre preuve et utilisation de la géométrie dynamique pour identifier différents rôles que joue la technologie numérique, en

* Institut Français de l'Education ENS de Lyon– Chine – fangchun.zhu@ens-lyon.fr

particulier suivant le moment où elle est sollicitée. Son constat, appuyé sur les travaux de Hadas, Hershkowitz and Schwarz (2000), est qu'un jeu sur l'ordre des taches dans une séquence et le rôle de la géométrie dynamique, crée chez les élèves des preuves différentes et les amène à constater des erreurs évidentes quand ils vérifient leurs preuves avec la géométrie dynamique. Ainsi, l'ordre des tâches proposées, articulé au rôle qu'y joue la géométrie dynamique, modifie les stratégies et les productions des élèves.

I. RÔLES ET ORCHESTRATIONS DE LA GEOMETRIE DYNAMIQUE

Notre analyse s'appuie sur une classification des tâches mathématiques et de leur mise en œuvre par les enseignants. Elle est réalisée à partir de l'étude des rôles qu'y joue la géométrie dynamique (Laborde, 2001 ; Soury-Lavergne, 2017) et de la notion d'orchestration instrumentale (Trouche, 2003 ; Drijvers *et al*., 2010).

1. Les différents rôles de la géométrie dynamique dans les tâches mathématiques

Laborde (2001) distingue quatre types d'usage de la géométrie dynamique dans une tâche mathématique, allant d'une transposition directe d'une tâche papier-crayon à celui d'un usage innovant, non réalisable sans la technologie. Soury-Lavergne (2017) propose de regrouper ces quatre types en deux catégories mettant l'accent soit sur la façon dont la géométrie dynamique amplifie les possibilités du travail papier-crayon ou au contraire comment la géométrie dynamique génère de nouveaux usages, de nouveaux problèmes et éventuellement de nouvelles conceptualisations. Ainsi, nous proposons de distinguer :

La géométrie dynamique comme amplificateur, rendant la tâche plus facile, plus rapide et produisant plus de cas :

1. L'environnement de géométrie dynamique agit principalement comme facilitateur des aspects matériels de la tâche, sans la modifier conceptuellement. Comme par exemple lorsqu'il s'agit de construire un triangle, les milieux de ses côtés et ses médianes, pour imprimer ou pour projeter la figure (au sens de dessin) obtenue.
2. L'environnement de géométrie dynamique facilite et améliore la tâche qui n'est cependant pas considérée comme fondamentalement modifiée par rapport à sa version en papier-crayon. Il est utilisé comme amplificateur visuel, qui augmente la qualité et la précision des dessins et permet de produire plusieurs états à partir d'une seule construction. Par exemple, dans la tâche d'identification des propriétés d'une figure, il est supposé plus facile d'observer que trois droites se coupent en un seul point, lorsque la propriété est conservée au cours de la déformation de la figure par rapport à l'observation d'un dessin papier-crayon statique.

La géométrie dynamique comme générateur de nouvelles opportunités, contraintes et tâches.

3. L'environnement de géométrie dynamique modifie les stratégies de résolution de la tâche en contrôlant les possibilités d'utilisation des outils de construction géométrique. Par exemple, la construction d'un parallélogramme sans pouvoir utiliser l'outil « droites parallèles » amène à considérer d'autres propriétés des parallélogrammes, comme celles sur les diagonales et à utiliser la transformation « symétrie » centrale comme un outil de construction de base pour les points (sorte d'inverse de l'outil milieu).

4. L'environnement de géométrie dynamique permet de concevoir de nouvelles tâches mathématiques, qui n'auraient pas de « raison d'être » (Laborde, 2001, p 293) sans la technologie numérique. Par exemple les tâches de type boîte noire (Charrière, 1995), pour lesquelles il s'agit de reproduire une figure dynamique, qu'il est possible d'explorer mais dont le processus de construction n'est pas connu. La reproduction concerne non seulement les différents états statiques, mais également les phénomènes dynamiques produits de façon continue au cours du déplacement des points.

Ces différentes façons d'utiliser la géométrie dynamique dans une tâche mathématique font appel à des genèses instrumentales distinctes qui nécessitent de la part des enseignants une mise en œuvre particulière avec leurs élèves. La gestion par l'enseignant des genèses instrumentales des élèves est modélisée par l'orchestration instrumentale (Trouche 2003).

2. Les orchestrations instrumentales associées aux tâches

L'orchestration instrumentale montre un aspect de la complexité de l'intégration des technologies numériques et permet d'anticiper les difficultés des enseignants et des élèves dans leur utilisation.

Une orchestration instrumentale est définie par la façon dont les enseignants organisent leur classe avec les différents artefacts disponibles, pour aider les élèves dans leur apprentissage (Trouche, 2003 ; Drijvers *et al*., 2010). Pour notre étude, nous considérons comme artefact les tâches mathématiques proposées et l'environnement de géométrie dynamique disponible. Elle est décrite à travers trois éléments différents et leur mise en relation : la configuration didactique, le mode d'exploitation et la performance didactique. La configuration didactique correspond aux *« agencements des artefacts dans l'environnement à chaque phase de la situation »* (Trouche 2003, p. 39). Le mode d'exploitation décrit le scénario de la mise en œuvre, les régulations et les articulations entre les interventions de l'enseignant et des élèves, les interactions collectives et individuelles et le recours aux différents artefacts. L'idée de performance didactique a été introduite (Drijvers *et al*., 2010) pour tenir compte des adaptations nécessaires des configurations et exploitation au cours du déroulement effectif de la classe, en ce qui concerne l'accompagnement des genèses instrumentales des élèves.

Cette contribution étudie les deux premiers éléments : la configuration didactique qui décrit les choix de l'enseignant pour l'utilisation des tâches mathématiques avec la géométrie dynamique et leur configuration et mise en œuvre en classe ; le mode d'exploitation qui permet de prendre en compte la séquence de tâches conçue et proposée aux élèves, avec le rôle qu'y joue l'environnement de géométrie dynamique.

II. METHODE

Pour répondre à notre question sur les connaissances des enseignants, nous avons choisi d'analyser deux exemples de tâches mathématiques scolaires, utilisant la géométrie dynamique, à l'aide du cadre présenté ci-dessus. Nous avons choisi une série de tâches venant de Chine, présentées dans une courte vidéo affichée sur un réseau social officieux d'enseignants (weechat group, réseau social très populaire en Chine). Cette vidéo montre une situation de résolution de problème de lieu géométrique, avec le logiciel Geometer Sketchpad. La vidéo en ligne ne s'adresse pas directement aux élèves, donc rend difficile son analyse du point de vue des orchestrations instrumentales. Nous avons également analysé une série de

tâches de construction de triangles avec GeoGebra, présentée dans une fiche adressée à des élèves de 5e en France, fiche communiquée par un enseignant de collège.

Une partie de la méthodologie prévue inclut l'analyse des tâches, l'observation du déroulement de la classe et deux interviews de l'enseignant avant et après la classe. En particulier, nous souhaitons l'interviewer avant la classe pour recueillir ses intentions quant à l'ordre des tâches proposées et ses objectifs. Lors de l'interview après la classe, nous souhaitons recueillir son avis à propos d'autres types de tâches, notamment en effectuant un croisement entre la Chine et la France, et les possibilités qu'il aurait de les utiliser ou pas, en les modifiant éventuellement. Nous ne présentons ici que l'analyse préalable d'exemples de séries de tâches, pour valider la faisabilité et l'intérêt d'une telle analyse.

III. DEUX EXEMPLE CHINOIS ET FRANÇAIS ET L'ANALYSE

1. Les séquences de tâches

L'exemple chinois (figures 1, 2) présente un problème de lieu à partir de deux triangles donnés, un triangle rectangle ABC et un triangle équilatéral DBE, avec AB=BC. Le point D bouge entre les points A et C. La question posée est de trouver le lieu du point E et sa longueur. Les tâches successives sont constituées du même problème avec une variation des propriétés du triangle BDE. Au cours de la vidéo, l'enseignant décrit la figure, pose la question puis déplace le point D sur la figure dynamique de façon à faire apparaître la trajectoire de E. La construction du lieu de E n'est pas montrée à l'écran.

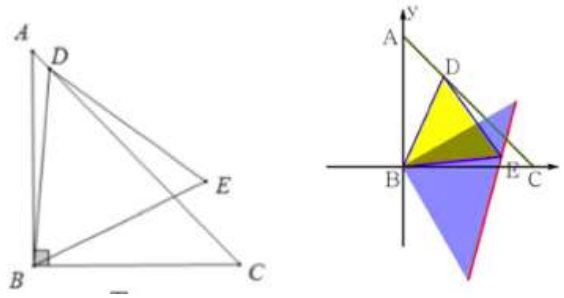


Figure 1 *– Images de la vidéo chinoise sur la résolution d'un problème de lieu avec Geometer Sketchpad*

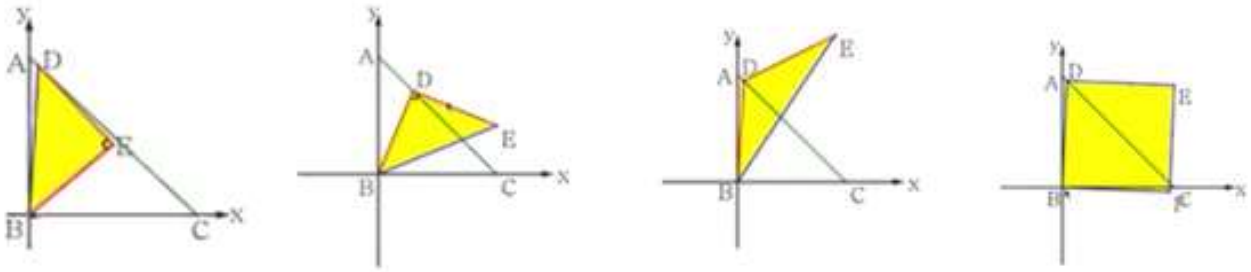


Figure 2 *– Les quatre autres tâches de lieu avec Geometer Sketchpad dans la vidéo chinoise*

L'exemple français est constitué d'une fiche élève qui liste les instructions pour construire un triangle avec GeoGebra (figure 3). Une première partie guide la première tâche en indiquant pas à pas les instructions pour construire un triangle à partir de la donnée des mesures des longueurs de ses trois côtés. Une deuxième partie contient la même tâche, sans le guidage pas à pas. Le déplacement des sommets des triangles construits n'est pas sollicité dans la fiche.

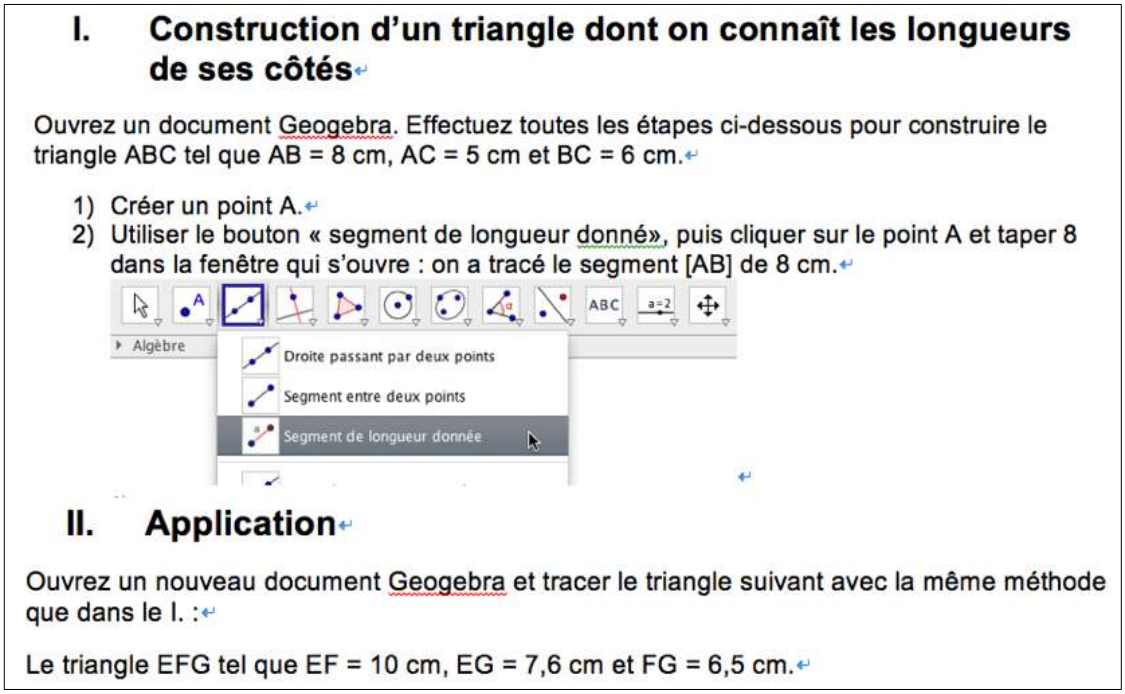


Figure 3 *– Fiche élève niveau 5e pour la construction d'un triangle avec GeoGebra*

2. Analyse des deux exemples

La tâche chinoise relève d'une utilisation de la géométrie dynamique pour générer des nouveaux usages. En effet, l'observation directe de la génération d'un lieu géométrique n'est pas possible sans la technologie. Sans la technologie, ces tâches ne sont pas résolues de la même manière. Chacune des quatre tâches est une déclinaison du même problème, sans changement du rôle que joue la géométrie dynamique. La séquence chinoise dans cette vidéo contient quatre taches, qui sont du même type. Ils sont constitués par la même figure initiale, mais une variation sur les propriétés du triangle. Par exemple, dans figure 1, le triangle dans la tâche est triangle équilatéral mais dans la figure 2, le triangle est devenu triangle rectangle. L'existence de la vidéo permet de prévoir qu'une façon possible d'utiliser ces tâches est de présenter le problème et sa résolution comme dans la vidéo. D'après cette vidéo, la façon dont l'enseignant utilise la technologie est traditionnelle, avec une centration du côté de l'enseignant.

Dans l'activité décrite par la fiche française, les tâches font un usage de la géométrie dynamique pour aussi générer des nouvelles tâches. Le professeur français intègre la géométrie dynamique sans besoin de rendre la figure mobile. La précision des instructions pas à pas montre que l'enseignant anticipe le fait que la résolution n'est pas une simple transposition de la procédure papier-crayon. Cependant l'enjeu est bien uniquement de produire une figure de triangle, sans que le choix des outils de construction ne soit problématisé pour l'élève. Pour un même type de construction, d'autres séquences de tâches avec la géométrie dynamique permettent de donner un autre rôle à la technologie, comme dans l'exemple des constructions de triangle par Voltolini (2014). L'usage de la technologie reste le même dans les deux tâches, qui ne varient que par le niveau de détail des instructions de construction, la seconde étant considérée comme l'application à l'identique de la procédure décrite pour la première tâche. Ces tâches sont orientées sur la technologie, mais contrairement à l'exemple chinois, il est bien prévu que les élèves manipulent directement l'environnement de géométrie dynamique.

Il s'agit du deuxième rôle attribué à la géométrie dynamique (Laborde, 2001) dans les tâches mathématiques parce qu'il faut utiliser des cercles pour construire le troisième sommet du triangle, ce qui n'est pas la façon dont les élèves voient la construction en papier et crayon avec un compas.

IV. UN USAGE DES TECHNOLOGIES NUMÉRIQUES ENCORE LIMITÉ EN MATHEMATIQUE

Du point de vue de la recherche, la géométrie dynamique est encore utilisée de façon limitée dans les classes. Deux rôles importants de la géométrie dynamique dans les tâches mathématiques ont été identifiés : rôle d'amplificateur et rôle de générateur.

Sur les rôles de la géométrie dynamique dans les tâches mathématiques, dans les deux exemples chinois et français, la technologie de géométrie dynamique est utilisée pour générer de nouvelles façons de résoudre un problème. Par exemple, dans l'exemple chinois, les tâches reposent beaucoup sur des points mobiles, alors ce type de tâche n'existerait pas sans géométrie dynamique. Mais la classe chinoise est accompagnée d'une orchestration basée sur une organisation de classe centrée sur l'enseignant, qui seul manipule la technologie et contrôle l'avancée de la résolution du problème. D'un autre côté, bien que le rôle joué par la géométrie dynamique dans les tâches de l'exemple français soit aussi de générer de nouvelles taches, elle favorise une orchestration basée sur une organisation de classe plus centrée sur l'élève. L'intervention dans la classe française est pilotée avec une procédure pas à pas sur papier. Ces deux exemples permettent d'envisager les analyses à conduire à partir des données que nous soumettrons aux enseignants participant à notre recherche.

Dans une autre recherche, j'ai analysé quelques leçons chinoises et françaises pour observer comment les enseignants chinois intègrent les logiciels de géométrie dynamique dans leurs classes. Sur les vidéos des cours chinois, la géométrie dynamique est contrôlée par l'enseignant. C'est-à-dire les élèves n'ont pas beaucoup de temps ni d'occasion pour manipuler la technologie eux-mêmes. Dans les classes françaises, les élèves utilisent la technologie directement en travail de groupe.

Les développements à prévoir concernent l'élaboration d'un modèle d'analyse qui mette en relation plus directement le rôle de la géométrie dynamique dans les tâches et la complexité que cela représente du point de vue des enseignants, avec les différentes orchestrations et le contrôle plus ou moins fort de l'enseignant. En effet, dans l'exemple chinois, la tâche dans laquelle la géométrie dynamique joue un rôle de générateur de nouvelles stratégies de résolution s'accompagne d'un contrôle renforcé par l'enseignant, alors que dans l'activité française, la tâche peu problématique, très technique, s'accompagne d'une autonomie plus importante laissée aux élèves. Les enseignants ne peuvent-ils faire un usage avancé de la géométrie dynamique qu'au prix d'une moindre autonomie des élèves ?

REFERENCES

Charrière, P.-M. (1995). Boîtes noires, *9*. Retrieved from http://icosaweb.ac-reunion.fr/GeomJava/abraCAda/M_abra.html

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H., & Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: Instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in mathematics*, *75*(2), 213-234.

Goos, M., & Soury-Lavergne, S. (2010). Teachers and teaching: theoretical perspectives and classroom implementation. In C. Hoyles & J.-B. Lagrange (Eds.), *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain* (pp. 311–328). Springer.

Hadas, N., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. B. (2000). The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments. *Educational studies in Mathematics*, *44*(1), 127-150.

Laborde, C. (2000). Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving.*Educational Studies in Mathematics*, *44*(1), 151-161.

Laborde, C. (2001). Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabri-Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *6*(3), 283-317.

Soury-Lavergne, S. (2017). *Duos d'artefacts tangibles et numériques et objets connect és pour apprendre et faire apprendre les mathématiques* (HDR dissertation, Ecole Normale Supérieure de Lyon-ENS LYON; Institut Français de l'Education).

Trouche, L. (2003). Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques: nécessité des orchestrations.

Voltolini, A. (2014). Un duo d'artefacts virtuel et matériel pour apprendre à construire un triangle à la règle et au compas. *Grand N*, *94*, 25–46.

.

UN NOUVEAU MODÈLE D'APPRENTISSAGE DYNAMIQUE APPLICATION A UN CONCEPT MATHEMATIQUE

ACHTAICH[*] Naceur – DIYER[*] Okacha – NAJIB[**] Khalid

Résumé – Dans ce travail, nous proposons d'étendre le modèle d'apprentissage de M. Marcel Lebrun à un autre plus adéquat pour un développement évolutif. Ensuite nous mettons en valeur l'impact des moyens technologique à travers ce nouveau modèle, et nous intéressons à la contribution de l'enseignant au niveau de chacune de ses composantes. Nous présentons comme application un exemple de mathématiques, concernant l'introduction de la notion de limite d'une suite numérique, aux élèves de terminale Sciences mathématiques.

Mots-clefs : Pédagogie, Méthodes d'Enseignement, Technologies; Innovation, Modèles d'Apprentissage.

Abstract – In this work, we propose to extend Marcel Lebrun's learning model to a more suitable one, for evolutionary development. Then we highlight the impact of technological means through this new model, and we focus on the teacher's contribution at the level of each of its components. We present as application an example of mathematics, concerning the introduction of the limit of a numerical sequence, to the students of the terminal mathematical sciences.

Keywords: Pedagogy, Teaching Methods, Technology, Innovation, Learning Models.

I. DES DISPOSITIFS POUR APPRENDRE

Concernant « les effets de l'accompagnement techno pédagogique des enseignants sur leurs options pédagogiques, leurs pratiques et leur développement professionnel », Marcel Lebrun et *al.* ont proposé en 2016 trois outils qui permettent aux enseignants d'accomplir leur devoir en toute assurance : le dispositif d'enseignement (savoir et contenu, apprentissage), les usages des technologies, selon le modèle SAMR[1] de Ruben Puentedura et les compétences déployées selon le modèle de Lemke et Coughlin (1998) : Entrée, Adaptation et Transformation.

Marcel Lebrun a proposé, en 2005, un modèle d'apprentissage dénommé IMAIP, voir Figure 1, pour permettre aux apprenants les acquisitions des savoirs, à travers cinq dimensions : Informations - Activités - Productions - Motivation - Interaction. Les moteurs de l'engagement des trois premières composantes sont assurés par les deux dernières.

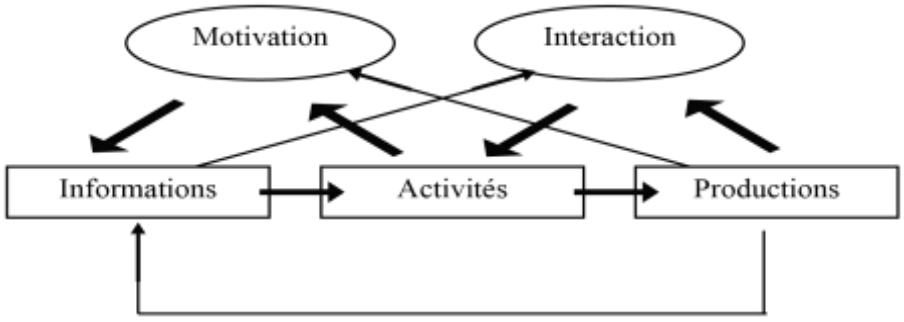


Figure 1 *– Modèle IMAIP*

[*] Faculté des Sciences Ben M'Sik, Université Hassan II de Casablanca – Maroc – nachtaich@gmail.com
[*] Faculté des Sciences Ben M'Sik, Université Hassan II de Casablanca – Maroc – odiyer@yahoo.fr
[**] Ecole Nationale Supérieure des Mines de Rabat – Maroc – najibkhalid@gmail.com

[1] SAMR (Substitution, Augmentation, Modification, Redéfinition), c'est une approche très importante pour toute tentative d'introduction d'une pédagogie à travers les technologies numériques.

II. NOUVEAU MODELE D'APPRENTISSAGE IMAIPVE

Nous avons jugé que l'intégration d'une composante "Evaluations" dans le modèle IMAIP suite à la "Visualisation" de la "Productions" (dernière dimension du modèle de Lebrun) permettrait d'améliorer davantage le processus d'apprentissage. Par cette extension, nous proposons un nouveau modèle d'apprentissage, que nous baptiserons IMAIPVE, basé sur les composantes « Informations-Motivation-Activités-Interaction-Productions-Visualisation-Évaluations » interconnectées comme le montre la Figure 2. Dans l'analyse de notre modèle, nous interprétons les relations pédagogiques mutuelles entre ses différentes composantes, et nous mettons en évidence l'aspect évolutif de l'apprentissage à travers ce modèle.

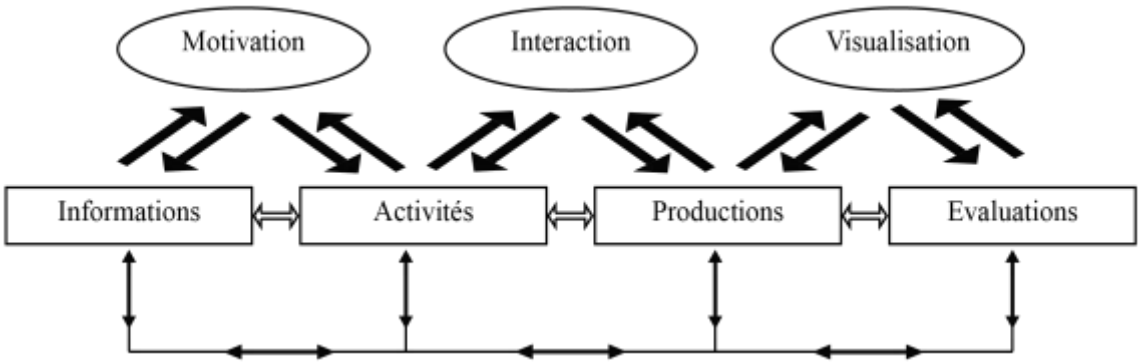


Figure 2 *– Modèle IMAIPVE*

III. LE MODELE IMAIPVE A TRAVERS DES MOYENS TECHNOLOGIQUES

Nous avons formulé le modèle IMAIPVE, à travers des moyens technologiques, pour mettre en évidence un enseignement motivant, attractif et efficace. Nous avons mis l'accent sur l'importance d'introduire des moyens et des procédures technologiques dans les éléments pédagogiques qui constituent chaque composante du modèle IMAIPVE, voir Figure 3.

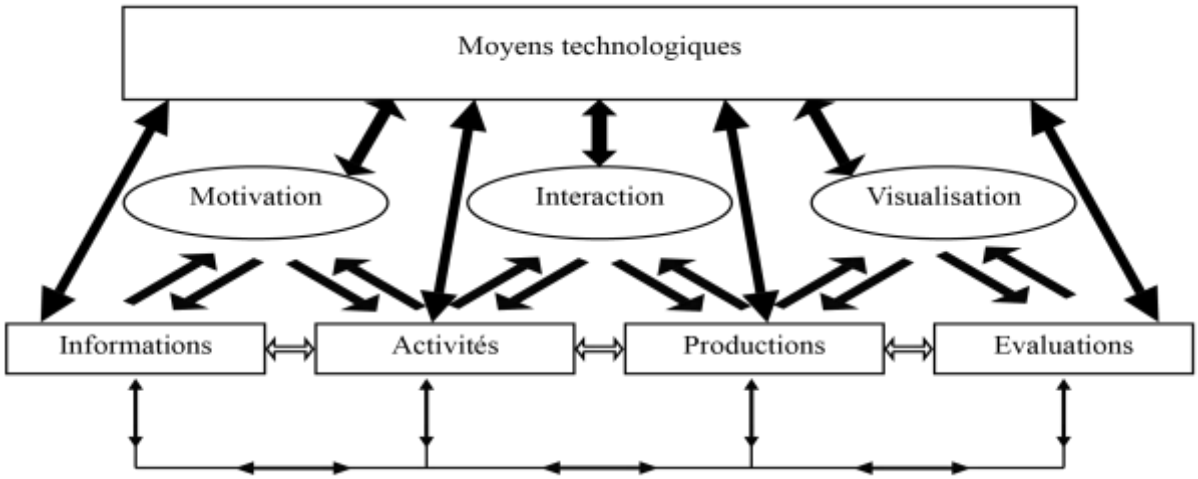


Figure 3 *– Modèle IMAIPVE à travers les moyens technologiques*

IV. LA CONTRIBUTION DE L'ENSEIGNANT A TRAVERS LE MODELE IMAIPVE ET LES MOYENS TECHNOLOGIQUES

Souvent l'évaluation des enseignants est focalisée sur l'appréciation des compétences liées aux savoirs, savoir-faire et savoir-être. Ce jugement ne tient pas compte de l'évaluation des outils, de la méthodologie ni des moyens exploités. Cette perception de l'évaluation au goût inachevé nous a incités à proposer une contribution évolutive de l'enseignant suivant le modèle IMAIPVE. A travers des moyens technologiques d'apprentissage appropriés, la contribution de l'enseignant mène à la réalisation d'un apprentissage innovant et de qualité, voir Figure 4.

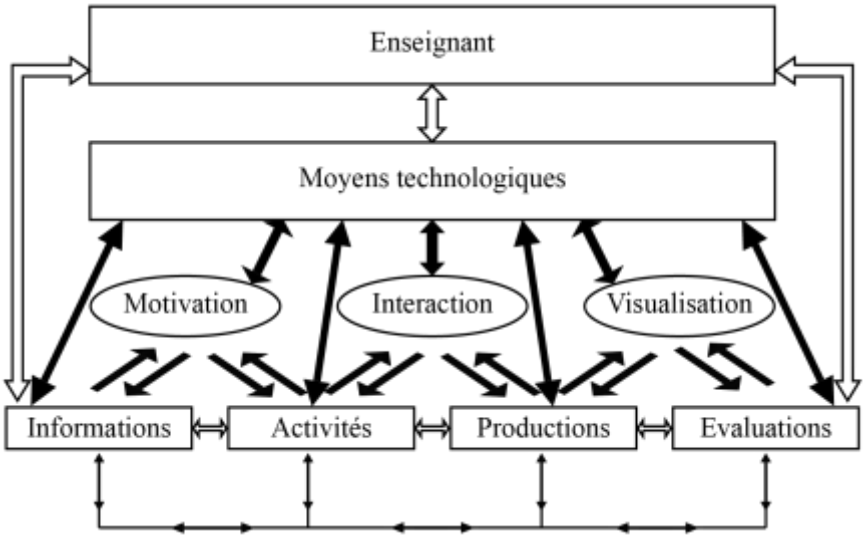


Figure 4 *– La contribution de l'enseignant à travers le modèle IMAIPVE*

V. LE CONCEPT "LIMITE D'UNE SUITE NUMERIQUE" ET LE MODELE IMAIPVE

Nous nous sommes intéressés aux exemples introductifs suivant une démarche progressive bien adaptée à travers les TICE, analysé les résultats et conjecturé la définition en symboles mathématiques. Nous avons mis en valeur la dimension "Evaluations" pour chaque composante du modèle dans le but d'identifier les interventions de l'enseignant au fur et à mesure du déroulement de la séance. Comme étude de cas, nous suggérons le concept des « Limites des Suites Numériques ».

Etant donné, un nombre réel L, on dit que la suite $(u_n)_n$ tend vers L quand n tend vers$+\infty$, lorsque : « pour tout nombre réel strictement positif ε, il existe un rang n_0, à partir duquel, toutes les valeurs de u_n sont proches de L à ε près ». Son écriture symbolique est la suivante:

$$\forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists\ n_0 \in IN\ /\ \forall\ n \in IN\ :\quad (n \geq\ n_0 \Rightarrow\ |u_{n\,-\,L}| \leq \varepsilon).$$

On dit que la suite $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers$+\infty$, lorsque : « pour tout nombre réel strictement positif A, il existe un rang n_0 à partir duquel, toutes les valeurs de u_n sont supérieures à A ». Son écriture symbolique est la suivante:

$$\forall A > 0,\ \exists\ N \in IN/\ \forall\ n \in IN:\quad (n \geq N \Rightarrow\ u_n \geq\ A).$$

Pour chaque composante du modèle IMAIPVE, nous décrivons les capacités attendues dans l'optique de présenter la notion de limite d'une suite numérique à travers des moyens

technologique. Dans les deux tableaux 1 et 2, ci-dessous, nous présentons les opérations menées par l'enseignant, suivant le modèle IMAIPVE, pour introduire la définition formelle d'une suite.

Les piliers du Modèle	Opérations de l'enseignant
Informations	savoir les prés requis des élèves pour aborder le concept et les connaissances utiles en moyens technologiques nécessaires, concevoir le niveau d'utilisation des moyens informatiques suivant le modèle SAMR, définir les compétences des savoirs, savoir-faire et savoir être à développer, etc.
Activités	introduire sur des exemples la démarche progressive bien adaptée à travers les TICE, analyser les résultats des exemples, conjecturer la définition en symboles mathématiques, appliquer sur d'autres exemples, etc.
Productions	synthétiser, récapituler, produire le contenu de la leçon avec des remarques, des exemples, etc.
Evaluations	mesurer le degré d'acquisition de la notion, diagnostiquer, remédier en continu, etc.

Tableau 1 *– Opérations de l'enseignant sur les piliers du modèle IMAIPVE*

Moteurs du modèle	Opérations de l'enseignant
Motivation	Introduction historique, applications et moyens technologiques.
Interaction	assurer la transition entre les séquences, répondre aux attentes des élèves, poser des questions pertinentes adaptées au déroulement des séquences, etc.
Visualisation	exercices, applications, quiz, situations, etc.

Tableau 2 *– Opérations de l'enseignant sur les moteurs du modèle IMAIPVE*

Dans le tableau 3, nous offrons l'impact de la composante "Evaluations" sur les composantes du modèle IMPAIVE.

Piliers du Modèle	Evaluations
Informations	du contenu préparé et de sa corrélation avec les orientations pédagogiques exigées
Activités	des exemples introductifs, des moyens technologiques utilisés dans les activités, des questions posées, de la motivation des élèves, de la progression et la transition des séquences, etc.
Productions	de la réalisation des objectifs, de la contribution des élèves (aux exemples, aux remarques,…), des moyens et des outils technologiques utilisés dans les productions, etc.
Evaluations	des procédés utilisés (Exercices-Applications–Quiz-Situations), des moyens technologiques utilisés dans le diagnostic, etc.

Tableau 3 *– L'opération de la composante "Evaluations" sur les piliers du modèle IMAIPVE*

REFERENCES

Lemke. C, Coughlin. E.C. (1998) Technology in American Schools. Seven dimensions for gauging progress. *Santa Monica, CA: Milken Exchange Commission on Educational Technology*. Repéré à https://eric.ed.gov/?id=ED460677

Lebrun M. (2005) *Quand les technologies propulsent la pédagogie de l'apprentissage et la formation pédagogique des enseignants*, Repéré à http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/ download?doi=10.1.1.548.9732 & rep=rep1, LILLE .

Lebrun M., Lison C. et Batier C. (2016) Les effets de l'accompagnement techno pédagogique des enseignants sur leurs options pédagogiques, leurs pratiques et leur développement professionnel. *Revue internationale de pédagogie de l'enseignement supérieur*, 32-1.

Puentedura, R. (2012). Hippassus. Building Upon SAMR. http:\\www.hippasus.com/rrpweblog/archives/2012/09/03/BuildingUponSAMR.pdf

EXEMPLES DE RESSOURCES POUR LE TRAVAIL D'ÉLÈVES EN SECONDE. UNE CLASSE VIRTUELLE À L'IREM DE PARIS

GNANSOUNOU[*] André – MESQUITA[**] Ana L. – BAHEUX[***] Carole –

CHENEVOTOT-QUENTIN[*] Françoise – DENYS[*] Bernadette –

GALISSON[*] Marie-Pierre

Groupe WIMS&IREM de l'IREM de Paris de l'Université Paris Diderot

Résumé – Dans cette affiche, nous présentons quelques ressources numériques, intégrées dans une classe virtuelle expérimentale de la plate-forme WIMS. Ces ressources ont été prévues pour être utilisées par des élèves travaillant en autonomie, et concernent le chapitre *Fonctions* des programmes français de seconde. Deux niveaux d'aide à la résolution peuvent y être proposés aux élèves, ainsi que des corrections de ces ressources. Une courte analyse didactique de certaines tâches y est également incluse.

Mots-clefs : Classe virtuelle, plate-forme WIMS, ressources, fonctions, classe de Seconde en France

Abstract – In this poster, we present some digital resources, belonging to an experimental virtual class in WIMS platform. These resources concern mathematical contents about Functions, in the French syllabus for 10th graders. Items for preparing the pupils'work are included in the resources, as well as feedback comments. For some resources, an analysis of task is also proposed, to teachers using them with their pupils.

Keywords: Virtual Class, WIMS Platform, resources, functions, 10th graders

L'affiche que nous avons présentée au Colloque de l'Espace Mathématique Francophone de 2018 vise d'une part à diffuser une 'classe virtuelle' expérimentale de l'IREM de Paris - préparée actuellement au sein du groupe de travail WIMS&IREM - et d'autre part à accueillir des enseignants intéressés par l'utilisation, dans leurs classes, des ressources de cette classe virtuelle. Il s'agit donc d'un travail de développement de concepts utilisés par la didactique des mathématiques.

I. QUELQUES PRESUPPOSES

Une explicitation du terme 'classe virtuelle' semble nécessaire. Pour le serveur **WIMS (W**WW **I**nteractive **M**ultipurpose **S**erver), que nous utilisons, une classe virtuelle est un espace, sur la plate-forme d'un serveur, sur lequel sont déposées des ressources, lesquelles peuvent être utilisées en libre-service par des personnes intéressées, dans ce cas par des élèves, inscrits sur cette classe.

[*] IREM de Paris Université Paris Diderot – France – andre.gnansounou@ac-paris.fr
[**] IREM de Paris Université Paris Diderot – France – alobomesquita@free.fr
[***] IREM de Paris Université Paris Diderot – France – carole.baheux@univ-artois.fr
[*] IREM de Paris Université Paris Diderot – France – chenevotot.francoise@neuf.fr
[*] IREM de Paris Université Paris Diderot – France – bernadette.denys@univ-paris-diderot.fr
[*] IREM de Paris Université Paris Diderot – France – mpgalisson@aol.com

Nous avons retenu la plate-forme WIMS, en partie à cause des nombreuses fonctionnalités mises à la disposition des utilisateurs, notamment les possibilités de présentation des énoncés, les aides à la résolution d'exercices, la proposition de solutions et l'inclusion de parties théoriques. Les élèves peuvent répondre à des questions, en général dans un temps limité ; ils peuvent, non seulement consulter les dispositifs mis à leur disposition, mais aussi poser des questions à l'enseignant. Suite aux réponses des élèves, des corrections sont proposées, et des notes sont attribuées.

André Gnansounou a utilisé cette plate-forme à l'intention de ses élèves du Lycée Carcado-Saisseval, lycée d'enseignement technique privé à Paris, avec un objectif de travail en autonomie, en dehors de la classe. La plupart des ressources incluses dans la classe virtuelle sont issues de son travail, discutées et modifiées dans le groupe WIMS&IREM.

Dans cette phase, des exercices de Seconde d'une partie du chapitre *Fonctions* des programmes français en vigueur à partir de 2009 sont inclus dans la classe virtuelle. Les 'capacités attendues' organisant actuellement ces programmes, nous les avons aussi utilisées comme critère de recherche pour cette classe. Ces ressources sont destinées à un travail individuel des élèves, en autonomie, en dehors de la classe, ou à des devoirs à la maison.

Nous avons produit un travail de développement, qui pourrait être prolongé par un travail de recherche. Nous nous sommes appuyés sur les registres de représentation, au sens de R. Duval (1995). Les registres sémiotiques permettent de constituer une trace perceptible d'un objet mathématique, ce qui peut donner lieu à des traitements à l'intérieur d'un registre. R. Duval a montré que l'articulation des différents registres liés à un même objet mathématique était essentielle à la production de nouvelles connaissances soit pour les traitements (à l'intérieur d'un même registre), soit pour la conversion de représentations produites dans des systèmes différents. Par exemple, dans le registre graphique, la précision des informations saisies sur la figure est approximative ; néanmoins, dans un registre symbolique, en utilisant une équation d'une courbe, il est possible d'atteindre un niveau de rigueur supplémentaire.

Nous donnons également beaucoup d'importance à l'analyse de la tâche ; ainsi, dans certains cas, de telles analyses sont associées aux énoncés respectifs.

En ce qui concerne l'analyse des réponses des élèves, le critère retenu pour la majorité des ressources est actuellement en termes de réponse correcte/incorrecte ; dans certains cas, le critère est associé à une analyse a priori des tâches ; nous pensons utiliser aussi un ensemble de codes à plusieurs dimensions, déterminés par des types de réponses anticipées, en nous inspirant des tests de diagnostic menés par Chenevotot-Quentin et collègues (2015).

II. UN EXEMPLE DE RESSOURCE NUMERIQUE DE LA CLASSE VIRTUELLE DE L'IREM DE PARIS

Nous présentons ci-dessous un exemple, issu de l'exercice 2 de la Feuille 3 de la classe virtuelle, associé à la capacité attendue : Déterminer l'image d'un nombre par une fonction. L'énoncé y est inclus, tel qu'il apparaît dans l'occurrence observée de la classe virtuelle, ainsi que d'autres éléments. Deux touches (*Indication* et *Aide*) existent, dans la page de l'énoncé : L'*Indication* concerne des éléments sur la question (rappels de définitions, de cours) tandis que l'*Aide* apporte des suggestions pour comprendre l'énoncé, ayant comme but de faciliter la résolution par l'élève.

Une analyse de la tâche est également esquissée.

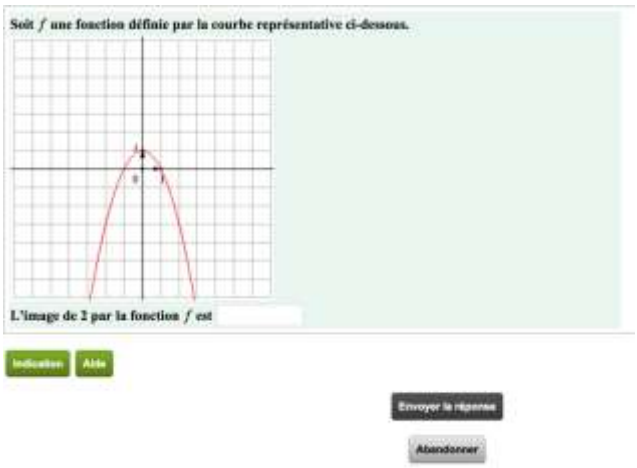


Figure 1 *- Exemple issu de l'exercice 2 de la Feuille 3 de la classe : énoncé*

Deux touches (*Indication* et *Aide*) peuvent être activées par les élèves : L'*Indication* donne des éléments concernant la tâche (rappels de définitions, de cours) tandis que l'*Aide* apporte des suggestions pour comprendre l'énoncé, avec le but de faciliter la résolution par l'élève.

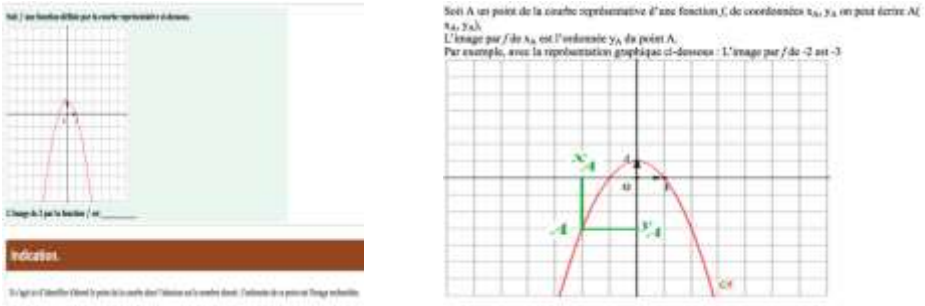


Figure 2 *- Indication et Aide du même exercice*

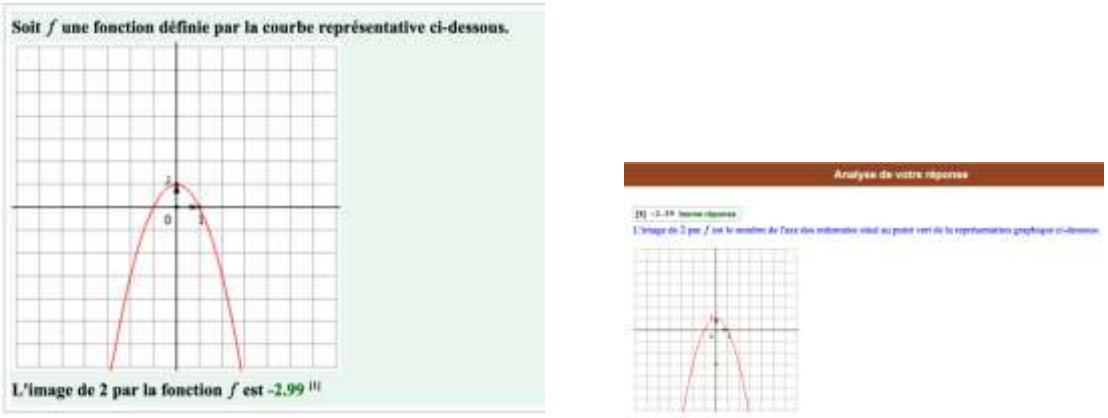


Figure 3 *- Une réponse d'élève et une analyse de la réponse ('Feed-back') au même exercice*

Analyse de la tâche

Nous avons souhaité utiliser dans un même exercice plusieurs registres : registre graphique et registre de langage naturel.

Une gradation du niveau de difficulté des exercices a été prévue : des fonctions affines aux fonctions polynômes.

Par rapport à la précision des réponses attendues, plusieurs possibilités ont été incluses : soit des entiers ou des décimaux non entiers d'une part, soit des réponses approchées ou des réponses exactes d'autre part, en fonction du type d'exercice.

L'exercice en question serait à prolonger par un autre, où un registre symbolique était utilisé, par exemple, une équation d'une courbe était mentionnée dans l'énoncé : une réponse approximative, issue de la lecture du graphique, serait à confronter à une équation de la courbe ; une articulation de registres, le passage du registre graphique au registre d'équation des courbes serait ici nécessaire.

III. PERSPECTIVES DE TRAVAIL

La classe virtuelle est actuellement utilisée par des enseignants de seconde (élèves de 15-16 ans) dans des classes de Hauts-de-France. Suite à l'utilisation expérimentale en classe par des enseignants volontaires, des modifications pourraient être apportées à l'ensemble de ces ressources. Par ailleurs, des compléments d'exercices de la classe virtuelle sont prévus.

L'élaboration d'un questionnaire pour les enseignants utilisant la classe virtuelle est également envisageable : l'utilisation d'un ensemble de codes à plusieurs dimensions, pour des tests de diagnostic, issu des travaux de Chenevotot-Quentin et collègues (2015) semble pertinente.

REFERENCES

Chenevotot-Quentin F., Grugeon-Allys B., Delozanne E., & Prévit D. (2015) Transfert du diagnostic Pépite à différents niveaux scolaires : tests diagnostiques pour les élèves et leurs usages par les enseignants, *In* Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* (Actes du colloque EMF 2015 Alger, GT6, pp. 566-582). Alger : Université d'Alger.

Duval R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang, Berne.

ANNEXE

Il est possible de consulter la classe virtuelle à l'adresse suivante :

https://wims.auto.u-psud.fr/wims/wims.cgi?session=VN5243C54D.3&+lang=fr&+module=adm/class/classes&+type=auth participant&+class=771405&+subclass=yes

Pour s'inscrire en tant que participant, utiliser le mot de passe suivant : sophiegermain

Choisir la classe SecondeGT.

A propos de Sophie Germain (1766-1831) : mathématicienne et physicienne, qui a collaboré avec Gauss et Lagrange, et qui a fait des études à l'Ecole Polytechnique (sous un pseudonyme masculin d'un ancien élève.) Son nom a été donné au bâtiment où se situe l'IREM de Paris à l'Université Paris Diderot.

Groupe de travail 8 (GT8)
Aspects culturels, langagiers et idéologiques en mathématiques

BILAN DU GROUPE DE TRAVAIL N°8

ASPECTS CULTURELS, LANGAGIERS ET IDEOLOGIQUES EN MATHEMATIQUES

Responsables

TRAORE[*] Kalifa - KOUKI[**] Rahim - DOUEK[***] Nadia

Correspondant CS

RADFORD[****] Luis

Les réflexions et échanges sur les questions vives de l'enseignement des mathématiques dans nos sociétés actuelles se sont ouvertes, dans ce groupe de travail, pour recueillir des points de vue culturels variés ; questionner l'universalité des mathématiques comme idéologie, les choix didactiques par rapport aux prescriptions institutionnelles et aux contextes de vie et de culture des différentes communautés ; et réfléchir sur les pratiques d'enseignement dans diverses sociétés, en particulier les places faites au langage.

L'entrée par le langage dans ces réflexions pourrait être trop partielle. On s'accorde facilement sur la densité des formes et natures d'activités qui composent les pratiques mathématiques et didactiques. Cependant cette entrée est suffisamment importante et révélatrice (y compris de ses propres insuffisances) pour permettre des apports critiques et constructifs sur les rapports aux savoirs constitués dans la variété des références sociales, par l'étude des interactions et des différents écrits produits dans le cadre des institutions scolaires.

Dans le reste de ce rapport, nous présentons un bref résumé des contributions écrites et des échanges qui ont eu lieu à leur sujet lors des séances du travail du groupe. Nous proposons ensuite une synthèse de nos discussions ainsi que des pistes pour le congrès EMF-2021.

Michèle Artigue a présenté une recherche s'appuyant sur les travaux menés au sein du projet international LEXICON dans lequel sont engagées des équipes d'enseignants et de chercheurs de neuf pays depuis 2014. Après avoir présenté le projet et le cadre théorique, elle a montré comment ce projet, qui vise à identifier et comparer les lexiques professionnels respectifs des enseignants de ces pays, avait permis d'approcher, de façon originale, la diversité culturelle et linguistique à l'œuvre dans l'enseignement des mathématiques.

Plus précisément, elle a montré comment le lexique et les narrations, ont été étudiés comme révélateurs de l'impact des recherches en didactique sur les pratiques des enseignants experts dans ces différents pays. Le montage méthodologique est complexe et évolutif, et inclut l'analyse de séquences filmées et l'observation de ces analyses. Ce montage s'avère très fécond, par exemple pour mieux comprendre et confronter des choix conceptuels importants propres à certaines sociétés et pour provoquer des enrichissements mutuels, ou pour constater l'influence des curricula souvent plus importantes que les apports de la

[*] Burkina Faso - krinkalifa@gmail.com
[**] Tunisie - kouki_ra@yahoo.fr
[***] France - ndouek@wanadoo.fr
[****] Université Laurentienne, Canada - lradford@laurentian.ca

recherche. Mais il laisse encore dans l'ombre quelques biais idéologiques qui imprègnent tant les observés que les observateurs, masquant des facteurs ou des alternatives dont l'impact pourrait être profond.

TcheuffaNziatcheu a présenté les résultats d'une analyse des pratiques discursives en rapport au concept de fraction dans le programme cadre de mathématique mandaté par le Ministère d'éducation et la série de manuels scolaires en mathématique (Math MakesSense) en Ontario. Ces analyses portaient sur les rôles qu'occupent les apprenants dans ces textes par rapport à la construction des savoirs et la pensée mathématique.

Il a évoqué des questionnements sur les limites de la méthodologie choisie si l'on veut développer la recherche pour mieux étudier l'activité des élèves dans la classe ou de sa prise en compte par les enseignants.

BehBiyogo, inspecteur pédagogique gabonais, s'est intéressé à la question centrale de la transformation du langage dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques d'aujourd'hui. Le texte de cette contribution ne figure pas dans les actes d'EMF 2018, l'auteur n'ayant pas souhaité proposer un texte post-colloque.

On peut cependant retenir de la discussion qui a suivi l'exposé, que la langue française utilisée par les élèves, qu'ils aient pour langue maternelle le Français ou une autre langue de leur pays, comme en a témoigné divers participants, est riche d'expressions dont le sens provient de la traduction mot à mot d'expressions dans diverses langues du pays. Ces expressions avec leurs sens spécifiques ne se retrouvent pas dans les textes produits dans le français de France. Il en découle que certaines formes langagières essentielles en mathématiques (surtout pour exprimer le raisonnement) ne sont pas explorées avec les élèves de façon à trouver un équivalent dans les langues du Gabon ou dans le Français local et ont alors peu de signification, risquant alors de rester sans sens pour les élèves.

JöelleVlassis propose une réflexion théorique sur les défis des enseignants luxembourgeois de mathématiques confrontés à des classes multilingues. En éducation mathématique, de nombreux chercheurs soulignent le rôle crucial du langage dans les apprentissages. Ce principe rend complexe leur enseignement dans les classes multilingues où il s'agit de viser à la fois des objectifs de langue et de contenu. Le « translanguaging » semble constituer un paradigme prometteur pour cadrer des pratiques d'enseignement adaptées à ces contextes.

En présentant la situation particulièrement complexe du multilinguisme au Luxembourg, où la langue d'enseignement varie selon les domaines disciplinaires de l'école et selon le niveau scolaire, elle a mis en évidence la difficulté de travailler en mathématique dans une langue connue, mais qui n'est pas celle dans laquelle les premiers apprentissages ont été développés. La difficulté est multipliée quand les langues en jeu ne sont pas maitrisées. L'analyse des impasses provoquées par ces choix institutionnels se base sur l'idée de Voloshinov que c'est l'expression qui organise l'activité mentale (et non l'inverse), et permet de soutenir l'hypothèse que bien des obstacles sont créés par la faible relation permises aux élèves entre la langue et les apprentissages mathématiques. L'option de « translaguaging » apparaît ainsi comme une solution optimale dans ce contexte.

Barry Griffith a développé une approche qualitative pour rechercher les perceptions de Hmong en France en ce qui concerne les mathématiques, et s'interroge si la culture Hmong affecte leur capacité à apprendre le sujet et plus particulièrement les fractions et les problèmes. Les participants signalent un niveau élevé de confiance et de compétences et notent le rôle que jouent les parents dans l'encouragement et la promotion de l'aspiration éducative.

Dans ce cas les mathématiques en question étaient celles de l'occident, pratiquées comme universelles dans les écoles du monde. Sa présentation a créé dans le groupe le besoin d'en savoir plus sur la culture Hmong, leurs visions du monde et leurs façons de résoudre des problèmes au sein de leur culture d'origine et en lien avec les besoins de leur ancienne vie en Asie, pour mieux interpréter les résultats de l'étude. Elle a aussi stimulé des réflexions d'ordres méthodologiques, entre autres sur la prise en considération de la société d'accueil et ses effets sur l'adaptabilité des émigrés et sur l'articulation avec une perspective ethnomathématique.

André Janvier Ky a conduit des recherches en ethnomathématique qui ont montré l'existence de potentiels mathématiques culturels non exploités par nos systèmes scolaires. Comment intégrer ces savoirs dans un cours de mathématiques « classiques » ? Il présente une expérience sur l'enseignement des figures géométriques en classe de 6e que sont le parallélogramme et le rectangle à partir de l'explicitation de contenus mathématiques dans les pratiques quotidiennes chez des paysans burkinabè.

Il a fait un choix didactique qui concilie différentes exigences des curricula de son pays qui à la fois exploite et valorise 1) des pratiques, que l'on qualifie de mathématiques dans le sens de Bishop, développées dans le cadre de pratiques traditionnelles (dans l'exemple traité, la construction de cases rectangulaires en pisé) et, en même temps, 2) la construction des objets des mathématiques dites universelles (ici les propriétés des quadrilatères). Cette présentation a suscité une réflexion épistémologique incluant des éléments cognitifs: ces propriétés rencontrées à travers la pratique traditionnelle de construction s'inscrivent dans une vision dynamique des relations entre diagonales et quadrilatère, comparable à celle à laquelle donne accès l'utilisation des logiciels de géométrie dynamique. Elle est différente des structurations habituellement établies de façon statique dans les classes occidentales et visées par la plupart des programmes. D'un autre côté on a discuté l'exigence de donner la primauté aux mathématiques « universelles » auxquelles doit aboutir ce cheminement partant des pratiques traditionnelles, en particulier le risque de n'accorder qu'un rôle introductif à ces pratiques.

Paolo Boero propose un cadre théorique, dérivé du travail de Habermas sur la rationalité, pour traiter les relations entre le caractère universel des mathématiques d'aujourd'hui et les cultures des lieux où elles sont enseignées (cultures des étudiants, scolaire ou émanant du contexte social). Des exemples (sur la modélisation et les mathématiques pures) montrent comment l'enseignement-apprentissage pourrait rencontrer les conceptions des étudiants et les cultures du contexte et favoriser le développement des rationalités respectives.

Cette question du rapport entre les mathématiques « universelles » et les pratiques autres, développées dans des cultures non occidentales, est revenue à travers l'exposé de Boero. Il a donné l'exemple d'élèves en Ethiopie qui pouvaient résoudre des problèmes de relations entre ombre et position du soleil à travers une explication inattendue par les enseignants italiens qui visaient des apprentissages de géométrie propres à la culture occidentale. Leur explication faisait partie d'une vision du monde qui n'était pas celle des sciences occidentales, mais dans les cas observés, permettaient de prédire « efficacement » le phénomène étudié, en « échappant » à l'apprentissage visé. On peut alors se demander quelle place faire dans les recommandations internationales aux différentes visions du monde, quels rapports établir avec les pratiques occidentales qui s'imposent partout dans le monde. Et on peut se demander aussi de quoi dépendent les critères d'efficacité.

Boero a ainsi soulevé le problème de la nature des savoirs à développer chez les élèves, et celui de concilier des formes de rationalité qu'imposent l'influence des tests internationaux avec celle qui s'établissent dans la culture des élèves. Il a suscité l'expression d'une position critique vis à vis de l'entrainement à la mobilisation des savoirs mathématiques (dites

universelles) à des fins de résolution de problèmes standardisés, relevant de pratiques marchandes et de vision d'un monde essentiellement tourné vers l'exploitation des ressources, laissant de côté les dimensions réflexives et explicatives des savoirs scientifiques et mathématiques.

Nadia Douek présente une conception des savoirs doublée d'une pratique langagière cohérente avec celle-ci, prégnantes dans les classes françaises, qui mèneraient à des conceptualisations «pauvres» des objets d'enseignement mathématiques, et contribueraient à faire des élèves d'habiles exécutants. Des exemples sont analysés à partir de son cadre de la conceptualisation ainsi qu'une réflexion sur des pratiques interprétatives qui aideraient surmonter, dans le cadre institutionnel, ces conditions et leurs effets.

Ces conditions de l'activité mathématique scolaire répandues en France critiquées sont par exemple, l'usage d'un langage tenu pour transparent, et la réduction des contextes de l'activité mathématiques à des « habillages » rapidement supplantés, le fait que les élèves soient dispensés de toute activité interprétative et critique accompagnant la mobilisation de savoirs mathématiques, et que les enseignants soient éloignés de leur rôle d'interlocuteurs critiques. Les mathématiques « universelles » ne sont même pas mises en rapport avec l'activité cognitive prenant ses sources dans l'environnement socioculturel des élèves vivant dans ce pays occidental. Cette critique rejoint une vision plus générale du déploiement d'activités techniques sans but pour le sujet qui agit, de l'aliénation ou prolétarisation déplorée à divers niveaux de la société, particulièrement dans les secteurs du « soin ».

Luis Radford a présenté deux conceptions de l'ethnomathématique. La deuxième considère l'ethnomathématique comme une production de savoirs à l'intérieur de sa propre rationalité autochtone ; la première, par contre, prend comme référence, les mathématiques occidentales: l'ethnomathématique y apparaît comme une modalité folklorique de ces mathématiques considérées comme universelles. La question de l'universalité des mathématiques occidentales est abordée à la fin de l'article.

Il a mis en valeur l'interprétation de l'ethnomathématique comme organisation des savoirs pour interpréter les évènements et résoudre les problèmes propres à la culture d'une communauté, remettant en question la tendance à emprisonner les formes de savoirs dans des découpages plus ou moins conformes aux visions occidentales. La discussion a mis en évidence la difficulté d'interpréter les systèmes de savoirs d'une communauté qui nous est étrangère. Le problème posé par Boero des rapports à trouver entre des choix éducatifs énoncés au niveau international et ceux qui ont des raisons d'être dans une communauté culturelle, sachant qu'aucune communauté n'est aujourd'hui en mesure de se défendre contre la globalisation et ses pressions dévastatrices, ce problème reste entier. Mais il a souligné le caractère colonisateur des catégories qui servent à analyser les pratiques et les discours des « autres » et recherche en contrepartie une possible méthode générale d'approche à la compréhension des cultures, à savoir celle de la prise en compte, dans une culture donnée, des conditions de production de la vie matérielle et spirituelle et des modes de coopération sociale entre les individus. L'école et les mathématiques occidentales qui influencent les politiques éducatives au niveau international sont adaptées à la préparation des nouvelles générations au marché du travail des pays capitalistes, mais probablement pas à d'autres choix de société.

SYNTHESE ET PERSPECTIVES

Plusieurs participants ont mis en évidence la multiplicité des visions des mathématiques dans leurs rapports à des visions du monde. Les rapports de ces visions avec les enjeux éducationnels ont été interrogés, appelant une réflexion critique sur l'« universalité » des

mathématiques. Diverses interprétations de ce qu'est l'ethnomathématique ont été confrontées. Elles vont de techniques de résolution de problèmes liées à certaines pratiques (comme l'organisation de relations spatiales, dans un esprit proche des travaux de Bishop) à des systèmes d'explication de phénomènes naturels ou d'évènements dans la vie des sujets (dans une acception élargissant la perspective de D'ambrosio).

Une conclusion qui a fait converger nos positions est celle de la recherche d'écoute accueillante, sans interprétation hâtive pour les pratiques des autres cultures et pour leurs choix éducatifs. L'espoir est que les contacts et les interactions stimulent les développements de toutes parts, et non pas qu'ils marquent des influences et des pratiques imposées. Et un moyen pour que telles interactions aient des raisons d'être et des effets stimulants est celui de « faire ensemble ».

REFERENCES

Caveing M. (1982) *Zénon d'Élée : Prolégomènes aux doctrines du continu*. Paris:Vrin.

Caveing M. (2004) *Le problème des objets dans la pensée mathématique*. Paris: Vrin.

D'ambrosio U. (2013) Las bases conceptuales del programa etnomatemática. *14o Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*. Universidad del Atlántico, 9-11 Octobre 2013.

Durand-Guerrier V.,Ben Kilani I. (2004) Négation grammaticale versus négation logique dans l'apprentissage des mathématiques exemple dans l'enseignement secondaire tunisien. *Cahiers du français contemporain*, 9, 29-55.

Feyrabend P. (1987) *Farewell to reason*. London: Verso (Reprint, 1994).

Godelier M. (2007) Au fondement des sociétés humaines : Ce que nous apprend l'anthropologie. Albin Michel : Bibliothèque idées. Hatano, G. &Wertsch, J-V. (2001). Sociocultural approaches to Cognitive Development: The Constitution of Culture in Mind'. *Human Development*, 44, 77-83.

Lizcano E. (2009) Imaginario colectivo y creaciónmatemática: La construccion social delnumero, el espacio y loimposible en China y en Grecia. Gedisa.

Loram C. (1917) *The education of the South African native*. New York: Longmans, Green, and Co.

Radford L. (2014) Cultura e historia: dos conceptopsdificiles y controversiales en aproximaciones contemporaneas en la educación matemática. In I. Abreu Mendes& C. Farias da Silva (Eds.), Cultura, PráticasSociais e Educação Matemática (pp. 49-68). São Paulo: Livraria da Física. Téléchargé de http://luisradford.ca/publications/

Radford L. (2010) Matemáticas, cultura y algunos pensamientos subversivos. Reseña invitada de Imaginario colectivo y creación matemática de Emmánuel Lizcano. Madrid: Madrimas. Téléchargé de http://luisradford.ca/publications/

Radford L. (2008) Culture and cognition: Towards an anthropology of mathematical thinking. In L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education, 2nd Edition* (pp. 439 – 464). New York: Routledge, Taylor and Francis.

Traoré K. (2010) Des savoirs mathématiques contextualisés. Dans Thésée, G. Carignan, N., Carr, P. R. (dir.) *Les faces cachées de l'interculturel. De la rencontre des porteurs de cultures* p.151-163. Paris : L'Harmattan ISBN : 978-2-296-12373-1

Traoré K. Bednarz N. (2010) Une étude ethnomathématique au Burkina Faso: l'arithmétique au quotidien. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education* Volume 10, Issue 4, 307-320

Traoré K. (2008) *Une certaine vision des mathématiques à la source de certaines difficultés des élèves au Burkina Faso.* Cahiers du Cerleshs, Tome XXIII, n°30, juin 2008.

ANNEXE

LISTE DES TEXTES DU GT 8 PAR ORDRE ALPHABETIQUE DU PREMIER AUTEUR

ARTIGUE, M.

Approcher la diversité culturelle dans l'enseignement des mathématiques à travers le filtre du langage professionnel des enseignants.

BOERO, P.

Quelques idées pour traiter les problèmes de la globalisation de l'enseignement des mathématiques.

DOUEK, N.

Quelles pratiques langagières ? Quels enjeux ?

GRIFFITH, B.

Perception des mathématiques chez les Hmong en France.

KY, A-J.

Aspect culturels des mathématiques : Enjeux et perspectives pour un cours classique de mathématiques.

RADFORD, L.

L'ethnomathématique et la mise en question d'une mathématique occidentale universelle.

TCHEUFFANZIATCHEU, J.

La construction discursive de l'activité de l'élève dans le programme cadre et dans une série de manuels scolaires en Ontario : Une analyse de textes sur les fractions.

VLASSIS, J.

Mathématiques et langage : le cas des classes multilingues, un défi pour l'enseignement Luxembourgeois.

APPROCHER LA DIVERSITE CULTURELLE DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES A TRAVERS LE FILTRE DU LANGAGE PROFESSIONNEL DES ENSEIGNANTS

ARTIGUE Michèle[*] –CHEVALARIAS Thierry[**] - DEBERTONNE-DASSULE Florence[**] GRUGEON-ALLYS Brigitte[***] – HOROKS Julie[***] – PILET Julia[***]

Résumé –Ce texte s'appuie sur les travaux menés au sein du projet international LEXICON dans lequel sont engagées des équipes d'enseignants et de chercheurs de neuf pays depuis 2014. Après avoir présenté le projet et notre cadre théorique, nous analysons comment ce projet qui viseà identifier et comparer les lexiques professionnels respectifs des enseignants de ces pays, nous permet d'approcher, de façon originale, la diversité culturelle et linguistique à l'œuvre dans l'enseignement des mathématiques.

Mots-clefs : Didactique des mathématiques, didactique comparative, diversité culturelle, discours des enseignants, théorie anthropologique du didactique

Abstract – This text relies on the research work carried out within the international project LEXICON, in which teams of teachers and researchers from nine countries are engaged since 2014. After presenting the project and our theoretical framework, we analyse how this project that aims at identifying and comparing the respective professional lexiconsof teachers from these countries allows us to approach the cultural and linguistic diversity at stake in mathematics education in an original way.

Keywords: Mathematics education, comparative didactics, cultural diversity, teacher discourse, anthropological theory of the didactics

I. INTRODUCTION

Comme le souligne le texte de présentation du groupe de travail 8 au colloque EMF 2018, il existe des façons diverses d'approcher la diversité culturelle et linguistique à l'œuvre dans les mathématiques et dans leur enseignement. Celle utilisée ici, qui s'appuie sur le projet international LEXICON (http://www.lexicon.iccr.edu.au), consiste à s'interroger sur le discours professionnel des enseignants et le lexique didactico-pédagogique sur lequel ce discours s'appuie. L'hypothèse faite est que ces discours et lexiques sont culturellement et linguistiquement situés, qu'ils influencent ce à quoi les enseignants sont sensibles et conditionnent ce qu'ils peuvent exprimer de leurs pratiques, partager avec d'autres, soumettre à la discussion (Mesiti, Clarke, Dobie, White & Sherin, 2017). Une seconde hypothèse à l'origine du projet LEXICON est que l'imposition de l'anglais comme langue de communication internationale dans le monde de l'éducation mathématique rend plus difficile l'expression de cette diversité culturelle et est source de transformations et réductions sémantiques. Le projet constitue donc aussi une contribution aux travaux de didactique comparative se situant dans une perspective critique qui se sont multipliés en ce début de XXI^{e} siècle (voir par exemple (Atweh et al., 2008)).

Le projet LEXICON, piloté par David Clarke et Carmen Mesiti de l'University of Melbourne, fait suite de fait à la Learner's Perspective Study (LPS dans la suite), une importante étude comparative des pratiques d'enseignants experts qui a engagé des chercheurs de 16 pays pendant une dizaine d'années[1]. C'est cette étude qui a attiré l'attention des chercheurs sur la richesse culturelle et linguistique de l'expression de l'expertise

[*] Université Paris Diderot – Paris 7 – France – michele.artigue@univ-paris-diderot.fr, [**] IREM de Poitiers – France – t.chevalarias@orange.fr, Florence.Debertonne-Dassule@ac-poitiers.fr, [***] Université Paris Est-Créteil – France – brigitte.grugeon-allys@u-pec.fr, julie.horoks@u-pec.fr, julia.pilet@u-pec.fr

[1] Voir http://www.lps.iccr.edu.au pour des informations détaillées sur ce projet et sur la série d'ouvrages associés.

enseignante, et la difficulté d'exprimer cette richesse en anglais. Plusieurs des pays partenaires du projet LEXICON étaient engagés dans LPS mais ce n'était pas le cas de la France. Elle est d'ailleurs la seule équipe venant d'un pays francophone. Il existe deux pays de langue anglaise (Australie et USA), ce qui permet de mener une comparaison pour deux pays de même langue (Mesiti et al., 2017), tandis que les autres pays (Allemagne, Chili, Chine, Finlande, France, Japon, République Tchèque, et la Corée du Sud récemment associée) ont tous des langues différentes.

Dans ce texte, nous présentons d'abord le projet global et son organisation. Nous précisons ensuite le cadre théorique choisi pour cette étude spécifique qui est celui de la théorie anthropologique du didactique (TAD dans la suite) et la façon dont ce cadre nous aide à problématiser l'étude. Nous analysons ensuite de façon réflexive le travail mené, qu'il s'agisse de l'élaboration des lexiques ou des premières études comparatives, en mettant en évidence certaines dépendances culturelles. Nous concluons par quelques considérations plus globales sur les potentialités et limites d'un projet de ce type pour approcher les questions de diversité culturelle et linguistique, et les besoins théoriques associés.

II. UNE VISION GLOBALE DU PROJET LEXICON

Comme cela apparaît sur le site international du projet et est repris dans diverses publications associées (Clarke, 2017) (Mesiti et al., 2017), le but du projet est le suivant :

> initiate cross-cultural dialogue to identify pedagogical terms from selected educational communities and use these as analytical tools to categorise, interrogate and enrich classroom practice, classroom research, and educational theorising.

Pour cela, dans chacun des pays concernés, une équipe mixte comportant des chercheurs expérimentés et de jeunes chercheurs, ainsi que des enseignants expérimentés (au moins deux) a été constituée à la rentrée 2014. Cette équipe a d'abord eu en charge la réalisation d'une vidéo d'une séance de classe de 4^{e} (grade 8) avec le dispositif à trois caméras déjà utilisé dans LPS (filmant la classe, l'enseignant et un groupe de deux élèves voisins), la transcription de ces vidéos et leur traduction en anglais, ainsi que le recueil de divers documents complémentaires (plan de classe, photos du tableau, productions des deux élèves filmés, préparation de l'enseignant, documents fournis aux élèves…). Les vidéos ont été ensuite montées et sous-titrées en anglais à Melbourne avant d'être mutualisées en 2015 (voir Figure 1).



Figure 1 – La présentation des vidéos

En utilisant ces vidéos comme appui, chaque équipe a eu alors à préparer une première version de ce qui pourrait constituer un lexique de termes pédagogico-didactiques utilisés par des enseignants expérimentés de collège pour décrire une séance de classe de mathématiques. Ces versions ont été présentéeset discutées durant une première semaine collective de travail fin 2015, à Melbourne. Des clarifications ont été apportées : ce qui était visé était le recensement des termes « raisonnablement » partagés et consensuels dans des communautés d'enseignants expérimentés ; il ne s'agissait pas d'un lexique de termes mathématiques mais bien d'un lexique pédagogico-didactique ; il ne s'agissait pas d'un lexique de chercheurs et la voix prépondérante, en cas de litige, devait être donnée aux enseignants des équipes ; chaque terme ou expression devrait être accompagné non seulement d'une description-définition mais aussi d'exemples et non-exemples aidant à en préciser le sens ; ces définitions-descriptions devaient être concises et non-circulaires. Enfin, chaque équipe devait organiser un processus de validation des lexiques, une fois ceux-ci révisés. Le travail d'élaboration-révision des lexiques nationaux en dialectique avec le processus de validation conduit s'est poursuivi en 2016. Lors de la réunion de juillet 2016 à Hambourg, il a été décidé d'harmoniser le processus de validation, en ayant recours à un questionnaire en ligne dont la structure a été conjointement élaborée et qui serait diffusé le plus largement possible[2]. Fin 2016, à Melbourne, les premiers résultats de ces évaluations ont été présentés et discutés, ainsi que l'évolution des lexiques qui en résultait ; des seuils d'acceptation/rejet des termes en fonction des réponses aux questions de familiarité ont été fixés (tout terme avec un taux de familiarité inférieur à 2/3 devait être par exemple, en principe, supprimé)et les premières études comparatives ont été envisagées. Le travail comparatif a alors débuté, en même temps que se finalisaient les lexiques, les analyses des questionnaires et études locales associées. Les versions quasiment finalisées, les méthodologies des premières études comparatives comme la méthodologie des narrations introduite dans la comparaison franco-tchèque (voir ci-après) et leurs premiers résultats ont été présentés et discutés en juillet 2017 à Pékin, en même temps que s'organisait la préparation d'un premier ouvrage rassemblant tous les lexiques, et qu'était menée une discussion plus approfondie des questions émergentes pour un travail comparatif, et de leur possible gestion. La réunion de février 2018, enfin, à Melbourne a été centrée sur la discussion des premières versions des chapitres du livre à paraître.

Comme on le perçoit dans cette courte description, il s'agit là d'un projet en cours et d'un projet de longue haleine. Presque trois ans auront été nécessaires pour arriver à une version suffisamment stabilisée des lexiques pour pouvoir envisager de les figer pour une période donnée et développer sur cette base de substantielles études comparatives. Mais, même si nous décidons momentanément de les figer dans leur état actuel, il est clair que nous concevons ces lexiques comme des objets dynamiques qui devront notamment s'enrichir d'apports des autres lexiques si l'on veut progresser de l'état actuel qui est celui d'une semi-profession enseignante, comme l'expriment Chevallard et Cirade (2010) vers une véritable profession dotée d'un lexique professionnel efficace.

III. CADRE THEORIQUE

Le cadre théorique sur lequel s'appuie ce texte est celui de la TAD que nous avons déjà utilisé dans une première étude comparative franco-tchèque (Artigue & al., 2017) et dont la pertinence pour des études comparatives a été déjà largement prouvée (voir (Artigue& Winslow, 2010) pour une première méta-étude). Ce n'est pas le seul cadre *a priori* possible

[2] Pour accéder au questionnaire français, voir la page du projet sur le site du LDAR : https://www.ldar.website/lexicon

comme le montrent d'autres publications liées à ce projet émanant de chercheurs ayant d'autres cultures didactiques que la nôtre (voir par exemple (Clarke, 2017)).

S'agissant d'approcher la diversité culturelle, la TAD, par la perspective anthropologique qu'elle revendique, nous semble a priori appropriée. Elle nous conduit plus précisément à situer cette diversité culturelle dans une large perspective systémique et écologique, à nous interroger sur les systèmes de conditions et de contraintes qui l'ont historiquement façonnée, à différents niveaux, en élargissant la vision au-delà du contexte des séances de classe dont les lexiques sont censés nourrir l'appréhension et la description. Pour cela, nous nous appuyons sur la hiérarchie des niveaux de codétermination didactique (Chevallard, 2002) et notamment ses niveaux de détermination supra-disciplinaires : pédagogie, école, société, civilisation. S'agissant de la dimension linguistique de l'étude, ce cadre nous permet de relier étroitement discours et pratique, à travers le concept de praxéologie. Toute praxéologie combine en effet un bloc praxique et un bloc théorique en interaction dialectique (Chevallard, 2002). La TAD propose aussi un modèle de structuration progressive des praxéologies pour former des praxéologies locales par regroupement de praxéologies ponctuelles partageant une même technologie, puis des praxéologies régionales par regroupement de praxéologies locales partageant une même théorie ou partie de théorie. Comme on le voit, le bloc théorique et ses éléments discursifs jouent donc un rôle clef dans les unifications sous-jacentes à la structuration progressive des praxéologies. La TAD nous incite enfin à ne pas oublier que, même si ce qui est visé par le projet LEXICON, c'est l'identification des éléments de discours pédagogico-didactique raisonnablement partagés au sein de la communauté des enseignants expérimentés -c'est-à-dire, si l'on se place dans le cadre de la TAD, des éléments de discours technologique associés aux praxéologies didactiques - praxéologies didactiques et praxéologies mathématiques vivent en symbiose et se co-déterminent mutuellement.

Il sera donc important, notamment dans les études comparatives menées, de trouver les moyens d'étudier jusqu'à quel point et comment ces fonctions diverses du discours technologique didactique et les relations entre discours mathématique et discours didactique trouvent à s'exprimer dans les lexiques et les discours associés, suivant les pays.

IV. ANALYSE REFLEXIVE DU TRAVAIL MENE

Nous ne pouvons dans l'espace de cette contribution présenter une analyse exhaustive et approfondie du travail collectif mené dans le cadre du projet LEXICON. Nous avons choisi d'analyser dans un premier temps la réalisation des lexiques et les produits qui en résultent, en mettant l'accent sur des caractéristiques qui apparaissent révélatrices de différences culturelles. Dans un second temps, nous reviendrons sur la comparaison franco-tchèque que nous avons réalisée avec les collègues tchèques (Artigue et al., 2017). A travers ces deux exemples, nous essaierons de montrer le potentiel de ce projet pour approcher la diversité culturelle et ses effets.

1. Les lexiques : processus et produit

Dès la première réunion à Melbourne, fin 2015, des différences culturelles sont apparues de façon évidente, ayant des conséquences sur la vision même du projet. La première de ces différences concernait les rapports, culturellement situés, entre pédagogie et didactique. Le mot « didactique », négativement connoté en anglais, ne faisait pas partie du vocabulaire de certaines équipes, par exemple l'équipe australienne qui portait le projet. Le but du projet s'est ainsi trouvé exprimé au départ en termes d'identification du lexique pédagogique des enseignants de mathématiques, à distinguer d'un lexique proprement mathématique. Pour

d'autres partenaires, notamment ceux d'Europe continentale, le mot didactique désigne, notamment en mathématiques, un champ scientifique autonome, distinct de celui de la pédagogie. C'est particulièrement le cas en France où la didactique, notamment en mathématiques, s'est construite épistémologiquement et institutionnellement en marquant sa distinction avec le champ pédagogique déjà existant, par la place centrale accordée aux spécificités disciplinaires des processus d'apprentissage et d'enseignement. Il était donc clair pour l'équipe française que ce qu'elle visait et ce que, formée de didacticiennes et d'enseignants animateurs IREM, elle se sentait légitime à produire, était un lexique didactique. La négociation collective a entériné ces différences culturelles, aboutissant à des lexiques que l'on pourrait situer le long d'un axe pédagogico-didactique. Une comparaison plus systématique sera nécessaire pour préciser ce continuum mais on peut déjà anticiper que les lexiques australiens et français y occuperont des positions très distantes. Il semble clair, par exemple, que le lexique australien pourrait, sans modification majeure, être utilisé dans d'autres disciplines, alors que, pour ce qui est du lexique français, cela nécessiterait des changements substantiels. Ceci s'exprime aussi par le fait que le lexique français, tout en respectant les règles collectives fixées, regroupe dans une catégorie spécifique 19 termes qui désignent des formes d'activité mathématique au rang desquelles figurent conjecturer, modéliser, définir, calculer, estimer, raisonner, argumenter, démontrer, avec des descriptions-définitions et des exemples qui en précisent le sens mathématique. Il est le seul dans ce cas, les autres lexiques obéissant à d'autres structurations (ce qui ne signifie pas pour autant que les autres lexiques ne contiennent pas de termes désignant des formes d'activité mathématique).

Une autre marque des contextes culturels est la place occupée dans les lexiques par des termes ou expressions issus de la recherche. Comme cela a été précisé plus haut, les lexiques visés ne sont pas ceux de la recherche en didactique ou en éducation mathématique. Ils doivent refléter une terminologie 'raisonnablement' partagée par des enseignants expérimentés. Certains lexiques, par exemple le lexique chilien, ne contiennent aucun terme issu de la recherche didactique ; les candidats proposés par les chercheurs ont été systématiquement rejetés par les enseignants des équipes car jugés non suffisamment familiers aux enseignants. Si l'on essaie une fois de plus de situer les différents lexiques sur un axe selon cette caractéristique, on devrait trouver, à l'opposé du lexique chilien, le lexique japonais. En fait, le lexique japonais est imprégné de la culture des « Lesson Studies » et de la terminologie associée. Cette terminologie est largement partagée par les enseignants du fait du rôle clef joué par cette pratique dans leur formation et développement professionnel. Mais comme expliqué dans (Isoda, 2015), c'est aussi une terminologie de chercheurs, le développement de la recherche didactique au Japon étant étroitement lié à cette culture. Le lexique français est dans une position intermédiaire haute, un de ceux où se voit le plus nettement la marque d'une migration de concepts de la recherche didactique vers le langage professionnel des enseignants. Sans aucun doute, l'institution des IREMs (Instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques), les actions de formation liées à la recherche que ce réseau promeut, les diverses revues d'interface qu'il publie, constituent-ils des caractéristiques contextuelles favorables à cette migration. Néanmoins elle reste limitée. 30tels termes ou expressions étaient inclus dans la version qui a été soumise à validation via les questionnaires en ligne, après plusieurs cycles de validation locale et révision. 13 étaient issus de la seule théorie des situations didactiques associés aux notions de milieu, variable didactique, situation adidactique/didactique, situation d'action, situation de formulation, situation de validation, contrat didactique, effet Topaze, effet Jourdain, dévolution, décontextualisation, institutionnalisation et ostension, reflétant en cela le rôle joué par cette théorie dans notre culture didactique. Cette dernière validation, à laquelle ont participé

environ 175 enseignants aux profils très divers répartis tout le territoire, a montré que sur un lexique de 115 termes, 21 ne franchissaient pas le seuil des 2/3 de familiarité collectivement décidé et que 20 de ceux-ci étaient justement des termes issus de la recherche didactique. Certains ont été néanmoins conservés dans la version finale du lexique parce qu'ils atteignaient un seuil de familiarité supérieur à, ou voisin de, 50% ; mais 8 ont dû être écartés, et en particulier les termes dévolution, ostension, effet Topaze et effet Jourdain issus de la TDS.

Ce ne sont ici que deux exemples parmi d'autres qui peuvent être utilisés pour montrer à quel point les lexiques mettent en évidence des différences qui, pour être comprises, doivent être analysées à la lumière des contextes culturels et de leur évolution historique. Pour ce qui est des différences linguistiques, des éléments très intéressants apparaissent que nous ne pouvons développer ici. Ils vont bien au-delà du seul constat des limitations de la langue anglaise à fournir des traductions satisfaisantes de termes de ces lexiques.

2. La comparaison franco-tchèque

La comparaison franco-tchèque a débuté en novembre 2016, sur des versions non encore finalisées des deux lexiques, notamment du lexique tchèque. Nous revenons ici, de façon réflexive, sur cette comparaison dont les premiers résultats ont été présentés dans (Artigue et al., 2017). Elle a débuté par une comparaison formelle des deux lexiques qui a montré d'emblée des différences importantes, que nous résumons ci-après :

- Différence dans le nombre de termes : 115 pour le lexique français (LF dans la suite) / 47 pour le lexique tchèque (LC dans la suite) (le plus petit des lexiques alors que le français est, avec le chinois, celui comportant le plus de termes).
- Différence dans la structuration : 5 catégories dans LC et 6 dans LF, 3 avec des dénominations proches (par exemple : *Phases de séance*), mais d'autres sans équivalent (*Usage de moyens didactiques* dans LC, *Termes généraux*, *Activités mathématiques* dans LF).
- Différence dans la conceptualisation des catégories, même lorsqu'ayant des intitulés voisins,et dans les termes associés. Par exemple, les catégories *Types de problèmes* dans LC et *Nature des tâche*s dans LF contiennent respectivement 4 et 18 termes, LF étant d'ailleurs le lexique le plus riche de ce point de vue ; malgré cela, les types de problèmes de LC ne constituent pas un sous-ensemble des tâches identifiées dans LF. Il n'y a que peu de termes communs entre les 13 termes de la catégorie *Phases d'une séance* dans LF et les 9 termes de la même catégorie dans LC. Ceux de LF ponctuent la progression de l'activité mathématique dans la classe (phase de rappel, phase de recherche, mise en commun, institutionnalisation…), tandis que ceux de LC ponctuent plutôt l'organisation globale de l'activité (students' and teacher's organizational questions, maintaining the discipline, written record on the board...).
- Différence dans la place accordée aux mathématiques, qui se manifeste dans LF dans l'existence d'une catégorie spécifique mais aussi dans le nombre de types de tâches mathématiques distinguées et dans les termes issus de la recherche didactique, alors que LC, comme le lexique australien, reste très général et pédagogique.
- Différence dans les formes et contenus des descriptions-définitions. Dans LC, elles sont généralement très courtes, en forme active, exprimant une action observable de l'enseignant et/ou des élèves, sans préciser ses fonctions possibles. Dans LF, elles sont généralement plus longues, sous forme nominale, et généralement explicitent la fonctionnalité des actions ; de plus, cette fonctionnalité est souvent accentuée par la

présence d'un commentaire, complétant la description-définition. L'exemple, dans la table 1, d'un terme commun aux deux lexiques en est une illustration.

Très vite, dans le travail conjoint avec les collègues tchèques, il nous est apparu que pour faire sens des différences, il fallait faire intervenir des niveaux élevés de la hiérarchie de codétermination didactique, et que nous ne pouvions non plus nous borner à considérer le hic et nunc de nos systèmes éducatifs respectifs. Et c'est ainsi que nous avons été amenés à relier les caractéristiques du lexique tchèque à l'existence d'une forte tradition de didactique générale qui, en République tchèque, remonte au XVII^{e} et à la *Didactica Magna* de Comenius. Cette tradition imprègne toujours aujourd'hui le monde de l'éducation et sa culture. A cette tradition de didactique générale s'oppose une tradition didactique française en mathématiques qui, elle, s'est forgée au contact étroit des mathématiques, et en refusant l'idée d'une didactique générale, même si, au fil des décennies, ses concepts ont migré à travers les disciplines, puis s'est développée le champ des recherches comparatistes en didactique qui questionne les cloisonnements disciplinaires (voir https://www.arcd.fr/accueil/).

Summarization	Bilan, Synthèse
Recapitulating steps of the solution of the problem.	Phase visant à dégager les éléments importants à retenir de l'activité mathématique menée. Il peut s'agir d'un bilan local en cours de résolution pour pointer des idées et résultats partiels, et orienter l'activité des élèves, ou d'un bilan (synthèse) global en fin de résolution ou de séance.

Table 1 - Un exemple de définition dans les lexiques français et tchèques

Pour approfondir la comparaison et apprécier l'impact de ces différences sur ce que à quoi des enseignants pouvaient être sensibles dans des séances de classes et exprimer ces sensibilités, pour aussi apprécier comment ces différences étaient susceptibles d'impacterla perception de l'imbrication entre praxéologies mathématiques et didactiques, nous avons alors décidé d'introduire un nouvel artefact méthodologique : des narrations des vidéos de séance conjointement conçues dans chacune de nos deux équipes. En cohérence avec l'utilisation des narrations dans la recherche en éducation (Clandinin & Connelli, 2000), nous considérons que ces narrations nous permettent de rendre visible que, pour chaque équipe, chaque vidéo raconte une histoire particulière engendrée par la sélection, l'arrangement et l'interprétation d'événements qui font sens pour le narrateur, et de ne pas oublier que ces histoires sont des productions socio-culturelles. Ces narrations réduiraient-elles les différences formelles observées, en permettant l'expression de sensibilités qui échappaient au filtre des lexiques ?

La réponse est clairement « Non ». Les séances françaises et tchèques qui ont été enregistrées sont très différentes dans leur contenu et leur gestion. Les narrations qui en sont produites respectivement par les équipes tchèques et françaises montrent ces différences, mais ce qu'elles nous montrent plus encore, c'est la différence entre les narrations produites par les deux équipes pour une même séance. Une identité narrative en quelque sorte se révèle. Sommairement résumé, les histoires produites par l'équipe française nous racontent une histoire mathématique de la classe et les phrases qui précisent ces mathématiques représentent respectivement 27% et 26% des descriptions. L'occurrence de termes du lexique comme *Poser une question*, *Expliquer*, y est systématiquement accompagnée de la description de leur contenu mathématique. Les narrations tchèques sont, quant à elles, beaucoup plus courtes et nous donnent à voir une histoire complémentaire. Les mathématiques y sont peu présentes

(elles représentent moins de 7% des narrations) mais s'y expriment très clairement les modèles (« patterns ») d'interaction entre enseignant et élèves.

V. COMMENTAIRES ET PERSPECTIVES

Dans ce texte relatif à un travail de recherche en cours, nous avons approché la dimension culturelle et linguistique dans l'enseignement des mathématiques, à travers un filtre, celui du lexique pédagogico-didactique sur lequel le discours professionnel des enseignants s'appuie. Même si la partie la plus passionnante, la comparaison des lexiques produits et 'raisonnablement validés' par les équipes engagées dans ce projet ne fait que débuter, nous espérons avoir montré, dans les limites imposées à ce texte, que le filtre utilisé est un filtre intéressant pour approcher la diversité culturelle. La comparaison que nous avons récemment engagée avec les collègues allemands tend aussi à mettre en évidence l'impact de différences linguistiques entre français et allemand pour l'étude desquelles le cadre théorique de la TAD est insuffisant et la collaboration avec des linguistes s'avère nécessaire. Il ne fait pas de doute non plus que la comparaison avec les deux pays asiatiques engagés, Chine et Japon, qui présentent des proximités culturelles certaines mais aussi de profondes différences notamment institutionnelles et politiques, devrait être particulièrement intéressante.

Bien sûr, comme tout filtre, ce n'est qu'un filtre très partiel, et ce même si l'on reste dans une approche en termes de lexique. Il s'agit en effet des lexiques utilisés dans la description de séances de classe. Tout ce qui concerne le travail des enseignants hors de la classe dont l'approche documentaire du didactique renouvelle aujourd'hui l'étude (Gueudet, Pepin & Trouche, 2012) avec le lexique spécifique associé, n'est pas pris en charge, par exemple. De ce point de vue, le travail qui a été engagé à l'occasion du colloque international sur les ressources des enseignants qui s'est tenu à Lyon en mai 2018, mobilisant des chercheurs de huit pays, semble très prometteur (https://resources-2018.sciencesconf.org).

Par ailleurs, de nombreuses questions restent largement ouvertes, relatives :

- au statut exact de ces lexiques dont on perçoit bien, malgré la méthodologie complexe qui a guidé leur élaboration, qu'ils auraient sans doute été en partie différents si d'autres équipes avaient eu la charge de les constituer, si d'autres choix avaient été effectués ;
- à ce qu'ils permettent exactement de capturer d'une professionnalité enseignante qui s'exprime d'abord dans l'action et porte une part nécessaire de non-dit, comme cela a été souligné lors des discussions au sein du groupe de travail à EMF;
- à la façon dont pourrait être envisagée leur évolution future, et en particulier à la façon dont ces lexiques pourraient s'enrichir mutuellement les uns et les autres ;
- à leur usage possible, notamment dans la formation initiale ou continue des enseignants, pour progresser vers un discours professionnel partagé, conformément aux ambitions du projet.

En France, par exemple, le lexique a été initialement conçu avec des animateurs IREM et enréférence à la communauté des enseignants qui sont actifs dans les IREM, aux termes qu'ils partagent et que l'on retrouve dans les publications du réseau, et c'est ce même milieu un peu élargi qui a été ciblé dans les premières validations locales. Le lexique final en porte nécessairement la marque, même si la validation en ligne a ouvert à un public plus large. Encore une fois, on voit là l'effet de caractéristiques contextuelles, culturellement situées. Par ailleurs, si chaque présentation du projet suscite un intérêt certain, pour l'instant un seul atelier a été organisé avec des enseignants, lors des journées nationales de l'APMEP, en octobre 2017, autour de tâches d'association entre termes du lexique et définitions, et d'usage du lexique pour coder de courts épisodes de vidéos du projet.

Les présentations du projet font aussi émerger de nouvelles pistes de recherche, par exemple concernant les différences entre les lexiques d'enseignants expérimentés et enseignants débutants, entre lexiques d'enseignants du primaire et du secondaire. Les discussions au sein du groupe de travail à EMF en ont fait émerger de nouvelles. Dans le projet Lexicon, en effet, la France est le seul pays francophone. Ne pourrait-on pas étendre ce projet à certains des pays que rassemble la communauté EMF ? Très certainement, de nouvelles questions émergeraient, de nouveaux phénomènes seraient alors identifiés, qui pourraient contribuer à une meilleure connaissance des effets de la diversité culturelle et linguistique sur l'enseignement des mathématiques.

Remerciements : Nous tenons à remercier le Conseil de recherche du gouvernement australien qui a soutenu ce projet, les chercheurs et enseignants impliqués dans son développement, ainsi que les IREM de Paris et Poitiers et le LDAR pour leur soutien.

REFERENCES

Artigue, M. & Winslow, C. (2010).Artigue M., Winslow C. (2010) International comparative studies on mathematics education: a viewpoint from the anthropological theory of didactics. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *30*/1, 47-82.

Atweh, B., Calabrese Barton, A., Borba, M., Gough, N., Keitel, C.,Vistro-Yu, C. & Vithal, R. (2008). *Internationalisation and Globalisation in Mathematics and Science Education*. New York : Springer.

Chevallard, Y (2002). Organiser l'étude. 3. Ecologie et régulation. In J.-L. Dorier et al. (Eds.), *Actes de la 11^{e} Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques* (pp. 41-56). Grenoble : La Pensée sauvage.

Chevallard, Y, & Cirade, G. (2010). Les ressources manquantes comme problème professionnel. In G. Geudet & L. Touche (Eds.), *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs de mathématiques* (pp. 41-55). Rennes : PU.

Clandinin, J., & Connelly, F.M. (2000). *Narrative Inquiry: Experience and Story in Qualitative Research.*San Francisco: Wiley & Sons.

Clarke, C. (2017). Using Cross-Cultural Comparison to Interrogate the Logic of Classroom Research in Mathematics Education. In B. Kaur, W.K. Ho, T.L. Toh & B.H. Choy (Eds.), *Proceedings of PME 41*(Vol. 1, pp. 13-28). Singapore: PME.

Gueudet, G., Pepin, B., & Trouche, L. (2012).*From Texts to 'Lived Resources'. Mathematics curriculum material and teacher development.* New York : Springer.

Isoda, M. (2015). The science of lesson study in the problem solving approach. In M. Imprasitha, M. Isoda, P. Wang-Iverson 1 B.H. Yeap (Eds.) *Lesson Study. Challenges in Mathematics Education* (pp. 81-106). Singazpour : World Scientific Publishers.

Mesiti, C., Clarke, D., Dobie, T., White, S. & Sherin, M. (2017). "What do you see that you can name?" Documenting the language teachers use to describe phenomena in middle school mathematics classrooms in Australia and the USA. In B. Kaur, W.K. Ho, T.L. Toh & B.H. Choy (Eds.), *Proceedings of PME 41*(Vol. 3, pp. 241-248). Singapour : PME.

QUELQUES IDÉES POUR TRAITER LES PROBLÈMES DE LA GLOBALISATION DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

BOERO[*] Paolo

Résumé: Un cadre théorique, dérivé du travail de Habermas sur la rationalité, est proposé pour traiter les relations entre le caractère universel des maths d'aujourd'hui et les cultures des lieux où elles sont enseignés (cultures des étudiants, scolaire, du contexte social). Des exemples (sur la modélisation et les maths pures) montrent comment l'enseignement-apprentissage des maths peut rencontrer les conceptions des étudiants et les cultures du contexte dans la perspective de développer les rationalités respectives. Une discussion est proposée sur les difficultés langagières des élèves dans l'accès aux mathématiques pures.

Mots-clefs: rationalité selon Habermas, enculturation, acculturation, alphabétisation mathématique, diversité culturelle

Abstract: A framework, derived from Habermas' elaboration on rationality, is proposed to deal with the relations between the universal character of today mathematics, and the cultures of where mathematics is taught (students' cultures, school culture, social context cultures). Some examples are presented (as regards mathematical modeling and pure mathematics) to illustrate how mathematics teaching and learning may meet students' conceptions and context cultures in the perspective of developing related rationalities. A discussion is proposed about students' linguistic difficulties when approaching pure mathematics.

Keywords: Habermas' rationality, enculturation, acculturation, mathematical literacy, cultural diversity.

I. INTRODUCTION

Si on considère le panorama des changements des programmes et des orientations des curricula de mathématiques dans les dernières 60 ans, on voit se renforcer des phénomènes de domination culturelle véhiculée par des organismes internationaux (comme l'OCDE) et/ou imposée par des relations de domination politique (cf Wagner & Lunney Borden, 2012).
Le cas des mathématiques dites « modernes » (« New Maths ») est typique et bien connu – dans ce cas, l'OCDE a eu une importance décisive pour les pays membres, tandis que dans beaucoup de pays francophones de l'Afrique l'influence décisive a été celle de la France, pour des raisons liées au passé colonial et à la langue, et parce que la France peut à juste titre être considéré le berceau des mathématiques modernes.
Autre cas : à partir des années '90 les standards NCTM (Etats Unis) sont devenus des standards de référence pour beaucoup de pays de l'Amérique Latine et de l'Asie.
Plus récemment, la définition de «Mathematical literacy » de PISA, et l'élaboration relative au niveau OCDE, sont en train d'influencer fortement les programmes et le curricula dans le monde, grâce aussi au fait que les compétences mathématiques des jeunes des différents pays sont comparées selon les tests PISA (donc selon l'idée de « literacy » OCDE-PISA) – avec des retombées importantes dans les pays moins performants : si un pays adapte ses programmes dans ce sens, on aura plus d'espoir de réussir dans les comparaisons internationales.
Une raison portée pour justifier cette tendance à la standardisation (de haut en bas) de l'enseignement des mathématiques est la prétendue nécessité d'une unification au niveau globale des compétences mathématiques, compte tenu de la globalisation dans les domaines économique, technologique, et donc du travail et des échanges scientifiques et technologiques. Une autre raison est celle lié à la globalisation des avancés des mathématiques pures et appliquées. Ces motivations sont raisonnables et fortes; le problème est qu'elles se traduisent en oubli du problème du rapport avec les cultures locales et les cultures des élèves.

[*] DISFOR, Université de Gênes – Italie – boero@dima.unige.it

La domination culturelle peut passer à travers :

- le manque de rapport avec les traditions culturelles locales: les mathématiques de l'école ; les mathématiques enracinées dans l'histoire locale ; les mathématiques de la rue et des pratiques artisanales; et le « sens » des mathématiques pour la culture du pays (par exemple, on trouve une situation très différente en Hongrie, où les journaux de jeux mathématiques ont une diffusion extraordinaire, et en Italie) ;
- la langue, quand les mathématiques sont enseignées dans une langue autre que celles qui sont parlées par la majorité des gens dans le pays, ou autre que les langues d'une partie de la population scolaire (comme dans le cas des classes multi-ethniques de beaucoup de pays de l'Europe) ;
- le manque de rapport avec la réalité des enfants (leur façon de raisonner, leurs expériences, leurs conceptions – qui peuvent différer d'un pays à l'autre et d'un milieu social à l'autre).

Les élèves qui réussissent dans une situation de domination culturelle ne sont pas forcément ceux qui ont les meilleures ressources intellectuelles ; ce sont le plus souvent ceux qui s'adaptent mieux aux impositions culturelles de l'école pour des raisons familiales, ou intimes - de disponibilité à s'intégrer dans un discours « autre » par rapport à ses convictions et façon de penser. On peut dire des choses semblables pour les enseignants.

Ces constats posent un problème politique (celui de concilier la nécessité d'une formation valable au niveau globale avec les liens à établir avec la réalité culturelle locale et personnelle), un problème culturel (celui de l'orientation culturelle de la formation – quelles mathématiques?) et un problème théorique (celui de l'outillage théorique pour traiter ces questions). Ma contribution concerne ce dernier problème, avec des liens avec les autres.

II. POUR UN ENCADREMENT DES ACTIVITES MATHÉMATIQUES EN RELATION AVEC LE CONTEXTE CULTUREL

L'institution scolaire, et l'enseignant comme fonctionnaire de l'institution, portent une exigence d'universalisme dans l'enseignement des mathématiques. Déjà au niveau de l'école on peut considérer les mathématiques scolaires comme une offre culturelle qui prétend à l'universalisme vis-à-vis des conceptions et des cultures particulières des élèves ; la référence plus ou moins fidèle aux programmes du pays donne une sorte de légitimation à cette prétention d'universalisme, et à leur tour les programmes se réfèrent (implicitement ou explicitement) à un universalisme global quand ils s'alignent aux standards NCTM ou à la « mathematical literacy » OCDE-PISA. Je pense que tout cela est inévitable et même nécessaire; le problème politique concerne le rapport à établir entre cette exigence d'universalisme poussée jusqu'au niveau global, la culture (mieux : les cultures) des élèves et la culture (mieux : les cultures) du contexte social dans lequel l'école est insérée.

L'outillage théorique disponible, bien qu'utile, me semble insuffisant pour traiter ce problème: en particulier, la distinction classique entre « acculturation » et « enculturation » (de H. F. Wolcott, cité in Bishop, 2002, pp. 193-194) est utile pour décrire (avec l'enculturation) la normalisation culturelle des élèves selon la culture dominante portée par l'école, et (avec l'acculturation) le dialogue continu entre traditions culturelles différentes, en particulier au sein de l'école. Mais cet outillage n'est pas suffisant pour traiter la complexité d'une rencontre productive originale, à mon avis souhaitable, entre une culture scientifique globalisée (en particulier, dans le domaine des mathématiques) offerte par l'école, et la maturation et le développement des cultures locales sollicitée par cette offre, avec la médiation cruciale de l'enseignant.

Il faut un outillage théorique susceptible de :

- Mettre en évidence les caractères saillants des différentes traditions et pratiques culturelles, pour permettre de déceler les points de contact et les différences entre elles, en particulier dans le domaine des mathématiques (des mathématiciens, de l'école, de la rue…) ;
- Mettre en relation la culture disciplinaire des mathématiques et les autres cultures, en particulier dans le cas de la modélisation mathématique.

La rationalité du connaître, de l'agir et du communiquer

Beaucoup d'activités culturelles (y inclues les activités mathématiques) peuvent être décrites comme des activités discursives avec des caractéristiques communes :

- L'existence de critères pour établir le vrai et le faux des propositions et la validité des raisonnements ;
- La présence de stratégies pour aboutir, susceptibles d'évaluation ;
- La présence d'un langage spécifique pour l'interaction sociale et le dialogue avec soi-même.

Le cadre de la rationalité élaboré par Habermas (1998) peut bien servir pour passer de cette description superficielle à un traitement plus profond des activités discursives. Dans ce cadre, le comportement rationnel est caractérisé : par la prise en charge consciente des critères de vérité et de validité (*rationalité épistémique*), des stratégies pour aboutir (*rationalité téléologique*), et des moyens pour communiquer (*rationalité communicative*); et par les liens dynamiques entre connaître, agir et communiquer dans la perspective de la rationalité, qui trouvent leur raison d'être dans l'aspect « génératif » (de nouvelles idées, de nouvelles solutions de problèmes) du comportement rationnel – si important dans la perspective de l' « expansive learning » de Engeström (voir Engeström & Sannino, 2010):

> Of course, the reflexive character of true judgments would not be possible if we could not *represent* our knowledge, that is, if we could not express it in *sentences*, and if we could not correct it and expand it; and this means: if we were not able also to *learn* from our practical dealings with a reality that resists us. To this extent, epistemic rationality is *entwined* with action and the use of language (Habermas, 1998, p. 312; emphasis in original).

Autre caractéristique saillante de la rationalité (intéressante pour l'enseignement) est l'importance attribué à l'intentionnalité subjective par rapport à la réussite d'un comportement rationnel ; dans le cas de la dimension épistémique de la rationalité on trouve chez Habermas :

> This does not mean, of course, that rational beliefs or convictions always consist of true judgements. (…) Someone is irrational if she puts forward her beliefs dogmatically, clinging to them although she sees that she cannot justify them. In order to qualify a belief as rational, it is sufficient that it can be held to be true on the basis of good reasons in the relevant context of justification (…) (Habermas, 1998, p. 312).

Pour une discussion du potentiel et des limitations de l'adaptation de la rationalité selon Habermas dans la didactique des mathématiques voir Boero & Planas (2014).

Avec cet encadrement, on peut, selon des zooms différents et des intérêts différents:

- Comparer, au sein des mathématiques actuelles (scolaires – aux différents niveaux- ou académiques), des rationalités mathématiques différentes ;
- Comparer les caractéristiques saillantes des mathématiques des mathématiciens d'aujourd'hui avec celles des mathématiques du passé, de l'école, des activités quotidiennes;
- Comparer les mathématiques avec d'autres disciplines (comme la grammaire d'une langue, ou la physique, ou l'astronomie) ;
- Comparer les mathématiques avec des systèmes de connaissances et de pratiques dans les cultures locales : les formes de rationalités « autres », qui peuvent marquer une opposition ou une congruence avec la rationalité mathématique.

L'avantage de cet encadrement est de permettre une vision détachée en même temps critique des rapports entre pratiques discursives différentes au sein des mathématiques, et en relation avec d'autres pratiques discursives. Par conséquent, cet encadrement peut être utilisé dans la formation des enseignants (voir Guala & Boero, 2017 ; Boero, Fenaroli & Guala, 2018) et dans le dessin et l'analyse des parcours et des situations didactiques au niveau scolaire (voir Douek & Morselli, 2012). Ici on l'utilise pour traiter au niveau théorique quelques problèmes de l'enseignement de la modélisation mathématique et des mathématiques pures au temps de la globalisation de l'enseignement des mathématiques.

III. LE CAS DE LA MODÉLISATION MATHÉMATIQUE

La problématique de l'enseignement-apprentissage de la modélisation mathématique est devenue de plus en plus importante dans les programmes et les standards de plusieurs pays; son rôle est central dans la définition de « mathematical literacy » de OCDE-PISA.
Je vais proposer trois exemples, pour lesquels les rapports entre la rationalité de la modélisation mathématique et les rationalités des enfants et/ou de leurs milieux de provenance sont différents et posent beaucoup de problèmes mais aussi offrent des opportunités culturelles intéressantes (dans la perspective de la prise en charge par l'école des rationalités des élèves).

1. La monnaie et les achats

Dans ce cas la modélisation mathématique fonctionne en accord avec les transactions commerciales : en termes de rationalité on peut dire que les critères de validité pragmatique sont généralement bien en accord avec l'organisation et les résultats du calcul (si on doit payer 8 €, le fait que 2+2+2+1+1=8 est bien en accord avec le fait que avec trois pièces de 2€ et deux pièces de 1€ le payement du prix de 8€ sera accepté). D'ailleurs une des origines du calcul arithmétique se situe dans le domaine des échanges économiques. Mais dans le contexte réel des activités d'usage de la monnaie on peut déceler trois types de situations qui demandent une réflexion à propos des limites du processus de modélisation et de ses résultats, et qui concernent le rapport entre la rationalité de la modélisation et les rationalités selon lesquelles s'organisent les décisions des sujets humaines et, plus en général, le fonctionnement du contexte dans lequel s'insère la modélisation:

- Le fait (assez simple, en vérité, mais instructif pour des enfants d'école primaire) que le marchand, ou la machine, peuvent refuser un payement légitime du point de vue du modèle mathématique : un distributeur de boissons, comme souvent le vendeur dans un magazine, n'accepte pas le payement d'une bière qui coute 2,50€ avec 250 pièces de monnaie de 1 cent.
- Le fait que les stratégies arithmétiques « de la rue » sont souvent différentes des stratégies de l'école et aussi étranges à la tradition culturelle des mathématiques des mathématiciens du passé : les recherches des années '80 au Brésil (voir Nunez, Carraher & Schliemann, 1993) ont bien mis en évidence des différences importantes à ce sujet, qui concernent la dimension téléologique de la rationalité des mathématiques et en partie aussi les autres dimensions. En particulier – à propos de la dimension épistémique – on a mis en évidence le fait que des critères pragmatiques – liés à l'efficacité des stratégies et à la validité des résultats – permettent de valider des algorithmes et des raisonnements sans souci de validation au sein de l'arithmétique de l'école.
- Le fait beaucoup plus complexe des décisions éventuelles du vendeur pour la fidélisation du client.

Dans ces cas, les critères de vérité des résultats des calculs économiques ne correspondent pas aux critères de validité pour les choix des gens. Il s'agit d'une réflexion importante à partir de l'école primaire, pour commencer à mettre en discussion le « sens » des résultats du calcul économique et leur rapport avec les choix des gens et les situations réelles.

2. Les ombres du soleil

Le modèle géométrique des ombres du soleil peut être considéré comme une des constructions culturelles les plus importantes pour les premiers développements des mathématiques dans le bassin de la Méditerranée (cf Serres, 1993). Et en effet ce modèle assure une bonne description, interprétation et prévision du phénomène (au moins au niveau macroscopique). Les résultats dérivés d'une modélisation correcte correspondent au fonctionnement du phénomène. La validité des propositions (et des représentations graphiques qui les soutiennent) est en accord avec les fonctionnements de la réalité. Mais si on choisit les ombres du soleil comme sujet de travail dans nos classes on découvre facilement que la rationalité de la modélisation géométrique n'est pas pour les enfants de l'école primaire l'unique forme d'organisation des connaissances sur le phénomène des ombres du soleil. L'idée de l'ombre-image de l'objet illuminé par le soleil (en particulier, dans le cas du corps humain : ombre comme sujet « autre ») est très fréquente chez les enfants ; l'idée de l'ombre-tapis est fréquente aussi chez certains adultes ! Il est vrai qu'il est assez facile mettre en crise dans la classe ces conceptions à travers des observations et des situations-problèmes bien choisies, mais pour les enfants l'abandon de la conception de l'ombre comme « double » de soi-même peut constituer un renoncement à une construction importante du point de vue affectif. La rationalité inhérente cette conception fait partie du développement de l'identité de l'enfant ; la mise en évidence au niveau conscient et la valorisation de cette conception (à travers des contes à lire et/ou à inventer) peut contribuer au développement d'une rationalité « autre » par rapport à la rationalité de la modélisation géométrique (rationalité « autre » qui ouvre des connections avec la littérature et l'art).
L'expérience qui dans mon parcours personnel à propos de rationalité a eu plus d'importance a été celle du traitement des ombres du soleil par des enfants de l'école moyenne en Érythrée : dans ce cas, la conception des ombres n'était pas une conception « d'enfants » seulement (elle venait de la culture locale), elle était liée à des formes de pensée complexe et la rationalité inhérente permettait de résoudre beaucoup de situations-problèmes. En effet, les enfants répondaient à beaucoup de questions posées d'une façon correcte, selon leur rationalité, et ensuite cherchaient de justifier la réponse donnée dans le cadre de la modélisation géométrique du phénomène (« parce que vous enseignez les maths ! »).
La conception des ombres chez beaucoup d'enfants de cette classe dépendait d'une vision d'équilibre dynamique entre lumière et obscurité, comme expression de cet équilibre, moment par moment : au matin, l'obscurité perd de force, vis-à-vis de la lumière, et l'ombre réduit progressivement sa longueur, jusqu'à midi, puis la vigueur de la lumière se réduit, et alors progressivement l'ombre s'allonge… Moment par moment, l'extension (en longueur et en ampleur : en deux dimensions, on peut bien dire) de l'ombre dans le cas des objets qui font d'obstacle à la lumière dépend de l'extension de l'obstacle. Etc. Même la variation de la vitesse de raccourcissement de l'ombre le matin (et d'allongement l'après-midi) peut être interprété de cette façon ! (tandis qu'une interprétation mathématique est beaucoup plus compliquée). La chose intéressante est que cette façon de voir un phénomène de la nature dans une perspective d'équilibre dynamique (qui semble partagée par d'autres cultures aussi : voir Cheng, 1997, à propos de la pensée chinoise) est assez importante pour deux raisons liées: elle peut offrir une perspective plus générale pour considérer des phénomènes d'intérêt écologique ; et elle constitue une référence (come façon de penser) pour entrer dans une

perspective de modélisation mathématique avancée de certains phénomènes (comme celui de l'équilibre dynamique prédateur-proie selon le modèle différentiel de Lotka-Volterra).
Dans une perspective d'enculturation, le modèle des ombres du soleil de certains enfants d'Érythrée constituerait un obstacle, une conception à éradiquer ; dans une perspective d'acculturation, il pourrait être comparé avec le modèle géométrique, et finalement celui-ci émergerait comme supérieur (« often one of the contact cultures is dominant, regardless of whether such dominance is intended » – Wolcott (1974) cité in Bishop, 2002, p. 194) ; dans la perspective que je propose à travers la rationalité, la rationalité de l'équilibre dynamique pourrait donner lieu, à travers une prise de conscience de plus en plus poussée, à un développement important, vers des rencontres avec des mathématiques avancées et surtout vers des relations à établir avec des enjeux actuels dans le domaine écologique et économique.

3. La transmission des caractères héréditaires

Dans ce cas, la rationalité de la modélisation probabiliste trouve sur le terrain (chez les enfants, mais aussi chez les adultes) des autres rationalités robustes et bien enracinées dans les cultures du passé et d'aujourd'hui : en particulier, dans le cas des maladies héréditaires, la rationalité qui fait dépendre ce qui se passe de la volonté d'un sujet supérieur (sujet-décideur) ; et la rationalité fondé sur la conception d'un sujet interne aux événements aléatoires, qui règle ces événements – et qui (par exemple) assure que après quatre « face » dans un lancement de monnaie, la probabilité de voir apparaître « croix » doit augmenter (pour équilibrer le déséquilibre qui s'est crée).
Dans une perspective d'enculturation, il s'agit de conceptions qu'il faut éradiquer comme « anti-scientifiques » et même dangereuses (dans le domaine de la santé) ; dans une perspective d'acculturation il faut les prendre en compte, en rapport avec la modélisation probabiliste, pour montrer le bien-fondé expérimental et/ou théorique de celle-ci (mais on ne peut pas empêcher qu'un élève puisse dire « bien que Dieu se soumet aux lois de la probabilité, il peut décider de punir X comme cas singulier »). Dans la perspective de la rationalité on peut aller au fond des besoins qui induisent les conceptions (et les rationalités) non-probabilistes, et les faire évoluer. En particulier dans une expérience-pilote menée avec des enfants de 10-11 ans à la fin d'un parcours d'environ 30 heures on a pu traiter le cas des accidents de la route, en orientant leur réflexion de l'appel à l'intervention d'un sujet supérieur protecteur, vers l'identification dans une entité supérieure (l'état) et ses lois (normes de sécurité) d'une réponse possible au besoin de protection, qui met en jeu aussi la responsabilité de l'individu (sans pour autant nier le recours à d'autres entités protectrices, bien enracinée dans le milieu des élèves!).

IV. LE CAS DES MATHÉMATIQUES PURES

Le cas des mathématiques pures peut sembler simple à traiter dans la perspective de la globalisation de l'enseignement des mathématiques : selon une analyse superficielle, seulement des problèmes de rapport aux conceptions des élèves (et des enseignants) devraient être pris en considération, pour tenir compte de la nécessité d'un dialogue avec ce que pensent ces sujets. Au contraire dans la perspective de la rationalité on doit prendre en compte des problèmes complexes qui concernent :

- la présence au sein des mathématiques d'aujourd'hui de formes de rationalité différentes pour ce qui concerne les trois dimensions de la rationalité (non seulement des langages spécifiques, mais aussi des stratégies différentes et parfois des critères différents pour la vérité des propositions – comme on voit si on compare, par exemple,

la théorie des graphes et l'algèbre, à propos de ce qui est vrai « par évidence »). La chose est encore plus complexe si on considère le fonctionnement des « pratiques discursives » des mathématiques au sens large, non pas limité à la rédaction des produits finaux du travail mathématique, mais incluant la production des conjectures et des preuves, et la validation et la communication des résultats parmi les experts (cf Thurston, 1994).

- La transposition didactique des mathématiques aux différents niveaux scolaires, et le rapport entre ce qui dérive des avancements des mathématiques des mathématiciens, et les mathématiques scolaires avec leur inertie et leur organisation interne ; dans la perspective de la rationalité on peut identifier des points importants de rupture de continuité surtout pour ce qui concerne la dimension épistémique (en particulier dans le passage du niveau primaire au niveau secondaire).
- Les options épistémologiques (et souvent même idéologiques) qui influencent (et parfois déterminent) le processus de transposition didactique. Deux exemples significatifs à ce propos concernent les « mathématiques modernes », et la vision des mathématiques à enseigner et apprendre sous-jacente à la « mathematical literacy » de OCDE-PISA. Si on considère les rationalités inhérentes à ces orientations de la transposition didactique on trouve des divergences très importantes pour ce qui concerne les trois dimensions de la rationalité (y inclue la dimension communicative et son lien avec la dimension épistémique – caractéristiques et rôle du formalisme mathématique).

Dans la perspective de la rationalité, les questions évoquées ci-dessus ont une grande importance si on veut tenir compte des cultures locales et du dialogue à établir avec elles : l'exercice des rationalités des mathématiques d'aujourd'hui demande souvent une rupture (en termes de rationalité) avec les rationalités des mathématiques scolaires dans beaucoup de pays ; et les options épistémologiques et idéologiques qui influencent la transposition didactique peuvent ajouter des éléments de conflit et de complexité. Plus en profondeur, les moyens langagiers (mieux, logico-langagiers) disponibles chez les élèves, liés étroitement aux formes de rationalité de la culture locale, peuvent être insuffisants, ou dissonants, par rapport aux moyens langagiers nécessaires pour l'exercice des activités mathématiques selon les rationalités imposées par la globalisation. Un exemple est celui de la maîtrise de la période hypothétique (en particulier dans le raisonnement par l'absurde), qui pose des problèmes (en particulier au niveau écrit) dans les langues écrites non alphabétiques (voir Wong, 2017); un exemple à un niveau beaucoup plus élémentaire, et moins difficile à traiter dans l'enseignement, concerne la distinction entre « nombre » et « numéro » (présente au niveau de langue commune dans certains langues), qui peut favoriser la prise en charge du concept de nombre comme quantité, entité distincte de l'étiquette symbolique (une difficulté en Italie, où la distinction entre « nombre » et « numéro » n'existe pas dans la langue naturelle).

Tout cela pose des problèmes difficiles à résoudre si on veut éviter l'enculturation aveugle avec ses conséquences d'éradication culturelle et d'aliénation pour ceux qui réussissent. Pour quelques espoirs de l'éviter, la prise de conscience chez les enseignants des enjeux de la globalisation de l'enseignement des maths dans la perspective de la rationalité me semble en ce moment une condition préliminaire (voir Guala & Boero, 2017). Des élaborations ultérieures sont nécessaires sur le plan épistémologique et anthropologique : en ce moment les points de contact entre les rationalités des mathématiques pures actuelles et les rationalités (actuelles ou potentielles) de la majorité de la population mondiale semblent assez réduits !

Les moyens langagiers et les formes de pensée qu'on peut réaliser avec ces moyens présentent dans le monde une grande variété, bien au-delà des phénomènes décrits par Luria (1976).

V. CONCLUSION

Chaque sujet est porteur de cultures (avec composantes personnelles et sociales mélangées), et souvent porteur aussi de rationalités potentielles, qu'il faudrait rendre conscientes et développer dans le dialogue avec une culture mathématique qui prétend à l'universalisme, pour aboutir à une synthèse originale ouverte sur le futur mais bien enracinée dans les cultures d'origine. Dans la perspective de la rationalité les cultures d'origine ne sont pas seulement des occasions de « motivation » pour les élèves, mais peuvent porter dans l'école des éléments importants pour leur formation culturelle. On peut entrevoir des possibilités réelles dans ce sens (au moins sur le plan théorique) dans le cas de la modélisation mathématique (voir Section III). La situation semble beaucoup plus difficile dans le cas des mathématiques pures : en particulier, les moyens langagiers des sujets et les caractères propres des langues naturelles semblent être des éléments discriminants pour pratiquer les rationalités des mathématiques pures sans couper les liens avec ses racines culturelles (Section IV).

REFERENCES

Bishop, A. J. (2002). Mathematical acculturation, cultural conflicts and transition. In G. de Abreu, A. J. Bishop and N. C. Presmeg (Eds.), *Transitions between contexts of mathematical practices* (pp. 193-212). Dordrecht : Kluwer A. P.

Boero, P., Fenaroli, G. & Guala, E. (2018). Mathematical argumentation in elementary teacher education: The key role of the cultural analysis of the content. In G. Harel and G. Stylianides (Eds.), *Advances in mathematics education research on proof and proving* (pp. 49-67) New York: Springer.

Boero, P. & Planas, N. (2014). Habermas' construct of rational behavior in mathematics education: New advances and research questions. In *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol 1, pp. 228-235). Vancouver (CA): PME & UBC.

Cheng, A. (1997). *Histoire de la pensée chinoise*. Paris : Éditions du Seuil.

Douek, N. & Morselli, F. (2012). Preuve et algèbre au collège: de la conception d'une séquence d'apprentissage à l'évolution du cadre théorique de référence. In L. Coulange & J.P. Drouhard (Eds.), *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives.* Numéro hors série de *Recherches en Didactiques des mathématiques*, pp. 283-304.

Engeström, Y. & Sannino, A. (2010). Studies on expansive learning: Foundations, findings and future challenges. *Educational Research Review*, *5*, 1-24.

Guala, E. & Boero, P. (2017). Cultural analysis of mathematical content in teacher education: The case of elementary arithmetic theorems. *Educational Studies in Mathematics*, 96, 207-227.

Habermas, J. (1998). *On the pragmatics of communication*. Cambridge, MA: MIT Press.

Luria, A.R. (1976). *The cognitive development: Its cultural and social foundations*. Cambridge (MA) : Harvard University Press.

Nunes, T., Schliemann, A. D. & Carraher, D. W. (1993). *Street mathematics and school mathematics.* Cambridge (MA) : Cambridge University Press.

Serres, M. (1993). *Les origines de la Géométrie*. Paris : Flammarion.

Thurston, W. P. (1994). On proof and progress in mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 30(2), 161-177.

Wagner, D. & Lunney Borden, L. (2012). Aiming for equity in (ethno)mathematics research. In B. Herbel-Eisenmann, J. Chopin, D. Pimm & D. Wagner (Eds.), *Equity in discourse for*

mathematics education : Theories, practices, and policies (pp. 69-88). New York : Springer.

Wolcott, H. F. (1974). The teacher as an enemy. In G. D. Spindler (Ed.), *Education an cultural process : Towards an anthropology of education* (pp. 136-150). New York : Holt, Rinehart and Winston.

Wong, K-C (2017). Reasoning-and-proving in geometry in school mathematics textbooks in Hong Kong.https://keynote.conference-services.net/resources/444/5118/pdf/CERME10_0047.pdf

QUELLES PRATIQUES LANGAGIERES? QUELS ENJEUX ?

DOUEK* Nadia

Résumé – Une conception des savoirs doublée d'une pratique langagière cohérente avec celle-ci, prégnantes dans les classes françaises, mèneraient à des conceptualisations « pauvres » des objets d'enseignement mathématiques, et contribueraient à faire des élèves d'habiles exécutants. Des exemples sont analysés à partir de mon cadre de la conceptualisation ainsi qu'une réflexion sur des pratiques interprétatives qui aideraient surmonter, dans le cadre institutionnel, ces conditions et leurs effets.
Mots-clefs : (interprétation, conceptualisation, expérience culturelle, aliénation)

Abstract – A widespread conception about knowledge associated with linguistic practices coherent with it are widespread in french classrooms. They could be factors that induce « poor » conceptualization of mathematical objects, and contribute to develop students into skilled executants. Using my framing for conceptualization, I shall analyse examples, as well as a reflection upon interpretative practices that might help overcoming, within the institutional context, these factors and their effects.
Keywords: (interpretation, conceptualization, cultural experience, alienation)

I. INTRODUCTION

Dans les formes d'enseignement que je voudrais critiquer ici, ce sont les composantes « techniques » des savoirs et des pratiques mathématiques qui sont valorisées et retenues, aux dépends de postures réflexives et critiques. Leurs sens et leurs champs d'application s'adossent à des situations soit internes aux mathématiques soit épurées de toute « complexité » que provoquerait l'écart entre ces outils (ou modèles) et l'expérience de la réalité (aussi familière soit-elle) des pratiques socio-culturelles de l'environnement des élèves. L'enjeu important, dans ces formes d'enseignement, est d'éprouver l'efficacité technique de l'objet enseigné pour résoudre des exercices standards puis des exercices compliqués.
De surcroît, les pratiques langagières se veulent rigoureuses et transparentes, l'expression univoque. Les justifications, quand elles sont demandées, se basent sur la cohérence interne des mathématiques mise en place dans les cours récents, ou supposées évidentes sans avoir été mises en lumière ni questionnées. Le recours à des significations extra-mathématiques n'est pas validé, mais des analogies peuvent servir les explications. L'ambigüité est exclue ou d'emblée évitée par un supplément de précisions. On le voit dans les énoncés de problèmes usuels, et dans les activités qui « enseignent » à « comprendre » et à traiter méthodiquement ces énoncés (rechercher les données utiles, identifier les opérations en soulignant les mots-clés…). L'activité langagière sert rarement à « explorer » des mots, des représentations sémiotiques ou des rapports entre signifiés et signifiants, comme font les jeunes enfants pour comprendre comment fonctionne un jouet ou si les « chevals » sont aussi des chevaux. Peu de place est laissée au travail de douter, de s'aventurer à faire des liens interprétatifs intuitifs. On craint que l'élève se perde ou stabilise des significations inadéquates. Ne risque-t-on pas ainsi (suivant P. Le Coz, 2010) :

> ...l'annexion du territoire de la réflexion libre et critique par une forme procédurale de pensée. La rationalité instrumentale attaque à sa racine toute pensée du monde, toute appréhension intuitive et incarnée de ce qui se donne à voir et à vivre pour l'homme.

Ce travail critique que je présente pourrait illustrer l'analyse de l'éducation que développe de L. Radford en termes d'aliénation, dans quatre sens marxistes (Radford, 2016).

> Alienation consists in (…1°) the precise fact that the produced object is no longer the individual's expression. While producing, the individual is without objects in the anthropological sense (…), that is, without objects in which she expresses and recognizes herself. What is alienating here is hence the loss of expressivity of life in the object ; (…2°) The fact that labour is external to the worker, i.e., it does not

* ESPE Université de Nice, Equipe LINE – France – ndouek@wanadoo.fr

> belong to his (sic) essential being ; (…3°) the alienation of the individual from the human species ; (…4°) the alienation of the individual from other individuals. (…The) transmissive educational model reduces the teachers to bureaucratic agents who labour to implement a prescribed curriculum and reduces the students to passive learners. (…). The alienation of the student of the child-centred progressive model consists in (that her…) activity (…) fails to put her in contact with the objective world, that is, her species' world, and with other individuals.

Je propose cependant de développer, dans le contexte scolaire tel qu'il est (il semble difficile à modifier) une dimension herméneutique des activités langagières favorisant l'activité réflexive de l'élève et donc une activité moins aliénée. L'hypothèse est que si l'enseignant(e) accueille les apports des élèves dans leur diversité et accorde des temps d'activités interprétatives et de débats, il/elle pourrait surmonter les contraintes de la vision technicienne des mathématiques, se laissant guider par les besoins qui apparaissent, favorisant des conceptualisations plus riches et profondes des savoirs visés. Je ne discuterai pas les objets d'enseignement, et m'intéresserai à un aspect limité des enjeux de l'éducation. Sans remettre en question l'apprentissage de procédures et de techniques, ni l'usage d'un langage rigoureux, il s'agit de critiquer leurs places prioritaires dans les enseignements et leurs effets.

II. CADRE THEORIQUE DE LA CONCEPTUALISATION

Vergnaud (1990) défini un champ conceptuel par trois composantes, à caractère socio-culturel. Elles peuvent aussi bien être riches au niveau expérientiel qu'artificielles : les situations de références, les invariants opératoires (que je remplacerais par les schèmes d'actions) et les représentations sémiotiques. Vygotski (1985) modélise l'apprentissage par la dialectique concepts quotidiens / concepts scientifiques. C'est un développement cognitif : les modes de mobilisation des objets de savoirs évoluent, à travers l'apprentissage scolaire, entre intuition riche de l'expérience, imprégnée des pratiques socioculturelles, et mobilisation explicite et volontaire. Intuition et expérience « quotidienne » sedéveloppent dialectiquement en savoirs structurés. Des liens systémiques deviennent conscients, les significations évoluent.

Le cadre que je présente articule ces perspectives (voir Douek 2014). Il ouvre l'analyse épistémologique et cognitive de la conceptualisation au(x) contexte(s)socio-culturel(s) de son émergence et de son développement à travers l'activité du sujet. Il permet de reconnaître des aspects quotidiens ou scientifiques de situations de référence, de schèmes d'action et de représentations, dans l'activité de l'élève, d'analyser l'évolution de sa conceptualisation à travers ces composantes, et de donner des moyens d'évaluer l'aliénation sous ses première, troisième et quatrième formes, et faire des choix didactiques pour la contrer ou la limiter.

L'école vise la formation de savoirs structurés maîtrisés de façon consciente et volontaire. La conceptualisation scientifique de Vygotski. Mais on verra dans les exemples qu'elle perd de vue leurs racines signifiantes, expérientielles ou « quotidiennes », sur lesquelles aurait joué la dialectique Vygotskienne, et que l'enseignant(e) n'est pas souvent en mesure d'entendre.

III. TROIS EXEMPLES

Le premier est issu d'une séance expérimentée dans une classe du primaire qui revisitait les décimaux, le deuxième, d'une situation observée en fin d'école maternelle et analysée avec des professeurs en formation, le troisième est un texte d'exercice de fin d'études secondaires qui a récemment fait scandale en France. Les trois me permettent : d'illustrer les conditions d'aliénation que forment cette conception technicienne des savoirs et cet usage s^écifique du langage; d'en proposer une analyse critique sur la base du cadre de la

conceptualisation, et d'ouvrir des perspectives de dépassement de ces conditions par des pratiques interprétatives.

1. Expérimentation dans une classe d'école primaire d'une ville Française

Il s'agit d'une séance dans une classe de cinquième (et dernière) année du primaire, de « niveau moyen ». Le travail proposé (accepté par l'enseignante) était inhabituel, tant au niveau des tâches que de l'organisation (production individuelle écrite suivie de débat collectif sur la base de quelques productions). Les élèves avaient étudié les décimaux en quatrième année avec la même enseignante, et reprenaient le sujet depuis plusieurs jours. Les décimaux avaient été introduits après les fractions comme fractions décimales, puis représentés par des nombres à virgule équivalents à des sommes d'entiers et de fractions décimales, et aussi dans un tableau de numération. Les élèves commençaient à les représenter sur la droite numérique (bien connue, tant de façon abstraite que pour représenter des mesures de longueurs non entières). Ils connaissaient les tableaux de conversion pour diverses mesures de grandeurs, ainsi que la lecture des heures et la représentation des durées.

L'exercice peut initialement paraître artificiel, mais l'enjeu déclaré au fur et à mesure de la séance est le questionnement et la recherche d'exemples. On s'intéressait aux liens entre ce que les élèves connaissent de la structure décontextualisée des décimaux (construite en classe) et des connaissances scolaires ou extrascolaires proches, ainsi que les liens entre différentes représentations sémiotiques des décimaux, enseignées ou en cours d'enseignement.

> Représenter les nombres utilisés ci-dessous de plusieurs façons différentes, même avec des dessins ou schémas, si vous voulez. Puis les écrire en chiffres avec des décimaux :
> Un kilomètre cinq ; Un euro cinq ; Une heure cinq ; Un an et demi ; Un mètre cinq ; Un kilo et demi.

Ces expressions sont courantes dans l'environnement culturel des élèves (sauf un mètre cinq, car on ne fait plus de couture dans les familles). Les questionnements potentiels et les enjeux d'apprentissages devaient émaner des points suivants :

- Certaines expressions verbales communes ne sont pas bien maîtrisées par les élèves ;
- Les représentations « quotidiennes » orales de nombres familiers diffèrent des représentations spécifiques visées en classe. L'écart créait des ambigüités (voulues).
- Une bizarrerie : les heures et durées ne sont représentées avec des décimaux ni à l'école ni en dehors.

Mais il y avait des obstacles dus à l'écart par rapport au contrat didactique :

- Le travail de mise en relation entre le langage familier et le langage spécifique est indispensable, or ce dernier est habituellement apporté pour « corriger » le premier.
- La tâche mélange des « chapitres » : décimaux, conversions, durées et heures.
- La tâche était relativement imprécise. Au lieu d'avoir à « placer ces nombres dans un tableau » on a, plus librement, à « représenter ces nombres de diverses façons ».
- L'activité sollicitée est inhabituelle : exploration, questionnement des significations des différentes expressions et leurs liens, explicitation de systèmes de représentation.

Ces activités favorisent le doute, qui peut être inacceptable s'il n'a pas été expérimenté comme moteur d'apprentissage. Que les élèves « trouvent » les représentations mathématiques correctes était secondaire. Nous cherchions à provoquer la recherche de significations ; l'exploration de liens entre des savoirs scolaires acquis ; la comparaison entre expressions verbales, leurs rapports avec les contextes de leur usage (scolaires ou extrascolaires), la confrontation entre différentes représentations sémiotiques. Et en amont, nous cherchions à provoquer l'expression de doutes, d'alternatives : une « activité interprétative ». Doute et interprétations favorisent la conscience de la maitrise des savoirs et des limites de leur validité, et des liens entre différentes formes de conceptualisation. D'où le parti pris d'une certaine ambigüité : reconstituer des liens et des significations aurait peu de

raison d'être dans un cadre précis et limpide. Mais existe-t-il des cadres précis et limpides… pour tous ?

Les élèves ont éprouvé des difficultés que nous n'avions pas imaginées. Mais après un certain temps et quelques interactions, voici quelques productions, parmi les plus élaborées:

a- un km cinq : 1 km et 5 millimètres
b- 1,5 parce que c'est un km plus la moitié d'un km
c- 1,5 un euro et cinq centimes sont égales à 1,5= 5/10 (barré) 5 /100 .
5 centimes ça fait 5/100 (réponses à des questions du maître)
d- 1kg et demi=1,5= un kg plus 500gr où on a enlevé le zéro dans 1,5 1005g=1000g+5Gr
e- c'est un kg et demi de patates, c'est un km et demi jusqu'à Oran...

Aucun élève n'a fait de schéma ou dessiné spontanément. Nous espérions que les dessins de pièces de monnaie engagent facilement des activités d'interprétation pour décider entre la pièce de 5c. et celle de 50c. La référence aux savoirs extrascolaires n'a eu lieu que chez une élève considérée en difficulté (production e), sans références à d'autres représentations sémiotiques, sans exhiber de liens avec les savoirs scolaires. D'autres ont écrit des nombres en chiffres, comme répondant à une devinette, cherchaient-ils à enclencher un automatisme ? Ni moi, ni la maîtresse de la classe, n'avons eu la présence d'esprit d'exploiter « 1km et demi jusqu'à Oran », probablement démunies face au préjugé que l'élève est en difficulté, et nous-même piégées par la valeur accordée aux représentations « scientifiques ».

Après le temps de production individuelle, le débat collectif a été engagé à partir du traitement de « un euros cinq ». L'intention était de favoriser le rapport entre pratiques extrascolaires et scolaires, la schématisation, des appuis pour le travail d'interprétation ainsi que les doutes qui allaient surgir des différentes propositions. Nous avons demandé si les réponses « c'est 1,5 » et « c'est un euro et cinq centimes » disaient la même chose. La majorité pense que oui.

Les justifications (juste ou non) étaient « formelles », procédaient d'application de techniques : plaquaient les règles d'écriture en chiffres à l'organisation des mots. Elles reflètent le contrat didactique qui exige d'agir par procédures dites « expertes ». Les élèves voient donc une équivalence entre un euro cinq et un virgule cinq (voir production c).

L'élève qui a produit c présente alors sa proposition finale « 1,05 » (élaborée en interaction avec moi). Pour provoquer des justifications et des réfutations, nous avons dû questionner les rapports entre « centimes », « centième » et « centaine », « centime » et « euro » (questionnement, enjeu d'apprentissage supposés acquis, que nous espérions dévoluer aux élèves). Pourquoi entend-on « cent » à chaque fois ? Et qu'est-ce qui fait les différences de significations ? En va-t-il de même pour « dix », « dizaine » et « dixième » ? La confrontation des règles d'écriture en chiffres, d'expression des mots-chiffres, et de la connaissance des pièces de monnaie a finalement stimulé la plupart. En conclusion, les différentes représentations « mathématiquement valides » de « 1euro 5 » ont été structurées dans un tableau de numération adapté à la monnaie, en rapport avec la recherche étymologique (habituelle aux heures d'apprentissage de la langue, mais pas en mathématiques). Et on a clarifié que l'expression valide hors de l'école ne suit pas les mêmes règles qu'en classe de mathématiques, d'où les confusions.

L'enjeu explicite était donc devenu le rapport entre règles d'écriture en mathématiques et les expressions de tous les jours, ainsi que la variété des significations des expressions selon le contexte. Nous avons admis que les élèves avaient bien raison de se tromper car ils gèrent des systèmes différents en même temps.

Ensuite, il a été facile d'établir que si dans les usages courants 1km5 désigne un kilomètre et demi ou 1km 500, ceux qui ont proposé 1km et 5 mm ne manquaient pas de logique, mais d'habitudes, et d'écrire cette proposition sur le tableau de numération, servant alors de tableau de conversion (petite avancée dans la conceptualisation quotidienne des grandes distance).

Enfin, tous savent ce que représente un an et demi. Mais que signifie d'écrire 1,5 année ? que représenterait le chiffre 5 ? A suivi un travail interprétatif non trivial qui a bien engagé les élèves dans la réflexion sur la signification de la position des chiffres dans l'écriture décimale.

Nous avons approché deux enjeux d'apprentissage duaux, l'interprétation et la métacognition, qui dépendent de l'activité provoquée par la tâche: profiter du doute, l'exprimer ; entrer dans un jeu d'interprétations avec autrui ou seul, de ce que dit l'autre, de la signification des représentations mathématiques, des rapports entre diverses représentations (ou idées) ; exploiter/explorer le bagage de références et de significations qui se trouve à sa portée, qui constitue l'expérience du sens, parce qu'existant dans l'environnement culturel ; prendre conscience d'obstacles qui ne se réduisent pas au manque de connaissances.

Mais, ce bagage est-il accessible ? c'est là que l'on peut faire un lien entre la conception des mathématiques et le choix des pratiques langagières en classe, et montrer leurs effets. Plusieurs conditions interviennent dans cet accès au sens : la nature des explications attendues en mathématiques (à quoi est-ce pertinent de se référer en classe? situations contextualisées, métaphores ou calculs et règles à appliquer ?) ; la forme langagière permise ou encouragée (mots rigoureux ou approximations intuitives reflets de schèmes de la conceptualisation quotidienne ?) ; les liens entre les éléments de ce bagage, la possibilité d'en amener à la conscience par les interactions verbales, les débats et les jeux d'interprétation ; la reconnaissance de non-cohérences inévitables entre organisation mathématiques et pratiques extra-scolaires ou extra-mathématiques.

Une prise en compte plus ouverte des recommandations institutionnelles (que ce que j'observe généralement) permettrait à l'enseignant(e)une posture où il/elle ne craint pas de travailler les incohérences avec les élèves, par exemple en les laissant apparaître et en encourageant la clairvoyance, la capacité de situer l'optique à partir de laquelle on s'exprime, questionner les règles « aveugles », mais du coup cette posture l'amènerait à abandonner la place prioritaire de l'activité technique.

Il serait encore plus constructif de faire, à la base même des apprentissages, une place réelle aux références et pratiques culturelles des élèves, pour que puisse avoir lieu une dialectique CQ/CS plus élaborée, mais aussi pour une place plus importante faite à l'élève comme sujet, comme on le recherche dans la didactique des domaines d'expérience (Douek 2014). Dans l'exemple nous avons tenté une dialectique limitée : rejoindre les pratiques extrascolaires à partir du questionnement des savoirs scolaires. L'apport nouveau, ici, est le rôle d'un travail d'interprétation et des pratiques réflexives, dépassant les limites disciplinaires ou scolaires, dans les apprentissages ; et la place à faire à l'ambigüité dans la conception des situations didactiques. L'entrainement à mobiliser des procédures décontextualisées appartient alors à des étapes spécifiques et non prioritaires. Mais les enseignants n'y sont pas souvent prêts.

2. Exemple en formation initiale des enseignants du primaire

La formation initiale des enseignants de l'école primaire alterne responsabilité dans une classe, et cours dans l'institution de formation. J'ai exploité, lors d'un cours, une situation observée dans une classe de maternelle (élèves de 5-6 ans) : chacun a sa carte, avec son prénom, accrochée sur un tableau de deux colonnes, maison et école. En arrivant le matin, chacun déplace sa carte du côté « maison » au côté « école ». Restent celles des absents. Les élèves se comptent et comptent les cartes des absents. Depuis quelques temps la maîtresse demande de trouver le nombre de présents, connaissant le nombre d'absents. Ils utilisent une file numérique de cartons allant de 1 à 31, proche du tableau Maison/Ecole et servant à diverses activités. La carte 26 est marquée d'un point, c'est le nombre d'élèves de la classe.
Je demandais au groupe d'enseignants stagiaires d'imaginer :1) quelles procédures les élèves pourraient élaborer pour résoudre le problème ; 2) comment gérer les interactions avec les

élèves pour les amener tous à construire une résolution du problème. Ils ont fait les propositions suivantes :

> a-compter 7 cartons partant de 26 et conclure que le nombre d'élèves se voit sur la carte juste avant la dernière comptée, 19, que l'on pointe ;
> b- placer chacune des cartes d'absents sous un carton numéroté, de 26 jusqu'à 20, et conclure que les autres cartes correspondent aux élèves présents. On entoure alors le carton 19.
> c- compter des sauts (comme dans les jeux de plateaux avec dés).
> d- et ils ont bien sûr imaginé que les élèves compteraient tout simplement les présents, éventuellement pour valider la réponse au problème.

Les propositions a et c étaient majoritaires, mais suivies de doutes chez certains. Comment trancher avec les élèves que c'est bien 19 qu'il faut retenir ? Car la procédure qui donne 20 (erronée) ressemble au dénombrement où le dernier objet compté/numéroté donne le cardinal. Cette remarque est très pertinente, les enfants sont en train d'apprendre à dénombrer à cet âge. Cette inquiétude me paraît révéler la suprématie qu'ils accordent à la procédure sur l'exploration du sens de la situation, des significations des représentations et des motivations des actions. Les propositions a et c sont « techniques ».

Ensuite, cherchant comment expliquer aux élèves ces procédures, ils pointaient les cartons au rythme des 7 doigts qui s'abaissent, commentant les gestes sans interprétations (comme le faciliterait la proposition b), sans référence à la réalité des présences et des absences. Or, des questions guideraient les élèves dans l'interprétation : à quoi fait-on correspondre la carte 20 ? ou ce doigt que j'abaisse ? et la 19 ? et les autres avant 19 ? Puis, pourquoi placer la carte d'un élève absent sous le carton 26 ? qu'est ce que cela signifie ? J'ai dû suggérer ces questions. Mais nombreux ne les trouvaient pas assez épurées pour les enfants, craignaient la confusion, préféraient la simplification par allègement du langage, des signes, et la précision d'une procédure « efficace »...

Les enseignants, en formation ou confirmés, développent un langage précis, mais souvent sans lien avec l'expérience et les conceptualisations quotidiennes, même en maternelle. L'activité en contexte (comme dans cet exemple) perd sa caractéristique principale : d'être riche de sens pour l'élève. La complexité générée par la recherche d'un traitement organisé d'une situation « réelle » (donc d'une certaine façon, de mathématiser) est éludée, mais pas l'abstraction des procédures enseignées par répétition. L'idée que l'expression « compliquée » rend la situation incompréhensible (alors qu'elle est là, vécue), montre que l'expérience n'est pas vu comme première. Le langage rigoureux et simplificateur qui accompagne la technicité détache l'élève de son expérience avec sa dimension culturelle. L'accès rapide aux procédures « expertes » écarte l'élève de l'activité de mathématisation. Il y a lieu de parler d'aliénation.

3. Un exercice proposé dans un ouvrage scolaire

Un exercice sur les suites géométriques dans un ouvrage scolaire de fin d'études secondaires de section sciences sociales (Hyperbole Term ES) commence ainsi :

> Des migrants fuyant la guerre atteignent une ile en méditerrané. La première semaine il en arrive 100. Chaque semaine le nombre de nouveaux arrivants augmente de 10%...

Des collègues se sont scandalisés par cet exercice. Journal télévisé, article de journaux ont suivi, l'éditeur a remplacé ces manuels. Dans un premier temps on peut regretter que cet exercice reflète un manque de respect envers les migrants ou qu'il contribue à diffuser la peur de l'invasion. Mais, je présente l'hypothèse que les auteurs eux-mêmes sont piégés dans des diverses abstractions, courantes dans l'enseignement des mathématiques: 1) les outils mathématiques et la modélisation, leur raison d'être ; 2) l'enjeu du travail de classe, trouver des exemples pour les élèves des sections sciences sociales, même si la situation invoquée est improbable (mais pensable « techniquement ») ; et 3) les questions de société qu'on leur désigne (le sujet des migrants occupe les médias, avec souvent des arguments et des

raisonnements simples, isolés des réflexions globales). Parce que désignées, elles sont acceptées comme réalités, et sous la forme désignée. S'agissant de mathématiques, le contexte est « naturellement » secondaire, ces questions n'ont donc pas à trop occuper l'esprit.

Les élèves ne sont pas invités à questionner cette réalité humaine, c'est juste un exemple pour passer à l'essentiel : mobiliser un outil mathématique supposé pouvoir servir la réflexion en sciences social, mais on n'en viendra pas là. L'élève bien adapté devrait lire le texte … sans le lire. Diriger l'« interprétation » du texte ainsi que sa pensée d'une façon précise: rechercher des indices de l'objet mathématique caché dans ces mots. Questionner la plausibilité de la situation paraîtrait incongru d'autant qu'elle concorde avec les présentations en vogue, qui plus est à travers un texte précis et sans ambigüités. La modélisation laissée aux élèves est minimaliste, les erreurs possibles seraient une mauvaise application de la formule. Ni le sens de la situation ni celui de l'outil mathématique ne sont des enjeux. Réfléchir ne permettrait pas de faire l'exercice.

Cette maladresse des auteurs révèle l'ampleur de la diffusion de cette conception technique des savoirs soutenue par l'usage d'un langage « efficace » ne nécessitant pas l'interprétation.

IV. MISES AU POINT ET CONCLUSION

À propos de l'interprétation, je propose, adoptant la description de L. Jenny (2005) :

> … l'attitude interprétative (…) caractérise la communication verbale en général. Les énoncés ne se suffisent pas à eux-mêmes, contrairement à ce que suggéraient les schémas de la communication proposés dans les années 1960 par la linguistique de l'énoncé. (…). Pour être pleinement compris, un énoncé verbal doit être complété par la convocation d'un ensemble d'informations contextuelles, de savoirs et de raisonnements.

De définir les conditions de l'activité interprétative en classe à partir des réflexions sur l'exemple 1 : L'enseignant(e) partage et stimule une posture de doute, d'écoute mutuelle et d'interprétation des diverses propositions (les connaissances en jeux incluant les concepts quotidiens, et les apports de l'institution), adéquates ou non ; engage la classe à confronter ces apports et à débattre (argumenter) de leur pertinence pour consolider transformer ou rejeter les propositions et leur expression, clarifier ce qui relève des savoirs qu'on établit en classe de mathématiques, ce qui relève d'autres domaines (scolaires ou extrascolaires) et ceux qui (au moins pour l'instant) ne semblent pas cohérents avec les savoirs partagés. Pour permettre de prendre la responsabilité de cerner la signification des mots, des signes et des liens systémiques.

La difficulté pour moi est de concilier : la nécessité de travailler avec les contraintes de l'institution et des usages établis; l'hypothèse que l'on œuvre trop souvent à l'aliénation des élèves, grâce à l'aliénation des enseignants ; et la réflexion sur les choix didactiques (voir Douek, 2014) qui favoriseraient un développement cognitif ample chez les élèves leur permettant d'articuler en connaissance de cause les pratiques socioculturelles de leur(s) environnement(s) et les constructions « scientifiques ». Car il s'agit de leur développement comme sujets acteurs dans leur communauté-classe et dans leur environnement socioculturel.

La proposition de développer le travail langagier et l'activité interprétative est un pari pour faire face à la contrainte que les habitudes (en cohérence avec des pratiques généralisées dans la société occidentale) imposent -de développer des compétences techniques aveugles « hors sol »- sans paralyser les enseignants par des exigences de transformations radicales et d'analyses épistémologiques et cognitives trop couteuses. En acceptant cette ouverture de l'activité langagière, les enseignant(e)s feraient exister une variété de représentations, de situations de références qui favoriseraient une conceptualisation moins étriquée des apports institutionnels, mieux mise en rapport avec les conceptualisations quotidiennes.

Pour conforter la plausibilité de ce pari et du rôle escompté du langage dans le rapport à l'expérience et dans le dépassement des enfermements du choix technicien, je propose une définition des mots « sens » et « complexité ». Sens : rapport au langage ou à des représentations vécu comme harmonieux, et qui peut être non exprimable ; Complexité : expérience d'inadéquation entre plusieurs représentations et perceptions d'une situation. Deux enjeux et moteurs forts de l'interprétation.

Pour l'instant, le rapport simplifié entre situations de référence peu signifiantes et constructions mathématiques, rend naturels l'usage du langage comme s'il était transparent et l'idée qu'il est facile et primordial d'éviter les malentendus, et même que le monde est modélisable. Le résultat, pour beaucoup d'élèves, est que la réflexion doit se développer dans des créneaux langagiers et conceptuels étroits usant d'expressions et représentations normées, aux significations limitées et aux sens fragiles. Leur expérience, déjà appauvrie par les formes de vie dominantes, n'a pas beaucoup d'importance pour réfléchir. Ces conditions et formes d'aliénation sont communes (même si bien moins criantes) avec celles que produit l'enseignement de mathématiques vues comme universelles, et faisant fi de la culture et des besoins socio-culturels de communautés non occidentale.

REFERENCES

Douek,N. (2014). La didactique des domaines d'expérience et l'encadrement de la conceptualisation. In JP Bernié et M Brossard (Ed.) *Vygotski et l'école - Apports et limites d'un modèle théorique pour penser l'éducation et la formation*. Presses Universitaires de Bordeaux.

Le Coz, P. (2010). Roland Gori, philosophe: Comment repenser l'intimité ?. *Cliniques méditerranéennes*, 82,(2), 53-61. doi:10.3917/cm.082.0053.

Jenny L. (2005)
L'intertprétation,
https://www.unige.ch/lettres/framo/enseignements/méthodes/.../iîntegr.html

Radford, L. (2016). 'On alienation in the mathematics classroom' In *International Journal of EducationalResearch 79*, 258-266.

Vergnaud, G. (1990. La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10, 133-170.

Vygotsky, L. (1985). *Pensée et langage*, Paris: Editions Sociales.

Crouzier, A. ; Desrousseaux, P.-A. ; Eynard,D. ; Gonçalvès,A. ; Ternoy, J. ; Védrine,M. (2017). *Hyperbole Term ES Spécifique + Spécialité / L Spécialité*. Éditions Nathan.

PERCEPTIONS DE MATHÉMATIQUES CHEZ LES HMONG EN FRANCE

GRIFFITHS[*] Barry J. –DAUGHERTY[**] Janet F.

Résumé – Cette étude utilise une approche qualitative pour rechercher les perceptions de Hmong en France en ce qui concerne les mathématiques, et s'interroge quant à savoir si la culture Hmong affecte leur capacité à apprendre le sujet et plus particulièrement les fractions et les problèmes. Les participants signalent un niveau élevé de confiance et de compétence et notent le rôle que jouent les parents dans l'encouragement et la promotion de l'aspiration éducative.

Mots-clefs: Hmong, France, ethnomathématique, fractions, problèmes

Abstract – This study uses a qualitative approach to seek the perceptions of Hmong in France with regard to mathematics, and focuses specifically on whether Hmong culture affects their ability to learn the subject, and whether this is particularly true of fractions and word problems.The participants report a high level of confidence and competence, and note the role that parents play in encouraging and nurturing educational aspiration.

Keywords: Hmong, France, ethnomathematics, fractions, word problems

I. INTRODUCTION

Bien que l'histoire et la culture du Hmong ne soient pas communément connues, les estimations placent leur nombre à environ 15.000 en France (Vang, 2016). Originaires de Chine, beaucoup de Hmong ont migré vers le sud sur les hauts plateaux du Laos, de la Thaïlande et du Viêtnam, cherchant à échapper à la domination chinoise. Cependant, en acceptant d'aider les États-Unis dans la guerre du Viêtnam, les Hmong ont été forcés de fuir la vengeance des partis communistes qui ont pris le pouvoir une fois que les forces américaines se sont retirées. On estime que 130.000 se sont réfugiés en Thaïlande au milieu des années 1970, jusqu'à être hors de danger (Xiong, 2004). Fortement encouragée par les Nations Unies, la France a reconnu son devoir envers les personnes qui étaient autrefois sous son autorité et a accepté des milliers de réfugiés, en privilégiant ceux qui ont démontré une connaissance minimale de la langue française, avaient servi sous l'armée française ou la fonction publique en Indochine, ou avaient déjà une famille en France (Gilles, 2000). Une fois en France, les Hmong ont été envoyés dans des centres provisoires d'hébergement (CPH) où ils ont vécu pendant six mois. Durant cette période, les Hmong ont pu s'intégrer en France grâce à une introduction aux commodités modernes et l'apprentissage quotidien de la langue française (ibid.). Xiong (2004) note l'accueil chaleureux que les immigrants de première génération ont reçu des communautés locales en France, le gouvernement créant un bureau traitant spécifiquement des besoins des réfugiés d'Asie du Sud.

En ce qui concerne l'éducation, il est difficile d'évaluer les progrès du Hmong par rapport aux autres minorités ethniques et celles originaires de France en raison de la loi Informatiques et libertés (L. n° 78-17) qui interdit aux chercheurs de se renseigner sur l'origine ethnique et le pays de naissance lors de la réalisation d'enquêtes. Les Français ne reconnaissent pas l'idée d'une minorité et ne tiennent pas les registres démographiques officiels des populations minoritaires. Cela a causé une controverse considérable dans le discours national (Tribalat, 2016) et les

[*] Université de Floride Centrale – États-Unis – barry.griffiths@ucf.edu
[**]Université de Floride Centrale – États-Unis – daugmatic@knights.ucf.edu

chercheurs frustrés en raison de la difficulté d'obtenir des statistiques significatives causées par le manque de désagrégation entre les groupes ethniques.

Payet et van Zanten (1996) contrastent avec la situation aux États-Unis, qui abritent 275.000 Hmong, où les études ethniques sont permises et montrent que le taux de réussite au baccalauréat et le nombre des Hmong avec un diplôme de bachelier est très bas par rapport à d'autres ethnies asiatiques, et bien en dessous de la population totale (US Census Bureau, 2010). Les raisons invoquées comprennent des niveaux élevés de pauvreté, une difficulté à assimiler à la culture américaine, le nombre élevé des grossesses chez les adolescentes et le racisme (Weinberg, 1997). Cependant, des études approfondies en France (Vallet et Caille, 1996;Brinbaum et Cebolla-Beado, 2007) ont conclu que, surtout lorsqu'on contrôlé statistiquement pour la classe sociale et l'éducation parentale, la performance scolaire des immigrants et des indigènes est similaire, et les familles des immigrants expriment souvent des aspirations plus élevées pour leurs enfants. Néanmoins, Yang (1995) note que compte tenu de la nature orale de la langue hmong, la communauté hmong se trouve dans une situation unique quant à l'apprentissage de l'écriture en français.

En ce qui concerne les mathématiques, il a été établi que les étudiants qui les apprennent dans une autre langue rencontrent des problèmes quant à la compréhension des mots utilisés dans les énoncés (Adetula, 1990;Moschkovich, 2005; Neville-Barton & Barton, 2005). Ces difficultés sont à prévoir pour les Hmong, car leur langue maternelle ne leur a été transmise qu'oralement jusqu'au milieu du 20e siècle (Bliatout et al., 1988). Il n'y a toujours pas de traduction claire de termes mathématiques communs (Vang, 1988). Par conséquent, Xiong (2012) a décrit comment les étudiants de Hmong avec lesquels il avait travaillé ont souvent eu du mal à traduire des problèmes en équations mathématiques nécessaires pour les résoudre. Les traductions littéraires du français au Hmong ont souvent conduit à une mauvaise interprétation du problème, et notamment pour les fractions dont les expressions similaires sont très peu présentes dans la langue hmong (Kimball, 1990; Hammond 2006).Cette étude examine ces problèmes à l'obtention d'informations de Hmong vivant en France, en particulier s'ils croient qu'il existe des aspects culturels et linguistiques qui influent sur leur capacité à comprendre les fractions, les problèmes et les mathématiques en général. Par conséquent, cette étude intègre les principes fondateurs de l'ethnomathématique, qui est une des branches des mathématiques datant de 1976 et a été articulé par Rosa et al. (2016) comme étant le processus par lequel nous « étudions les moyens par lesquels différents groupes culturels comprennent, articulent et appliquent des idées, des procédures et des techniques identifiées comme des pratiques mathématiques ».

II. MÉTHODOLOGIE

Afin de recueillir les expériences et les perceptions de Hmong en France en matière de mathématiques, un sondage en ligne a été créé, et été envoyé par email à des organisations et des églises en France avec un nombre significatif de Hmong parmi de leurs membres entre avril et juillet 2017. Une demande a été faite pour distribuer l'enquête parmi les membres de l'organisation. En plus de l'information démographique, on a posé aux participants dix questions liées à leur propre expérience en mathématiques, en particulier si les fractions et les problèmes ont causé des difficultés particulières et commenter plus généralement si les problèmes culturels et linguistiques affectent les Hmong quand ils apprennent des mathématiques. Toute la communication a eu lieu en français, mais en dépit de l'offre de dix euros pour compléter le sondage, aucune donnée n'a été reçue depuis plus de deux mois, ce qui n'était pas tout à fait surprenant étant donné que les Hmong ont tendance à être timide et réticent à discuter

ouvertement de leurs sentiments et opinions avec des étrangers (Cha, 2003). Il se pourrait aussi que les participants potentiels se méfient des motifs de l'étude, compte tenu de la façon dont la majorité des études portant sur les Hmong ont abouti à des conclusions peu flatteuses ou ne se sentait pas qualifiés pour commenter, même si les questions étaient presque exclusivement liées à des expériences personnelles. Par conséquent, le taux de réponse a été regroupé autour d'une période de deux semaines, alors qu'il est probable que les participants aient incité leurs connaissances à participer à cette étude, ce qui a été mentionné à la fin du sondage. Bien que l'on craigne que cela puisse affecter l'hétérogénéité des répondants surtout en ce qui concerne leur niveau d'éducation, l'équilibre entre les sexes et la tranche d'âge des participants suggère qu'aucun groupe de pairs n'était pas trop représenté. Il convient de noter que trois participants ont refusé l'offre de paiement, et trois ont demandé que le don soit versé à une église locale ou à un organisme de bienfaisance.

De ce fait, l'échantillon ciblé comprenait 15 participants, tous issus de familles arrivant en France d'Indochine entre 1975 et 1980. Il y avait neuf participants masculins et six participantes féminines, avec une tranche d'âge de 22-57 (un participant retenant son âge), et le plus haut niveau d'éducation allant de zéro à un doctorat. Le tableau 1 résume les informations démographiques, avec des noms anonymes donnés aux participants en fonction de leur sexe. Les données ont été analysées de manière itérative, en lisant à plusieurs reprises les réponses pour trouver les intentions sous-jacentes exprimées. Les points communs et les différences ont été trouvés en comparant et en contrastant les réponses individuelles, les hypothèses émergentes étant confirmées et modifiées, avant d'être finalement intégrées dans un récit cohérent.

Participant	Genre	Niveau de l'éducation	Âge
Dawb	Femme	BAC+2	29
Alang	Homme	BAC+2	22
Mooj	Homme	BAC+2	37
Blong	Homme	BAC	38
Fwam	Homme	Doctorat	29
Hli	Homme	BAC+5	38
Kauj	Homme	BAC+3	23
Koob	Homme	BAC+5	36
Houa	Femme	BAC	37
Lauj	Homme	BAC+5	49
Eve	Femme	BAC+2	22
Xob	Homme	< BAC	57
Kajsiab	Femme	BAC+5	24
Npaim	Femme	BAC+3	-
Sua	Femme	BAC+3	22

Tableau 1 *– Démographiques des participants*

III. RÉSULTATS

1. Perceptions des fractions

Lorsqu'on leur a demandé de décrire si leurs expériences en mathématiques étaient généralement positives ou négatives, presque sans exception, les participants ont décrit comment leur expérience a été positive. La structure logique de la pensée mathématique était particulièrement appréciée, et la nature inhérente du sujet comme science exacte était considérée comme une bonne chose:

> Je commence à aimer les maths depuis que je suis au collège. (Eve)
>
> Mon expérience a été positive. J'aime les choses logiques, qui se justifient clairement, sans argumentation. (Sua)
>
> Mon expérience en mathématiques a généralement été positive, car les nombres sont plus faciles à utiliser que les mots. J'aime le fait que la logique des nombres est différente des mots. (Npaim)

Lorsqu'on leur a demandé si les fractions avaient posé des difficultés particulières, la plupart des participants ont simplement dit non, bien que certains aient mentionné le temps qu'il leur a fallu pour maîtriser le concept. Une exception était Xob, le participant le plus âgé, qui faisait partie de la première génération des Hmong à avoir quitté le Laos pour la France en 1970. Comme ce fut le cas à cette époque (Weinberg, 1997), il n'avait reçu aucune éducation formelle lorsqu'il est arrivé en France et donc pas d'apprentissage des fractions:

> Quand j'étais plus jeune, j'ai eu des problèmes avec les fractions, mais plus aujourd'hui. (Kauj)
>
> Comme je ne suis jamais allé à l'école en France ou au Laos, je ne sais même pas ce que sont les fractions. (Xob)

Les participants ont été invités à commenter la déclaration des érudits (Kimball, 1990; Hammond 2006) que les Hmong n'utilisent pas de fractions dans leur système de numération. Beaucoup d'entre eux étaient d'accord sans fournir d'autres détails, bien que Mooj se soit interrogé ironiquement contre l'assertion. Hli et Lauj ont convenu et ont noté que la multiplication et les nombres négatifs entraînent également des difficultés.

> LOL! Qui sont les érudits? (Mooj)
>
> Je suis d'accord. La langue hmong n'utilise pas les fractions. Donc, les fractions ne sont pas un point fort, mais elles ne sont pas plus difficiles que la multiplication. Le langage de la multiplication chez les Hmong est encore plus difficile à cerner. (Hli)
>
> Oui, je suis d'accord. On pourrait même dire par extension que les Hmong ne connaissent que les entiers naturels. (Lauj)

2. Perceptions des problèmes

On a demandé aux participants si les problèmes mathématiques (c'est-à-dire des problèmes avec de nombreux mots où l'on doit appliquer la théorie mathématique aux situations du monde réel) avaient causé des difficultés particulières lorsqu'ils étudiaient le sujet, beaucoup ont confirmé que cela avait été le cas. D'autres ont répondu en disant que la question était simplement une fonction de leur capacité en général en ce qui concerne les mathématiques, ou comment ces problèmes étaient d'abord difficiles, mais sont devenus plus faciles avec la pratique et une meilleure compréhension des mots utilisés:

> Tout à fait. Les maths ne sont pas mon domaine. (Houa)

Non. J'ai toujours bien-aimé les problèmes en maths. (Eve)

Oui, ils ont posé difficulté. Néanmoins, les habitudes que j'ai su développer en mathématiques facilitant cette opération. (Kauj)

Quand j'étais petit garçon, j'avais du mal, mais avec le temps, ça va maintenant. L'application des mathématiques au monde réel est difficile, car nous n'avons pas toujours les mots qu'il faut. (Hli)

Une question de suivi naturel était de se demander si, face à problèmes, ce sont les mots ou les mathématiques qui ont posé la plus grande difficulté. Alors que beaucoup ont vu que les mots étaient le plus grand défi à surmonter, d'autres n'étaient pas d'accord, tandis que certains ont reconnu qu'en lisant attentivement la question (et souvent à plusieurs reprises), il est devenu un problème mathématique plutôt que d'un problème linguistique:

Ce sont les mots qui causent la difficulté. (Dawb, Koob)

Ce sont les mathématiques nécessaires pour résoudre le problème. (Kajsiab)

Non, je peux comprendre le problème en le relisant, plusieurs fois si nécessaire. J'essaie de poser les données d'abord pour avoir une idée claire du chemin à suivre. (Alang)

Cela dépend du niveau de la personne confrontée au problème. Pour ma part, je pense que, au-delà d'un certain niveau, la difficulté réside dans l'utilisation des mathématiques. (Kauj)

3. Aspects culturels et linguistiques de l'apprentissage des mathématiques

La dernière question posée aux participants était de savoir s'ils pensaient que les facteurs culturels et linguistiques pouvaient affecter la capacité des Hmong dans leur apprentissage des mathématiques. Cette question a suscité une plus grande réflexion et des réponses plus nuancées de la part des participants. Les réponses étaient plus élaborées que pour les autres questions, peut-être en raison de leur plus grande généralité. Sans répondre directement à la question, Sua et Hua ont noté l'importance d'être compétents en matière de mathématiques et combien les Hmong en France y étaient déjà parvenus:

En France, les mathématiques sont un sujet obligatoire dès leur plus jeune âge - nous commençons à l'âge de six ans avec les bases. Il est très important de pouvoir développer une compréhension mathématique dans l'école. (Sua)

Je ne pense pas qu'il y ait des facteurs culturels ou linguistiques, autant de Hmong sont doués en mathématiques et ont passé le baccalauréat scientifique en France. (Hua)

Il était intéressant de noter que bien que de nombreux participants croient que la culture hmong joue un rôle dans la capacité d'apprendre les mathématiques, ils ont été divisés quant à savoir si le rôle était positif ou négatif. Quelques-uns ont déclaré qu'il existe des éléments de la culture et du patrimoine hmong qui rend plus difficile l'apprentissage du sujet:

Le Laos est l'un des pays les plus pauvres d'Asie, beaucoup plus que la Chine ou la Thaïlande. Il y a donc un fossé entre les générations, et nous devons donner au temps de la génération plus jeune pour s'adapter à un pays qui n'est pas le nôtre. (Kajsiab)

La culture hmong est traditionnellement une culture orale, sans écrit, dont les compétences de base sont l'agriculture et l'artisanat. Cela peut expliquer pourquoi la deuxième génération a encore des problèmes avec l'écriture et les mathématiques. (Hli)

Cependant, Npaim était en désaccord, affirmant que la capacité d'apprendre les mathématiques est personnelle:

Le facteur de culture n'affecte pas la capacité d'apprendre les mathématiques car cela dépend de la personne et de son caractère. (Npaim)

Eve et Kauj sont allés plus loin, suggérant que le fait que les Hmong proviennent d'une région pauvre d'Asie leur donne une plus grande motivation à apprendre les mathématiques:

> Je pense que la capacité mathématique est liée au développement du pays. Plus on est dans un pays riche, plus les gens sont heureux de vivre avec ce qu'ils ont. Dans les pays moins riches, les gens essaient de créer plus que leur mode de vie limité. (Eve)

> Du fait de venir d'un pays asiatique, nous bénéficions peut-être de l'attraction des mathématiques et d'une forte motivation à étudier cette discipline. (Kauj)

Les participants étaient plus d'accord en ce qui concerne le rôle que la langue avait eu sur l'apprentissage des mathématiques, avec presque tous indiquant que le manque de termes mathématiques contenus dans la langue hmong a contribué à une difficulté accrue:

> Le facteur linguistique joue un rôle négatif car le vocabulaire Hmong est moins élevé. (Npaim)

> Le langage des mathématiques est très précis, mais la langue hmong a peu de vocabulaire, il est donc facile de confondre les termes. (Koob)

> Les mathématiques ne font pas partie de la culture Hmong, ce qui est perceptible dans la langue. Les opérations, même la soustraction, la multiplication et la division n'existent pas à Hmong, sans mentionner les équations et les fonctions. L'abstraction est difficile à comprendre. Essayer d'expliquer des nombres rationnels et complexes à Hmong est impossible, car les mots n'existent pas. (Lauj)

Enfin, on a fait allusion au rôle que jouaient les parents dans le succès scolaire de leurs enfants, tous deux directement en offrant de l'aide et des encouragements, et indirectement par le niveau d'éducation qu'ils ont reçu:

> Pour les questions d'éducation, le niveau de l'élève dépend de l'implication personnelle, mais aussi de la participation de la famille. (Mooj)

> Parmi la deuxième génération, certains ont bien assimilé les mathématiques parce que leurs parents l'ont déjà étudié. C'est le cas pour moi parce que mes parents sont allés au collège à Vientiane. (Hli)

IV. DISCUSSIONS

Il existe un contraste clair entre nombres des études sur l'éducation des Hmong discutées plus tôt, en particulier ceux axés sur l'expérience de Hmong aux États-Unis, qui a tendance à représenter une image sombre d'un groupe ethnique luttant pour faire correspondre les réalisations de leurs homologues asiatiques et les résultats de cette étude, qui indiquent la confiance et la compétence en ce qui concerne les mathématiques. Il existe de nombreux facteurs qui peuvent aider à expliquer cela, la première étant la vitesse et le succès avec lesquels les Hmong ont assimilé en France, ce qui rend une grande partie de l'ancienne littérature obsolète. Une proportion des immigrants Hmong en France a été sélectionnée en raison d'une connaissance existante (mais souvent ténue) de la langue (Gilles, 2000), ou ils provenaient de familles exceptionnelles au Laos qui avaient bénéficié d'une certaine éducation et étaient issues de la classe moyenne. (Weinberg, 1997). D'autres ont été soutenus afin de s'intégrer dans leur nouvel environnement grâce à des programmes soutenus par le gouvernement. Tout aussi important était le fait qu'en raison de leur nombre relativement faible et de leur dispersion délibérée par les autorités, les Hmong ne pouvaient pas maintenir d'homogénéité sociale, comme aux États-Unis, et n'avaient d'autre choix que d'assimiler plus rapidement. En raison de leur isolement, Tapp (2004) note qu'il est devenu difficile pour les Hmong en France de maintenir leurs pratiques et leurs traditions culturelles. Alors que l'individualisme de la société française s'est révélé difficile pour certains de la première génération, qui a été éduquée de façon à ne pas se mêler aux étrangers, leurs enfants se sont entourés principalement d'amis français, ont assumé

les noms hmong et français (Hassoun, 1997), et ont développé un niveau de maîtrise linguistique qui leur a permis d'exceller académiquement. Comme un jeune homme interrogé par Xiong (2004) a déclaré: « Ce sont nos parents qui sont devenus les enfants et nous, les enfants, qui sont devenus les parents, parce que ce sont nous qui connaissons la langue, la culture et le système français dans lequel nous existons». Pendant que Lauj a reconnu que la langue de Hmong ne se prête pas bien aux mathématiques, et Xob n'avait reçu aucune éducation formelle, il est maintenant vrai que beaucoup de jeunes Hmong en France ne peuvent s'exprimer couramment dans la langue de leurs parents (Xiong, 2004), et donc les problèmes auxquels ils sont confrontés avec des fractions sont identiques à ceux pour qui le français est la première langue. De même, avec des problèmes - au fil du temps, ils deviennent simplement des questions liées à leur capacité en mathématiques, et non à leur compréhension du français.

Bien que les réalisations éducatives des participants et la valeur qui est clairement placée sur l'éducation affirment les résultats de l'étude par Daugherty (2015), il a été noté par Hli et Kajsiab que beaucoup de la deuxième génération ont encore des problèmes d'écriture et de mathématiques, et cela a été expliqué par des facteurs culturels. Cependant, cela n'est pas surprenant compte tenu de la disparité entre le niveau d'éducation des immigrants de première génération du Laos. En ce qui concerne l'avenir, il est difficile de prévoir si l'assimilation décrite ci-dessus continuera dans la prochaine génération, ou si les Hmong utilisent les médias sociaux et d'autres plateformes pour maintenir leur patrimoine et leur identité. Dans les deux cas, il n'y a aucune raison de s'attendre à ce que le niveau d'éducation des Hmong en France ne corresponde pas ou ne dépasse pas la moyenne nationale, bien que Stovall et van den Abbeele (2003) avertissent que certaines ethnies d'Asie du Sud sont encore appelées « les immigrés », même si nés en France et complètement assimilées à la culture française, ce qui pourrait continuer le schéma observé par Dos Santos et Wolff (2011) où les immigrants sont dirigés vers les lycées professionnels au collège plutôt que des lycées général et technologique qui sont plus probable de mener à un diplôme universitaire.

V. CONCLUSION

Cette étude est la première à examiner les perceptions des mathématiques parmi les Hmong en France. Elle illustre un haut niveau d'assimilation dans la culture française, en particulier chez les immigrants de deuxième génération, et comment les difficultés liées à l'éducation ont été de plus en plus surmontées par les personnes nées en France. Les questions spécifiques des fractions et des problèmes, qui reposent sur des concepts qui ne sont pas facilement traduits dans la langue hmong, ne sont généralement pas considérées comme causant des problèmes liés à ethnicité et sont principalement considérées que comme des obstacles mathématiques. Les niveaux d'éducation et d'aspiration sont élevés parmi les participants, et leur milieu familial est une source de motivation vers la réussite plutôt qu'une excuse pour avoir un faible niveau d'éducation, surtout s'ils sont encouragés par leurs parents.

Les limites de cette étude sont nombreuses. Bien qu'il n'y ait pas de barrière démographique inhérente aux sources de données, une taille d'échantillon beaucoup plus grande est nécessaire pour détecter la différence dans les perceptions liées à l'âge, au genre, à l'éducation, à lacompétence linguistique et à l'éducation parentale, ce qui permettrait une analyse plus quantitative. Cependant, étant donné la difficulté d'obtenir des données d'une population assez timide et insulaire, cette étude représente une première étape nécessaire, et les données fournissent une perspective révélatrice des Hmong de deuxième génération en France en ce qui concerne leurs perceptions de mathématiques.

REFERENCES

Adetula, L. (1990). Language factor: does it affect children's performance on wordproblems? *Educational Studies in Mathematics, 21*(4), 351-365.

Bliatout, B., Downing, B., Lewis, J. & Yang, D. (1988). *Handbook for teachingHmong-speaking students.* Folsom, CA: Folsom Cordova Unified SchoolDistrict.

Brinbaum, Y. &Cebolla-Boado, H. (2007). The school careers of ethnic minority youth in France: success or disillusion?,*Ethnicities, 7*(3), 445-74.

Cha, D. (2003). *Hmong American concepts of health, healing, and conventional medicine*. New York, Routledge.

Daugherty, J. (2015). *Hmong Americans in higher education: exploring their sense of belongingness and the concept of the American dream*. Thèse de doctorat inédite, University of Central Florida.

Dos Santos, M. & F.-C. Wolff. (2011). Human capital background and the educational attainment of second-generation immigrants in France, *Economics of Education Review*, *30*(5), 1085-1096.

Gilles, C. (2000). *Franche-Comté terre d'accueil: Cambodgiens, Laotiens, Hmong, Vietnamiens.* Paris:Éditions L'Harmattan.

Hammond, L. (2006). Digging deeper. Using reflective dialogue to illuminate the cultural processes inherent in science education. DansG. Spindler &L. Hammond (dir.), *Innovations ineducational ethnography: theory, methods, and results* (pp. 287-320). Mahwah, New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Hassoun, J.-P. (1997). *Hmong du Laos en France : changement social, initiatives et adaptations*. Paris: Presses Universitaires de France.

Kimball, M. (1990). How can we best help ESL students? *Mathematics Teacher, 83*(8),604-605.

Moschkovich, J. (2005). Using two languages when learning mathematics. *EducationalStudies in Mathematics, 64*(2), 122-144.

Neville-Barton, P. & Barton, B. (2005). *The relationship between English language and mathematics learning for non-native speakers*. Wellington, Nouvelle-Zélande: Teaching and Learning Research Initiative.

Payet, J. & Van Zanten, A. (1996). L'école, les enfants de l'immigration et des minorités ethniques: une revue de la littérature française, américaine et britannique. *Revue française de pédagogie*, *117*(1), 87-149.

Rosa, M., D'Ambrosio, U., Shirley, L., Alangui, W., Palhares, P., &Gavarette, M. (2016). *Current and future perspectives of ethnomathematics as a program*. ICME-13 Topical Surveys. Hamburg, Allemagne: SpringerOpen.

Stovall, T., & Van den Abbeele, G. (2003). French civilization and its discontents: nationalism, colonialism, race. Lanham, MD: Lexington Books.

Tapp, N. (2004). Hmong diaspora. DansM. Ember, C. Ember & I. Skoggard (dir.), *Encyclopedia of diasporas: immigrant and refugee cultures around the world* (vol. 1, pp. 103-113). New York: Kluwer Academic/Plenum.

Tribalat, M. (2016). *Statistiques ethniques, une querelle bien française*. Paris: L'artilleur.

U.S. Census Bureau. (2010). *American FactFinder: Educational attainment*. Repéré àhttps://factfinder.census.gov/faces/tableservices/jsf/pages/productview.xhtml?pid=ACS_15_5YR_S1501&prodType=table

Vallet, L.-A., & Caille, J.-P. (1996). *Les élèves étrangers ou issus de l'immigration dans l'école et le collège français: une étude d'ensemble*. Paris:Ministère de l'Éducation National.

Vang, L. (1988). *English-Hmong bilingual glossary of school terminology*. Folsom, CA:Folsom Cordova Unified School District Southeast Asia Community ResourceCenter.

Vang, C. (2016). *Hmong refugees in the new world: culture, community and opportunity*. Jefferson, NC: McFarland.

Weinberg, M. (1997). *Asian-American education: historical background and current realities*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Xiong, K. (2004). Hmong in France: assimilation and adaptation. *University of Wisconsin-La Crosse Journal of Undergraduate Research, 7*, 1-7.

Xiong, M. (2012). *A personal story of a Hmong student's learning of mathematics in school: a case study*. Mémoire de maîtrise inédit, California State University, Chico.

Yang, K.-L. (1995). Langue et scolarisation dans une communauté asiatique en France : les Hmong. *Tréma*, *7*, 65-73.

ASPECTS CULTURELS DES MATHÉMATIQUES : ENJEUX ET PERSPECTIVES POUR UN COURS CLASSIQUE DE MATHÉMATIQUES

KY[*] André Janvier

Résumé – Des recherches en ethnomathématique ont montré l'existence de potentiels mathématiques culturels non exploités par nos systèmes scolaires. Comment intégrer ces savoirs dans un cours de mathématiques « classiques » ? Nous présentons une expérience sur l'enseignement des figures géométriques en classe de 6e que sont le parallélogramme et le rectangle, à partir de mathématiques explicitées dans les pratiques quotidiennes chez des paysans burkinabè.

Mots-clefs : ethnomathématique, mathématiques culturelles, approche collaborative, programme de mathématique, culture

Abstract – Research in ethnomathematics has shown the existence of mathematical potential in our societies not exploited by the school system. How to integrate this knowledge into a "classical" mathematics lesson? We present an experience on geometrical figures, in first form, that are the parallelogram and the rectangle teaching based on mathematics that has been explained in the daily practices of farmers in Burkina Faso.

Keywords: didactic engineering, ethnomathematics, cultural mathematics, collaborative approach, mathematical program, culture

I. INTRODUCTION

Des recherches en ethnomathématique ont montré l'existence de potentiels mathématiques dans nos sociétés non exploités par nos systèmes scolaires (Gerdes, 1993 ; Traoré, 2007). Ces savoirs, souvent même méconnus des spécialistes de l'éducation, ne sont pas suffisamment pris en compte par nos systèmes éducatifs. Les tenants de ce discours formulent l'hypothèse selon laquelle l'enseignement/apprentissage des mathématiques pourrait être amélioré si nos systèmes scolaires s'appuyaient davantage sur ces savoirs culturels[1] (Gerdes, 1993; Traoré, 2007). Cependant, comment intégrer ces savoirs dans un cours « classique » de mathématiques ? Dans ce travail, il est question de construire et d'analyser une séance d'enseignement des figures géométriques que sont le parallélogramme et le rectangle à partir de mathématiques explicitées par un chercheur dans des pratiques quotidiennes chez des paysans burkinabè.

Il s'agit à travers ce travail d'orienter vers une démarche pédagogique qui favoriserait des passerelles entre les mathématiques non formelles et les mathématiques scolaires en accord avec les exigences institutionnelles.

Dans la partie qui suit, nous élucidons quelques concepts clés de ce travail.

II. CADRE THEORIQUE

1. L'ethnomathématique

Le terme ethno renvoie à tout ce qui a trait à l'identité culturelle : le langage, le jargon, les valeurs, les croyances, les traits physiques, les habitudes, la nourriture et les vêtements. Le terme mathêma fait allusion à une large vision des mathématiques qui comprend les activités

[*] Université Norbert Zongo, – Burkina Faso – janvierky@gmail.com

[1] Les savoirs culturels sont les savoirs développés en contexte, des connaissances ou des savoir-faire développés par une communauté

de numération, de mesure, de repérage dans le temps et l'espace, de construction, de jeux, de raisonnement. L'ethnomathématique serait donc un ensemble de techniques, de manières d'expliquer, d'apprendre, de connaître, de s'approprier les mathématiques dans différents environnements naturels, sociaux culturels, imaginaires.

Dans la perspective de Traoré (2007), il s'agit pour l'ethnomathématique d'expliciter les ressources mathématiques mobilisées dans les pratiques sociales pour un enseignement contextuel des mathématiques. Cette vision prône à long terme une réforme des curricula adaptés au contexte des apprenants.

L'essentiel de ce travail a été de concevoir une séance d'enseignement à partie d'ethnomathématiques. Dans un premier temps, un modèle théorique de séquence est proposé et discuté avec les enseignants, il est ensuite expérimenté en classe. La seconde phase de ce travail requiert donc la collaboration des enseignants.

2. La recherche collaborative

Cette seconde phase traduit l'impérieuse nécessité de rapprocher le chercheur du monde des enseignants (Desgagné et al, 2001).En effet, d'une part, il y a cette nécessité de prendre en compte le point de vue du praticien et d'autre part il y a cette contrainte liée au paradigme même de la recherche scientifique qui impose que les choix soient éclairés par des repères conceptuels. Cette recherche collaborative se décline en trois étapes : la co-situation, la co-opération et la co-production (Desgagné et al, 2001 ; Barry, 2009).

La première étape de cette collaboration est donc la co-situation, à ce niveau, le chercheur et les praticiens négocient un objet de réflexion sur la pratique. Il s'agit pour le chercheur d'obtenir l'adhésion de l'enseignant à son projet de recherche (Barry, 2009). Si au départ les préoccupations sont celles du chercheur, la co-situation permet de s'assurer que les aspects abordés sont suffisamment pertinents aussi bien pour le chercheur que pour les enseignants, afin que d'une part, ces derniers puissent s'impliquer suffisamment dans la réalisation du projet et que d'autre part le chercheur puisse atteindre les objectifs de sa recherche.

La seconde étape est la co-opération. À ce niveau, le modèle théorique à analyser est « interprété » pour être adapté au contexte de la classe. En effet c'est en tenant compte de plusieurs paramètres notamment, ses connaissances sur les méthodes pédagogiques, les outils dont il dispose, ses connaissances sur la notion à enseigner, le temps dont il dispose que l'enseignant conçoit sa séance d'enseignement.

La dernière étape de cette collaboration est celle de la co-production. Le chercheur et l'enseignant coproduisent un savoir. Des pratiques nouvelles d'enseignement éclairées par un cadre théorique et une posture épistémologique.

La collaboration entre chercheur et enseignants à lieu pendant tout le processus à travers des rencontres régulières. Ces rencontres constituent à n'en point douter un cadre de formations pour les enseignants volontaires.

Le choix du support de cette expérience ainsi que la nécessité de prendre en compte les exigences institutionnelles exigent que nous portions un regard sur les programmes des mathématiques de géométrie au post-primaire.

3. Les programmes de mathématiques du post-primaire au Burkina Faso

De l'analyse des programmes, il ressort que de façon générale, les démarches pédagogiques qui accordent un grand intérêt à l'activité des apprenants, qui suscitent constamment l'activité de l'élève en faisant une large place à l'observation et à la manipulation sont recommandées. À travers l'emploi d'expressions comme : « cultiver les

qualités d'observation et d'analyse » ; « stimuler l'imagination »; « entrainer à la pensée déductive » ; « exclure les exposés dogmatiques», il apparait que l'expérimentation est partie prenante de l'activité mathématique de l'élève et les approches pédagogiques centrées sur le travail de l'apprenant sont fortement recommandées.

Particulièrement, en classe de 6e, il s'agit essentiellement de construire des figures à l'aide des instruments de dessin, de reconnaitre les figures géométriques au programme, de reconnaitre leurs propriétés, de calculer le périmètre ou l'aire d'une figure à partir de formules. Cependant, l'enjeu majeur de l'enseignement de la géométrie à ce stade, c'est de faire en sorte que les acquis du passage d'une vision iconique de la figure à une vision non iconique favorisent chez les élèves le passage d'une géométrie naturelle liée à l'observation et à la mesure, à une géométrie déductive qui privilégie les propriétés et la démonstration.

III. LA MÉTHODOLOGIE

Le support principal de ce travail est donc des extraits d'un dialogue entre un chercheur et des paysans burkinabè ; ils sont extraits des travaux de Traoré (2007). À partir de ce support, un modèle théorique de séquence d'enseignement est produit. Avec un enseignant, il est mis à l'épreuve de la pratique afin de juger de sa pertinence. Après l'expérimentation en classe, des éventuelles corrections sont apportées. Ce processus est repris avec d'autres enseignants. Au total nous avons travaillé avec trois enseignants.

Nous présentons à présent les grandes lignes du scénario qui se veut flexible et que nous avons proposé pour de servir de support lors des premiers échanges avec les enseignants.

1. Le scénario

Le scénario est composé d'extraits de discours suivi d'un certain nombre de consignes à travers différentes étapes. Nous présentons donc dans un premier temps les extraits, puis à la suite nous présentons les différentes étapes du scénario.

Extrait n°1

Acteur1 : Dans un premier temps, les coins que l'on détermine sont provisoires…On tâtonne en jouant sur le 3e coin pour déterminer le 4e coin de telle sorte que les « côtés obliques » soient égaux. C'est à ce niveau qu'on a besoin de l'aide des autres. Ça c'est difficile à faire seul…

Extrait n°2

Acteur1 :…Après cela c'est la détermination des coins définitifs. Là, on mesure les « coins obliques » (c'est-à-dire les diagonales). Elles doivent avoir la même longueur. Si ce n'est pas le cas on joue sur les coins pour que ça soit ainsi.

Chercheur : Mais à ce moment-là est-ce que les côtés opposés auront toujours la même longueur ?

Acteur1 : En principe oui avec des gens qui connaissent le travail…on vérifie toujours une deuxième fois avant de fixer définitivement les coins. Là-bas on prend tout le temps parce que s'il y a une erreur dans les mesures, tout le travail que vous aurez fait est inutile. Vous allez forcément casser la case.

Chercheur : Pourquoi vous mesurez les diagonales ?

Acteur2 : C'est pour que la case ne soit pas « aplatie ». Il faut que les 4 coins aient la même longueur.

Extrait n°3

Chercheur : (Le chercheur dessine au sol l'image suivante)



Figure 1 *– Schéma de la base d'une case aplatie*

Si c'est comme cela, est-ce que la case est aplatie ? Tu vois que ce coin est large là.

Acteur2 : Mais oui. Dans le sens que moi je dis en tout cas c'est aplati. Les 4 coins doivent être pareils. C'est pour cela qu'il faut que les diagonales aient la même longueur.

Acteur1 : Attend voir ce que tu as fait là. Tu vois ce coin est large, forcément lui là est aussi large et les deux autres seront petits. Les coins « opposés » vont toujours ensemble. Même quand on pose les briques, on tient compte de cela.

2. Les différentes étapes du scénario

Pour concevoir ce scénario, nous nous sommes inspiré d'un certain nombre de recherches (Battie, 2009 ; Pech, 2013) qui expérimentent l'utilisation de textes historiques dans l'enseignement des mathématiques. Nous essayons d'adapter les démarches mises en œuvre dans ces travaux à notre situation. Ainsi, nous avons retenu trois étapes clés dans une séance de cours : L'observation, l'explicitation et la reconstitution. La première étape a pour but d'introduire le cours à partir d'objets familiers à l'environnement des apprenants. Il s'agit à ce stade d'une vision purement iconique des objets. Les mathématiques étant un langage, à la deuxième étape, les propos des paysans sont traduits pour qu'ils soient conformes au langage des mathématiques scolaires ceci afin que les apprenants puissent entrer dans la situation. La dernière étape est la mise en activité des apprenants. Les apprenants essaient de reprendre la démarche des paysans. En réalisant cette reconstitution, les élèves devraient percevoir les éléments caractéristiques des différentes figures étudiées.

L'observation

Travail à faire : Observer la base d'une case rectangulaire.

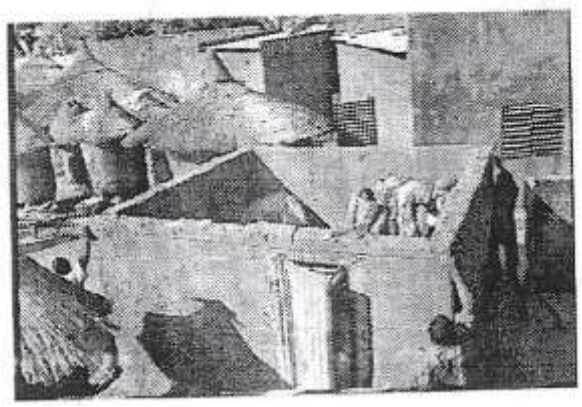


Figure 2 *– Vue d'une concession (Traoré, 2007, p.194)*

Dans certaines régions du Burkina Faso, les paysans ont des techniques de construction pour obtenir une forme rectangulaire. Ils utilisent une corde et des piquets. Les extraits

suivants ont été recueillis lors d'une enquête auprès de paysans pour comprendre comment ceux-ci procèdent.

Travail à faire : Lire attentivement les extraits. 5

L'explicitation

Dans le texte, que signifient les expressions suivantes : « coins », dans l'extrait n°1 ? « Coins », dans l'extrait n°2 ? « Les 4 coins aient la même loguer », dans l'extrait n°2 ? Les 4coins doivent être pareils », dans l'extrait n°3 ? « Côté oblique », dans l'extrait n°1 ? « Case aplatie », dans l'extrait n°3 ? « Coin large », « coin petit », ans l'extrait n°3 ? Et « les coins opposés vont toujours ensemble », dans l'extrait n°3 ?

La reconstitution

Le matériel est constitué d'une planche d'environ 0,75 m sur 1m, de ficelles en laine et de quatre punaises de couleurs différentes. Ce dispositif permet de générer des quadrilatères lorsque la corde est tendue autour des punaises. Il s'agit de reproduire les expériences des paysans à une échelle réduite en assimilant notamment les piquets aux punaises.

- L'étude du parallélogramme

Travail à faire :

- En groupe de 4 élèves à l'aide du matériel qui vous est présenté, reprendre l'expérience décrite dans l'extrait n°1.
- À l'aide d'un compas et d'une règle construire individuellement un dessin sur une feuille de papier qui satisfait aux conditions des paysans dans l'extrait n°1.
- Quelles sont ces conditions ?

- L'étude du rectangle

Travail à faire :

- En déplaçant uniquement deux punaises d'un même côté, combien de parallélogrammes peut-on obtenir ?
- À partir de l'extrait n°2, achever le travail de construction en groupe.
- Combien de parallélogrammes dont les diagonales ont la même longueur peut-on obtenir ?
- Qu'est-ce qu'un rectangle pour ces paysans ?

Nous présentons dans la section suivante les observations faites à la suite de la séance d'enseignement.

IV. ANALYSE DES SÉANCES D'ENSEIGNEMENT

L'introduction de la séance a suscité de la curiosité chez les élèves. En effet, dès l'entame l'enseignant tout en présentant l'image d'une case rectangulaire réalisée par des paysans, fait la comparaison avec la forme de la classe et annonce que les paysans réalisent la fondation de cet ouvrage à partir de cordes et de piquets. Comment procèdent-ils ? Tout se passe comme si la leçon portait sur l'étude de pratiques culturelles du terroir, sur des savoirs et savoir-faire d'une communauté à laquelle ils appartiennent ou au moins dont se ils sentent proches. De façon générale, ils paraissent très motivés. Plusieurs raisons peuvent expliquer ce constat.

Nous avons des activités qui ont du sens pour les élèves. En effet, dans ces activités l'on poursuit un objectif qui a du sens pour les apprenants à savoir, construire un objet familier utile dans la vie de tous les jours.

Aussi, il y a cette curiosité suscitée chez les élèves dès l'introduction. En effet, ceux-ci sont étonnés du fait que leurs concitoyens réalisent avec du matériel rudimentaire des figures jugées complexes à leur niveau. À ce propos, un des enseignants volontaires, déclare lors d'un entretien que « les élèves étaient étonnés de voir que l'on peut construire un parallélogramme à l'aide d'une corde et des punaises ». Cet étonnement suscitait en eux de la curiosité et partant une envie d'apprendre, de savoir comment tout cela fonctionne. Au-delà de cette curiosité, on percevait également un sentiment de fierté. Fierté d'appartenir ou de se sentir proche d'une communauté dont les savoirs et savoir-faire étaient reconnus et institutionnalisés par le système scolaire classique.

Au-delà de la motivation des élèves, nous constatons que par un questionnement, les enseignants arrivent à faire énoncer par les élèves une caractérisation ou une définition du parallélogramme et du rectangle. Voici ce qui ressort lors d'un entretien après une séance d'enseignement : « les élèves ont participé à l'élaboration du contenu de le leçon. À partir des manipulations, ils ont pu donner deux caractérisations du rectangle ; une première en utilisant les diagonales et le fait qu'il soit un rectangle, et une deuxième en utilisant les angles droits ». Les élèves donc participent efficacement à l'élaboration du contenu de la leçon contrairement à ce qui est fait couramment ;« d'habitude, on plaque la définition et les propriétés ».

En outre, le fait de tâtonner en jouant sur les mesures afin d'obtenir la figure souhaitée fait prendre conscience aux élèves la nécessité de réunir un certain nombre de conditions pour qu'un énoncé soit vrai ; toute chose qui contribue à une meilleure sériation des énoncés mathématiques et donc à un apprentissage du raisonnement déductif.

V. CONCLUSION

Les retombées de cette expérience se situent à plusieurs niveaux. Elle a été une occasion de formation pour l'enseignant volontaire; une occasion pour les enseignants de porter un regard réflexif sur leurs pratiques. Des pratiques qui à regarder de près, respectent très peu les instructions officielles dans la mesure où elle accorde très peu de place à l'activité des apprenants. Par ailleurs, on constate queles enseignants se soucient très peu des conséquences de leurs actions sur les apprentissages futurs des élèves en géométrie et plus généralement en mathématiques.

Cette expérience a aussi permis aux enseignants de découvrir une nouvelle façon de présenter le rectangle,il est introduit en tant que position limite d'un ensemble de parallélogrammes. Mais surtout, nous avons conçu une géométrie dynamique qui a suscitée beaucoup d'intérêt chez les apprenants et qui permis une meilleure structuration des énoncés mathématiques à leur niveau. Cette dernière remarque témoigne d'un début d'apprentissage de la géométrie déductive chez ces apprenants.

RÉFÉRENCES

Barry, S., Saboya, M., Corriveau, C., Bednarz, N., &Maheux, J. F. (2012). *Défis et enjeux de la démarche de recherche collaborative en didactique des mathématiques*.

http://www.archipel.uqam.ca/8411/1/Maheux-2012b.pdf.

Battie, V. (2009). Exploitation didactique du décalage culturel en jeu dans l'intégration d'une dimension historique en classe de mathématiques. In *Espace Mathématique Francophone 2009* (pp. pp-503).

Desgagné, S. Bednarz, N. Couture, C. Poirier, L. Lebuis, P. (2001). *L'approche collaborative de recherche en éducation : un rapport nouveau à établir entre recherche et formation.* Revue des sciences de l'éducation, Vol. XXVII, no 1, 2001, p. 33 à 64

Gerdes, P. (1993). *L'ethnomathématique comme nouveau domine de recherche en Afrique*. Institut Superieur de Pédagogie Mozambique.

MESSRS (2009). Nouveaux programmes de mathématiques de l'enseignement général post-primaire: Ministère des enseignements secondaire, supérieur et de la recherche scientifique; Direction des inspections et de la formation des personnels de l'éducation, Inspection de Mathématiques, Burkina Faso.

Pech, M (2013). Utilisation des textes historiques en mathématiques à l'école élémentaire. Éducation. <dumas-00910110>

Traoré, K. (2007). *Des mathématiques chez les paysans ?* Mathèse. Bande didactique.

L'ÉTHNOMATHÉMATIQUE ET LA MISE EN QUESTION D'UNE MATHÉMATIQUE OCCIDENTALE UNIVERSELLE

RADFORD[*] Luis

Résumé – Dans cet article, deux conceptions de l'éthnomathématique sont discutées : la deuxième considère l'éthnomathématique comme production de savoirs à l'intérieur de sa propre rationalité autochtone ; la première, par contre, prend comme référence les mathématiques occidentales : l'éthnomathématique y apparaît comme une modalité folklorique de ces mathématiques tenues par universelles. La question de l'universalité des mathématiques occidentales est abordée à la fin de l'article.

Mots-clefs : Éthnomathématique, Azandé, ontologie du monde, mathématiques universelle, colonisation.

Abstract – In this article, I discuss two conceptions of ethnomathematics: the second conception considers ethnomathematics as the production of knowledge within its own indigenous rationality. By contrast, the first conception considers Western mathematics as its reference point: ethnomathematics appears as a folkloric modality of Western universal mathematics. The question of the universality of Western mathematics is discussed in the second part of the article.

Keywords: Ethnomathematics, Azande, ontology of the world, universal mathematics, colonisation.

I. INTRODUCTION

L'idée général qu'on se fait de l'éthnomathématique repose sur la juxtaposition de deux termes : d'une part, le terme *éthno* et d'autre part le terme *mathématique*. On passe de la formule additive « éthno + mathématique » à la formule linguistique composée « éthno-mathématique ». De cette formule, on passe ensuite au terme singulier *éthnomathématique*. On finit par comprendre l'éthnomathématique comme les mathématiques pratiquées par un groupe socioculturel donné. C'est exactement ce que fait Wikipdia :

> L'**ethnomathématique »** est l'étude de l'essor et de l'évolution des mathématiques et des compétences mathématiques dans des groupes socioculturels, aussi bien dans les premières sociétés durant la Protohistoire, que dans des groupes identifiables au sein des sociétés modernes (catégories professionnelles, collectivités locales, communautés religieuses etc.). (https://fr.wikipedia.org/wiki/Ethnomathématiques)

Mais à y voir de plus près, le sens qu'enferme le terme mathématique dans l'expression éthnomathématique elle-même est très problématique. Le terme mathématique est utilisé comme si, au fond, il serait invariable, indépendamment du contexte culturel. C'est-à-dire, on agit comme si le contenu de la pratique ou activité à laquelle fait référence le terme mathématique était le *même* d'un contexte culturel à un autre. Dans cette ligne de pensée, l'adjectif « éthno » nous montrerait la *variation* qu'opère la culture autour d'un noyau qui, lui, serait invariable. L'éthnomathématique apparaît ainsi comme l'expression d'un même contenu auquel on ajoute une certaine couche pittoresque et folklorique.

Il ne faut pas faire un grand effort pour voir que la réponse à la question : « quel serait alors ce noyau de référence que désigne le terme 'mathématique' ? » ce n'est rien d'autre que la mathématique occidentale. Le problème théorique que pose cette compréhension de l'éthnomathématique est qu'une telle compréhension devient complice de l'idéologie colonisatrice et universaliste qui prend comme point de référence la mathématique d'une culture particulière et qui suppose que toutes les cultures pratiquent au fond cette même mathématique. Dans un article publié dans la *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, Peña-Rincó (2015) se prononce contre cette vision colonialiste européenne qui nie ou qui a des difficultés à comprendre l'existence d'autres compréhensions légitimes du monde que

[*] Université Laurentienne – Canada– Lradford@laurentian.ca

celle de la compréhension eurocentrique. Peña-Rincón plaide pour une approche qui reconnaît une multitude de façons d'agir et de concevoir le monde. Un tel projet, cependant, est hanté par « une tension constante entre le besoin de se décoloniser —en prenant distance théorique et épistémologique avec la tradition académique occidentale— et la résistance à adopter ou à se laisser enfermer par des « cages » épistémologiques déterminées » (p. 5).

La position eurocentrique mentionnée ci-dessus est ancrée dans une conception très particulière de la relation entre histoire et culture et la production des idées que le philosophe allemand K. Marx met en évidence dans son œuvre *L'idéologie allemande*. Dans cette œuvre, Marx se plaint de la position idéaliste qui voit la production des idées comme un processus indépendant de la production matérielle de la vie quotidienne des individus, le résultat étant une conception de la production d'idées indépendante de la société et de ses formes de coopération humaine. Dans cette perspective idéaliste, ce n'est pas la pratique matérielle — c'est-à-dire les caractéristiques des forces productives de la culture, ses structures supra-symboliques et les relations sociales historiquement constituées— qui explique l'idée; c'est plutôt l'idée elle-même qui explique la pratique et la vie des individus. On finit par oublier que « les circonstances font les hommes autant que les hommes font les circonstances » (1982, p. 1072) et que les idées ne sont pas du ressort d'un universel (substance, idée, essence de l'homme, etc.), mais des « forces productives, des capitaux et de modes de commerce social, que chaque individu et chaque génération trouvent devant eux comme un fait donné » (1982, p. 1072). La production vitale réelle de l'existence humaine —par exemple celle des objets matériels et celle des idées— finit par être conçue comme une production indépendante des conditions concrètes, culturelles, sociales et spirituelles produites historiquement. De ce compte, le domaine des idées « apparaît comme séparé de la vie ordinaire, comme s'il était en dehors ou au-dessus du terrestre. » (1982, p. 1072). Le résultat est que les idées et leurs histoires apparaissent comme « détachées des faits et des développements pratique qui en constituent le fondement » (1982, p. 1075). Il n'est pas surprenant que, dans ce contexte et compte tenu de l'histoire politique et économique de l'Europe depuis l'ère des premières grandes colonisations, c'est-à-dire depuis la fin du XV^{e} siècle, la mathématique occidentale soit prise comme point de référence pour *comprendre* et *expliquer* l'éthnomathématique. La colonisation n'a pas simplement consisté dans l'arrivée des colonisateurs et l'occupation d'un territoire ; la colonisation a emporté avec elle (et imposée par la suite) une dimension intellectuelle, politique et économique de voir et d'organiser le monde.

Or, il y a une autre façon de concevoir l'éthnomathématique. C'est justement celle qu'Ubiratan d'Ambrosio a articulé depuis ses premiers travaux. L'ethnomathématique, dit D'Ambrosio, est «l'art ou la technique (technè = tica) qui vise à expliquer, à comprendre et à composer avec la réalité (mathème) dans un contexte culturel spécifique (ethno)» (D'Ambrosio, 1993 p. 9; cité dans Saldanha, Kroetz et Machado de Lara, 2013, p. 3). Plus précisément, « Ethnomathématique(s) sont les *ticas* (techniques) utilisées pour comprendre et vivre dans la réalité (*matemá*) d'un groupe (*etno*) donné » (D'Ambrosio, 2013).

Dans cette définition, D'Ambrosio évite de prendre comme référence la mathématique occidentale et nous invite à voir les savoirs autochtones en eux-mêmes et par eux-mêmes. Esquincalha (n.d.), note très bien que, dans la perspective D'Ambrosio, «l'éthnomathématique ne se limite pas à [ce que *nous* appelons - LR] la mathématique!». L'ethomathématique peut très bien ne rien à voir avec ce que nous entendons par mathématique… En effet, *l'éthnomathématique porte sur la production, l'organisation et la diffusion des savoirs d'une culture à l'intérieur de sa propre manière de voir le monde*.

Dans la première partie de cet article[1], j'examine brièvement l'exemple de la communauté Azandé; dans la deuxième partie, je discute de la position universaliste des mathématiques.

II. MATHEMA CHEZ LES AZANDE

La communauté Azandé vit dans les régions géographiques de la République démocratique du Congo, l'ouest du Soudan du Sud et de la République centrafricaine. Elle a été étudiée dans les années 1920 par l'anthropologue britannique Edward Evans-Pritchard. Dans son livre, « *Sorcellerie, oracles et magie chez les Azandé* », qui a été publié en 1937 et qui a été traduit en français en 1972, Evans-Pritchard présente une étude détaillée de la manière dont cette communauté africaine voit, comprend et compose avec sa réalité. Les Azandé perçoivent leur réalité à la lumière de plusieurs concepts, dont un, *mangu*, qu'Evans-Pritchard traduit, non sans hésitation, par le terme occidental « witchcraft » (« sorcellerie »). Il s'agit d'un concept qui permet de donner un sens à de nombreux événements de la vie quotidienne Azandé et d'arriver à des explications sophistiquées. Celles-ci sont tout à fait différentes de nos explications de nature galiléennes auxquelles nous sommes habitués. Depuis Galilée, nous concevons la nature d'une manière très particulière (Cassirer, 1983). La nature nous apparaît comme étant gouvernée par des lois qui s'expriment selon des formules mathématiques qui sont calculables et indépendantes de la volonté individuelle —des lois qui expriment ce que nous appelons des causes « naturelles », « objectives ». Chez les Azandé, les choses s'expliquent autrement que par des causes « naturelles ».

> le concept de sorcellerie fournit [aux Azandé] une philosophie naturelle qui explique les rapports des hommes et les événements malencontreux; il leur fournit aussi un moyen tout prêt et tout classique de réagir à pareils événements. En outre, les croyances relatives à la sorcellerie renferment un système de valeurs régulatrices de la conduite humaine. (Evans-Pritchard, 1972, p. 96)

L'un des exemples que Evans-Pritchard analyse dans son livre porte sur un enfant qui, en courant dans les bois, s'est fait mal au pied :

> Un jeune garçon donna du pied contre une petite souche au milieu d'une piste de la brousse, ce qui se produit fréquemment en Afrique ; ce fut pour lui une souffrance et une gêne. La coupure de l'orteil était mal placée, il était impossible d'éviter le contact de la saleté, et elle commença de s'envenimer. Le garçon déclara que la sorcellerie lui avait fait heurter la souche du pied. J'ai toujours discuté avec les Azandé en critiquant leurs affirmations, et je ne manquai pas de le faire en cette occasion. Je dis au garçon qu'il avait heurté la souche par inattention, que la sorcellerie n'avait pas placé la souche sur le chemin, et que celle-ci avait grandi sur le chemin naturellement. Il tomba d'accord avec moi : la sorcellerie n'avait rien à voir avec le fait que cette souche se trouvait sur son chemin ; mais, ajouta-t-il, il avait ouvert l'œil et pris garde aux souches, comme il est bien vrai que tout Zandé y prend garde avec le plus grand soin ; et s'il n'avait pas été ensorcelé, il aurait vu la souche. Il avançait enfin cet argument décisif, qu'en général, il ne faut pas des jours et des jours pour qu'une plaie guérisse, mais qu'au contraire elle se ferme rapidement, car telle est la nature des coupures. Pourquoi donc sa plaie s'était-elle envenimée et demeurait-elle ouverte, s'il n'y avait nulle sorcellerie là-dessous ? (Evans-Pritchard, 1972, p.99, traduction ajustée)

Ce que cet exemple montre, c'est que la vision Azandé du monde repose sur une théorie de la causalité qui est différente de la nôtre. Un autre exemple peut nous aider à mieux comprendre cette différence.

Un jour, un grenier s'effondre en blessant un groupe d'individus qui s'y étaient réfugiés pour se protéger de la chaleur du jour. Les Azandé savent, nous dit Evans-Pritchard, que les termites mangent les colonnes du grenier et que même le bois le plus dur finit par s'affaiblir. Les Azandé ne sont donc pas surpris par le fait qu'éventuellement le grenier finisse par tomber.

[1] Une version précédente de cet article a paru dans Radford (2017).

> Eh bien, pourquoi faut-il que ces personnes-là se soient précisément trouvées sous ce grenier au moment précis où il s'est effondré ? Il devait s'effondrer, cela s'entend facilement, mais pourquoi fallait-il qu'il s'effondrât au moment particulier où ces personnes particulières étaient assises à son ombre? (Evans-Pritchard, 1972, p.103)

La réponse est la suivante :

> C'était là l'effet de la sorcellerie. S'il n'y avait pas eu sorcellerie, les gens se seraient assis sous le grenier et il ne serait pas tombé sur eux. Ou bien le grenier se serait effondré, mais les gens ne s'y seraient pas abrités à ce moment-là. La sorcellerie explique en quoi ces deux événements coïncident. (Evans-Pritchard, 1972, p.104; traduction ajustée)

Evans-Pritchard s'est efforcé de convaincre les Azandé que les raisons étaient autres. Mais les raisons étayées par l'anthropologue britannique étaient tout de suite réinterprétées à la lumière du système de pensée et de l'ontologie du monde Azandé :

> Que le lecteur veuille bien penser à n'importe quel argument capable de démolir de fond en comble toutes les prétentions Azandé au pouvoir de l'oracle. Si l'on traduisait cet argument dans les modes de pensée Azandé, il servait à étayer toute la structure de leurs croyances. Car leurs notions mystiques sont cohérentes au suprême degré; elles sont reliées entre elles par un réseau d'attaches logiques, et disposées dans un tel ordre que jamais elles ne contredisent trop crûment l'expérience sensorielle; au contraire, l'expérience semble les justifier. (Evans-Pritchard, 1972, pp. 370-371, traduction ajustée)

La vision Azandé du monde repose sur un système complexe en trois moments : la sorcellerie, les oracles et la magie :

> La sorcellerie est une procédure d'accusation permettant d'expliquer une situation de malheur . . . Le deuxième moment est celui du recours aux oracles, qui consiste à donner du poison à des volailles en posant une question dont la réponse positive ou négative dépend de la mort ou de la survie de la volaille. L'oracle permet ainsi de désigner qui est le sorcier, et donc d'aller le voir pour lui demander d'arrêter son action maléfique. Le troisième moment est alors celui du recours à la magie proprement dite, qui consiste en l'utilisation de médecines pour guérir ou nuire à quelqu'un. (Keck, 2002, pp. 6-7)

Ces moments à partir desquels les Azandé analysent leur vécu sont le produit de leur propre pensée « abstraite », une pensée leur permettant de composer avec leur réalité. « We arrive at the hypothesis, » dit Paul Feyerabend, «that there exist many different ways of living and of building up knowledge. Each of these ways may give rise to abstract thought which in turn may split into competing abstract theories» (Feyerabend, 1987, p. 75). Ces manières différentes de vivre et de produire des savoirs sont précisément les mathéma auxquelles fait référence le terme ethno*mathéma*tique, si nous suivons la définition de D'Ambrosio qui a été rappelée plus haut.

Cette conception de l'éthnomathématique nous amène à poser la question des rapports possibles entre les différentes mathéma produite par des cultures différentes. En particulier se pose la question de savoir s'il est légitime d'essayer de reconnaître dans les théories et les techniques autochtones (les *tica*, chez D'Ambrosio) quelques notions qui évoqueraient des « mathématiques » au sens occidental. En raison des limites d'espace, je me limite à la deuxième question. On peut la répondre de plusieurs façons :

Une réponse courte :

a) La façon la plus courte est de répondre négativement : il n'y a rien dans les procédures et les techniques Azandé qui se rapprochent de nos mathématiques. Voilà une réponse plausible. La question se complique quand les théories et les techniques autochtones semblent comporter quelques notions de mathématique (au sens de notre culture). C'est la situation dans laquelle s'est trouvé Vandendriessche (2017) dans sa conférence donnée dans le cadre du Colloque du Groupe de didactique des mathématiques du Québec 2016. Pendant la période de questions qui a suivi la conférence d'ouverture de Vandendriessche, un membre du public

a posé la question suivante : « Est-ce qu'il y a de la mathématique dans les jeux mélanésiens de ficelles ou c'est nous qui y voyons *nos* mathématiques ? »

Une réponse plus complexe :

b) Une autre façon de répondre fait appel à une position plus nuancée : on pourrait dire qu'il y a, dans le mathéma Azandé ou le mathéma mélanésien des façons de procéder qui — bien que différentes de la structure théorético-déductive euclidienne— sont théoriques dans leur propre sens. Après tout —on peut argumenter— il y a, dans le cas des Azandé, des décisions à prendre par rapport au type d'animal (volailles) qui participe à la procédure oraculaire; il y a des décisions à prendre quant au *type* de poison et à la *quantité* à administrer; il faut aussi *interpréter* le résultat de l'oracle. La décision oraculaire est prise à l'intérieur d'un cadre institutionnel formel qui fait référence à des généralisations « scientifiques » et à un calcul des énonciations explicites et implicites propres à la logique Azandé.

En suivant la définition de D'Ambrosio, on pourrait appeler « mathématiques » ces théories Azandé. Elles seraient mathématiques dans le sens qu'elles portent sur une production hautement cohérente de savoirs ayant trait à la *mathema* d'une ethnie précise.

Quelle est alors la différence entre la réponse brève et celle qui est plus complexe ? La réponse brève ne reconnait, dans les techniques autochtones, rien qui soit mathématique (au sens occidental). Et la réponse s'arrête là. La réponse plus complexe est plus nuancée ; elle va plus loin : elle débouche sur la reconnaissance d'une « mathématique » dans ces techniques autochtones tout en les considérant différentes des « mathématiques » occidentales. Les « mathématiques » occidentales ne seraient qu'une des mathématiques possibles qui existent sur la planète : celle dont l'origine remonte aux ethnies de la Méditerranée (D'Ambrosio, 2013). En d'autres mots, toute mathématique correspondrait à une ethnie : celle qui la produit.

En conséquence, pour expliquer l'infection du pied du garçon ou l'effondrement du grenier dans les exemples Azandé, on procéderait selon l'ontologie de la culture en question. Dans une culture à ontologie galiléenne, comme la nôtre, on aurait recours à une autre ontologie du monde qui serait d'ordre naturaliste. On invoquerait l'idée d'une nature assujettie à des causes naturelles et on déploierait des procédures méthodologiques de prise et d'analyse des données appuyées par des catégories ethnomathématiques conceptuelles propres.

Toutefois, il ne faudrait pas penser que l'ontologie du monde et de la nature à laquelle nous participons chaque jour d'une infinité de manières faisait déjà partie de notre âme et de notre corps au moment de notre naissance. On ne naît pas avec une ontologie, comme on naît avec une tête et des genoux. L'ontologie n'est pas un trait génétique ou physiologique de l'espèce humaine. Il n'y a rien de plus culturel que l'ontologie à travers laquelle chacun de nous voit le monde. Evans-Pritchard raconte qu'à six ans, les enfants Azandé exhibent déjà une compréhension du monde à travers le prisme du *mangu*. Ces enfants élaborent leur compréhension du *mangu* à partir de ce qu'ils voient et écoutent autour d'eux, en particulier au contact de leurs parents et des adultes du village. Dans les sociétés occidentales, les parents et les autres adultes jouent aussi un rôle important dans l'acquisition chez le jeune d'une ontologie galiléenne, mais l'école formalise l'acquisition de cette ontologie d'une manière très précise — même si les enseignantes et enseignants ne le font pas nécessairement de manière consciente. En plus de préparer l'enfant au marché du travail, l'école introduit l'enfant, par des mécanismes formels et informels, tant visibles qu'invisibles, à une manière culturelle de voir le monde. Subrepticement, on introduit une ontologie galiléenne du monde. Et comme les jeunes Azandé, les jeunes qui fréquentent les classes nord-américaines, européennes et autres finissent par voir le monde d'une certaine manière. Là où les autres voient du *mangu*, nos jeunes finissent par voir une nature gouvernée par des formules mathématiques. L'ontologie se constitue ainsi en une deuxième nature à travers laquelle les

individus interprètent et donnent un sens à leur monde. Dans ce sens, l'ontologie devient une sorte d'âme de la culture. C'est justement pour cette raison que l'historien et philosophe allemand Oswald Spengler (1948) affirmait qu'il n'y a pas une seule mathématique, mais autant de mathématiques que de cultures.

Dans un livre remarquable, « Imaginario colectivo y creación matemática», le sociologue, mathématicien et philosophe espagnol Emmánuel Lizcano (2009) montre, à travers une analyse archéologique textuelle et contextuelle très fine, comment les mathématiques anciennes grecques et chinoises s'organisent autour de deux ontologies radicalement différentes. La première de ces ontologies repose sur la catégorie d'opposition d'*exclusion* (l'un *ou* l'autre) *être/non-être*, catégorie qui rendra opérationnel le principe du tiers exclu. La deuxième ontologie repose sur la catégorie d'opposition dialectique *inclusive* (l'un *toujours* avec l'autre) *yin/yang*. Elles donnent ainsi lieu à des mathématiques différentes avec leurs propres fondements, leurs propres méthodes et leurs propres problématiques (Radford, 1996, 2010).

II. LA MATHEMATIQUE UNIVERSELLE

Naturellement, tout le monde n'est pas d'accord avec ce qui a été dit dans la section précédente. À la position que je viens de décrire d'une multitude de mathématiques s'oppose, en effet, une position universaliste selon laquelle il n'y a qu'une seule mathématique, une mathématique a-ethnique : la mathématique universelle. Les mathématiques chinoises, grecques, azandé, mélanésiennes ne seraient toutes que des déclinaisons d'une seule mathématique. C'est justement cette position qu'un autre fameux ethnomathématicien, Paul Gerdes, défendait dans ses travaux. Pour Gerdes, les mathématiques sont une discipline unique issue de la contribution de cultures différentes. Dans cette perspective, il est redondant de parler des mathématiques occidentales. Comme Miarka le souligne, « Gerdes conçoit les mathématiques de manière universelle, mais en constante expansion. Cela n'a pas de sens de parler de mathématiques au pluriel » (Miarka, 2013, p. 4).

La conception universaliste des mathématiques est sans doute la conception la plus répandue chez les mathématiciens, les philosophes et les épistémologues. Cette conception reste peut-être encore la conception la plus répandue chez les didacticiens des mathématiques, mais à un degré moindre et de manière plus nuancée. L'universalité des mathématiques est une question qui émerge de temps à l'autre dans nos différentes rencontres nationales et internationales. C'est le cas de la rencontre CANP-5 organisé par ICMI et tenue à Lima, Pérou en février 2016 (http://www.mathunion.org/icmi/activities/outreach-to-developing-countries/canp-project-2016-andean-region/). Un soir, un groupe de participants à cette rencontre s'est donné rendez-vous dans un fameux restaurant —*Los Pescados Capitales*. Michèle Artigue était assise à côté de moi. Nous discutions de certaines idées qui avaient été présentées pendant la journée et qui avaient conduit à une courte discussion sur l'universalité des mathématiques. Ce soir, à un certain moment, quand on nous servait le plat principal, j'ai demandé à Michèle sa position par rapport à cette question litigieuse. Au départ, Michèle a semblé surprise par la question ; elle a avoué que ce n'est pas une question que nous nous posons fréquemment en didactique des mathématiques. Après avoir tourné en rond pour un moment, elle m'a fourni une réponse : il n'y aurait pas une mathématique universelle. Mais il y a un universel qui est la recherche de solutions à des problèmes qui se posent à l'intérieur de chaque culture et qui peuvent se donner en termes d'une mathématique au sens autochtone.

Mais comme je l'ai déjà mentionné, la nature universelle des mathématiques demeure une conception importante chez les mathématiciens, les philosophes et les épistémologues. C'est celle que défend, par exemple, le fameux philosophe et historien des mathématiques français

Maurice Caveing dont les études sur les mathématiques de l'antiquité méditerranéenne sont parmi les plus fines et mieux élaborées (voir, par exemple, Caveing, 1982).

Dans son livre, « *Le problème des objets dans la pensée mathématique* », Caveing (2004) consacre un chapitre au problème de l'objectivité de la connaissance mathématique. Le chapitre aborde trois types d'universalité : l'universalité relativement aux « cultures » des peuples, l'universalité relativement au temps et l'universalité relativement aux sujets individuels.

Dans le traitement de l'universalité des mathématiques par rapport aux cultures, le philosophe français suggère de distinguer entre les idéalités mathématiques et leurs représentations.[2] C'est dans la non-distinction entre idéalités et représentations que résiderait, selon lui, la confusion malencontreuse à la base des positions relativistes issues de l'ethnomathématique et de l'anthropologie. Selon Caveing, derrière la multitude de manières de représenter les nombres naturels que rapporte la recherche ethnomathématique, deux choix s'imposent : le choix de la base des nombres et la manière de représenter la puissance de la base. Les différences se situent, donc, au niveau de ces choix, et non pas au niveau de l'idéalité mathématique à laquelle ces choix renvoient. Caveing peut donc en conclure que « bien loin que l'ethno-mathématique tienne en échec 1'« européocentrisme » mathématique, ce sont au contraire les propriétés des idéalités mathématiques valant de manière universelle et nécessaire qui rendent compte de la possibilité des variantes ethno-culturelles. » (2004, p. 107). Car, en tant qu'idéalité mathématique, « le nombre entier est indépendant des systèmes [de représentation] » (p. 108). Le nombre entier fait partie des « universaux » de « l'esprit humain » (p. 109).

L'esprit humain serait en fait muni, dans sa structure interne la plus intime, de cette logique universelle qui garantit l'existence des idéalités mathématiques, toujours les mêmes indépendamment du lieu et du temps. Ce sont des idéalités *a priori*, au sens kantien du terme, c'est-à-dire des idéalités indépendantes de l'expérience que les sujets peuvent faire du monde. Plutôt que dérivées de l'expérience sensuelle, sociale, politique et économique du monde et des idées que les individus se font de ce monde, ces idéalités *a priori* ordonnent cette expérience à travers leur existence omniprésente à l'insu des sujets eux-mêmes. Quand le sujet Azandé du bassin d'Uelle disait « sa, wet, biata, biama, biswi, batisa, etc. », il était en toute réalité en train de faire référence aux nombres entiers universaux 1, 2, 3, 4, 5, 6 et ainsi de suite jusqu'à 20, car les Azandé de la fin du 19^{e} siècle, c'est-à-dire avant l'arrivée des Belges, des Français, des Anglais, ne comptaient pas au-delà de vingt (Lemaire, 1894, p. 192). Sans qu'il le sache, sans qu'il en ait la moindre idée, sur le sujet Azandé opérait déjà cet *a priori* conceptuel universel, cette idéalité mathématique inscrite dans son être et ce même avant sa naissance.

Derrière cette interprétation de l'ethnomathématique, nous trouvons, bien sûr, les concepts fondateurs de la vision du monde de la philosophie des lumières, en particulier ses concepts de civilisation, de rationalisme (européen) universel et d'individu transcendantal vis-à-vis de sa société et sa culture. C'est la même interprétation que nous trouvons dans le livre *The School in the Bush*. Dans ce livre publié à l'époque de la colonisation africaine des années 1920, livre à travers lequel nous voyons à l'œuvre le processus d'assujettissement des peuples autochtones aux manières européennes de voir le monde, son auteur, Victor Murray dit : « In a mission school near Lake Mweru I found the European teacher […] laboriously doing arithmetic with numbers in Bemba, and he justified himself because this was the language

[2] Caveing (2004, p. 77) donne la définition suivante d'idéalité, proposée par Jean Toussaint Desanti : « nous entendrons par «idéalité »: « un « être» qui n'est jamais offert par sa simple présence, mais par la médiation du système réglé des désignations qui permettent d'en disposer».

with which the children were familiar » (Murray, 1967, p. 135). Murray n'a pas de problème avec cette manière de procéder, car un nombre exprime la même idée, indépendamment de la langue ou de sa représentation. Un nombre dans la langue Bemba « is a pure equivalent » (p. 136). Qu'on dise « amakulu amahlanu anamashumi amahlanu anesihlanu en Zoulou ou five hundred and fifty-five » (Murray, 1967, p. 136) n'a pas d'importance, car cela revient au même. « An African number is not more psychological in its use than an English one, any more than the written form '555' can be described as English, Zulu, French, Dutch or Xosa » (p. 136). Mais, à la limite, on peut aussi se passer des mathématiques dans les langues autochtones. Comme nous dit Loram, si on tient à ce que les langues bantoues survivent, c'est pour une simple raison sentimentale. Car la vérité, c'est que les langues autochtones

> have served their purpose. They are not capable of expressing the ideas which the new European civilisation has brought to the country. They are hopelessly clumsy and inadequate on the mathematical and scientific sides (Loram, 1917, p. 233).

III. EN GUISE DE CONCLUSION

En guise de conclusion, revenons à la question du départ, la question de l'universalité des mathématiques. S'agit-il d'une seule mathématique, celle produite par l'occident, les autres mathématiques n'étant que déclinaisons folkloriques de celles-ci ? Ou s'agit-il des mathématiques au pluriel, toujours ancrées dans leur contexte social, culturel et historique ? Si on conçoit les mathématiques comme des productions humaines issues *organiquement* et *profondément* de la pratique sociale, la réponse, il me semble, se penche du côté de la deuxième option. Retenir la première option revient à adopter une hypothèse trop forte : peu importe la culture et le moment historique, nous serions tous en train de penser le monde mathématiquement de la même manière. Les différences que les missionnaires européens, les anthropologues et les ethnomathématiciens ont toujours remarquées ne seraient que des différences superficielles derrières lesquelles s'exprime toujours et à jamais le *même* esprit, l'esprit universel. C'est la position que les grandes épistémologies européennes idéalistes et rationalistes de la modernité ont élaborée. Les cultures et l'histoire n'ont pas, dans cette perspective, grande chose à dire, autre que voir cet esprit universel déployer ses ailes et planer, comme dit Marx, au-dessus du terrestre.

REFERENCES

Cassirer E. (1983) *Individu et cosmos dans la philosophie de la renaissance.* Paris : Éditions de minuit.

Caveing M. (1982) *Zénon d'Élée : Prolégomènes aux doctrines du continu.* Paris : Vrin.

Caveing M. (2004) *Le problème des objets dans la pensée mathématique.* Paris : Vrin.

D'Ambrosio U. (2013) Las bases conceptuales del programa etnomatemática. *14º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. Universidad del Atlántico, 9-11 Octobre 2013.*

Evans-Pritchard E. (1972) **Sorcellerie, oracles et magie chez les Azandé**. Paris : Gallimard.

Feyerabend P. (1987) *Farewell to reason.* London : Verso (Reprint, 1994).

Esquincalha A. (n.d.) Etnomatemática: Um estudo da evolução das idéias. Http://www.ufrrj.br/leptrans/arquivos/etnomatematica.pdf.

Keck F. (2002) Les théories de la magie dans les traditions anthropologiques anglaise et française. *Methodos* 2, 1-16.

Loram C. (1917) *The education of the South African native.* New York : Longmans, Green, and Co.

Lemaire Ch. (1894) La numération parlée (Azandé). In Wauters, A.-J (éd.). *Le Congo illustrée. Voyages et travaux des belges* (pp. 192). Bruxelles : P. Weissenbrugh, Imprimeur du Roi.

Lizcano E. (2009) *Imaginario colectivo y creación matemática.* Madrid : Gedisa.

Marx K. (1982) *Oeuvres. Tome III. Philosophie.* Paris : Gallimard.

Miarka R. (2013) Em busca da dimensão teórica da etnomatemática. I Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe, 6-8 Noviembre 2013, Santo Domingo, República Dominicana.

Murray V. (1967) *The school in the bush. A critical study of the theory and practice of native education in Africa.* London: Franck Cass and Company Ltd. (Original work published 1929)

Radford L. (1996) Lizcano y el problema de la creación Matemática. Mathesis, *12*, 399-413.(http://luisradford.ca/publications/#1996)

Radford L. (2010) Matemáticas, cultura y algunos pensamientos subversivos. Reseña invitada de Imaginario colectivo y creación matemática de Emmánuel Lizcano. Madrid: Madrimas (http://luisradford.ca/publications/#2010).

Radford, L. (2017) Réflexions sur l'éthnomathématique. In J. Adihou, A. Giroux, D. Guillemette, C. Lajoie, & K. Mai Huy (Eds.), *Actes du colloque du groupe de didactique des mathématiques du Québec 2016* (pp. 168-177). Ottawa: GDM.

Peña-Rincón P. (2015) Descolonizar los saberes: Un gran desafío para la etnomatemática. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 8(1), 4-9.

Saldahna M., Kroetz K., Machado de Lara I. (2013) Diferentes concepções de etnomatemática. *VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática. ULBRA, Rio Grande do Sul, 16-18 de Octubro de 2013.*

Spengler O. (1948) *Le déclin de l'occident.* Paris : Gallimard.

Vandendriessche É. (2017) Des pratiques algorithmiques et géométriques propres à des sociétés autochtones. Quels usages pour un enseignement des mathématiques culturellement situé? In A. Adihou, J. Giroux, D. Guillemette, C. Lajoie, & K. Huy (Eds.), *Actes du colloque du groupe de didactique des mathématiques du Québec 2016* (pp. 11-26). Ottawa: Université d'Ottawa.

LA CONSTRUCTION DISCURSIVE DE L'ACTIVITÉ DE L'ÉLÈVE DANS LE PROGRAMME CADRE ET DANS UNE SÉRIE DE MANUELS SCOLAIRES EN ONTARIO : UNE ANALYSE DE TEXTES SUR LES FRACTIONS

TCHEUFFA NZIATCHEU[*] Jean –BARWELL[**] Richard

Résumé – Dans le présent article, nous présentons les résultats d'une analyse des pratiques discursives en rapport au concept de fraction dans le programme cadre de mathématique mandaté par le Ministère d'éducation et la série de manuels scolaires en mathématique (*Math Makes Sense*) en Ontario. Notre analyse portait sur les rôles qu'occupent les apprenants dans ces textes par rapport à la construction des savoirs et la pensée mathématique.

Mots-clefs : Discours, curriculum, manuels, fractions, Ontario.

Abstract – The present research examines the Ontario mathematics curriculum and textbooks (*Math Makes Sense*), to identify discursive practices through which mathematical thinking relating to the concept of fractionare constructed and learners' roles in those textbooks in the primary school program.

Keywords:Discourse, curriculum, textbooks, fractions, Ontario.

I. PROBLEMATIQUE

Le programme cadre (en abrégé PC dans le contenu du présent document) de mathématique du Ministère d'éducation de l'Ontario, au Canada, détermine ce qu'un enseignant doit enseigner en mathématiques. C'est une intention et une articulation d'une vision (Smith & Morgan, 2016, p. 30) sur lesquelles doivent se référer des auteurs pour produire des manuels scolaires (Herbel-Eisenmann, 2004). Le manuel est un message statuant sur quoi l'élève doit apprendre. Dans une perspective discursive, le langage du PC et des manuels scolaires statuent sur les constructions mathématiques, les acteurs dans les cours de mathématiques et les rôles des élèves, des enseignants, des parents et les auteurs de ces manuels (Herbel-Eisenmann & Wagner, 2005). Les choix discursifs des auteurs peuvent être examinés comme un sous-entendu idéologique qui met en avant des rôles pour ces auteurs ou le lecteur sur une notion mathématique (Herbel-Eisenmann, 2004). Dans notre étude exploratoire, nous nous intéressons à la construction de l'activité des élèves en mathématiques à travers les constructions de savoirs. De plus, nous nous intéressons au rapport entre la construction de l'activité mathématique des élèves selon le PC du Ministère et sa construction à travers les contenus des manuels scolaires. Compte tenu de la nature exploratoire de notre étude, nous avons choisi les fractions comme sujet d'intérêt. Ce sujet est bien défini et se trouve au programme des mathématiques de chaque année de l'élémentaire (de la 1ère à la 8ème année en Ontario). Plusieurs recherches montrent que la compréhension du concept de fraction est un défi pour les élèves en Amérique du Nord (Groff, 1996;Bruce & al., 2013), car elle prend plusieurs formes (Poon & Lewis, 2015, p. 178), n'est pas régulièrement utilisée dans la vie quotidienne (Hasemann, 1981), son apprentissage est à la fois problématique (Duval, 2006) et enrichissant parce qu'il comporte plusieurs interprétations (Behr & al., 1983).Au sujet des fractions, le PC ontarien suggère un cadre solide dans lequel l'élève s'équipe de connaissances, de savoirs et d'habiletés pour réussir dans la vie quotidienne à travers divers processus mathématiques, la résolution de problèmes, la communication, la modélisation, la réflexion… (MEO, 2005). Ainsi, nos questions de recherche sont : comment le PC en mathématique de la province de l'Ontario construit-il l'activité de l'élève dans

[*]Université du Québec à Montréal (UQAM) – Canada – tcheuffa_nziatcheu.jean@courrier.uqam.ca
[**]Université d'Ottawa – Canada – richard.barwell@uottawa.ca

l'apprentissage des fractions à l'élémentaire ? Comment la série de manuels scolaires des mathématiques (*Math Makes Sense*) de la province de l'Ontario construit-elle l'activité de l'élève dans l'apprentissage des fractions à l'élémentaire ? Quel est le rapport entre ces deux constructions ? Pour répondre à cette question, nous allons dans la section suivante présenter des concepts se rattachant à notre recherche en nous référant à quelques études qui s'intéressent à l'analyse discursive en mathématiques et sur le rôle du langage ainsi que son utilisation dans le processus apprentissage/enseignement (Sfard, 2001; Pimm, 1987; Halliday, 1978; Barwell, 2008, p. 1059).

II. CADRE THEORIQUE

Il existe plusieurs formes de recherche en analyse discursive dans le domaine de la didactique des mathématiques : la forme sociologique et socioculturelle qui promeut la co-construction de connaissances mathématiques à travers des interactions enseignants/élèves (Moschkovich, 2002; Bauersfeld, 1980; Cobb & Bauersfeld, 1995; Rowland, 2000; Lerman, 2001, Barwell, 2008, p. 1064); la forme post structuraliste qui promeut la voie selon laquelle une personne développe son discours mathématique dépendamment de son identité culturelle langagière et de son histoire (Barwell, 2008, p. 1066; Barwell, 2013; Walkerdine, 1988); et la forme socio-sémiotique où le discours mathématique inclut la production et l'usage des manuels de mathématiques, les articles et autres textes et où ladite forme constitue un système de potentiels sémantiques par lesquels des personnes créent du sens mathématique dans un univers social donné (Morgan, 1996; Morgan, 1998;Rotman, 1988;Herbel-Eisenmann, 2004; Herbel-Eisenmann & Wagner 2005; Barwell, 2008, p. 1064; O'Halloran, 2008). La forme socio-sémiotique est celle que nous adoptons dans notre recherche parce qu'elle concerne les productions des textes et l'analyse discursive de ces textes permet d'examiner le contenu des manuels (Presmeg & al., 2016; O'Halloran, 2008). Nous adoptons le cadre théorique critique d'Halliday (1973) qui est utilisé dans le domaine de la didactique des mathématiques par Morgan (1996, 1998), Herbel-Eisenmann (2004) et O'Halloran(2008). Halliday postule que le langage est une ressource pour opérer des choix, atteindre des objectifs et réaliser différentes fonctions (Halliday, 1994; O'Halloran, 2008). L'analyse discursive est donc une interprétation critique de la façon dont les choix langagiers construisent une réalité particulière et, plus particulièrement, des relations sociales (O'Halloran, 2008). Halliday (1973, 1994) identifie trois méta-fonctions du système langagier : la fonction idéationnelle, la fonction interpersonnelle et la fonction textuelle[1]. La fonction idéationnelle exprime l'aspect conceptuel d'un texte c'est-à-dire ce que suggère un texte (les concepts en jeu, la production de connaissances, les actions prises); la fonction interpersonnelle exprime les relations auteurs/lecteurs (les rôles implicites des lecteurs selon le discours et les relations qui les lient avec les connaissances construites dans ce texte); tandis que la fonction textuelle organise le texte (la relation entre les sections, la procédure utilisée par les auteurs) (Morgan, 1996, 1998, 2002; Herbel-Eisenmann, 2004). La combinaison de ces trois fonctions met en avant le style d'écrit des auteurs. Le chercheur en analyse discursive doit porter une attention sur les usages précis des auteurs. Par exemple, dans notre analyse, nous portions un regard précis aux formules impératives, car d'une part, elles permettent aux auteurs de s'adresser avec autorité à un lecteur qui doit suivre ces commandes pour répondre, et d'autre part, elles appellent le lecteur à construire des connaissances mathématiques d'une manière déterminée par l'auteur. Dans le même ordre d'idées, nous avons analysé l'usage des pronoms personnels (Herbel-Eisenmann, 2004). Par exemple, les pronoms personnels **je** et **nous**[2]indiquent que les auteurs

[1]« *ideational* », « *interpersonal* » et « *textual* »
[2]« *I* **»** et « *we* »

eux-mêmes sont interpellés dans l'activité dans le texte tandis que **tu/vous**[3] peut interpeller directement le lecteur (Halliday, Matthiessen & Matthiessen, 2014). Cette approche systématique permet d'examiner les rôles des lecteurs (les élèves), des auteurs et les relations entre eux (Otte, 1983; Love &Pimm, 1996).

III. METHODOLOGIE

Pour réponde méthodologiquement à nos questions de recherche, nous avons choisi la série de manuels *Math Makes Sense* sélectionnée dans la liste officielle Trillium[4] où l'éditeur qui apparaissait le plus était Pearson Addison Wesley, une des compagnies qui domine le marché du livre en Amérique du Nord (Gutstein, 2012). Cette série de manuels est la plus utilisée à l'élémentaire ontarien. Nous avons également utilisé le programme cadre (ou PC) pour les mathématiques au primaire en Ontario. Nous avons obtenu les versions papier du PC et des manuels, et la version électronique du PC sur le site officiel de ministère de l'Éducation de l'Ontario. La version électronique du PC permet de faire le décompte des mots spécifiques traitant des mathématiques, de les situer par rapport au cadre théorique et de mettre en évidence les fonctions du langage afin de mettre en avant les rôles de l'apprenant. Le PC est organisé en objectifs généraux et spécifiques, et précise quelques rôles des enseignants, des parents et ce que l'élève devrait réaliser par année. *Math Makes Sense* va de la 1ere à la 8e année et nous avons analysé sept documents sur les huit, car nous n'étions pas en mesure de retrouver celui de la 2e année dans le temps dont nous disposions. Chaque manuel est organisé en modules[5] suivis de son numéro et du titre; de la section lancement[6] qui occupe les deux premières pages du module et qui présente les objectifs d'apprentissage et mots clés[7] qui sont vus dans ce module (voir tableau 1); ensuite viennent des leçons qui mettent en application le contenu de la section lancement, suivies enfin d'une revue du module et des problèmes[8]. Par exemple, en 3^{e} année, module 8 : Exploration des fractions[9] est constitué de la section lancement (Pizza Lunch, pp. 302-303), de 7 leçons, d'une revue du module et des problèmes). Pour notre démarche d'analyse, nous avons utilisé les trois méta-fonctions du système langagier pour analyser le programme cadre et les manuels. Ces deux analyses ont permis de déterminer le rapport entre les deux types de documents. Pour chaque manuel analysé, nous avons identifié, les deux premières pages de chaque module qui se rapporte à la fraction (c'est-à-dire la partie lancement) pour voir si les objectifs d'apprentissage à chaque niveau correspondent aux attentes énoncées par le curriculum à ce niveau et parce cette partie est en congruence avec le contenu des leçons. Dans chaque manuel et à travers le module portant sur la fraction, ces objectifs d'apprentissage sont atteints à travers les leçons qui sont toutes divisées en huit sections à savoir : explorer, montrer et partager, se connecter, pratiquer, se rappeler, réfléchir, nombres de tous les jours et la section à la maison[10]. La section « explorer » permet d'explorer un problème de fraction avec un pair en utilisant du matériel, montrer et partager permet à l'élève de communiquer son travail à d'autres, se connecter résume la pensée mathématique travaillée, la pratique permet à l'élève de se pratiquer sur différentes situations, se rappeler rappelle d'utiliser des images, mots, ou nombres dans la réponse du lecteur, réfléchir appelle le lecteur à penser à l'idée générale de la

[3] « *you* »
[4] cf. http://www.edu.gov.on.ca/trilliumlist/
[5] « *Units* »
[6] « *Launch* »
[7] « *learning goals* » et « *key words* »
[8] « *Unit Review* » et « *Unit Problem* »
[9] « *Exploring fractions* »
[10] « *explore, show and share, connect, practice, remind, reflect, numbers every day and at home* »

leçon, le nombre chaque jour permet au lecteur de travailler sur des variantes de nombres, et la section à la maison propose des devoirs de maison. Pour voir les rôles assignés aux élèves à travers le concept de fraction dans ces manuels, nous nous appuyons sur des extraits de textes que nous jugeons pertinents et que nous analysons à travers notre cadre théorique.

Manuels	Modules	Fraction units	Pages	Objectifs d'apprentissage (= learning goals)	Mots clés (= Key words)
Math Makes Sense 3	11	Unit 8 : exploring fractions	302-330	Find fractions of a whole, of a length, and of a set. Solve fractions problems. Explore mixed problem. (3 **learning goals**)	Equal parts, fractions, halves, thirds, quarters/fourths, fifths, eighths, thirds, tenths, mixed numbers.
Math Makes Sense 4	11	Unit 8: fractions and decimals	270-316	Model, compare, and order fractions and mixed numbers. Explore and model tenths and hundredths as decimals. Compare and order decimals. Add and subtract decimals. Add and subtract money. (5 **learning goals**).	Tenths, numerator, denominator, proper fraction, equivalent fractions, improper fraction, mixed number, decimal, decimal point, hundredths.
Math Makes Sense 5	11	Unit 8: fractions and decimals	216-304	Model, compare, and order fractions, improper fractions, and mixed number. Explore equivalent fraction. Explore patterns involving fractions. Relate fractions to division and to decimals. Estimate decimal products and quotients. Multiply decimals with tenths and with hundredths. Divide decimals with tenths and with hundredths. Pose and solve problem involving decimals and fractions. (8 **learning goals**).	Equivalent fractions. Proper fraction. Mixed number. Improper fraction. Quotient. Divisor. Dividend.
Math Makes Sense 6	11	Unit 8: fractions, percents, ratios, and rates	286-338	Express fractions in simplest form. Related mixed numbers and improper fractions. Compare and order mixed numbers and fractions. Explore addition and subtraction of fractions. Explore percents. Relate percents to fractions and decimals. Estimate and calculate percents. Solve multistep problems using percents. Use ratio for part-to-part and part-to-whole comparisons. Explore equivalent ratios. Explore rates. Solve problems involving fractions, percents, ratios, and rates. (12 **learning goals**)	Simplify, simplest form, percent, ratio, of a ratio, ratio, equivalent ratios, rate, and continuous line graph.
Math Makes Sense 7	11	Unit 8: working with percents	290-336	Relate decimals, fractions and percents. Solve problems that involve fractions, decimals, and percents. Multiply decimals. Divide decimals. Draw circle graph by hand. (5 **learning goals**)	Percent, percent circle.
Math Makes Sense 8	11	Unit 4 : Fractions and decimals	154-180	Compare and order fractions. Add and subtract fractions. Multiply a fraction by whole number and by fraction. Divide a whole number by fraction and a fraction by a fraction. Convert between fractions and decimals. (5 **learning goals**)	Reciprocals, terminating decimal, repeating decimal.

Tableau 1- informations générales sur les objectifs d'apprentissage et mots clés sur le concept de fraction dans «math makes sense »

IV. ANALYSE DE DONNEES

Pour faire suite à l'analyse du programme cadre, la fonction idéationnelle met en avant les attentes générales et spécifiques. De la 1ere à la 8e année, pour tout concept mathématique, l'approche par la résolution de problème est priorisée à travers différentes situations, pour la plupart, issues de la vie quotidienne des élèves, que l'enseignant doit leur faire vivre, pour qu'ils développent des habiletés en résolution de problème, à raisonner mathématiquement, à communiquer, réfléchir, à établir des liens entre des données, à sélectionner des outils appropriés et à modéliser tout au long de leur apprentissage mathématique. Dans la résolution de problèmes, l'élève doit apprendre à comprendre le problème à travers la lecture et la compréhension des données, à élaborer un plan de résolution et de le mettre en œuvre, pour ensuite faire des vérifications de ses résultats. Ce PC suggère que l'élève aille du concret vers l'abstrait et doit commencer par explorer les fractions avec du matériel concret en 1ere année pour tendre vers des opérations sur les fractions et la résolution de problèmes de fractions en utilisant une variété de stratégies en 8e année. Le PC ne précise pas la façon dont l'activité mathématique progresse au sujet de la fraction, mais donne des précisions sur différentes attentes que les élèves doivent réaliser par année. Dans la fonction interpersonnelle, le PC suggère ce que l'élève peut, doit, devrait, devra…faire[11] de la 1ere à la 8e année sur le concept de fraction. Les enseignants jouent un rôle important dans la progression des apprentissages sur le concept de fraction. Dans le PC, le mot *will* (sera) est utilisé 243 fois de l'année 1 à 8 et le plus souvent dans l'expression les « élèves devront[12] » utilisé 157 fois interpellant directement l'apprenant. L'expression « l'enseignant devra[13] » s'adresse directement à l'enseignant. Le terme « doit » ou « doivent[14] » est utilisé 28 fois (p. ex. les jeunes élèves doivent[15]*;* «l'enseignant doit» et l'expression « l'élève doit[16] » est utilisé 5 dans

[11] « *can, must, should, will…* »
[12] « *students will* »
[13] « *teacher will* »
[14] « *Must* »
[15]« *Younger students must* »

le programme. Le terme « pourrait » est utilisé une fois et l'élève peut[17] est utilisé 11 fois. Il n'y a pas de forme « les parents pourraient… peuvent…pourront ». La seule modalité concernant les parents est : « les parents peuvent[18] » qui apparait seulement 3 fois dans le PC. La forme [élèves, parents ou enseignants + verbe] exprime ce que les auteurs demandent au lecteur de faire. Dans la fonction textuelle, la fraction est organisée en listes de concepts regroupés sous différents thèmes où les savoirs construits sont morcelés. D'une année à l'autre, la fraction évolue suivant différentes notions. En 2e année, on a la partie tout et la comparaison, la 4e année traite de la lecture et de la comparaison pour passer en 5e année sur la fraction décimale, propre et impropre ; la 6e année s'organise autour des relations entre les fractions, le nombre décimal et les pourcentages tandis que la 7e année porte sur l'addition, la soustraction des fractions et les nombres décimaux. La 8e année traite de la division et la multiplication des fractions pour ouvrir sur l'algèbre.

Au niveau des manuels scolaires, dans la fonction idéationnelle, les activités vont généralement du concret vers l'abstrait avec usage du matériel, du simple au complexe de la 1ere à la 8e année. Dans ses multiples rôles, l'élève explore la fraction en 3e année; travaille la fraction décimale en 4e et 5e années; les pourcentages, taux, rapports et opérations sur les fractions en 6e et 7e années; la comparaison, la conversion et les opérations de fractions avec passage vers l'algèbre en 8e année. Selon le niveau primaire, pour le concept de fraction, on constate que les objectifs d'apprentissage (cf. tableau 1) sont généralement inscrits dans les attentes du PC. Ces objectifs sont mis en évidence à travers différents modules répartis en leçons subdivisées en huit parties. Dans la fonction interpersonnelle, le style d'écriture des auteurs est majoritairement basé sur des commandes impératives pour parler avec autorité à travers les pronoms personnels tu/vous, des verbes comme écrire, dire, utilise, montre…dessine… qui interpellent directement le lecteur. Ils utilisent très rarement Je/nous pour s'interpeller eux-mêmes. Dans *Math Makes Sense* de la 4e année par exemple, on peut lire entre autres, «écrire une fraction pour dire quelle partie de chaque courtepointe est rayée (p. 273) ouutilise des carrés de couleur pour montrer chaque fraction (p. 274)[19] », etc. Ces extraits interpellent directement l'élève à exécuter ces tâches sans toutefois solliciter son avis par exemple sur l'explication de sa démarche. Ce sont des questions un peu plus fermées qui poussent l'élève juste à exécuter les tâches. On y voit là une posture autoritaire des auteurs. Dans *Math Makes Sense* 5e année, on peut également lire, « quand tu vois une fraction impropre, comment peux-tu l'écrire comme un nombre mixte (p. 264) ou quand utilises-tu les fractions et les nombres mixtes[20]» qui laisse une place à la réflexion chez l'élève. La première permet plus à l'élève d'objectiver ses connaissances tandis que la seconde permet de penser à différentes situations où utiliser ces concepts à la maison. Dans une section du manuel de 8e année, on peut lire la situation suivante :

> **Explore**: Work with a partner. You will need 1-cm grid paper and coloured pencils. Use these rules to create a rectangular design on grid paper. (The design must have line symmetry or rational symmetry; One-half of the grid squares must be red – One-third of the grid squares must be blue - The remaining grid squares must be green; The rectangle must have the fewest squares possible). What fraction of the squares are green? How do you know? How many squares did you use? Explain. Describe your design. (Math Makes Sense 8, p, 143). **Reflect & Share**: compare your design with that of another pair of

[16] « *Younger students must* » et « *student must* »
[17] « *could* » et « *student can* »
[18] « *parents can* »
[19] *write a fraction to tell what part of each quilt is striped* » (p. 273) ; « *Use coloured squares to show each fraction*» (p. 274)
[20] *Reflect: when you see an improper fraction, how can you write it as a mixed number?* » (p. 264) ou « *At home: when do you use fractions and mixed numbers at home? Explain* » (p. 264).

classmates. If the designs are different, do both of them obey the rules? Explain. Compare your design with those of another classmate. How many different designs are possible? (Math Makes Sense 8, p, 143)

Dans les situations« explorer réfléchir et partager [21]», les auteurs sont moins autoritaires parce qu'ils laissent le libre choix aux élèves de créer un design rectangulaire à partir de certaines règles. Le choix revient aux élèves non seulement de créer, mais également d'exprimer ce qu'ils font à travers des questions comme : comment le sais-tu ? Explique. Décrivez votre conception. Les auteurs laissent libre court aux élèves de faire une comparaison de leur production avec d'autres si les designs sont différents et si les règles ont été prises en compte. Par la suite, tous les élèves font une confrontation de leur production en vue de dénombrer tous les cas de productions possibles. Ceci, ainsi que les analyses des autres manuels nous amènent à constater que ces auteurs à travers leurs écrits sont plus autoritaires en début du cycle primaire et relativement moins vers la fin de la 8^{e} année.

Dans la fonction textuelle, chaque livre est organisé en modules comportant des leçons avec chaque leçon qui comporte huit sections. Chaque leçon traite un (ou plus d'un objectif) énoncé dans la section lancement qui s'inscrit dans le programme, utilise une multitude des situations à travers lesquelles l'élève va s'exercer sur le concept de fraction tout en résolvant des problèmes liés à son milieu de vie et en développant des savoirs, le savoir-faire et le savoir-être. On a aussi beaucoup d'images coloriées dans le texte et une grande variété de représentations sémiotiques (au sens de Duval) permettant de présenter la fraction sous différentes formes. L'organisation des chapitres et telle que les leçons constituent des moments d'apprentissage ordonnés et progressifs avec des exercices d'application ou réflexifs. Concernant les fractions, dans le PC, les objectifs généraux et spécifiques que doivent réaliser les élèves se traduisent dans les faits à travers divers chapitres dans la collection *Math Makes Sense* où la construction mathématique s'opère selon l'année du primaire.De la 1ere vers la 8e année, les exercices proposés vont du simple en 1ere année et se complexifient au fur et à mesure que l'on avance dans le cycle primaire. Pour chaque année, le contenu de chaque chapitre sur la fraction fait un rappel sur la notion abordée l'année précédente afin d'assurer une continuité dans la construction de connaissances mathématiques sur la fraction le long du primaire.

V. CONCLUSIONS

L'analyse du PC Ontario révèle que l'apprenant est au centre des préoccupations. Une analyse des formes des verbes (voir section précédente) suggère que ces manuels expriment une relation d'autorité avec les élèves de la 1ere à la 6e année parce qu'ils n'ont pas une grande marge de liberté à exprimer librement leur pensée. Pour les modules analysés, dans les *Math Makes Sense* des années 7 et 8, l'on observe une baisse de la relation d'autorité par rapport aux élèves à certains endroits. Cette baisse serait due au fait que les auteurs commencent à préparer les lecteurs (élèves) pour leurs études supérieures en les encourageant à penser par eux-mêmes à travers certaines situations mathématiques. Notre recherche révèle que pour la fraction, *Math Makes Sense* s'inscrit globalement dans les orientations du PC tant au niveau des attentes générales que spécifiques. Cependant, ce programme suggère de donner plus d'espace pour la pensée réflexive de l'élève, or pour les parties traitant la fraction, le caractère autoritaire du manuel révèle que ce dernier ne n'inscrit que partiellement dans cette attente, ce qui marque un écart entre le PC et ces manuels. Notons qu'une des limites de notre travail est de n'avoir pas expérimenté ces relations d'autorité auprès d'élèves pour savoir jusqu'à quel point l'impact de cette relation d'autorité a sur les élèves.

[21] *Explore* et *Reflect& Share*

REFERENCES

Barwell, R. (2008). Discourse, mathematics and mathematics education. In *Encyclopedia of language and education* (pp. 1059-1070). Springer US.

Barwell, R. (2009). Researchers' descriptions and the construction of mathematical thinking. *Educational Studies in Mathematics*, *72*(2), 255-269.

Barwell, R. (2013). Formal and informal language in mathematics classroom interaction: A dialogic perspective. In *Proceedings of 37th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)* (Vol. 2, pp. 73-80).

Bauersfeld, H. (1980). Hidden dimensions in the so-called reality of a mathematics classroom. In *Educational Studies in Mathematics* 11, 23–41.

Behr, M., Lesh, R., Post, T. R., & Silver, E. A. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh& M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematical concepts and processe*s (pp. 91-126). New York: Academic Press.

Bruce, C., Chang, D., Flynn, T., &Yearley, S. (2013). Foundations to learning and teaching fractions: Addition and subtraction. *Retrieved July*, *4*, 2014.

Cobb, P. &Bauersfeld, H., (eds.). (1995).*The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures*, Lawrence Erlbaum, Hillsdale, NJ.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103–131.

Groff, P. (1996). Is teaching fractions a waste of time? *Clearing house*, 69, 177-179.

Gutstein, D. (2012). Pearson's plan to control education. *British Columbia Teachers' Federation*.

Halliday, M. A. K. (1973). *Explorations in the functions of language*. London: Edward Arnold.

Halliday, M., A., K. (1978). *Language as Social Semiotic: The Social Interpretation of Language and Meaning*, Edward Arnold, London.

Halliday, M. A. K. (1994). *An introduction to functional grammar* (2nd ed). London: Edward Arnold.

Halliday, M., Matthiessen, C. M., & Matthiessen, C. (2014). *An introduction to functional grammar*. Routledge.

Hasemann, K. (1981). On difficulties with fractions. In *Educational studies in mathematics*, 12. 71-87.

Herbel-Eisenmann, B. (2004). An examination of textbook "voice": how might discursive choice undermine some goals of the reform? In McDougall, D. & Ross, J. (Eds.), Proc. 26th*North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, vol. 2, pp. 862-870,*.October 2004 Toronto, Ontario, Canada: PME-NA 864.

Herbel-Eisenmann, B., & Wagner, D. (2005). In the middle of nowhere: How a textbook can position the mathematics learner. In *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3, pp. 121-128. Melbourne: PME.

Lerman, S. (2001). Cultural, discursive psychology: A sociocultural approach to studying the teaching and learning of mathematics. In *EducationalStudies in Mathematics* 46, 87–113.

Ministère de l'Éducation de l'Ontario (MEO). (2005). *Le curriculum de l'Ontario, de la 1re à la 8e année*. Mathématiques. Ontario.

Morgan, C. (1996). The language of mathematics: Towards a critical analysis of mathematics texts. *For the Learning of Mathematics*, 16 (3), 2-10.

Morgan, C. (1998). *Writing Mathematically: The Discourse of Investigation*, Falmer Press, London. 232 p.

Morgan, C. (2002). *Writing Mathematically: The Discourse of Investigation*, Studies in mathematics Education Series: 9, Falmer Press, London. 288 p., Published in the Taylor & Francis e-Library, 2002.

Moschkovich, J. (2002). A situated and sociocultural perspective on bilingual mathematics learners. In *Mathematical Thinking and Learning* 4(2–3), 189–212.

O'Halloran, K. (2008). *Mathematical discourse: Language, symbolism and visual images*. A&C Black.

Pimm, D. (1987). *Speaking Mathematically: Communication in Mathematics Classrooms*, Routledge and Kegan Paul, London.

Poon, R. C., & Lewis, P. E. (2015). Unpacking the Division Interpretation of a Fraction. *Teaching Children Mathematics, 22*(3), 178-185.

Presmeg, N., Radford, L., Roth, W., M., &Kadunz, G. (2016). *Semiotics in Mathematics Education,*ICME-13, Springer, Hamburg.

Rotman, B. (1988). Toward a semiotics of mathematics. *Semiotica*72 (1/2), 1-35.

Rowland, T. (2000). *The Pragmatics of Mathematics Education: Vagueness in Mathematical Discourse*. London: Falmer

Sfard, A. (2001). There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. In *Educational Studies in Mathematics* 46, 13–57.

Smith, C., & Morgan, C. (2016). Curricular orientations to real-world contexts in mathematics. *The Curriculum Journal*, *27*(1), 24-45.

Walkerdine, V.(1988).*The mastery of reason: Cognitive development and the production of rationality*.London: Routledge.

Manuelsscolaires

Brown, T., Lenjosek, A.,Heideman, C.,Mennie, J., Konis-Chatzis, G., Keene, A. J.,Sinclair, M., Featherstone, C.,Johnston, J.,Keyes, B.,Wood, E., Milne, E.,Jones, D., &Jeroski, S. (2006). *Math Makes Sense 8*. Pearson Education Canada Inc., Toronto, Ontario.

Jackson, M., Saundry, C., Dockendorf, M., Connell, M. M., Spencer, H., Bryan, L., Jeroski, S., Anderson, C., Lightburn, B., Skene, M., Beaumont, D., & Travis, J. (2004). *Math Makes Sense 1*. Pearson Addison Wesley, Pearson Education Canada Inc., Ontario.

Johnston, J.,Doucette, M.,Thomas, S.,Brown, T.,Jones, D., Paziuk, J.,Harper, K.,Keyes, B.,Lonjosek, A., Sinclair, M., Heideman, C.,Davis, M., &Jeroski, S. (2005). *Math Makes Sense 7*. Pearson Addison Wesley, Pearson Education Canada Inc., Toronto, Ontario.

Morrow P., Jones, D., Keyes, B.,Thomas, S.,Alexander, N., Nicolson, C. P.,Saundry, C., Brown, T., Connelly, R.,Davis, M., Johnston, J.,Thomas, J., Appel, R., Edwards, L.,Harper, K., Connell, M. M., &Jeroski, S. (2006). *Math Makes Sense 6*. Pearson Addison Wesley.

Morrow P., Keyes, B.,Jones, D.,Thomas, S.,D'Alessandro, A., Brown, T., Connelly, R., Johnston, J.,Davis, M., Thomas, J., Connell, M. M., &Jeroski, S. (2005). *Math Makes Sense 5*. Pearson Addison Wesley, Pearson Education Canada Inc., Toronto, Ontario.

Morrow P., Keyes, B., Thomas, S., D'Alessandro, A., Jones, D., Gray, L.,Brown, T., Connelly, R., Johnston, J., Thomas, J., Connell, M. M., Davis, M., &Jeroski, S. (2004). *Math Makes Sense 4*. Pearson Addison Wesley, Pearson Education Canada Inc., Ontario.

Morrow P., Thomas, S., Jones, D., Gray, L.,Jeroski, S., Brown, T., Connelly, R., Gordon, S., Davis, M., Harper, K., Harding, A., &Connell, M. M. (2004). *Math Makes Sense 3*. Pearson Addison Wesley, Pearson Education Canada Inc., Toronto, Ontario.

MATHEMATIQUES ET LANGAGE : LE CAS DES CLASSES MULTILINGUES, UNDEFI POUR L'ENSEIGNEMENT LUXEMBOURGEOIS

VLASSIS* Joëlle

Résumé – Cet article propose une réflexion théorique sur les défis des enseignants luxembourgeois de mathématiques confrontés à des classes multilingues. En éducation mathématique, de nombreux chercheurs soulignent le rôle crucial du langage dans les apprentissages. Ce principe rend complexe leur enseignement dans les classes multilingues où il s'agit de viser à la fois des objectifs de langue et de contenu. Le translanguaging semble constituer un paradigme prometteur pour cadrer des pratiques d'enseignement adaptées à ces contextes.

Mots-clefs : Content and Language Integrated Learning, Langage, Mathématiques, Classes multilingues, Translanguaging

Abstract –This article proposes a theoretical reflection on the challenges faced by Luxembourg mathematics teachers in multilingual classes. In mathematics education, many researchers point to the crucial role of language in learning. This principle makes their teaching complex in multilingual classes, where the aim is to target both language and content objectives. Translanguaging appears to be a promising paradigm for framing teaching practices adapted to these contexts.

Keywords: Content and Language Integrated Learning, Language, Mathematics, Multlingual classrooms, Translanguaging,

I. INTRODUCTION

Le Grand-Duché Luxembourg est le plus petit pays de l'Union Européenne. D'un point de vue géographique, il est situé entre la Belgique, la France et l'Allemagne. Il est également historiquement, économiquement et culturellement connecté à ces pays, francophones d'une part, et germanophone d'autre part. Pour ces raisons notamment, le pays compte trois langues officielles : le luxembourgeois, l'allemand et le français. Le pays est donc trilingue. Cependant, Kirsch (2006) précise que, tandis qu'en Belgique et en Suisse, le multilinguisme est « juxtaposé » (avec différentes communautés linguistiques vivant les unes à côté des autres), le trilinguisme au Luxembourg est « superposé » c'est-à-dire que les mêmes personnes utilisent différentes langues en fonction des situations. Pour une majorité d'autochtones, le luxembourgeois est la langue préférée et la mieux maitrisée, suivie de l'allemand.

Le Grand-Duché du Luxembourg se caractérise également par une immigration importante et présente une grande hétérogénéité des nationalités et des cultures. Sa population est composée pour près de la moitié (47,7%) (STATEC, 2017) de résidents étrangers en constante augmentation, dont les plus nombreux sont les Portugais (16,4% des étrangers) (STATEC, 2017). Au trilinguisme national s'ajoute ainsi un multilinguisme de la population issue de l'immigration.

Cette situation se traduit dans les classes par un pourcentage d'élèves qui ne parlent pas ou qui parlent mal les langues d'enseignement, à savoir le luxembourgeois ou l'allemand dans l'enseignement fondamental (4 – 12 ans). Au secondaire, la situation linguistique se complexifie encore, même pour les Luxembourgeois, dans la mesure où le cours de mathématiques qui se donnait au fondamental en allemand se donne désormais en français pour les filières classique et technique permettant d'accéder à l'enseignement supérieur. Au

* Université du Luxembourg – Grand-Duché du Luxembourg – joelle.vlassis@uni.lu

multilinguisme des classes s'ajoute donc au secondaire l'obstacle du français, langue souvent mal maîtrisée par les autochtones.

Or, dans l'enseignement des mathématiques, les recherches récentes basées sur les approches socio-culturelles plaident pour des pratiques de classes où la communication est prépondérante et l'utilisation de la langue inhérente aux apprentissages mathématiques. Comment alors développer de manière significative, les apprentissages mathématiques dans des classes où un grand nombre d'élèves ne parle pas couramment la langue d'enseignement ?

Dans cet article, nous proposons de développer une réflexion théorique sur les défis des enseignants luxembourgeois de mathématiques confrontés aux classes multilingues. Nous nous attacherons en particulier à la situation linguistique des classes de mathématiques du début du secondaire où la langue d'enseignement des mathématiques passe de l'allemand au français. La première section présentera la situation linguistique de l'école luxembourgeoise ainsi que les problèmes rencontrés par les élèves du secondaire dans l'utilisation du français en mathématiques. Dans la seconde, nous rappellerons l'importance de la langue dans les apprentissages mathématiques. La troisième partie présentera le « translanguaging », un paradigme prometteur pour les approches pédagogiques destinées aux classes de mathématiques multilingues. Enfin, dans la dernière section, nous traiterons des pistes d'actions pratiques pour les enseignants et nous illustrerons notre propos par une courte réflexion autour d'une activité dans le domaine de la généralisation.

II. LE MULTILINGUISME A L'ECOLELUXEMBOURGEOISE

1. La situation linguistique dans les classes luxembourgeoises

Dans ce contexte de multilinguisme de la société et de l'école luxembourgeoise, l'enseignement des langues fait l'objet d'une grande attention de la part des responsables éducatifs. Au préscolaire, la langue d'enseignement est le luxembourgeois tandis que les élèves de 1ère année primaire sont alphabétisés en allemand, qui n'est donc pas la langue maternelle des autochtones, et dès le 2e année primaire, le cours de français est introduit. Au total, dès la 3e année primaire, 13 périodes sur les 28 (et donc près de la moitié) sont dévolues à l'enseignement des langues (MEN, 2011). L'objectif consiste à former des citoyens dont le pays a besoin, c'est-à-dire capables de communiquer et d'échanger avec les pays voisins. Au secondaire, dans les filières porteuses c'est-à-dire celles qui ouvrent la voie aux études supérieures (le classique c'est-à-dire la filière générale et une filière du technique), certains cours donnés en allemand au primaire sont désormais donnés en français. C'est le cas des mathématiques. Ainsi, les enseignants du secondaire doivent non seulement enseigner les mathématiques mais également gérer la diversité linguistique de leur classe, à deux niveaux : 1) le multilinguisme inhérent aux classes luxembourgeoises et 2) la transition de la langue d'enseignement des mathématiques qui passe de l'allemand au français. Ce parcours linguistique à travers la scolarité est déjà difficile pour les autochtones mais que dire des enfants qui entrent dans le système luxembourgeois avec une, voire deux langues différentes parlées à la maison, comme le portugais ou encore le russe, l'anglais, etc.

2. Difficultés des élèves et langue d'enseignement en mathématiques

D'une manière générale, Martin et Houssemand (2003) ont montré que le multilinguisme tel qu'il est pratiqué au Luxembourg réduit fortement à la fois l'efficacité et l'équité du système éducatif. La maîtrise (formelle) surtout de l'allemand, mais aussi du français, constitue un facteur de sélection très fort alors que certaines compétences langagières des enfants sont négligées. Ainsi, la non-maîtrise formelle de la langue empêche en partie l'accès

à des apprentissages comme les mathématiques, soit par le biais d'une interdiction d'accès à certaines filières scolaires, soit par le biais d'une maîtrise insuffisante de la langue véhiculaire de ces branches. Ces données relativement anciennes sont malheureusement toujours d'actualité comme en témoignent les informations relatives à l'échec scolaire dont nous évoquons quelques éléments ci-dessous.

Du point de vue de la transition de langue d'enseignement des mathématiques au secondaire, les difficultés des élèves dans la maîtrise du français sont attestées par trois indicateurs au moins. Tout d'abord, les taux les plus importants de notes insuffisantes recueillies par les élèves au début du secondaire dans les filières classique et technique concernent les mathématiques, suivies de près du français, loin devant l'anglais et les autres branches (MEN, 2017 ; MEN, 2016). Ensuite, une étude menée par Van Rinsveld, Schiltz, Brunner, Landerl et Ugen (2016) a montré que des élèves du secondaire (du grade 7 au grade 11) voire des adultes réussissent mieux des tâches arithmétiques (effectuer une addition) lorsqu'ils doivent donner la réponse en allemand qu'en français. Même si cet effet s'atténue au fil des années avec une progression dans la maîtrise du français, cet effet reste toujours en faveur des réponses données en allemand. Ces résultats témoignent du rôle de la langue en arithmétique et montrent, selon Van Rinsfeld et al. (2016), que ce qui est appris en mathématiques dans une langue n'est transférable dans une autre langue qu'avec un effort cognitif important. Enfin, ce dernier constat se voit confirmé par le choix spontané des élèves de la langue des questions dans les évaluations externes soumises aux élèves du secondaire, telles que PISA, les épreuves standardisées[1], ou encore le concours du Rallye Mathématique Transalpin[2] (« Maachmath » au Luxembourg). Les élèves, dans leur très grande majorité choisissent les questions et problèmes en allemand pour pouvoir répondre en allemand également, alors qu'à ce niveau scolaire, les mathématiques sont enseignées en français.

III. MATHEMATIQUE ET LANGAGE

> « It is not the mental activity that organizes the expression, but it is the expression that organizes the mental activity » (Voloshinov, in Radford, 2017)

Cette citation nous paraît emblématique de la nature de la relation entre l'expression et l'activité mentale. C'est bien l'expression qui détermine la pensée, et non l'inverse. Ainsi, le rôle des modes d'expression, dont la langue, est déterminant pour la réflexion mentale et donc les apprentissages mathématiques.

De même, depuis la diffusion des travaux de Vygotsky et leur prise en considération en éducation mathématique, la communication et les interactions sociales sont considérées comme consubstantielles à l'apprentissage et à la pensée. Ainsi, si la formation de la connaissance est considérée d'un point de vue social, l'utilisation des signes - autrement dit des outils médiateurs de la communication - devient un élément culturel de la cognition (Radford, 1998). Et la langue, dans cette théorie, est l'outil médiateur par excellence.

En éducation mathématique précisément, cette importance de la relation entre la langue et les apprentissages est reconnue par divers auteurs. Ainsi, Radford et Barwell (2016) soulignent que la langue, la parole, le texte ainsi que la production et l'interprétation de

[1] Ce sont des épreuves soumises chaque année aux élèves à certains moments clés de leur scolarité tant au primaire qu'au secondaire. Il s'agit d'une évaluation externe commanditée par le Gouvernement du Grand-Duché du Luxembourg, afin de fournir aux différents partenaires éducatifs des données fiables et objectives sur les compétences acquises des élèves.

[2] Le Rallye Mathématique Transalpin (RMT) est un concours de résolution de problèmes par classe. Il est proposé dans les pays suivants : la Suisse, l'Italie, la France, la Belgique ainsi que le Grand-Duché du Luxembourg. Ce concours s'adresse aux élèves du primaire et du secondaire depuis le grade 3 jusqu'au grade 10.

symboles font partie intégrante du développement de l'apprentissage, de l'enseignement et de l'évaluation, et ce en particulier pour les mathématiques. Selon Lee (2006), la langue, et plus généralement le 'discours'[3] sont considérés comme cruciaux dans l'apprentissage. L'acte de formuler une idée pour partager l'information ou les arguments pour convaincre les autres constitue une part importante de l'apprentissage. En effet, demander aux élèves de structurer leurs idées implique une activité métacognitive et donc en retour améliore la clarté de la pensée. Des recherches, toujours selon Lee (2006), ont par ailleurs montré qu'inviter les enfants à partager leur pensée mathématique résultait en une amélioration des apprentissages mathématiques. Quand les élèves formulent leurs propres idées en vue de les rendre disponibles pour les autres, ils rendent leurs pensées manifestes et tangibles pour eux-mêmes. Dans cette perspective, on peut ainsi affirmer que communiquer - à travers divers modes d'expression - et conceptualiser vont de pair (Vlassis, Fagnant&Demonty, 2015). Ce principe constitue, à nos yeux, une autre formulation de l'idée de Voloshinov.

D'un point de vue pédagogique, cela signifie que les enfants n'apprendront efficacement que si les enseignants leur permettent de participer au discours de la communauté de classe, en utilisant le langage pour construire et exprimer des idées mathématiques, et en structurant le contexte social de la classe de telle manière que les élèves utilisent le langage oral et écrit dans un processus d'apprentissage des mathématiques (Lee, 2006). Pour décrire cette perspective d'enseignement, Sfard (2006) évoque la métaphore de la participation. L'apprentissage est, dans cette approche, considéré avant tout comme le développement de la façon dont l'individu participe à des activités communes. Cette participation implique la capacité de communiquer dans le langage de cette communauté et d'agir selon ses normes particulières. Cette conception de l'apprentissage rejoint celle proposée par Radford (2013) qui postule que, plutôt que de réduire l'apprentissage à une assimilation de quelque chose de déjà là, il paraît plus opportun de l'envisager comme une activité à laquelle l'individu participe.

Mais cette perspective d'enseignement où l'utilisation de la langue et de différents modes d'expression sont inhérents aux apprentissages mathématiques, ne risque-t-elle pas de poser d'importantes difficultés dans les classes où la plupart des élèves ne maîtrisent pas la langue d'enseignement comme c'est le cas dans les classes au Luxembourg, et en particulier au secondaire? Comment alors gérer à la fois les apprentissages mathématiques et les apprentissages langagiers ? C'est ce que nous développons dans les sections suivantes.

IV. MATHEMATIQUES ET MULTILINGUISME

La problématique qui est ainsi questionnée concerne ce qu'on appelle dans la littérature anglo-saxone, le 'Content and Language Integrated Learning' (CLIL) qui concerne les approches d'enseignement qui ciblent à la fois l'apprentissage de contenu et de langue. Cette problématique est relativement neuve, surtout en éducation mathématique.

1. Vers l'émergence d'un nouveau paradigme basé sur le translanguaging

De nombreuses études menées dans le contexte de l'enseignement des mathématiques en contexte multilingue mettent en avant l'intérêt de développer le code-switching c'est-à-dire le changement de langues au cours d'une même conversation que ce soit au niveau du mot ou de la phrase ou encore au niveau d'un bloc de discours (Baker, 2011). Actuellement, la recherche (Culligan& Wagner, 2015 ; Cenoz, 2017) plaide pour une perspective qui reconnaît les

[3] Selon Lee (2006), le discours renvoie à 'the full range of language use that can be entered into in a classroom'. (p. 1)

ressources que les apprenants apportent à la classe de mathématiques plutôt que de cibler leurs manques ; dans les approches socio-culturelles, ces ressources incluent l'utilisation de la langue parlée à la maison. Ainsi, même si, historiquement, le code-switching a été considéré comme visant à pallier les lacunes des élèves en matière de maîtrise de la langue d'enseignement dans les classes multilingues, celui-ci s'oriente actuellement dans une perspective orientée « ressources » (Culligan& Wagner, 2015).

Parallèlement, la recherche en éducation multilingue met actuellement en avant un nouveau paradigme, le « translanguaging » qui se définit comme un processus visant à donner du sens, ainsi qu'à façonner l'expérience, la compréhension et les connaissances à travers l'utilisation de deux ou plusieurs langues (Baker, 2011). Ce concept a d'abord été largement utilisé comme une stratégie d'enseignement efficace dans les classes multilingues du pays de Galles, mais il est dorénavant utilisé pour référer aux différentes pratiques discursives dans les contextes bilingues et multilingues partout dans le monde (Cenoz, 2017).

Tout en se focalisant sur les ressources des apprenants plutôt que sur leurs manques, le translanguaging et le code-switching diffèrent cependant, selon Garcia et Li Wei (2014, in Cenoz, 2017), de par leur ancrage initial. En effet, tandis que le code-switching considère comme point de départ les grammaires différentes de chaque langue, le translanguaging s'ancre dans les pratiques langagières utilisées dans les communications multilingues. Les frontières entre les langues deviennent plus souples et les ressources spécifiques des locuteurs sont perçues comme un important support. Si on s'en réfère à Garcia (2009, in Cénoz 2017), le translanguaging implique de multiples pratiques discursives dans lesquelles les apprenants s'engagent dans leurs environnements multilingues. A ma connaissance, ce paradigme reste encore peu présent en éducation mathématique où on utilise plus souvent le concept de code-switching. Cependant, on peut peut-être rapprocher la translanguaging du concept de multilittératie que certains auteurs en éducation mathématique (cités par Takeuchi, 2015) évoquent, en raison probablement de la spécificité du contenu mathématique. La multilittératie considère l'idée de littératie comme un ensemble de diverses activités sémiotiques médiatisées par des ressources multimodales afin de donner du sens. Cette théorie met l'accent sur deux aspects de la multiplicité : a) la diversité culturelle et linguistique des environnements dans lesquels les étudiants apportent de multiples langues en classe et b) la multiplicité des canaux de communication et media incluant des langages non verbaux, comme les symboles, les sons, les dessins, les gestes, etc. (multimodalité).

L'intérêt majeur de ce type de paradigme basé sur le translanguaging est qu'il répond à la fois à la problématique des apprentissages des langues avec l'importance de la notion d'activité et de diversité des pratiques discursives qui donne sens aux apprentissages langagiers, mais également aux principes de l'enseignement des mathématiques évoqués dans la section 2 de cet article.

2. Les croyances des enseignants en matière d'enseignement des mathématiques en classe multilingue

Malgré l'intérêt potentiel du translanguaging, cette pratique risque, dans le concret des classes, de se heurter à diverses croyances bien ancrées chez certains enseignants. Au Grand-Duché du Luxembourg, aucune étude n'a encore été menée sur le sujet mais après une expérience de 11 ans en tant qu'enseignante-chercheure dans la formation des futurs instituteurs/trices primaire et préscolaire, j'ai eu l'opportunité de me rendre régulièrement dans les classes pour les visites de stage. Par ailleurs, j'ai mené tout récemment un projet de recherche en algèbre en collaboration avec les professeurs de mathématiques du début du secondaire. De ces nombreuses rencontres, certaines croyances pointées, par ailleurs, dans la littérature de recherche, sont régulièrement ressorties du discours des enseignants : 1) Penser

qu'on apprend les langues « automatiquement » en étant simplement exposé à un enseignement donné dans la langue cible et qu'il n'est pas nécessaire de mettre en place des opportunités d'apprentissage (Kirsch, 2006 ; Takeuchi, 2015) ; 2) Interdire aux élèves d'utiliser leur langue maternelle afin de maximiser l'exposition à la langue cible, (Takeuchi, 2015) ; 3) Sous-estimer les difficultés et les problèmes de langues des apprenants (Kasule & Mapolelo, 2005) ; 4) Considérer les mathématiques comme une matière indépendante de la langue (Takeuchi, 2015) ; 5) Eviter les aspects langagiers de l'enseignement des mathématiques en décontextualisant les problèmes et en évitant des « pertes de temps » dans les interactions verbales. Une pratique fréquente consiste à cibler les apprentissages mathématiques sur les calculs et procédures considérant les textes et contextes comme de peu d'importance (Smit & van Eerde, 2011).

Ces croyances que j'ai pu observer dans le discours de certains enseignants renvoient non seulement à la question des langues et de leur apprentissage, mais également à la conception de l'enseignement des mathématiques. Les enseignants qui présentent des croyances 4 ou 5 ne vont pas être sans conséquence pour l'enseignement des langues mais également et surtout pour l'enseignement des mathématiques, même en milieu monolingue.

V. PISTES D'ACTIONS PRATIQUES DANS LE CONTEXTE CLIL

Dans le contexte des CLIL, le recours à des pratiques pédagogiques spécifiques est crucial si on veut parvenir à atteindre à la fois les objectifs de langue et de contenu. Or, plusieurs enseignants luxembourgeois parmi ceux que j'ai eu l'occasion de rencontrer semblent « nier » le problème du multilinguisme de leur classe. En effet, soit les enseignants affirment que dans leur classe, les enfants maîtrisent tous suffisamment la langue d'enseignement (croyance 3), soit que les enfants apprendront au simple contact de la langue (croyance 4). Dans le cas du secondaire, certains enseignants préoccupés par le faible niveau de français des élèves, préfèrent donner leur cours de mathématiques en luxembourgeois afin que les élèves comprennent mieux la matière. Sauf que les tests et évaluations sont rédigés en français, et les réponses doivent également être formulées en français. Dans ce cas, il est à craindre que les aspects langagiers dans les questions et les réponses des évaluations soient fortement réduits. Cette attitude, partant pourtant d'une bonne intention, est peu appropriée, d'une part, parce que les étudiants ne maîtrisent de toute façon pas tous le luxembourgeois, c'est donc reporter le problème sur certains élèves, et d'autre part, cette réduction des aspects langagiers dans les évaluations entraînera par voie de conséquence souvent une réduction des aspects langagiers dans les apprentissages eux-mêmes (croyance 5). En conséquence, on assiste le plus souvent à un enseignement des mathématiques pauvre en discussions et échanges, pourtant nécessaires au développement de la pensée mathématique comme évoqué au point 2.

Ces quelques constats m'amènent à considérer, avec Smit et van Eerde (2011), que le premier pas vers des pratiques adaptées au contexte CLIL, consiste peut-être à faire prendre conscience aux enseignants des problèmes linguistiques de leurs élèves et de la nécessité de viser dans leur cours de mathématiques, à la fois des apprentissages de contenu et de langue.

Ensuite, le translanguaging peut constituer un cadre général d'actions dans lequel des pratiques précises peuvent être développées dans les contextes CLIL. A ce sujet, Cenoz et Gorter (2017, in Cenoz, 2017) évoquent deux types de translanguaging, le *translanguaging pédagogique* d'une part et le *translanguaging spontané* d'autre part. Le premier est planifié par l'enseignant et peut référer, par exemple, à l'utilisation de langages différents pour l'input (écouter/lire) et l'output (parler/écrire) ou tout autre stratégie planifiée basée sur l'utilisation des ressources des étudiants au départ de l'ensemble de leur répertoire linguistique. Smit (2013) préconise des pratiques d'étayage précises telles que : proposer une liste de mots ou

des plans écrits, utiliser des gestes ou des schémas pour supporter les réflexions verbales, etc. Le translanguaging spontané, quant à lui, renvoie aux pratiques discursives qui peuvent prendre place au sein de la classe dans le flux des discussions. Cette distinction des deux types de translanguaging me paraît intéressante dans la mesure où elle met en évidence le fait qu'il ne suffit pas pour un enseignant de se montrer ouvert aux différentes langues parlées par les élèves de sa classe, de favoriser les échanges ou de tenir compte des ressources des élèves, il s'agit également de planifier a priori des pratiques précises, que ce soient des outils d'étayage comme ceux qui viennent d'être évoqués ou encore des activités permettant le développement d'approches multimodales.

De ce point de vue, au début du secondaire, les activités de généralisation peuvent remplir cet objectif. Sur le plan mathématique, les activités de généralisation sont considérées par de nombreux auteurs comme des opportunités fondamentales pour développer la pensée algébrique. Ces activités impliquent souvent une communication forçant la production de messages par les élèves, qui seront exprimés de manière non-conventionnelle, dans un premier temps, puis de manière de plus en plus conventionnelle au fil des nécessités de l'activité. Un exemple d'activité est l'activité « Antoine fait des mosaïques » qui est issue de celle du « Manufacturier » (Bednarz, 2005). La situation est présentée sur la base de représentations picturales en l'occurrence une mosaïque composée de carrés colorés à l'intérieur avec une bordure de carrés blancs. Le questionnement de cette activité consiste à demander aux élèves de trouver un moyen pour déterminer le nombres de carrés blancs en bordure quel que soit le nombre de carrés colorés. La situation envisage une progression au départ de matériel concret (petits cubes ou carrés autocollants) utilisé pour établir le nombre de carrés blancs en bordure. Les élèves sont ensuite invités à produire un calcul d'abord pour une petite quantité de carrés puis pour une plus grande quantité. Enfin, les élèves doivent trouver un message général dont l'expression était libre dans un premier temps puis mathématique dans un second temps. L'activité complète sera présentée au cours de la communication. Cette activité riche sur le plan mathématique, présente également tout un potentiel en matière du développement de la langue sur la base de diverses ressources multimodales inhérentes à l'activité (matériel concret, dessins, opérations numériques, textes et langage algébrique) mais aussi de son exploitation en classe (gestes pour montrer sur les dessins, explication en mots, par les opérations numériques ou algébriques, etc.).

VI. EN GUISE DE CONCLUSION …

Les défis posés à l'école luxembourgeoise et qui viennent d'être discutés ne se cantonnent évidemment pas au Grand-Duché du Luxembourg. En raison d'une augmentation constante des flux migratoires dans le monde, de plus en plus d'enseignants sont confrontés aux enjeux pédagogiques de fournir un enseignement d'un contenu en même temps que celui de la langue d'enseignement. Il s'agit là bien plus qu'une question d'ouverture aux langues. En effet, cela renvoie, comme nous l'avons discuté précédemment, à la conception même des mathématiques, qui ne peuvent être considérées comme une matière indépendante du langage, mais aussi à celle des pratiques de classe où l'apprentissage des élèves est vu comme leur participation au discours mathématique en utilisant diverses langues ainsi que différents modes d'expression. Cela renvoie enfin à la conception de l'élève qui vient non seulement avec des besoins spécifiques qu'il faut identifier mais également avec ses ressources qu'il s'agit d'accueillir dans les activités de classe. Cela implique un changement considérable dans les pratiques d'enseignement et dans les conceptions qui ne peut qu'être bénéfique pour les élèves, tant dans les classes multilingues que dans les classes monolingues, mais qui nécessitera des moyens importants en terme de développement professionnel.

REFERENCES

Baker, C. (2011). *Foundations of bilingualeducation and bilingualism (5th ed.)*. Clevedon, England: MultilingualMatters.

Bednarz, N. (2005).Parler les mathématiques. *Vie pédagogique,* 136, 20-23.

Cenoz, J. (2017). Translanguaging in SchoolContexts: International Perspectives. Journal of Language, Identity&Education, 16(4), 193-198.

Culligan, K., & Wagner, D. (2015). Mathematics, language, and degrees of certainty: Bilingualstudents' mathematical communication and probability. *Proceedings of the 37th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of MathematicsEducation*(pp. 1022-1029). East Lansing, USA.

Kasule, D., &Mapolelo, D. (2005). Teachers' strategies of teachingprimaryschoolmathematics in a second language: A case of Botswana. *International Journal of EducationalDevelopment, 25*(6), 602-617.

Kirsch, C. (2006). Young childrenlearninglanguages in a multilingualcontext. *International Journal of Multilingualism, 3*(4), 258-279.

Lee, C. (2006).*Language for learningMathematics*. New York: Open UniversityPress.

Martin, R., &Houssemand, C. (2003). Un système éducatif plurilingue peut-il être efficace ? *Cahiers du Service de Pédagogie expérimentale – Université de Liège*, 15-16, 157-164.

Moschkovich, J. (2002). A situated and sociocultural perspective on bilingualmathematicslearners. *Mathematicalthinking and learning, 4*(2-3), 189-212.

MEN (2017). *Statistiques globales et analyse des résultats scolaires : enseignement secondaire 2015-2016.* Grand-Duché du Luxembourg : Ministère de l'Education Nationale, de l'Enfance et de la Jeunesse.

MEN (2016). *Statistiques globales et analyse des résultats scolaires : enseignement secondaire technique 2014-2015.* Grand-Duché du Luxembourg : Ministère de l'Education Nationale, de l'Enfance et de la Jeunesse.

MEN (2011). *Courrier de l'Education Nationale, Numéro Spécial, Plan d'études de l'école fondamentale*. Grand-Duché du Luxembourg : Ministère de l'Education Nationale et de la Formation Professionnelle.

Radford, L. (2017).*Language and MathematicsEducation*. Conférence donnée à l'Université du Luxembourg.

Radford, L. (2013). On semiotics and education. *Education& didactique, 7*(1), 185-204.

Radford, L. (1998). On signs and representations, a cultural account. *ScientiaPaedagogicaExperimentalis, 1*, 277-302.

Radford, L., &Barwell, R. (2016). Language in mathematicseducationresearch. In A. Gutiérrez, G. Leder, & P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematicseducation. The journey continues* (pp. 275-313). Rotterdam: Sense.

Sfard (2006). Participationistdiscourse on mathematicslearning. In J. Maasz& W. Schoeglmann (Eds.), *New mathematicseducation and practice* (pp. 147-152). Rotterdam: SensePublishers.

Smit, J.(2013). *Scaffoldinglanguagemultilingualmathematicsclassrooms.* Utrecht : Freudenthalinstitute for Science and mathematicseducation, UtrechtUniversity, The Netherlands : Scientifc Library.

Smit, J., & van Eerde, H. A. A. (2011). A teacher'slearningprocess in dual design research: Learning to scaffoldlanguage in a multilingualmathematicsclassroom. *ZDM, 43*(6-7), 889-900.

STATEC (2017).*Annuaire statistique*. Luxembourg : Institut national de la statistique et des études économiques.

Takeuchi, M. (2015). The situatedmultiliteraciesapproach to classroom participation: English languagelearners' participation in classroommathematics practices. *Journal of Language, Identity&Education, 14*(3), 159-178.

Van Rinsveld, A., Schiltz, C., Brunner, M., Landerl, K., &Ugen, S. (2016). Solvingarithmeticproblems in first and second language: Does the languagecontextmatter?. *Learning and instruction, 42*, 72-82.

Vlassis, J., Fagnant, A., & Demonty, I. (2015). Symboliser et conceptualiser, une dialectique intrinsèque aux mathématiques et à leur apprentissage. In M., Crahay& M., Dutrévis (Eds.), *Psychologie des apprentissages scolaires (2e édition)* (pp. 221-255). Bruxelles: De Boeck.

Groupe de travail 9 (GT9)
Liens entre pratiques d'enseignement et apprentissages

BILAN DU GROUPE DE TRAVAIL N°9

LIENS ENTRE PRATIQUES D'ENSEIGNEMENT ET APPRENTISAGES

Responsables

ATTA[*] Germain –COUTAT[**] Sylvia – PILET[***] Julia

Correspondante CS

NEBOUT[****] Patricia

Résumé – Dans la lignée des précédents EMF, le GT9 de EMF2018 s'intéresse à l'étude les liens entre pratiques d'enseignement et apprentissage à travers trois principales entrées : le rôle de l'évaluation, l'enseignement ou l'apprentissage de savoirs mathématiques spécifiques et l'effet des spécificités institutionnelles.

Mots-clefs : pratiques d'enseignement, apprentissage, évaluation

Abstract – In line with previous EMFs, GT9 of EMF2018 focuses on studying the links between teaching practices and learning through three main inputs: the role of assessment, teaching or learning of specific mathematical knowledge and the effect of institutional specificities.

Keywords: between teaching practices, learning, assessment

I. INTRODUCTION

Lors des précédents EMF le travail du GT9 s'est intéressé aux pratiques enseignantes et aux apprentissages des élèves et plus particulièrement leur hétérogénéité. Pour EMF2015, le thème du colloque a conduit le groupe à prendre en considération, au regard de la didactique des mathématiques, l'universalité et les différences culturelles dans l'étude des pratiques enseignantes de mathématiques, et, en particulier, des pratiques d'évaluation, des inégalités d'apprentissage, de l'adaptation aux élèves à besoins spécifiques et de l'effet de genre. Pour EMF2018, la question des liens entre pratiques enseignantes et apprentissages mathématiques des élèves reste au centre du GT9. Lors de l'EMF2015 le GT9 s'est ouvert aux contextes particuliers, aux publics spécifiques et à l'évaluation. Cette ouverture a permis entre autre l'émergence de deux points de vue : le point de vue du système enseignement-apprentissage et celui des acteurs de ce système (Sayac, Chesnais, Barrera, & Roditi, 2015).

L'étude des pratiques des enseignants a alimenté diverses recherches en didactique (Chopin, 2008; Margolinas, 1995; Robert & Rogalski, 2002), en particulier l'impact de ces pratiques sur les apprentissages des élèves (Robert, 2008). En effet, les choix didactiques des enseignants tant dans la conception de leurs séquences d'enseignement que dans leurs interactions avec les élèves sont au centre des apprentissages. Cependant les évolutions et changements tant curriculaires que sociaux supposent des adaptations pédagogiques et didactiques des pratiques des enseignants. Les réflexions du GT9 interrogent l'influence des pratiques sur les apprentissages ainsi que leurs adaptabilités selon des spécificités institutionnelles. Bien qu'aucune contribution n'est présentée d'études comparatives dans un contexte international, la lecture des différents textes peut ouvrir une réflexion en ce sens.

[*] École Normale Supérieure (ENS) d'Abidjan – Côte d'Ivoire – Leroiyeb@gmail.com
[**] Université de Genève – Suisse– Sylvia.Coutat@unige.ch
[***] Laboratoire de Didactique André Revuz, Université Paris Est Créteil – France – Julia.Pilet@u-pec.fr
[****] École Normale Supérieure Cote d'Ivoire – Côte d'Ivoire – Nebout_Arkhurst@homail.com

L'évaluation constitue également une entrée d'analyse des liens entre enseignement et apprentissage. De nombreux travaux (Allal, 2008 ; Black et Wiliam, 1998 ; Allal & Mottier Lopez, 2007) avancent que, dans sa fonction formative, l'évaluation soutient la régulation de l'enseignement et de l'apprentissage. Evaluer devient de ce fait un grand défi didactique car l'évaluation doit concilier les intérêts didactiques de l'enseignant (en tant qu'outil d'orientation des pratiques) et ceux dits cognitifs de l'élève (en tant qu'indicateur du niveau de la construction du savoir). L'évaluation pour faire apprendre apparait alors comme un outil de l'enseignant au service des apprentissages des élèves que le chercheur doit interroger. C'est pourquoi le GT9 aborde la thématique de l'évaluation en considérant les liens étroits qu'elle entretient avec les contenus mathématiques et leurs processus d'enseignement et d'apprentissage.

Afin d'exploiter le thème de l'EMF2018, les liens entre pratiques d'enseignement et apprentissage sont étudiés au travers des autres disciplines pour y analyser les éventuelles stabilités ou ruptures.

Les questions suivantes structurent la réflexion sur les liens entre pratiques enseignantes, apprentissages :

Quels sont les effets potentiels ou effectifs des pratiques enseignantes sur les apprentissages des élèves ? Et inversement quels sont les effets de l'activité ou de la variabilité des apprentissages et des élèves sur les pratiques enseignantes et plus généralement le fonctionnement du système ? Ces questions sont mises en perspective des spécificités culturelles, contextuelles, sociales, d'élèves en difficulté.

Comment les pratiques enseignantes utilisent-elles les modalités curriculaires et culturelles pour donner du sens aux apprentissages ?

Comment agir sur les stratégies d'évaluation pour impliquer activement l'élève ? En quoi prendre en compte l'évaluation des élèves dans nos recherches nous permet de mieux comprendre les liens entre pratiques et apprentissages ?

Quels sont les moyens nécessaires (cadre théoriques, méthodologie, travail collaboratif) pour mener des recherches sur les liens entre les pratiques enseignantes et les apprentissages mathématiques des élèves ?

Ce sont les réponses à ces préoccupations qui ont permis d'enrichir les réflexions du GT9 autour des liens entre pratiques enseignantes, apprentissages et évaluations.

II. L'ESSENTIEL DES CONTRIBUTIONS

De nombreux textes concernent l'enseignement des mathématiques à l'école primaire en prenant en compte, dans l'étude des pratiques enseignantes, les compétences généralistes des enseignants qui est une force de l'enseignant et doit être sollicitée davantage. Ainsi le texte de Goudenon présente le rapport des enseignants du primaire aux mathématiques et soulève la nécessité de formation de ces enseignants afin d'améliorer leur rapport aux mathématiques afin d'agir sur leur pratique. La contribution de Djellé et Coulibaly souligne que la prise en compte de considérations psychologiques dans les apprentissages des élèves ne peut être omises et permettraient d'éclairer l'analyse des difficultés rencontrées dans certains apprentissages.

Trois sous-thématiques se détachent avec l'évaluation, les savoirs mathématiques enseignés et les spécificités institutionnelles. Chacune de ces sous-thématiques est abordée par l'étude des pratiques enseignantes et celle des apprentissages. Deux contributions

s'écartent de ces sous-thématiques. La contribution de Coutat analyse une pratique enseignante lors d'une tâche de recherche et interroge les éventuelles apports d'une double analyse utilisant le cadre de la double approche (Robert et Rogalski, 2008) et celui de la structuration des milieux (Margolinas, 1995). L'affiche de Halbert et al. propose un dispositif de Jigsaw teaching (Elliot Aronson) pour impliquer les élèves dans la résolution d'une tâche à travers la mise en œuvre d'évaluation entre pairs et de narration de recherche.

1. L'évaluation

L'étude des liens entre pratiques d'enseignement et apprentissage sous l'angle de l'évaluation est traitée par les textes de Pilet et Horoks, de Kiwan-Zackra et Roditi et de Coppé et Robin. Ces trois recherches concernent l'apprentissage de l'algèbre. La contribution de Coppé et Robin propose un dispositif d'auto-évaluation qui implique les élèves dans l'évaluation des productions de leurs camarades. A l'opposé, Pilet et Horoks s'intéressent aux pratiques enseignantes dans et à leurs évolutions dans le contexte d'un travail collaboratif. Enfin, Kiwan-Zacka et Roditi proposent un outil pour l'analyse d'interactions enseignant-élèves dans une visée d'évaluation-formative. Ces contributions permettent d'identifier dans quelle mesure l'évaluation agit sur les pratiques enseignantes mais aussi sur les apprentissages des élèves.

2. Les savoirs mathématiques

Le savoir à enseigner est au cœur de nos préoccupations didactiques. Certaines études ayant une entrée par les savoirs enseignés identifient des pratiques enseignantes en liens avec des contenus spécifiques. L'interdisciplinarité dans l'apprentissage des mathématiques est traité à travers quelques textes. Par exemple, le texte de Kouadio questionne les interactions possibles entre les mathématiques et les sciences, interactions complètement esquivées chez les enseignants. De même pour le texte de Honvo qui interroge les apports des mathématiques au concept de temps à travers la construction de frise chronologiques. Enfin Atta relève les continuités et ruptures de l'enseignement des calculs entre du primaire au secondaire.

Les savoirs mathématiques sont aussi au centre des apprentissages des élèves. Plusieurs contributions s'intéressent aux erreurs des élèves. Favier propose une étude exploratoire autour des erreurs des élèves dans le contexte de tâches de recherche en s'appuyant sur des narrations de recherche. Rinaldi et Chambris identifient les liens entre les connaissances de la numération et les erreurs dans l'apprentissage de la soustraction. Coulibaly expose les difficultés d'apprentissage autour de l'addition en lien avec les spécificités de la monnaie malienne. Enfin Rouan et El Drissi mettent en évidence les difficultés d'interprétation des histogrammes.

3. Les spécificités institutionnelles

Finalement les spécificités institutionnelles sont un élément central du GT9. En effet le groupe ayant 17 contributions de 13 pays différents les impacts institutionnels sont très présents. Tout d'abord à travers la langue de l'école qui n'est pas toujours la langue de la maison ou qui n'est pas toujours la même tout au long de la scolarité. Ainsi le texte de Ben Nejma analyse les pratiques enseignantes relativement à la mise en équation au début du secondaire tunisien. L'influence du contexte institutionnel sur les pratiques des enseignants est étudiée dans le texte de Pons Duro. Elle vise une étude comparative des trois systèmes éducatifs au niveau du secondaire d'Andorre. Finalement Tchassama souligne que des attentes institutionnelles fortes peuvent provoquer des réussites abusives qui ne reflètent pas

les réelles connaissances des élèves et propose des stratégies qui pourraient permettre d'agir sur l'acquisition de sens autour des concepts mathématiques chez les élèves.

III. PERSPECTIVES

Le groupe de travail de l'EMF2018 a permis de riches interactions qui ne peuvent être toutes relatées dans ce bilan. Cependant des thèmes méritent d'être repris ou approfondis. Un des résultats de la réflexion du groupe pointe l'importance du travail collaboratif dans les apprentissages des élèves qui agit sur les connaissances des élèves mais aussi, et cela est parfois oublié, sur les pratiques des enseignants. Ces aspects collaboratifs agiraient alors comme un levier pour l'évolution des pratiques enseignantes. Ces enseignants doivent être considérés comme des sujets au sein d'une institution. Ainsi il serait certainement intéressant d'approfondir la réflexion dans ce sens, et interroger la place des contraintes institutionnelles dans l'évolution des pratiques ou les marges de manœuvre possibles des enseignants. Cette étude serait d'autant pertinente si elle pouvait enrichir une ambition plus vaste qui prendrait en compte différentes institutions dans des dimensions inter…

- … nationales : en interrogeant l'influence des spécificités du pays sur le système pratique d'enseignement-apprentissage.
- … disciplinaires : en interrogeant l'apport des mathématiques sur le système pratique d'enseignement-apprentissage dans les autres disciplines ou sur l'apport des autres disciplines sur le système pratique d'enseignement-apprentissage en mathématiques.
- … institutionnelles : en interrogeant les éventuelles liaisons entre les cycles/degrés pour comprendre leur propre enseignement.

Des réflexions entre les participants se sont appuyées sur les expériences de chacun transmises à travers les différentes contributions, le développement des réflexions autour des cadres théoriques n'a pas pu être exploitée. Il serait intéressant de renforcer cette direction dans le prochain EMF dans le but d'éventuellement construire un cadre commun d'analyse qui pourrait donner une cohésion dans les études et une meilleure compréhension des spécificités de chaque pays.

REFERENCES

Allal, L. (2008). Evaluation des apprentissages. In *Dictionnaire de l'éducation* (p. 311‑ 314). Presses Universitaires de France - PUF.

Allal, L., & Mottier Lopez, L. (2007). *Régulation des apprentissages en situation scolaire et en formation.* Bruxelles : De Boeck.

Chopin, M.-P. (2008). La visibilité didactique : un milieu pour l'action du professeur. Présentation d'un concept pour l'étude des pratiques d'enseignement. *Éducation et didactique*, 2(2), 63-79.

Margolinas, C. (1995). La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations. In C. Margolinas (Ed.), *Les débats de didactique des mathématiques* (p. 89‑ 102). Grenoble : La pensée sauvage.

Robert, A. (2008). Sur les apprentissages des élèves : une problématique inscrite dans les théories de l'activité et du développement. In F. Vandebrouck (Ed.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (p. 33‑44). Toulouse : Octares.

Robert, A., & Rogalski, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques: Une double approche. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 2(4), 505‑528.

Sayac, N., Chesnais, A., Barrera, R. I., & Roditi, E. (2015). Les pratiques d'enseignement et d'évaluation face aux défis des inégalités des opportunités d'apprentissage. In L. Theis (Ed.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage– Actes du colloque EMF2015* (p. 765‑768).

ANNEXE

LISTE DES TEXTES DU GT 9 PAR ORDRE ALPHABETIQUE DU PREMIER AUTEUR

ATTA, K.Y. G.

L'addition dans les programmes scolaires. Quel continuum pour la construction des savoirs en mathématiques du primaire au collège ?

BEN NEJMA, S.

Analyse des pratiques enseignantes en rapport avec les praxéologies de mise en équations à l'entrée au lycée : une étude de cas dans le contexte tunisien.

COPPÉ, S. & ROUBIN, S.

Intégrer des évaluations entre pairs dans les séances de mathématiques : un exemple en algèbre au collège.

COULIBALY, H.

Diagnostic des difficultés de l'enseignement-apprentissage de l'addition. Exemple : la monnaie « DRM » au premier cycle de l'enseignement fondamental au Mali.

COUTAT, S.

Théorie de la double approche et structuration du milieu apports et complémentarités.

Djelle, O P.-A. & Coulibaly, H. – Déterminant de l'anxiété liés aux mathématiques chez des sujets de 10 à 18 ans.

FAVIER, S.

Prise en compte des erreurs par les élèves : le cas des narrations de recherche.

GOUDENON, M.

Rapports aux mathématiques des enseignants du primaire et leur enseignement.

HONVO, C.

Des objets mathématiques pour construire une frise chronologique en classe d'histoire.

KIWAN-ZACKRA, M. & RODITI, E.

Régulations didactiques et pratiques enseignantes.

KOUADIO K. D.

Quel apport des mathématiques dans l'enseignement-apprentissage de la germination de la graine en CE1 ?

PILET, J. & HOROKS, J.

Effets potentiels d'une évaluation des pratiques enseignantes d'évaluations sur les apprentissages algébriques des élèves au collège.

PONS-DURO, R. & CHAACHOUA, H.

Facteurs de décisions didactiques dans l'enseignement des mathématiques au secondaire en Andorre.

RINALDI, A.-M. & CHAMBRIS, C.

De l'analyse d'un dispositif d'enseignement du calcul soustractif en CE2 à l'analyse des connaissances requises en numération.

ROUAN, O. & EL DRISSI., A.

Difficultés d'extraction de la moyenne arithmétique à partir d'un graphique statistique : cas de l'histogramme.

TCHASSAMA, A. M.

L'enseignement de langage mathématique abstrait et la réussite scolaire abusive chez les apprenants : cas des élèves de la troisième des collèges de la commune d'Atakpamé.

AFFICHES

HALBERT, R., MANENS, M.-C., BROUTTELANDE, C., FORGEOUX, E., LAGRANGE, J.-B., LE BIHAN, C., LE FEUVRE, B., LEMETAYER, A., MAULAUSSENA, C & MEYRIER, X.

Mise en place de travaux collaboratifs selon la démarche du « Jigsaw teaching ».

L'ADDITION DANS LES PROGAMMES SCOLAIRES IVOIRIENS. QUEL CONTINUUM POUR LA CONSTRUCTION DES SAVOIRS EN MATHÉMATIQUES DU PRIMAIRE AU COLLÈGE

ATTA* Kouadio Yeboua Germain

Résumé - Notre étude explicite la place du double statut objet- outil de l'addition et des autres opérations dans la construction des savoirs en mathématiques. Les résultats montrent une continuité dans la progression des objets et l'utilisation des outils à l'intérieur des cycles primaire et secondaire et revèlent une rupture curriculaire et didactique entre ces deux cycles.

Mots–clés: Addition, objet- outil, programmes, opérations, continuum.

Abstract - Our study explores the place of dual object-tool status of addition and other operations in the construction of knowledge in mathematics. The results show a continuity in the progression of objects and the use of tools within the primary and secondary cycles and reveal a curricular break and didactic between these two cycles.

Keywords: Addition, object-tool, programs, operations, continuum**.**

I. CONTEXTE DE L'ETUDE

L'enseignement – apprentissage des mathématiques au cycle primaire prépare les apprenants à disposer d'outils pour aborder efficacement les apprentissages au collège. Les programmes en mathématiques sont diversement appréhendés et conçus dans une logique spécifique. L'addition qui est la première opération abordée avant les trois autres (soustraction, multiplication et division), constitue un objet et un outil important en mathématiques. Les programmes scolaires ivoiriens sont conçus par la direction de la pédagogie et de la formation continue (DPFC) à travers des commissions de travail définies par cycle (préscolaire, primaire, secondaire). La validation des travaux se fait par cycle. Les programmes de mathématiques obéissent à cette logique. L'addition comme contenu est présente à tous les niveaux du primaire au collège avec des statuts différents dans les autres opérations. L'intervention de l'addition dans ces contenus disciplinaires précités est d'un intérêt didactique à clarifier en termes de continuum. Quelques questions sur l'importance de l'addition sont à poser. Quel continuum existe-t-il dans l'étude de l'addition dans les programmes du primaire au collège? Quelles sont les visées didactiques de l'addition dans l'étude des autres opérations et des autres contenus mathématiques? L'objectif de cette étude est d'expliciter la progression de l'étude de l'addition à travers l'analyse du continuum de cet objet du primaire au collège.

La présente étude se veut un cadre d'analyse du statut objet –outil de l'addition pour expliciter l'impact didactique sur la construction des autres opérations et des autres objets en mathématiques.

II. PRÉALABLE CONCEPTUEL

1. Addition.

Soient a et b, deux entiers, cardinaux respectifs de deux ensembles disjoints A et B. on appelle addition, toute opération qui consiste à trouver l'ensemble C de cardinal c, formé à partir de la réunion des ensembles A et B tel que c = a + b. Le cardinal c est appelé la « somme » de a et b. Les propriétés de l'addition sont la commutativité (a+ b = b+ a),

* École Normale Supérieure (ENS) d'Abidjan – Côte d'Ivoire – leroiyeb@gmail.com

l'associativité (a+ b+ c = (a+ b) + c= a+(b +c)) et son élément neutre est 0 (a+0 = 0+a). Son sens découle de la réunion de plusieurs ensembles disjoints (aspect ensembliste) ou de fonctions (aspect fonctionnel). L'apprentissage de l'addition se fait en quatre (4) étapes, à savoir, l'étude du sens, l'étude des propriétés, l'étude de la technique opératoire et celle de son extension aux autres types de nombres (décimaux, fractions, sexagésimaux).

2. Dialectique outil- objet

Selon Douady (1992), les différents concepts évoluent dans un même cadre ou dans des cadres distincts. Les changements de cadres conduisent à des formulations nouvelles de questions anciennes qui créent des outils qui répondent aux besoins du moment. La recherche des formulations facilite la reprise, la modification, la transformation des nouveaux éléments dans d'autres contextes. Cette opération relève de la transposition didactique dont parle Chevallard (1985). Pour lui, la transposition didactique est un travail d'adaptation, de transformation et de création accompli sur des éléments d'un champ conceptuel en vue d'en favoriser l'assimilation par des systèmes cognitifs d'apprenants. Cette transformation permet d'établir des programmes scolaires qui constituent le curriculum formel. L'action de l'enseignant relève largement de sa marge de compréhension, d'interprétation, voire de création. Mais, les périodes d'après réforme en matière curriculaire ne couvrent pas toujours les aspirations et les perceptions des enseignants comme le souligne Bronner (1997) dans la description du phénomène curriculaire de « *vide didactique institutionnel* ». Douady (1992), avance que les nouvelles connaissances créées ont un statut d'objet. Le concept « outil » permet dans son usage de résoudre un problème à un moment donné. Un même outil peut être adapté à plusieurs problèmes et plusieurs outils peuvent être adaptés à un même problème.

L'objet est le savoir reconnu socialement, indépendamment de ses usages. Le statut objet permet la capitalisation du savoir. Il permet le réinvestissement dans de nouveaux contextes éventuellement éloignés du contexte d'origine. Le schéma classique de la production scientifique est « outil- objet- outil ».

III. HYPOTHESE DE RECHERCHE

Le continuum des objets -outils sur l'addition établit un pont discontinu du primaire au collège dans la construction des savoirs en mathématiques.

IV. MÉTHODOLOGIE

1. Corpus

Notre corpus est constitué des programmes éducatifs et guides d'exécution mathématiques (2016), des manuels scolaires de mathématiques des collections « Ecole et Développement de 1998 à 2002 et « Ecole et Nation de 2004 à 2008 » du primaire et les manuels de mathématiques de la 6^{e} en 3^{e}.

2. Outils d'analyse

L'analyse des dispositifs curriculaires s'est faite avec deux types de grilles en fonction des cycles. La grille d'analyse des programmes du primaire répertorie par niveau les intitulés faisant référence à l'addition et les visées didactiques de chaque activité.

La grille d'analyse des programmes du collège répertorie les objets étudiés par niveau en rapport avec les opérations et les acquis mobilisés en lien avec ces objets.

3. Méthodes d'analyse

Les méthodes d'analyse sont qualitatives et quantitatives.

V. RESULTATS

1. Présentation des résultats de l'analyse des programmes du primaire

Niveau de cours	Intitulés au programme	Visées didactiques
CP1	Codage d'une collection à l'aide d'une écriture additive	Etude du sens de l'addition **(aspect ensembliste-découverte)**
	Décodage d'une écriture additive	
	Réduction d'une somme en un nombre	
	Calcul d'une somme	
	Construction de la table d'addition	
	Réduction d'une somme	Etude de la propriété d'associativité **(arbre de calcul)**

Tableau 1 - *Visées didactiques des intitulés du CP1*

Au CP1, l'addition n'est abordée que dans sa dimension objet.

Niveau de cours	Intitulés au programme	Visées didactiques
CP2	Addition	Etude du sens de l'addition liée à l'aspect ensembliste **(découverte-renforcement)**
	La table d'addition	
	Technique de l'addition (sans retenue)	Etude de la technique opératoire **(découverte)**
	La fonction « *ajouter n* »	Etude du sens de l'addition lié à son aspect fonctionnel **(découverte)**
	Ecriture d'une somme de termes égaux sous forme de produit	Etude du **sens itératif de la multiplication**
	Addition à trou	Etude du **sens de manque à gagner de la soustraction**

Tableau 2 - *Visées didactiques des intitulés du CP2*

Au CP2, l'addition apparait dans son double statut. Elle est utilisée comme outil pour construire le sens de la multiplication et la soustraction. L'étude du sens se renforce et s'élargit.

Niveau de cours	Intitulés au programme	Visées didactiques
CE1	Technique de l'addition: (Sans retenue et avec retenue)	Etude de la technique opératoire **(Découverte- renforcement)**
	Fonction *«+n »*	Etude du sens de l'addition liée à son aspect fonctionnel **(renforcement)**
	Multiplication d'un nombre par 10 et 100	Utilisation de la propriété d'associativité
	Partages en parts égales (additions successives)	Etude du **sens de la division**

Tableau 3 - *Visées didactiques des intitulés du CE1*

Au CE1, l'addition apparait dans son double statut. Elle est utilisée comme outil pour construire le sens de la multiplication et de la division. L'étude du sens se renforce et s'élargit.

Niveau de cours	Intitulés au programme	Visées didactiques
CE2	Application de la technique de l'addition (sans et avec retenue	Etude de la technique **(application)**
	Addition des durées	Extension de la technique aux nombres sexagésimaux (nombres complexes)
	Calcul des périmètres	Outil d'introduction de la formule du calcul des périmètres du carré et du rectangle

Tableau 4 - *Visées didactiques des intitulés du CE2*

Au CE2, l'addition apparait dans son double statut. Son sens s'étend aux nombres sexagésimaux. Elle sert d'outil de calcul de grandeur (longueur) sur des objets géométriques.

Niveau de cours	Intitulés au programme	Visées didactiques
CM1	Addition des nombres entiers (avec retenue)	Application de la technique opératoire de l'addition
	Addition des fractions de même dénominateur	Extension du sens sur la technique des entiers aux fractions
	Addition des décimaux (sans ou avec retenue)	Extension de la technique opératoire sur les entiers aux décimaux (**découverte partiel**)
	Fonction « +n »	Introduction de la proportionnalité

Tableau 5 - *Visées didactiques des intitulés du CM1*

Au CM1, l'addition apparait dans son double statut. Son sens s'étend à d'autres types de nombres (fractions, décimaux).

Niveau de cours	Intitulés au programme	Visées didactiques
CM2	Addition des fractions de même dénominateur	Extension de la technique sur les entiers aux rationnels **(renforcement)**
	Addition des décimaux	Extension de la technique sur les entiers aux décimaux **(renforcement)**
	Preuve par 9 pour vérifier une addition	Validation d'un résultat d'une addition
	Calcul de « *n de plus que* » ou « n de moins »	Partages en parts inégales

Tableau 6 - *Visées didactiques des intitulés du CM2*

Au CM2, l'addition apparait dans son double statut. Son sens s'étend à d'autres types de nombres (fractions, décimaux). Elle sert d'outil de calcul de validation d'un résultat (preuve) d'une addition

L'étude du sens de l'addition débute au CP1 et prend fin au CE1. La technique opératoire débute au CP2 et prend fin au CM1. L'extension de la technique de l'addition débute au CE2 et prend fin au CM2. Seule la propriété d'associativité est étudiée au CE.

2. Présentation des résultats de l'analyse des programmes du collège

	Objets étudiés	Références aux acquis antérieurs
6e	Périmètre du cercle Aire du disque	**Sans référence** à la multiplication des entiers et des décimaux
	Périmètre du triangle (C1 + C2 + C3 = P) Aire du triangle (A= h. b/2)	**Pas de prérequis** en lien avec l'addition et la multiplication des décimaux et entiers
	Périmètre du parallélogramme P = 2 (a + b) Aire du parallélogramme A= a. h	**Pas de prérequis** en lien avec l'addition, la multiplication et sa propriété de distributivité.
	Pavé droit V= aire de base x h Cylindre V= 2.π.r.h	**Pas de prérequis** en lien avec la multiplication, ni avec les acquis du primaire, ni le calcul de l'aire d'un rectangle
	Multiples, diviseurs et caractères de divisibilité	**Pas de prérequis** sur la technique opératoire de la division **Prérequis en lien** avec le sens de la division
	Addition de fractions de dénominateurs différents	**Prérequis en lien avec le vocabulaire** sur les fractions et addition des fractions de même dénominateur.

Tableau 7 - *Références aux acquis en 6e*

En 6e, les objets sur le calcul des périmètres convoquent l'addition, la multiplication et la division comme outils. Il n'existe pas de prérequis proposés pour aborder l'étude de la grande majorité des objets. Les savoirs en mathématiques n'abordent donc pas les nouveaux contenus en référence aux acquis du primaire.

5e	Objets étudiés	Références aux acquis antérieurs
	Le parallélogramme, Le carré, le rectangle, le losange	**Références explicites** aux acquis de 6e pour chaque cas
	Prismes droits et pyramides	**Pas de références explicites** aux acquis de 6e Changement de vocabulaire sur le nom de l'objet
	Division dans N, nombres premiers a = b. q + r *(r < ou = q)*	**Référence explicite** aux acquis du primaire sur la technique opératoire et le vocabulaire des termes **Pas de références** explicites sur les acquis de 6e relatifs aux multiples et diviseurs
	Fractions	**Référence explicite** aux acquis sur l'addition au primaire et en 6e **Référence explicite** aux acquis de 6e
	Les nombres relatifs	**Référence explicite** aux acquis de 6e
	Proportionnalité	**Pas de référence explicite** sur les acquis de 6e et du primaire

Tableau 8 - *Références aux acquis en 5e*

En 5e, les objets au programme en lien avec les opérations, font référence explicitement aux acquis de 6e pour être étudiés à l'exception de la proportionnalité.

	Objets étudiés	Références aux acquis antérieurs
4e	Propriétés métriques du triangle	**Pas de référence** explicite aux acquis de 6e et 5e
	Cylindre et sphère	**Références explicites** aux acquis du primaire en 5e
	Nombres relatifs	**Références explicites** aux acquis de 6e et 5e
	PPCM, PGCD et simplification de fractions	**Références explicites** aux acquis de 5e
	Proportionnalité	**Références explicites** aux acquis de 5e
	Nombres rationnels	**Références explicites** aux acquis de 5e
	Equations et inéquations	**Références explicites** aux acquis de 6e et 5e

Tableau 9 - *Références aux acquis en 4e*

En 4e, les objets au programme en lien avec les opérations, font référence explicitement aux acquis de 5e pour être étudiés à l'exception des propriétés métriques du triangle.

	Objets étudiés	Références aux acquis antérieurs
3e	Triangle, rectangle et trigonométrie	**Références explicites** aux acquis de 5e et 4e
	Equations de droites	**Pas de références** explicites aux acquis de 4e
	Pyramides et cônes	**Références explicites** aux acquis de 5e et 4e
	Calcul littéral et racines carrées	**Référence explicite** aux acquis de 6e, 5e et 4e
	Equations et inéquations dans R	**Référence explicite** aux acquis de 5e et 4e
	Equations et inéquations dans R*R	**Références explicites** aux acquis de 5e et 4e

Tableau 10 - *Références aux acquis en 3e*

En 3e, les objets au programme en lien avec les opérations, font référence explicitement aux acquis de la 6e, la 5e et la 4e pour être étudiés à l'exception des équations de droite. En 6e, sur dix (10) objets étudiés en rapport avec l'addition, neuf (9) sont sans références avec les acquis du primaire, soit 90% d'objets sans liens avec les nouveaux apprentissages. De la 5e en 3e, sur 25 objets en rapport avec l'addition, 18 utilisent les acquis des classes antérieures pour être abordés, soit 72% des objets étudiés sur l'addition.

3. Interprétation et discussion

L'addition est abordée au primaire sous deux registres didactiques. Elle est abordée comme un objet dans l'étude du sens, de la technique opératoire et de son extension aux durées, aux fractions et aux décimaux. Le statut outil est perceptible dans la construction du sens de la soustraction, la multiplication et la division. En dehors de ces opérations, l'addition participe aussi à la construction d'autres objets mathématiques tels que la validation du résultat d'une addition et le calcul du périmètre du rectangle et du carré. Au niveau du primaire, il y a une continuité dans l'enseignement/apprentissage des objets et l'usage des outils mathématiques d'un niveau à un autre.

De la 6e en 3e, la plupart des contenus abordés par niveau, utilisent les acquis sur les opérations des niveaux antérieurs comme outils pour être installés. Il existe un continuum sur

ces objets de la 6e en 3e. Par contre, en 6e, il n'existe pas de continuum entre les objets mathématiques appris au primaire et ceux à apprendre en 6e à l'exception de deux objets que sont la division et les fractions.

La logique de Douady (1992) selon laquelle les changements de cadres conduisent à des formulations nouvelles de questions anciennes en des outils qui répondent aux besoins du moment prend tout son sens à l'intérieur des cycles primaire et secondaire. Cette absence de continuum qui devrait établir un pont didactique entre les deux cycles pose la question de l'efficacité des choix curriculaires mis à la disposition des enseignants en mathématiques. Ces outils sur les opérations doivent être éprouvés efficacement en mathématiques d'un niveau à un autre et d'un cycle à un autre sans rupture. Le calcul numérique, littéral ou algébrique, les opérations sur les grandeurs mesurables (longueur, aire, volume, masse), la proportionnalité, l'arithmétique, les équations et inéquations sont les outils basiques à utiliser dans d'autres telles que les sciences physiques et en chimiques, deux disciplines connexes aux mathématiques. Leur maitrise suffisante pourrait donc être une garantie dans les apprentissages en sciences physiques et en chimie.

Les proportions des gaz (oxygène et azote) dans un volume d'air**, l**es équations chimiques littérales des combustions, l'équation chimique littérale de la combustion du butane en 6e, le calcul des forces et de l'énergie cinétique (Ec = ½ mv2), de la puissance (p = u.i), de la résistance équivalente dans un montage en série (R = r1+r2) ou en dérivation (1/R = 1/r1+1/r2) ou d'crire l''équation bilan d'une réaction chimique en 3^{e} convoquent toutes les acquis sur l'addition et les autres opérations.

VI. CONCLUSION

L'étude met en lumière le statut objet de l'addition autour de l'étude du sens, des propriétés, de la technique opératoire et de son extension aux autres types de nombres. Ces objets interviennent comme outils dans l'étude des autres opérations. Ces dernières à leur tour, servent d'outils dans d'autres objets en mathématiques et dans d'autres disciplines voisines telles que la physique et la chimie. Les objets étudiés et les outils utilisés en mathématiques sont en continuité à travers les cycles primaire et secondaire, mais sans pont cuuriculaire et didactique entre ces deux cycles.

REFERENCES

Bronner, A. (1997). *Etude didactique des nombres réels, idécimalité et racine carrée.* Thèse de doctorat, Uiniversité Joseph Fourier de Grenoble.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique, (1ère édition*), Grenoble : Pensée sauvage.

Douady, R. (1992). Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement, *Repères- IREM* 6, 132- 158.

Ministere de l'education nationale (Direction de la Pedagogie et de la Formation Continue). (1998). *Mathématique CP1 (Collection Ecole et Développement)*. Abidjan: CEDA.

Ministere de l'education nationale (Direction de la Pedagogie et de la Formation Continue). (1998). *Mathématique CP2 (Collection Ecole et Développement)*. Abidjan: CEDA.

Ministere de l'education nationale (Direction de la Pedagogie et de la Formation Continue). (2002). *Mathématique CE1 (Collection Ecole et Développement)*. Abidjan: NEI.

Ministere de l'education nationale (Direction de la Pedagogie et de la Formation Continue). (2002). *Mathématique CE2 (Collection Ecole et Développement)*. Abidjan: NEI.

Ministère de l'éducation nationale et de l'enseignement technique (Direction de la Pedagogie et de la Formation Continue). (2016). *Programmes éducatifs et guides d'exécution mathématiques- CM1*.

Ministère de l'éducation nationale et de l'enseignement technique (Direction de la Pedagogie et de la Formation Continue). (2016). *Programmes éducatifs et guides d'exécution mathématiques- CM2*.

Ministère de l'éducation nationale et de l'enseignement technique (Direction de la Pedagogie et de la Formation Continue). (2016). *Programmes éducatifs et guides d'exécution mathématiques- 6e*.

Ministère de l'éducation nationale et de l'enseignement technique (Direction de la Pedagogie et de la Formation Continue). (2016). *Programmes éducatifs et guides d'exécution: mathématique - 5e*.

Ministère de l'éducation nationale et de l'enseignement technique (Direction de la Pedagogie et de la Formation Continue). (2016) *Programmes éducatifs et guides d'exécution: mathématiques, 4e*.

Ministère de l'éducation nationale et de l'enseignement technique (Direction de la Pedagogie et de la Formation Continue). (2016) *Programmes éducatifs et guides d'exécution: mathématiques, 4e*.

Ministère de l'éducation nationale et de l'enseignement technique (Direction de la Pedagogie et de la Formation Continue). (2016) *Programmes éducatifs et guides d'exécution: mathématiques, 3e*.

ANNEXES

ANNEXE 1: *GRILLE D'ANALYSE DES PROGRAMMES DU PRIMAIRE*

Niveau de cours	**Intitulés au programme**	**Visées didactiques**

ANNEXE 2: *GRILLE D'ANALYSE DES PROGRAMMES DU COLLEGE*

Niveau de cours	**Objets étudiés**	**Références aux acquis antérieurs**

ANALYSE DES PRATIQUES ENSEIGNANTES EN RAPPORT AVEC LES PRAXEOLOGIES DE MISE EN EQUATIONS A L'ENTREE AU LYCEE : UNE ETUDE DE CAS DANS LE CONTEXTE TUNISIEN

BEN NEJMA* Sonia

Résumé -Considérant la visée des mathématiques actuelles vers un enseignement des pratiques de modélisation, nous nous intéressons ici aux conditions et aux contraintes de leur diffusion au début de l'enseignement secondaire tunisien. Nous avons opté pour l'analyse des pratiques enseignantes via un questionnaire écrit semi-ouvert. Les résultats semblent indiquer des contraintes liées à la mise en œuvre des praxéologies de mise en équations dont le changement de langue spécifique au contexte tunisien**.**

Mots-clefs : algèbre, modélisation, praxéologie, langage, pratiques

Abstract – Considering the aim of current mathematics towards a teaching of modeling practices, we are interested here in the conditions and constraints of their diffusion at the beginning of Tunisian secondary education. .We opted for the analysis of teaching practices via a semi-open written questionnaire. The results seem to indicate constraints related to the implementation of equation praxeologies including the change of language specific to the Tunisian context.

Keywords: algebra, modelisation, praxeologies, language, practices

Dans cet article, nous nous intéressons aux conditions et aux contraintes liées à la mise en œuvre des praxéologies de mise en équations au début de l'enseignement secondaire tunisien. Pour ce faire, nous avons pris en considération, la spécificité des programmes tunisiens et notamment le changement de la langue d'enseignement des mathématiques dans la transition collège/lycée. Nous avons opté pour une analyse des pratiques déclaratives d'enseignants impliqués dans cette transition à travers un questionnaire. L'ensemble de la réflexion conduite se place dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique et celui de la double approche ergonomique et didactique, dont nous rappelons les fondements dans la partie introductive de ce texte.

I. INTRODUCTION

Les rapports institutionnels aux objets algébriques semblent évoluer dans un contexte qui offre des possibilités de disposer d'applications internes et externes aux mathématiques à travers la résolution de problèmes et de situations problèmes. Ces situations mettent en jeu une variété de contextes et une diversification des domaines d'expériences selon une approche à la fois constructiviste et interdisciplinaire des apprentissages. De nombreuses activités proposées dans le manuel officiel tunisien mettent en avant une étude simultanée des organisations mathématiques autour de la résolution (qu'elle soit algébrique ou graphique) et de la mise en équation. Ce choix des activités qui « prolifèrent » semblent en grande partie conditionné par les rapports existants entre les mathématiques et d'autres domaines : sciences physique, sciences économiques et sociales.

Cette question est abordée à travers l'analyse pratiques enseignantes en rapport avec la mise en équation dans des classes ordinaires. Précisons quelques éléments du contexte tunisien, la première année de lycée est la première année où l'enseignement des mathématiques se fait en français. Dans une étude antérieure (Ben Nejma 2004), nous avons étudié l'impact de ce changement de langue sur les rapports personnels des élèves à la mise en équations. Cette étude a révélé des stratégies de résolution de nature arithmétique qui

* Faculté des sciences de Bizerte-université Tunis-Carthage.

continuent à survivre en première année du secondaire de façon accentuée et mènent un nombre non négligeable d'élèves à des succès occasionnels mais les raisons qui expliquent leur survivance semblent moins liées à la structure des problèmes, qu'à des effets de changement de langue. Nous avons mis en avant le fait que souvent ces élèves se réfugient dans ce type de raisonnement, suite à des difficultés dans la compréhension ou dans l'interprétation des énoncés. Des erreurs d'ordre linguistique (lexicales ou syntaxiques) sont d'ailleurs, apparues à travers les réponses des élèves soit au niveau de l'interprétation des informations et des liens évoqués par les situations proposées soit au niveau de l'écriture mathématique (rédaction).

Les analyses ainsi menées ont permis de conclure que le changement de langue, peu pris en compte dans l'organisation mathématique enseignée, contribuait jusqu'à un certain point à l'échec de la résolution algébrique de problèmes classiques du premier degré. D'autre part, l'unicité du manuel officiel tunisien et l'absence de tâches spécifiques à ce changement nous a semblé jouer un rôle important du point de vue des marges de manœuvre du professeur dans la gestion des tâches de modélisation.

1. Cadre théorique

Nous situons notre étude dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (TAD pour la suite). Le modèle d'organisation praxéologique mathématique (Chevallard 1997, Bosch & Chevallard 1999) constitue une modélisation des pratiques des sujets en lien avec les savoirs mathématiques à enseigner et enseignés au sein d'une institution didactique, dans une perspective liée à la transposition didactique. La TAD considère que les mathématiques, comme n'importe quelle activité humaine, se produisent, se diffusent, se pratiquent, s'enseignent ou s'apprennent par des personnes au sein d'institutions sociales dont elles sont les sujets. Ainsi, par exemple, professeur et élèves « font » des mathématiques dans l'institution que forme une classe lycée aujourd'hui en Tunisie. Mais s'ils sont sujets d'une même institution, ils n'y occupent pas la même position, notamment par rapport aux savoirs scolaires. C'est que toute institution définit un rapport *institutionnel* aux objets, fait de la manière dont les sujets doivent avoir avec ces objets selon leur position.

Le rapport *personnel* aux objets d'un individu émerge alors de la pluralité des rapports institutionnels auxquels il a été assujetti. Pour rendre compte de ce que font les personnes au sein des institutions, la TAD postule que toute activité humaine peut se modéliser en termes de praxéologie [$T/\tau/\theta/\Theta$]. La composante *praxis* [T/τ] décrit les techniques τ permettant d'accomplir certains types de tâches T. Alors que dans la composante *logos* [θ/Θ] les technologies θ – qui sont les discours sur la technique – visent à décrire, expliquer, légitimer, produire les techniques mises en oeuvre ; ces technologies s'inscrivant elles-mêmes dans des théories Θ qui les légitiment. Notre objet d'étude porte sur les conditions et contraintes d'une intégration des pratiques de modélisation mathématique en classe pour résoudre des situations issues du réel dans une problématique de gestion des savoirs et des difficultés langagières des élèves. D'autre part, nous abordons l'étude des rapports personnels des enseignants à ce type de tâche en faisant appel à la double approche ergonomique et didactique qui accorde une place centrale aux activités des sujets élèves ou professeurs, considères comme des sujets psychologiques et sociaux. C'est l'activité du professeur et qui fera l'objet de notre étude. Dans ce cadre, nous faisons intervenir les composantes : médiative, cognitive, institutionnelle, sociale et personnelle des pratiques (Robert & Rogalski 2002, Robert 2008a). Elles imprègnent aussi les différents niveaux d'organisation des pratiques (Masselot & Robert 2007), global (avec les projets et conceptions générales des enseignants, local avec l'attention

mathématique aux élèves pendant les déroulements, micro avec ce à quoi s'attachent les gestes automatisés). Les *composantes médiative et cognitive* sont renseignées par et renseignent sur l'organisation et les contenus mathématiques des séances prévues par le professeur ainsi que sur ses actions pendant les déroulements de celles-ci.

Les *composantes personnelle, sociale et institutionnelle* jouent un rôle central pour comprendre les pratiques enseignantes. Ces composantes permettent d'appréhender comment le professeur investit une partie des contraintes qui pèsent sur ses pratiques soit du point de vue du métier qu'il exerce (composantes sociale et institutionnelle), soit du point de vue de singularités individuelles (composante personnelle). Ces autres contraintes aussi ont leur part mathématique induite dans les activités du professeur. La composante institutionnelle renvoie en partie, à la façon dont le professeur s'approprie, interroge les contenus du programme officiel ou du manuel scolaire. La composante sociale dans ce contexte spécifique permet d'entrevoir des spécificités langagières liées à la culture et au social

Pour mener finement cette analyse selon cette approche il nous a semblé intéressant d'analyser le discours de l'enseignant qui a un rôle tout à fait particulier à jouer dans l'association des mots, des actions mathématiques et des idées, le langage et son utilisation dans les discours ont un rôle spécifique à jouer dans la construction des connaissances, mais aussi dans le transfert d'un contexte ou un domaine d'expérience à l'autre. Dans quelle mesure le discours des enseignants permet aux élèves de s'engager dans la tâche de modélisation et leur permet de construire des compétences à la fois algébriques et "méta-algébriques" (tâches de formulation, reformulation, synthèse, rédaction ...) de quelle manière la maîtrise de certaines compétences langagières intervient-elle dans la construction des connaissances mathématiques ? Les professeurs de mathématiques prennent-ils en charge l'enseignement de ces compétences langagières ? Y-a-t-il des contraintes spécifiques à la langue d'enseignement ? et quelles conditions pour atteindre l'enrôlement des élèves dans la tâche proposée ?

2. Le rôle du langage dans le travail algébrique

Les travaux de travaux de Sfard (2007-2016) nous ont paru pouvoir éclairer ces composantes et affiner notre analyse «when the rules of discourse change, but nobody tells you: making sense of mathematics learning from a commognitive stand point» L'habillage théorique qu'elle met en place part de l'affirmation que la pensée est une forme de communication (y compris avec soi d'ailleurs) et qu'à ce titre, apprendre les math est équivalent à modifier et étendre son discours mathématique en en ayant une certaine conscience. *Human thinking can be regarded as the individualized form of the activity of communication (with oneself*). Le discours mathématique (et donc le penser mathématique) est particulier. *Les mots* sont utilisés autrement. Il y a des *médiateurs visuels* pour identifier ce dont on parle (dont les symboles). *Le récit* peut être refusé ou accepté. *Deux niveaux : celui des objets, et un méta-niveau*, qui correspond aux histoires sur le discours et sur le comment faire. *Les routin*es peuvent englober les actions et *les règles sur les objets, ou les méta-règles* plus cachées, dont certaines habitudes plus que répondant à une nécessité (nécessité de prouver ou de définir) – restent relatives à un contexte. Les routines (comment et quand user du discours) sont y compris le produit de façons de faire culturelles, sociales, elles correspondent à des habitudes, un agir hérité de l'histoire, qui peut évoluer mais auquel il faut adapter les élèves.

Nous avons également fait appel à de nombreux travaux en didactique de l'algèbre, nous faisons ainsi référence à certaines recherches (Bednarz, Kieran, Lee, 1996) sur les différentes approches de l'enseignement de l'algèbre, l'algèbre dans ses dimensions outil-objet, (Douady 1986, Grugeon, 1997, 2004, 2008, et la dimension sémiotique du travail algébrique et la représentation que les élèves se font du problème en phase de lecture ou de formulation de l'énoncé. La lecture d'un énoncé de problème en langage naturel est une étape fondamentale pour une compréhension de la situation. La forme du texte peut influer sur la complexité de cette tâche : une complexité trop importante du texte, certains mots du vocabulaire, certaines tournures de phrases peuvent entraver la résolution du problème proposé et affecter la représentation qui en est faite. Quelles difficultés langagières peuvent ressurgir dans la mise en équation d'un problème écrit ? Suivant Duval (1988), les problèmes de mise en équation renvoient aux situations où deux registres de représentations sémiotiques viennent s'articuler : le registre du langage naturel et celui des écritures algébriques. Or, selon Duval, pour que cette conversion entre deux registres soit possible, il faut qu'il y ait d'une part une maîtrise de chacun des registres en question, d'autre part, une coordination entre ces deux systèmes de représentations comme l'illustre le schéma ci-dessous. Ce point de vue permet de considérer les difficultés qui peuvent être spécifiques au contexte tunisien.

II. ANALYSE INSTITUIONNELLE

1. Spécificité du changement de langue: langue arabe et langue française deux registres en interaction

A part le fait que, la langue arabe d'enseignement se différencie du langage parlé ou courant, le passage de la langue française à la langue arabe rend difficile l'apprentissage de certaines notions mathématiques et complexifie davantage la modélisation des situations extra-mathématiques. Chacune fondement d'un système sémiotique ayant ses propres règles de signifiance et de fonctionnement, la traduction de l'une vers l'autre peut poser des difficultés de congruence sémantiques entre registres.

Selon Duval (1995) le langage qu'il soit écrit ou parlé est un moyen de communication entres les humains. Cette communication se construit entre un émetteur (ou plusieurs) et un récepteur (ou plusieurs). Malgré l'effort linguistique et la prise en considération de l'autre que doit faire l'émetteur pour se faire comprendre par le récepteur, des malentendus peuvent s'installer dans leur relation communicative. Ces malentendus sont dus au fait que les connaissances de la langue et du monde de l'émetteur ne sont pas forcément partagés par le récepteur. Ainsi, ils ne seront pas toujours discutés car ils ne sont pas toujours repérés par les deux partenaires de la relation communicative. Nous avons mis en évidence dans un travail antérieur (Ben Nejam, 2004) que le changement du registre de la langue arabe au registre de la langue française concernant la mise en équations avait un impact sur la résolution des problèmes conduisant la majorité des élèves à se réfugier dans des résolutions de type arithmétique par défaut de compréhension de l'énoncé ou à cause d'une traduction erronée. La traduction d'une phrase de la langue arabe à la langue française ne passe pas pour le non averti sans problèmes.

2. Spécificités du système éducatif tunisien

Le système d'enseignement tunisien se fait tout d'abord en arabe jusqu'à la fin collège (enseignement de base) puis en français pour les quatre années du Lycée. Ce système

d'enseignement a été introduit durant l'année scolaire 1990/1991. L'école de base, qui s'étale sur neuf années, est subdivisée en deux cycles : le premier s'étend sur 6 années, le deuxième s'étend sur 3 années et correspond au collège.

Le lycée, qui est composé de 4 années, est couronné par le diplôme du baccalauréat. Les enfants tunisiens débutent leur cursus scolaire à l'âge de six ans. Ils arrivent souvent avec un background linguistique exclusivement arabe du type dialectal qui présente certaines différences par rapport à l'arabe littéral qui lui s'enseigne à l'école dès la première année scolaire. L'arabe dialectal reste le langage vernaculaire des tunisiens à l'oral et dans leur vie quotidienne. L'apprentissage scolaire du français, langue seconde obligatoire en Tunisie, est introduit dans le système éducatif tunisien dès la troisième année de l'école base et se poursuit jusqu'au baccalauréat. Cet enseignement n'est pas censé employer la langue arabe comme support pour expliquer la signification des mots et des phrases et ce à tous les niveaux d'enseignement. Pour ne pas user à partir de la langue arabe, les enseignants sont appelés à associer aux mots et aux phrases de la gestuelle ou des supports visuels (dessins, croquis, des tableaux…) afin que les élèves puissent deviner le sens recherché.

3. Spécificités des savoirs algébriques

Une approche par la modélisation algébrique

La visée des mathématiques actuelles accorde une place importance à la modélisation algébrique dans la construction du savoir. Les rapports institutionnels aux objets algébriques semblent évoluer dans un contexte qui offre des possibilités de disposer d'applications internes et externes aux mathématiques à travers la résolution de problèmes et de situations problèmes. Ces situations mettent en jeu une variété de contextes et une diversification des domaines d'expériences selon une approche à la fois constructiviste et interdisciplinaire des apprentissages. De nombreuses activités proposées dans le manuel officiel mettent en avant une étude simultanée des organisations mathématiques autour de la résolution (qu'elle soit algébrique ou graphique) et de la mise en équation. Dans cette perspective d'enseignement, une grande place est accordée à la flexibilité entre les registres de représentations sémiotiques et les cadres mathématiques.

Des dialectiques renforcées entre registres sémiotiques : des dialectiques implicites entre le registre arithmético-numérique et le registre algébrique

L'enjeu de cette approche permettant d'entrer dans un raisonnement de type algébrique n'est pas explicité au niveau des directives du programme officiel mais apparait au fil des activités et des exercices proposés au élèves dans leur manuel officiel : assurer au niveau de l'enseignement une rupture épistémologique entre l'arithmétique et l'algèbre en accordant plus d'importance aux types de tâches qui mettent en jeu les différents statuts des lettres et de l'inégalité, de nouvelles appréhensions des objets de savoir et des modes de résolution de problèmes . Par contraste avec la réforme précédente, l'apprentissage de la résolution de problèmes qui émane d'une volonté explicite dans tout l'enseignement de la discipline n'est plus une affaire d'apprentissage de procédures ou de techniques de résolution, c'est désormais le travail de recherche de l'interprétation adéquate qui prime.

Des dialectiques renforcées entre le registre algébrique et le registre graphique

La nouvelle visée de l'enseignement de l'algèbre accorde une place essentielle au travail graphique, des types de tâches en rapport avec le maniement des différents modes de représentations : tableau de nombres, représentations graphiques et symbolisme algébrique, la lecture graphique ou encore la résolution graphique de problèmes apparaissent

systématiquement dans chaque chapitre du manuel officiel. Cette approche semble faire évoluer le rapport aux objets algébriques d'un point de vue « inconnu » vers un point de vue « variable » par le sens donné aux différentes représentations (graphique, équations…) et à leur utilisation « avec flexibilité » pour décrire et interpréter des situations extra-mathématiques. Ce point de vue fonctionnel est d'ailleurs amorcé par la nouvelle imbrication des thèmes d'études équations fonctions et inéquations. Le fait de marquer les interrelations entre fonction et équations peut avoir des effets positifs sur l'acquisition de ces deux notions et permettre de négocier la rupture entre l'arithmétique et l'algèbre : passer d'une conception des équations en terme de quantités connues et de quantités inconnues à une conception en terme de variables dépendante et indépendante, soit de passer du cadre algébrique installé au niveau du collège au cadre fonctionnel nouveau dans le secondaire.

III- ANALYSE DES PRATIQUES ENSEIGNANTES: DES PRATIQUES DECLARATIVES

1. Eléments de méthodologie : Questionnaire aux enseignants

Notre enquête sur les pratiques enseignantes est amorcée par un questionnaire visant à connaitre comment est perçue par les enseignants la place de la modélisation algébrique dans les pratiques de mise en équations et l'importance qu'ils accordent au changement de langue dans la gestion des savoirs. Le questionnaire a concerné un échantillon de 36 enseignants de mathématiques en classe de première provenant de lycées différents et ayant à peu près une dizaine d'années d'expérience. Les questions posées laissent le choix aux enseignants de répondre librement et d'expliciter leurs choix. Elles permettent d'une part, d'avoir une idée sur ce que les enseignants pensent des organisations mathématiques et didactiques proposées par le manuel officiel et d'autre part, de connaitre leurs points de vue sur les difficultés langagières de leurs élèves, sont-ils conscients de l'impact de ce phénomène langagier sur les apprentissages ? Quelles formes de pratique se donnent à voir ? Adhérent-ils à une coopération interdisciplinaire ?

Des représentations et des pratiques : Premiers éléments

Le dépouillement du questionnaire laisse entrevoir des représentations différentes de la modélisation algébrique. Pour certains, la modélisation n'a aucun intérêt au lycée.

> pour moi, la modélisation algébrique à ce niveau n'a pas vraiment d'intérêt, ce qui m'intéresse c'est que les élèves sachent résoudre algébriquement et graphiquement les équations et les systèmes d'équations.

Une minorité va se situer complètement, contrairement aux précédents, dans la pratique de modélisation qui devient importante du point de vue de la dialectique outil/objet des concepts algébriques et les applications possibles en dehors des mathématiques.

> Moi, j'approuve la tendance actuelle des programmes et du manuel car il est important que les élèves connaissent l'utilité des notions mathématiques dans des domaines variés surtout qu'après l'orientation ils ne seront pas tous des matheux.

Les difficultés langagières des élèves: une contrainte qui se reflète dans les propos des enseignants

Une grande majorité des pratiques déclaratives semblent s'organiser autour de la dimension objet de l'algèbre, pour certains cela n'est pas un choix mais une contrainte liée à la faiblesse des élèves en langue française d'une part et à la difficulté de conversion entre registres

> les situations proposées dans le manuel, je les évite , leur formulation est parfois difficile pour les élèves et je perds du temps à expliquer l'énoncé tel qu'il est formulé , j'en arrive parfois à traduire en arabe pour

> qu'ils comprennent alors que le but finalement est qu'ils sachent résoudre les équations et les systèmes d'équations

Une tendance à la résistance : le changement de langue en question

Cette réticence didactique à mettre en œuvre des praxéologies de mise en équations se donnent à voir dans la majorité des réponses obtenues au questionnaire. La plupart s'accordent à dire que les difficultés langagières de leurs élèves en français les obligent à se focaliser sur l'aspect technique et à mettre en place des praxéologies non conforme aux praxéologies de référence (programme et manuel officiel).

> Du coup, je me trouve parfois jouer le rôle de professeur de français pour expliquer et au lieu de faire le maximum d'activités, je ne fais que une ou deux et je passe au techniques de calcul algébrique que je trouve primordial. Je me trouve forcé de changer de méthode de travail et insister sur les techniques plutôt que sur la mise en équation.

Des contraintes liées au métier d'enseignant

Certains enseignants trouvent déjà le programme suffisamment lourd ou les classes trop chargées, des expressions comme "trop long", "trop nombreux" "pas de temps pour encore expliquer les énoncés" sont employés par les enseignants pour justifier le choix d'une pratique centrée sur la dimension objet de l'algèbre. D'autres déclarent s'engager dans des tâches de traduction des énoncés en langue arabe pour favoriser l'enrôlement des élèves des taches de conversion.

De nouvelles pratiques langagières: un mélange des deux langues

La majorité des enseignants interrogés semblent parfaitement conscients des difficultés langagières mais déclarent être amenés à détourner leurs pratiques en faveur de la réalisation de la tâche proposée par les élèves par un changement de pratique langagière. Leurs techniques didactiques consistent en l'acceptation d'un débat de classe qui est véhiculé par la langue arabe et une communication fondée sur la traduction aussi bien des énoncés que des réponses explicitées.

> ... je le vois en classe lorsqu'ils discutent entre-eux c'est en arabe, lorsqu'ils prennent la parole ils formulent leurs réponses en arabe et je me trouve contraint soit d'accepter ça car je n'ai pas le choix je me dis que le plus important c'est qu'ils puissent répondre correctement soit je le fais-moi même pour accélérer les choses

Conclusion sur le questionnaire

Les résultats obtenus à la suite des analyses conduites confirment l'hypothèse selon laquelle la langue d'enseignement constitue une contrainte à l'adaptation des pratiques enseignantes à cette approche d'enseignement de l'algèbre fondée sur la modélisation pour ce niveau transitoire. La résistance des enseignants ne semble pas être en lien avec leurs conceptions ou leur culture mais pourrait s'expliquer par une réticence didactique à mettre en place des situations dont la difficulté de conversion du registre discursif au registre algébrique serait en grande partie due à la langue d'enseignement. Les enseignants se trouvent contraints à gérer une situation délicate qui est laissée à leur charge et qui semble limiter leur épanouissement dans l'exercice de leur métier.

2. Vers une étude de cas : Pourquoi et comment étudier les pratiques de P ?

Les analyses des pratiques déclaratives ont fait ressortir des spécificités pour une enseignante dont les réponses montrent une volonté à dépasser ces contraintes langagières et à vouloir amener les élèves à se familiariser avec la modélisation de situations concrètes. Nous avons choisi de nous intéresser aux pratiques effectives de ce professeur en l'observant sur plusieurs séances et à travers des thèmes d'études différents (activités numériques, activités

algébriques et équations du premier degré à deux inconnues). Un premier niveau de *description mésoscopique* de la pratique observée sur un temps court consiste à caractériser les praxéologies mathématiques et didactiques mises en œuvre par P à partir de la structure de l'action qui s'est effectivement déroulée en classe. L'identification des types de tâches proposées par P repose sur des changements dans la mesogenèse en termes de consignes dont on peut faire l'hypothèse qu'elles sont liées à une organisation pensée à l'avance par l'enseignante. Un deuxième niveau de description, à l'échelle microscopique consiste à caractériser les techniques didactiques qui permettent la co-construction des objets de savoirs mathématiques en classe. Pour ce faire, nous prenons appui sur les trois grandes catégories de l'action conjointe du professeur et des élèves proposées par Schubauer-Leoni, et al., 2007,les *gestes mesogénétiques* qui interviennent sur les configurations d'objets pris en compte dans l'action, les *gestes topogénétiques* qui interviennent sur les positions de l'enseignante et ses élèves dans le savoir, les *gestes chronogénétiques* qui interviennent sur la création du temps didactique par l'institution de nouveaux objets de savoir

Discussion et premières conclusions

Les analyses des transcriptions sont en cours de réalisation mais nous pouvons déjà avancer quelques constats: Les pratiques langagières sont déterminantes dans les démarches d'explicitation de l'enseignante observée. Nous avons notamment remarqué des tâches de lecture et de relecture des énoncés en interrogeant les élèves sur le sens des phrases ou des mots techniques. Nous avons également constaté, l'importance d'une démarche contre-intuitive de questionnements introduits par des adverbes interrogatifs « comment » ou « quoi » qui favorisent indirectement l'explicitation des procédures des élèves ou des difficultés rencontrées, surtout avec un maintien ou une relance de l'élève en activité. Un découpage de l'énoncé en sous tâches se donnent également à voir dans les exercices proposés par l'enseignante. Mais nous avons aussi repéré un phénomène de "refoulement didactique" cela permet d'avancer modestement l'hypothèse de ressources langagières des enseignants. Cette étude permet d'illustrer comment le travail algébrique d'un point de vue cognitif se double d'un travail langagier et jusqu'à quelle mesure la langue d'enseignement peut influencer les pratiques d'enseignement-apprentissage et constituer une contrainte à la mise en place de la modélisation allant jusqu'à entraver l'entrée effective des apprenants dans la pensée algébrique. En effet, c'est la prise de conscience (Piaget, 1974a) de ces pratiques langagières et de leur (in)efficacité (in)adaptée à tel ou tel contexte d'enseignement-apprentissage qui permet aux enseignants d'appréhender et de mobiliser leurs actes de langage comme de véritables ressources langagières situées.

REFERENCES

Ben Nejma, S. (2004). *La mise en équations en première année de l'enseignement secondaire tunisien; transition collège/lycée.* Mémoire de DEA, Université de Tunis.

Ben Nejma, S. (2009). *D'une réforme à ses effets sur les pratiques enseignantes-Une étude de cas : l'enseignement de l'algèbre dans le système scolaire tunisien.* Thèse de Doctorat, Université Paris Diderot Paris7 et Université de Tunis.

Chevallard, Y. (1988). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège, deuxième partie, perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x,* 19,43-72.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : Përspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherche en didactique des mathématiques*, 12 (1),73-11.

Robert, A, & Rogalsky, J. (2002). Le système complexe stable et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques: une double approche. *La revue canadienne de l'enseignement des sciences mathématiques et technologiques*, 2(4), 505-528.

Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change but nobody tells you: making sense of mathematics learning from a commognitive stand point. *The journal of the learning sciences*, 16(4) 567-615.

Sfard, A. (2018). *Thinking as communicating. Human development, the growth of discourse, and mathematizing.* New York, NY Cambridge University Press.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitive de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65.

INTEGRER DES EVALUATIONS ENTRE PAIRS DANS LES SEANCES DE MATHEMATIQUES : UN EXEMPLE EN ALGEBRE AU COLLEGE

COPPE[*] Sylvie- ROUBIN[**] Sophie

Résumé – Nous avons élaboré un dispositif d'évaluation formative entre pairs dans le cadre d'une séance d'algèbre au collège en classe de 4e et 3e (élèves de 13-15 ans). A partir de tâches simples utilisant des programmes de calcul, chaque élève devait se prononcer sur la validité des réponses d'un autre élève puis de toute la classe en justifiant. Un débat était ensuite organisé pour discuter ces réponses. Nous analysons la tâche et notamment les connaissances mobilisées pour la réaliser, puis les réponses des élèves et enfin nous compléterons par des éléments sur le débat afin de déterminer en quoi ce dispositif a pu avoir une fonction formative.

Mots-clefs : évaluation entre pairs, algèbre, programme de calcul, débat argumentatif

Abstract – We developed a peer formative assessment device as part of a middle school algebra session in grades 8 and 9 (13-15 year old students). From simple tasks using computational programmes, each student had to decide on the validity of the answers of another student and then of the whole class by justifying them. A debate was then held to discuss these responses. We analyse the task and in particular the knowledge that is mobilized to carry it out, then the answers of the students and finally we will complete with elements on the debate in order to determine in what way this tool could have a formative function.

Keywords : peer assessment, algebra, computational programme, argumentative debate

Notre contribution porte sur les rapports entre les pratiques enseignantes et les apprentissages des élèves en nous centrant davantage sur cette dernière entrée. Ce travail fait suite à une recherche réalisée dans le cadre du projet européen de recherche ASSIST ME (Assess Inquiry in Science, Technology and Mathematics Education) dont l'objectif était, d'une part, d'analyser l'influence sur les apprentissages des élèves et les pratiques enseignantes de nouveaux dispositifs d'évaluations formatives en lien avec les évaluations sommatives dans le cadre de démarches d'investigations en sciences, mathématiques et technologie et, d'autre part, de concevoir et de diffuser des méthodes d'évaluations formatives. Jusqu'à une période récente, les recherches en didactique des mathématiques se sont peu intéressées aux questions portant sur l'évaluation pour des raisons que nous ne reprendrons pas ici (Coppé, à paraitre) mais nous pensons que cette entrée peut amener de nouveaux questionnements pour la didactique et/ou peut éclairer ou compléter certaines recherches venant du champ de l'évaluation.

Nous ne développons pas ici les nombreux travaux sur l'évaluation formative, nous citons seulement la définition de Black et Wiliam (1998) dans laquelle ces auteurs introduisent la notion de feedback et indiquent que l'évaluation devient formative quand elle sert à adapter l'enseignement aux besoins repérés des élèves.

> We use the general term assessment to refer to all those activities undertaken by teachers – and by their students in assessing themselves – that provide information to be used as feedback to modify teaching and learning activities. Such assessment becomes formative assessment when the evidence is actually used to adapt the teaching to meet student needs. (Black et Wiliam, 1998, p. 140)

De plus, nous soulignons, à la suite de Allal (1999) l'importance pour les apprentissages de l'implication de l'élève dans des démarches d'autoévaluation. Mais celles-ci ne vont pas de soi, donc pour nous, l'évaluation entre pairs est un moyen pour faire entrer les élèves dans l'autoévaluation. Par ce biais, on favorise une participation active des élèves et un

[*] Université de Genève, FPSE. Suisse. sylvie.coppe@unige.ch
[**] Collège Ampère Lyon France. sophie.roubin@ac-lyon.fr

changement de responsabilités dans la classe (ce n'est plus l'enseignant qui est responsable de la validation des réponses).

> En s'autoévaluant, l'élève est amené à expliciter ses représentations, à réfléchir sur ses stratégies, à confronter ses démarches avec celles d'autres élèves, à intégrer des critères externes dans ses cadres de référence, à gérer activement les relations entre les différentes tâches à accomplir. (Allal, 1999, pp. 43-44)

Nous nous proposons ici d'analyser un dispositif expérimenté dans des classes de collèges en France au niveau 4e et 3e (élèves de 13 à 15 ans) dans lequel il s'agit pour les élèves de pratiquer l'évaluation entre pairs et pour l'enseignant, d'intégrer à son enseignement, lors de résolution de problèmes en algèbre, des phases d'évaluation formative basées sur ces évaluations entre pairs. Ainsi les élèves peuvent avoir des retours sur leurs résultats ou démarches de la part des autres élèves. Quant au professeur, il peut agir sur des savoirs ou savoir-faire anciens dont il a constaté auparavant qu'ils n'étaient pas acquis. En ce sens, nous considérons que ces phases d'évaluation entre pairs et de débat relèvent de l'évaluation formative.

I. UNE PREMIERE EXPERIMENTATION

En 2015, nous avons réalisé une expérimentation dans quatre classes de 6e (élèves de 11-12 ans) de collèges de Lyon, sur une séquence de classe de mathématiques portant sur la résolution d'un problème complexe mettant en jeu les fractions et les aires dans laquelle deux outils d'évaluation formative étaient proposés, évaluation entre pairs et débat argumentatif sur les réponses de la classe. Après la résolution du problème, les réponses des élèves étaient collectées et chacun devait se positionner sur la validité de celles-ci en argumentant. Puis un débat était organisé par le professeur sur ces mêmes réponses et, à la fin, les élèves devaient se positionner à nouveau. Nous avons tiré les conclusions suivantes. Nous avons constaté une évolution importante des types d'arguments utilisés par les élèves pour justifier leur positionnement. Ainsi, avant le débat, un grand nombre d'élèves n'avait pas d'arguments (« c'est vrai parce que c'est vrai ») ou bien se positionnait par rapport à leur propre réponse (« c'est vrai/faux parce que j'ai trouvé/je n'ai pas trouvé la même chose ») alors qu'après ils donnaient des arguments plus décontextualisés. Le débat a donc eu un effet sur l'utilisation de l'argumentation pour justifier ses réponses, ce qui ne semblait pas être une pratique habituelle des élèves de ces classes. En revanche, il n'en était pas de même pour le positionnement en vrai/faux sur les réponses. Celui-ci a peu évolué (y compris pour des réponses simples) ou pas toujours dans le bon sens malgré des débats qui pouvaient le laisser penser (Coppé & Moulin, 2017). On peut expliquer ces résultats contrastés par le fait que le problème proposé comportait trop de difficultés, qu'il y avait trop de réponses possibles rendant le débat trop long, que deux stratégies étaient envisageables avec des difficultés pour passer de l'une à l'autre et qu'il était difficile pour le professeur et pour les élèves de seulement discuter des réponses sans entrer dans le détail des stratégies (Coppé, Moulin & Roubin, 2017)

Même si cette expérimentation n'a pas eu tous les effets escomptés, nous avons pu constater l'intérêt de ces outils d'évaluation formative car, suivant la définition de Black et Wiliam (1998 ; 2009) ils permettent de montrer au professeur et aux élèves des écarts entre les réponses données et celles attendues (certes, sans vraiment les combler) et d'engager ainsi des régulations (Mottier Lopez, 2012). Lepareur, Grangeat, & Gandit (2017) sur cette même séquence, montrent également des effets sur les pratiques des professeurs.

Si l'on se place dans le cadre des théories didactiques, nous pouvons interpréter ces résultats en termes de contrat et milieu (Brousseau, 1990 ; Perrin Glorian, 1999 ; Perrin Gloriant & Hersant, 2003). On peut dire alors qu'il y a bien eu une évolution du contrat

didactique grâce au travail sur la validation des réponses et au débat favorisant l'argumentation et qu'il sera ensuite plus facile de développer l'autoévaluation dont on sait qu'elle favorise les apprentissages (Allal, 1999). En revanche l'enrichissement du milieu par les réponses de tous les élèves (voire d'élèves fictifs) n'a pas donné suffisamment de rétroactions pour avoir des effets sur les apprentissages (ici des fractions). Enfin cette étude a également été l'occasion de nous interroger sur le rôle et les fonctions des débats, modalités de gestion de classe fortement utilisées dans les classes notamment lors de résolution de problèmes.

Nous avons donc repris cette étude pour tenter d'améliorer ce dernier point dans le cadre de pratiques plus ordinaires (les activités ne sont pas proposées par le chercheur) portant sur une séquence d'algèbre élémentaire incluant des phases de dévolution et d'institutionnalisation, en classes de 4^{e} ou 3^{e} en France (élèves de 13 à 15 ans).

II. UNE SECONDE EXPERIMENTATION EN CLASSE ORDINAIRE

Nous avons tenté une nouvelle expérimentation en choisissant des problèmes beaucoup plus simples (on peut se demander si ce sont vraiment des problèmes) dans le cadre de l'algèbre au collège, avec une visée diagnostique et formative importante sur les règles de calcul littéral et notamment sur la distributivité alors que les apprentissages ont déjà été réalisés (ou devraient l'être). Nous avons proposé deux activités utilisant les programmes de calcul dans lesquelles sont introduits les mêmes outils d'évaluation formative que précédemment (évaluation entre pairs et débat argumentatif sur les réponses). Nous nous centrons ici sur la première, proposée au début de la séquence d'enseignement sur l'algèbre, elle porte sur la traduction d'un programme de calcul en écriture algébrique (voir ci-dessous, fig. 1). Elle devait, d'une part, permettre d'initier le changement de contrat sur la responsabilité de la validation et, d'autre part de réintroduire dans le milieu des éléments technologiques au sens de Chevallard (1999) sur le calcul algébrique.

1. Description et analyse du problème

Voici la première activité que nous avons proposée en classe de 4^{e} et 3^{e} en France (élèves de 14-16 ans). A ces niveaux de classe, on pourrait penser que ce n'est plus une tâche problématique puisque les expressions littérales et les règles de calcul ont été introduites. Le programme de calcul a été choisi pour que se pose la question des priorités de calcul et de la distributivité comme élément technologique.

Voici un programme de calcul

Choisir un nombre

Ajouter 4

Multiplier la somme par 5

Soustraire 8 au résultat

Quelle expression littérale décrit ce programme de calcul ?

Figure 1 *- Le texte du problème proposé*

L'analyse a priori des réponses montre qu'il y a deux réponses correctes possibles : la réponse développée 5(x+4) et la réponse réduite 5x+12. De nombreuses réponses fausses ou incorrectes sont envisageables :

- un ou plusieurs calcul (s) numérique (s) comme exemple (s) pour montrer comment fonctionne le programme de calcul
- un schéma du programme de calcul en ligne ou colonne avec des flèches pour montrer la succession des calculs (portant sur des nombres ou une variable)
- la non prise en compte des parenthèses qui amène à une expression développée incorrecte 5x+4 -8 ou réduite incorrecte 5x +/-4 avec éventuellement des erreurs dans la réduction
- l'introduction de plusieurs variables pour décrire le programme.

2. La mise en œuvre

Nous avons testé cette activité dans 7 classes de la région lyonnaise de 4^{e} ou 3^{e} avec 4 professeurs notés P1 à P4 (voir le tableau en annexe 1 qui récapitule). Nous avons choisi à la fois des classes en REP[1] et des classes non REP. Les enseignants font tous partie d'un groupe de recherche collaborative sur l'enseignement de l'algèbre au collège, certains avaient participé à la première expérimentation. Nous avons filmé la séance dans 4 classes.

Les élèves ont résolu le problème individuellement, puis 2 protocoles ont ensuite été utilisés :

- Protocole 1 : les enseignants ont fait voter les élèves en utilisant l'application Plickers[2] sur la validité de 4 réponses collectées dans la classe (on ne peut pas voter sur davantage de réponses avec cette application), puis un débat argumentatif a eu lieu sans se prononcer sur la validité des réponses et enfin un nouveau vote.
- Protocole 2 : les élèves ont échangé leur copie entre voisins et se sont prononcé par écrit sur la réponse de l'autre élève, puis le débat et de nouveau le positionnement (voir la feuille de réponse annexe 1).

3. Analyse a priori des validations

En plus de l'analyse a priori des réponses, nous avons fait une analyse a priori des validations possibles de chacune des réponses. Pour cela nous avons utilisé nos travaux sur les vérifications (Coppé, 1993) dans lesquels nous distinguons entre les vérifications de type interne (liées au savoir mathématique) et externes (liées au contrat didactique).

> Nous appellerons processus de vérification interne tout processus de vérification mettant en jeu des savoirs ou des savoir-faire typiquement mathématiques, ne dépendant pas nécessairement de la situation dans laquelle on les utilise. (...) Les autres processus, qui utilisent des connaissances portant sur d'autres savoirs ou savoir-faire moins mathématiques (notamment ceux qui n'utilisent pas seulement la logique du problème mais qui dépendent davantage du contrat) seront appelés des vérifications de type externe. Ces processus ont la propriété d'être généralisables à tous les problèmes ou à des classes de problèmes très étendues (...). Certains peuvent être très courts et/ou se limiter à des arguments simples. (Coppé, 1993)

Dans le tableau ci-dessous, nous faisons la liste des réponses possibles ainsi que des arguments qui peuvent servir à la validation ou non validation. De nombreux arguments (externes ou internes) peuvent être utilisés pour valider ou invalider, certains pouvant servir dans les deux cas. Au-delà de cette analyse, il nous semble intéressant de bien mettre en avant ce qui peut se passer suivant la réponse initiale de l'élève. Envisageons quelques cas.

[1] REP : Réseau d'Education Prioritaire
[2] https://www.plickers.com/

Si l'élève a trouvé la bonne réponse (cas 1 ou 2), on peut penser qu'il pourra utiliser des arguments internes pour invalider les réponses incorrectes des autres et même dans certains cas, pointer ou qualifier ces erreurs. Enfin un élève qui s'est arrêté à la réponse développée, s'il est confronté à une réponse réduite (cas 2 ou 6), pourra peut-être mobiliser des connaissances sur la distributivité pour la validation et donc revenir ensuite à sa réponse.

Cas	Réponses	Validation	Invalidation
1	Correcte développée 5 (x+4) – 8	*Externe* Même réponse[3] Il y a une lettre *Interne* Retrouver l'expression à partir du programme Il y a bien les parenthèses	*Externe* Pas même réponse[4] *Interne* Pas terminé (car pas réduite)
2	Correcte réduite 5x+12	*Externe* Même réponse Il y a une lettre *Interne* Retrouver l'expression à partir du programme et la réduire Vérifier la réduction	*Externe* Pas la même réponse (car réduite) *Interne* Montrer erreur de calcul dans le développement
3	Un calcul / plusieurs calculs comme exemple(s)	*Externe* Même technique *Interne* Refaire le/les calcul(s)	*Externe* Pas le même exemple *Interne* C'est une formule qui est demandée
4	Un schéma de programme en ligne ou colonne	*Externe* Même technique *Interne* Refaire le/les calcul (s) Vérifier pas à pas les calculs	*Externe* Pas même réponse *Interne* Pas forme demandée Refaire le/les calculs
5	Réponse erronée 5x+4 - 8 ou 5x +/-4 car pas de prise en compte des parenthèses	*Externe* Même réponse Il y a des lettres *Interne*	*Externe* Pas même réponse *Interne* Retrouver l'expression à partir

[3] Quand nous disons « même réponse/technique » cela signifie que l'élève qui évalue considère que la réponse de l'autre élève est juste car il a trouvé la même.

[4] Quand nous disons « pas même réponse » cela signifie que l'élève qui évalue considère que la réponse de l'autre élève est fausse car il n'a pas trouvé la même.

		Retrouver l'expression à partir du programme en se trompant	du programme Pointer erreur de parenthèses Pointer erreur de calcul
6	Réponse erronée 5x +/-12 car erreur dans la réduction	*Externe* Même réponse Il y a des lettres *Interne* Refaire en se trompant	*Externe* Pas même réponse *Interne* Refaire et comparer Pointer erreur de calcul
7	Des formules avec plusieurs variables ou la variable ne désigne pas toujours le même nombre	*Externe* Même réponse Il y a des lettres *Interne* Refaire en se trompant	*Externe* Pas même réponse Il ne peut avoir qu'une lettre *Interne* Indiquer que la variable n'est pas correctement utilisée

Tableau 1 *- Liste des réponse et validations/invalidations a priori*

Si l'élève a produit une formule erronée (cas 5 ou 6) il est probable que la confrontation avec une réponse correcte, notamment avec la forme développée, pourra lui permettre a minima de se questionner sur les deux formes de réponses et là encore, de modifier sa réponse en mobilisant des connaissances pour expliquer ces deux formes de la réponse.

Le cas de l'élève qui ayant produit une réponse erronée sans formule (cas 3 ou 4) doit évaluer une réponse avec formule est plus problématique. Soit ses connaissances sont réactivées par la comparaison des deux réponses et il pourra alors valider/invalider la réponse de l'autre puis modifier la sienne, soit ses connaissances ne sont pas disponibles et il risque alors de se rabattre sur des arguments externes « pas la même réponse ».

Nous n'envisageons pas tous les cas possibles pour ne pas ennuyer le lecteur mais nous mettons en avant comment ce jeu sur le milieu (introduire des réponses d'autres élèves) et le contrat (changer la tâche qui ne consiste plus à seulement résoudre le problème mais également à se prononcer sur la validité de la réponse d'une autre élève) peut agir sur les connaissances des élèves pour les amener à revoir leur propre réponse.

III. RESULTATS

Voyons maintenant ce qui s'est passé dans les classes. Actuellement, nous n'avons analysé que les données portant sur les 4 classes qui ont suivi le protocole 1 et qui ont été filmées. Nous aurons une analyse plus complète dans quelques temps. En annexe 2 se trouve la liste des réponses par classe et des votes avant et après le débat.

1. Les positionnements sur les réponses

Comme nous l'avons envisagé dans notre analyse a priori, on trouve la variété des réponses produites par les élèves et proposées au vote. Dans la classe P1 4^{e} A, les 4 réponses sont correctes, avec des écritures différentes mais les votes des élèves montrent qu'ils ne considèrent pas tous les réponses comme équivalentes et donc justes, cela dépend de la forme

de l'expression. Ainsi les élèves n'ont pas mobilisé leurs connaissances sur les règles de calcul littéral pour les valider toutes. On peut penser que la règle du contrat (donner la réponse la plus réduite) explique la majorité de votes.

Dans les classes P4 3e A et B, 5 réponses différentes ont été proposées par les élèves. Avant le premier vote, lors d'un rapide débat, les élèves ont décidé collectivement d'éliminer une réponse, celle dont la forme ne correspondait pas à une expression littérale. Il y a des évolutions positives sur la validité des réponses mais peu importantes puisqu'une réponse correcte était déjà validée.

Enfin dans la classe P3 3e, à l'issue du travail individuel, aucune réponse correcte parmi les 4 n'est proposée. Dans le débat qui suit le premier vote, les élèves pensent qu'il peut y avoir une autre réponse qu'ils soumettent au vote à la place d'une autre qui, encore une fois, ne correspondait pas à une expression littérale. C'est dans cette classe que l'évolution est la plus importante car d'une part, les premières réponses étaient toutes fausses et d'autre part, que le débat a été riche (voir le paragraphe 2 ci-dessous).

On peut donc noter des résultats un peu différents d'une classe à l'autre. Dans la classe où les élèves semblent le plus en difficulté, l'évolution est nette après le débat, ce qui nous conforte dans l'idée de l'intérêt de ce type d'activité qui est encore certainement à améliorer.

2. Objets de discussion pendant le débat

Même si cette analyse n'est pas complète, nous avons également des informations sur le débat. Nous avons analysé finement celui de P3 3e. Voici les éléments qui ont été abordés. Tout d'abord nous avons noté des éléments de reprise sur des objets de savoirs anciens explicitement enseignés comme la multiplication des relatifs, les priorités opératoires et les parenthèses. Ceci est conforme aux objectifs de cette activité et donc, au programme de calcul choisi. Puis nous avons remarqué des discussions sur des objets paramathématiques (Chevallard & Joshua, 1991) comme le signe égal (« il doit avoir la même chose de chaque côté du signe = ») ou la lettre (« on n'est pas obligé de mettre x, on peut mettre une autre lettre » ou «x ça représente tous les nombres »). Ceci montre que ces usages des signes sont encore en construction chez les élèves. On retrouve notamment la conception naïve du signe égal comme « résultat de ». Enfin deux remarques ont particulièrement retenu notre attention, nous les relions aux besoins d'apprentissages implicites (Pilet, 2012) : « est ce que les priorités opératoires existent en calcul littéral ? », « n nombre choisi ne peut pas être égal à n+4, rester sur le nombre de départ » ou encore « 5x c'est 5 fois x ou 5 plus x ».

Enfin, comme la forme de ce débat impose que l'enseignant reste en retrait et ne donne pas la réponse puisque les élèves votent à nouveau après, cela permet aux élèves de poser des questions à la classe. Ceci a été le cas pour « est ce que les priorités opératoires existent en calcul littéral ? ».

IV. CONCLUSION

Les conclusions seront affinées lorsque nous aurons fini les analyses. Nous notons tout de même que dans le cas de cette activité beaucoup plus simple et plus courte, qui pourrait même être considérée comme trop simple à ces niveaux, nous obtenons des résultats qui semblent prometteurs. Nous avons montré que l'introduction d'une lettre, y compris dans un exercice qui le demande explicitement, n'allait pas de soi pour certains élèves et que le statut du signe égal est encore en construction. Nous n'avons pas analysé les types d'arguments employés à l'écrit, mais ceux entendus lors des débats montrent que les élèves sont capables d'argumenter sur leurs réponses. De plus, comme prévu dans notre analyse, pour certains élèves, l'exigence

d'argumentation fait travailler d'autres connaissances que celles mobilisées pour résoudre le problème. Cependant il nous semble qu'une étude plus fine, élève par élève, suivant leur niveau, est nécessaire pour comprendre comment des évolutions peuvent avoir lieu.

Enfin, du point de vue des pratiques des enseignants, même si nous ne sommes qu'à un stade expérimental, nous pensons qu'un outil d'évaluation formative tel que celui décrit peut être assez facilement proposé dans les classes même s'il nécessite un changement dans les responsabilités des élèves et des enseignants.

REFERENCES

Allal, L. (1999). Impliquer l'apprenant dans le processus d'évaluation : promesses et pièges de l'autoévaluation. In C. Depover & B. Noël (Éd.), *L'évaluation des compétences et des processus cognitifs, modèles, pratiques et contextes* (p. 35‑56). Bruxelles: De Boeck.

Black, P. & Wiliam, D. (1998). Assessment and classroom learning. *Assessment in Education, 5*(1), 7-74.

Black, P. & Wiliam, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. *Educational Assessment, Evaluation and Accountability, 21*(5), 5‑31.

Brousseau, G. (1990). Brousseau, G. (1990). Le contrat didactique et le concept de milieu: Dévolution. Recherches en didactique des Mathématiques, 9/3, 309-336. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9*(3), 309‑336.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2), 221‑265.

Chevallard, Y., & Joshua, M. A. (1991). *Yves Chevallard, Joshua Mary-Alberte La transposition didactique Du savoir savant au savoir enseigné*. La pensée sauvage.

Coppé, S. (1993). *Processus de vérification en mathématiques chez les élèves de première scientifique en situation de devoir surveillé.* Thèse de l'Université Claude Bernard. Lyon I.

Coppé, S. (à paraître). Evaluation et didactique des mathématiques : vers de nouvelles questions, de nouveaux travaux. Mesure et évaluation en éducation.

Coppé, S., & Moulin, M. (2017). Évaluation entre pairs et débat argumenté dans le cadre d'un problème complexe en mathématiques. *Canadian journal of sciences, mathematics and technology education*, 17:4, 308-327.

Coppé, S., Moulin, M., & Roubin, S. (2017). Analyses de l'évolution de réponses d'élèves lors d'évaluations formatives dans le cadre de la résolution d'un problème complexe. In *L'évaluation : levier pour la formation et l'enseignement* (pp. 32‑34). Dijon.

Lepareur, C., Grangeat, M., & Gandit, M. (2017). Evaluation formative et démarche d'investigation en mathématiques : une étude de cas. *Education & Didactique* vol 11/3, 101-120.

Mottier Lopez, L. (2012). *La régulation des apprentissages en classe*. Bruxelles: De Boeck.

Perrin Glorian, M. J. (1999). Problèmes d'articulation de cadres théoriques ; l'exemple du concept de milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*(3), 279‑321.

Perrin Gloriant, M.-J., & Hersant, M. (2003). Milieu et contrat didactique, outils pour l'analyse de séquences ordinaires. *Recherches en didactique des mathématiques*, *23*(2), 217‑276.

Pilet, J. (2012). *Parcours d'enseignement différencié en algèbre élémentaire*. Thèse de l'université Paris Diderot-Paris 7.

ANNEXE 1- RÉCAPITULATIF DES CLASSES SELON LE PROTOCOLE ET FEUILLE DE RÉPONSE POUR PROTOCOLE 2

Protocole 1	Protocole 2	Film
	P1 3e REP+	
	P2 3e REP	
P1 4e A REP+		x
P1 4e B REP+		
P3 3e REP+		x
P4 3e A		x
P4 3e B		x

	Mon prénom	Le prénom de mon correcteur :		**Mon Prénom**
	Réponses	Vrai ou Faux	Argumentation:	**D'accord ou pas d'accord**
Voici le programme de calcul **P1** : • Choisir un nombre • Multipliez-le par 7 • Ajoutez 10 au résultat • Ajouter 3 fois le nombre de départ Trouver un autre programme qui donne toujours le même résultat que le programme **P1** quel que soit le soit le nombre choisi				

ANNEXE 2 - LES RÉPONSES ET LES VOTES DES ÉLÈVES DANS LES CLASSES FILMÉES SELON LE PROTOCOLE 1

P1 4e A : 17 élèves (pas de vote après le débat)

Réponses	Votes avant le débat
(*x*+4)x5 - 8	6
12 +5*x*	10
20 +5*x* -8	0
(*x*+4)5-8	1

P3 3e : 19 élèves		
Réponses	Votes avant le débat	Votes après le débat
22+4 =26 26x5 =130 130 - 8 = 122	5	0
n+4 = *n* *n*x5-8 = *n*	2	0
n+4 x 5 - 8	10	2
4+5= 9x 5=45- 8= 37 remplacée ensuite par (*n*+4)x5 - 8	2	16
P4 3e A : 26 élèves		
Réponses	Votes avant le débat	Votes après le débat
x+4x5- 8	0	1
x+4 = *x*x5- 8	4	0
7 +4 = 11 11x5 =55 55 -8 = 47	Enlevée car pas de lettres	
(*x*+4)x5 - 8	19	25
(*x*+4)x5 - 8*x*	3	0
P4 3e B : 25 élèves		
Réponses	Votes avant le débat	Votes après le débat
x➔4*x*➔20*x*➔12*x*	Enlevée car pas conforme	
(*15*+4)x5 - 8	1	1
(*x*+4)x5 - 8	18	20
x+4x5 - 8	2	1
x+4 = *x* x 5 = *x* - 8	4	3

DIAGNOSTIC DES DIFFICULTÉS DE L'ENSEIGNEMENT-APPRENTISSAGE DE L'ADDITION. EXEMPLE : LA MONNAIE DƆRƆMƐ AU PREMIER CYCLE DE L'ENSEIGNEMENT FONDAMENTAL AU MALI.

COULIBALY* Hawa

Résumé - Les travaux sur l'enseignement-apprentissage de l'addition en lien avec la monnaie sont rares dans notre pays. L'unité de 1tama = 1F a disparu sur le marché. Les attitudes des élèves et des maîtres, vis-à-vis de l'enseignement-apprentissage de l'addition dans la monnaie n'accordent pas une importance méritée à la représentation schématique que les enfants se font de la valeur numérique des pièces dans la vie sociale, 1doromè et 5F CFA.

Mots - clés : difficultés, enseignement, apprentissage, monnaie, didactique.

Abstract - The topic related to the teaching-learning of the mathematical concept "addition" in using currency is somewhat ignored by research conducted in Mali. This unit 1 tama = 1F has evolved. The summary of our analysis enables us to say that teachers' classroom practices do not facilitate the acquisition of skills by learners in school, neither in using currency (resolution of exercises and practical problems), nor in social or real life situations (sales and purchases) 1doromè and 5F CFA.

Keywords: difficulties, teaching, learning, currency, didactic

I. INTRODUCTION

Au Mali, comme dans tous les pays, à côté des familles et autres institutions d'éducation, l'école participe à la préparation et à l'intégration socioprofessionnelle des enfants. Elle développe chez ceux-ci des aptitudes et des compétences sur les plan moral et civique.

Dans les résultats de notre étude, 37,39% des 115 élèves enquêtés mènent des activités lucratives en dehors des heures scolaires.

D'une façon spécifique, le programme de mathématique du premier cycle de l'enseignement fondamental vise douze objectifs parmi lesquels nous retenons les deux objectifs qui sont en relation avec notre thème d'étude. Il s'agit d'additionner des nombres de zéro (0) à cent (100) avec ou sans retenue et d'utiliser la monnaie.

L'approche par compétence en vigueur au Mali, est l'une des approches méthodologiques qui visent à lier l'école à la vie, à construire les connaissances sur les bases environnementales de l'apprenant. Pour que l'apprentissage soit significatif pour ce dernier, nous pensons qu'il lui soit permis de tisser une relation entre ce qu'il voit, ou entend ou vit et ce qu'on veut lui faire apprendre. Sans cela, aucune volonté d'apprentissage, aucune motivation scolaire ne peut être attendue selon Nebout (2012). Malgré la mise en œuvre de l'approche par compétence, les performances des enfants dans les disciplines scientifiques ne sont pas satisfaisantes. Des enquêtes de l'OMAES (2012-2013) à l'aide du système EGRAS en ont fourni quelques résultats illustratifs. Il ressort du rapport de 2013, que le taux de réussite globale est seulement de 9,5 % des 8320 enfants de 2ème année en mathématiques. 12,50% élèves de ce même niveau ont réussi leurs tests d'addition tandis que 32,3% n'ont pas atteint le niveau de numération de 0 à 9. À la question préalablement posée par les enquêteurs, « Est-ce que les enfants savent lire et calculer », la réponse est non. Cela pose l'interrogation de « *Bɛɛkunko* » : « *nos enfants sont-ils réellement entrain d'apprendre à l'école* » ? Les rédacteurs de ce rapport qualifient les constats de catastrophiques. Notre travail s'articulera en trois principales parties.

* Direction nationale de la pédagogie – Mali – hawacoul64@gmail.com

La première partie composée de la formulation de la problématique, la justification du thème, la revue de littérature comportant les théories et la recension des écrits sur lesquels nous nous sommes référés, ainsi que les objectifs, questions et hypothèses de recherche.

La deuxième partie présente la méthodologie. Il s'agit à ce niveau de la population, de l'échantillon et la manière de sa sélection (l'échantillonnage), des outils qui sont notamment une grille d'observation de classe, un guide d'entretien enseignant un guide d'entretien élèves, et des tests oraux et écrits auxquels les enfants ont été soumis. La dernière partie décrit les résultats obtenus relatifs à la représentation schématique que les enfants se font des valeurs des pièces.

II. PROBLEMATIQUE

1. Problème de recherche

Les enfants maliens dès leur bas âge ont une connaissance préliminaire de la manipulation de la monnaie à travers des emplettes, des activités commerciales comme la vente d'eau fraiche, de paquets vides de ciment. Ils se construisent une représentation schématique des valeurs des pièces d'argent usuelles. Au cours de ces opérations commerciales, les pièces de monnaie utilisées sont celles de 5F, 10F, 25F, 50F, 100F, 200F, 250F et 500F et sont exclues les pièces de 1F. La logique de la dénomination des pièces de monnaie dans la langue locale ne correspond pas à celle de la langue officielle d'enseignement-apprentissage.

Voici quelques référents de certaines valeurs du système monétaire de la Communauté Financière Africaine (CFA) en langue locale « *Bamanankan* ».

1Franc = *tamakelen* 2Francs= *tama fila* 3Francs = *tamasaba* 4Francs = *tamanaani*

5Francs = *dɔrɔmɛkelen (tamaduuru)* 10 Francs = *dɔrɔmɛ fila (tama tan).*

Des valeurs monétaires comme 1Franc et un centime, bien que reconnues au plan comptable ne sont pas utilisées au plan commercial. Ces correspondances mettent en évidence le caractère asymétrique de ce système monétaire dans les langues nationales maliennes. En effet, nous remarquons que les quatre premiers nombres pour la monnaie n'existent pas dans la vie courante de l'enfant. Il ne les a jamais rencontrés. Il lui est présenté à l'école, sans préalable, que 5F = 1 *dɔrɔmɛ*. Calculer la monnaie devient donc un enjeu social, commercial et didactique. Tant que ces difficultés ne sont pas résolues, le processus enseignement-apprentissage de l'addition et de la monnaie comme outils mathématiques est complexe. Une bonne transposition didactique doit tout mettre en œuvre pour faire de ces savoirs à enseigner qui sont la monnaie et l'addition en savoirs enseignés pour les élèves et pour la société.

Guegan (1983) a analysé la problématique de la numération dans les langues africaines et le manque de correspondance entre elle et le franc CFA dans plusieurs pays. Il la trouve critique au risque de rater les objectifs d'un enseignement efficace. Le manque de correspondance entre le français et le bamanankan empêche les enfants à bien maîtriser l'addition. Il écrit à cet effet :

> Nous distinguerons deux types de problèmes : ceux liés au raisonnement mathématique, ceux à la technique opératoire. […] Les enfants ne maîtrisent pas le sens des opérations : les maîtres sont parfois gênés pour trouver des situations de la vie quotidienne qui collent avec qu'ils veulent enseigner (Guegan, 1983).

Il est important de signaler que la monnaie est un champ d'application de l'addition qui est une des bases essentielles de la mathématique. Le processus de la maîtrise de l'addition est

déterminant pour la manipulation de la monnaie. Dans sa désignation locale, l'unité de base, un (1) *dôrômè* (*dɔrɔmɛ*), ou *dôrômè (dɔrɔmɛ)* kelen (5F CFA) est le quintuple de l'unité ordinaire (1) que les enfants connaissent. Les élèves manifestent des difficultés de conversion et de traduction. Etant donné l'absence de référent en langue locale, les savoirs formels enseignent qu'un (1) dɔrɔmɛ, ou dɔrɔmɛkelen correspond à 5 francs. Alors qu'ordinairement, pour compter cinq (5), l'enfant fait une unité algébrique cinq fois. L'apprenant est face au dilemme qui l'oblige à admettre que l'équivalence de (1) est égal à cinq. Notre problème de recherche pose la question du conflit cognitif que vivrait l'enfant malien. Ce conflit cognitif est dû à la perception d'une différence entre ce que l'on croit savoir d'une réalité et ce que l'on constate de cette même réalité.

2. Questions de recherche

Les pratiques enseignantes prennent-elles en compte les réalités contextuelles de la monnaie en 2ème année de l'enseignement fondamental ?

3. Objectif de recherche

L'objectif de cette étude est d'analyser les difficultés de l'enseignement-apprentissage de la monnaie en 2^{e} année. Son objectif spécifique est de diagnostiquer la nature des difficultés de l'enseignement-apprentissage de la monnaie en 2ème année.

4. Hypothèses

Les pratiques enseignantes ignorent les réalités contextuelles sur l'enseignement-apprentissage de la monnaie en 2ème année.

III. CADRE THEORIQUE DE REFERENCE

La présente étude, à travers sa double articulation enseignement-apprentissage au sein de son thème, est fortement liée aux pratiques enseignantes et singulièrement aux pratiques en classe.

Les pratiques enseignantes, selon Altet (1994), regagnent à la fois des actions, des réactions, des interactions, des transactions et ajustements pour s'adapter à la situation professionnelle. L'objectif des recherches sur les pratiques c'est de décrire en profondeur l'articulation du processus enseignement-apprentissage en situation, en contexte.

La notion, le concept à apprendre n'a de sens que lorsqu'il s'inscrit dans un cadre relatif au vécu de l'élève. Sans cela, les nouveaux savoirs, après avoir créé un conflit cognitif, auront du mal à s'implanter pour déconstruire ou renforcer les existants.

Si l'objet d'apprentissage (le franc CFA) n'est pas abordé dans le sens que les élèves le connaissent sous dôrômè, ils ne lui accordement aucun sens. C'est un manque d'intérêt qui ne suscite aucune motivation. Il peut au contraire démotiver les apprenants. Cet enseignement restera sans effet, sans changement positif sur les apprentissages.

Kanouté (2007), évoque les problèmes linguistiques, l'enseignement de la numération au premier cycle de l'Ecole Fondamentale, l'importance des jeux traditionnels en classe de mathématique, la démarche des travaux menés avec les enseignants et quelques résultats d'expérimentation dans les classes.

La langue bamanan possède beaucoup de dialectes. Pour l'introduire à l'école et d'en faire un medium d'enseignement, un choix s'impose. Ainsi, le bamanankan parlée de Bamako est pris comme bamanankan standard. Kanouté (1997) dans ses recherches ressort les difficultés de son approche ethno mathématique. Les termes de l'énumération, les règles des formations des dizaines, des centaines et des milles sont présentés. Les mathématiques orales sont fondées sur deux principes fondamentaux :

Dans les cultures d'oralité, les procédures de calcul et les cheminements opératoires sont essentiellement oraux et mentaux ; ils ne s'appuient pas sur une symbolique figurative (Poth, 1988). La numération orale a ses règles et fonctionnements. Elle doit faire l'objet d'un apprentissage dans le cadre d'un enseignement des mathématiques (Dubois, 1997), pour des raisons d'économie et de clarté [10], les coordinatifs *ni* et *ani* sont utilisés pour séparer respectivement les unités d'une classe et deux classes. (Kanouté, 1997)

Nous ajoutons que ces coordinatifs « *ni* » et « *ani* » ont un caractère additif, même s'ils ne sont pas souvent sommatifs comme développé dans les propriétés de l'addition. Mais l'emploi de « *ni* » fera découvrir aux apprenants l'addition avant même qu'elle n'apparaisse comme une opération.*''Tan ni kelen''* voudra dire (dix et un) ou (dix plus un).« *Mugan* » (vingt) est une irrégularité de ce système. On ne dit ni *tan ni tan*, ni *bi fila*, qui semble plus logique, « *bi-tan* » *et* « *kɛmɛ-tan* » aussi ne se disent pas. Arrivé à trente, on dit « *bi saba* »(trente), « *bi naani* »(quarante)……*kɛmɛ* (cent),« *kɛmɛ-fila* » (deux cent), « *kɛmɛsaba* »(trois cent)……..« *ba-kelen* »(mille), « *ba fila* »(deux mille)…… . Donc les termes « *bi* », « *kɛmɛ* » et « *ba* » ou « *wa* » sont multiplicatifs et cela de façon régulière (régularité). De trente à quatre-vingt-dix on utilise le préfixe bi suivi du numéro 3 à 9. Il s'agit donc de relation multiplicative. « *Kèmè* » : 100 est un numéral indécomposable. 1000 : *ba* (ou *waa)* « *kelen* » est un autonome (*yereyeda*) suivi du numéral 1. Tous les autres numéros sont formés par addition ou par multiplication.

Mais en français quand on dit quatre-vingt (4-20) on n'entend rien de huit (c'est 4x20). En bamanankan on dira bi-segin (quatre-vingt) qui signifie dix fois huit.

Une remarque est faite sur (*tan*) dix pour lequel on ne dit pas *''tan kelen''* ; vingt (mugan) qu'on ne nomme pas ''*mugan-kelen*'', cent (*kɛmɛ*) qui ne se dit pas ''*kɛmɛ-kelen*'' contrairement à ''*ba*'' qui se dit ''*ba-kelen''*.

Guegan (1983)[1] établit les systèmes de numération dans sept langues africaines dont le Bamanankan. Seulement il ne fait pas ressortir les exceptions de la numération dans cette langue, mais il a bien fait de citer le Franc CFA comme difficulté pédagogique à résoudre (présenté un peu plus en haut).

Ces deux postulats n'explicitent pas le sens contextuel de l'apprentissage tel que développé par Nebout (2000). Pour cette auteure, la signification contextuelle s'emploie à décrire les facteurs déterminants d'une situation didactique. L'objet d'enseignement ou le concept à enseigner s'inscrit dans un contexte, son sens en est marqué, contextualisé, d'où la notion de "signification contextuelle". L'intérêt de sa recherche, est de décrire les effets d'une transposition didactique. L'apprenant ne donne du sens à un concept (objet d'enseignement) que lorsqu'il en a perçu l'utilité. Le contexte étant la situation et son cadre, pour nous, la contextualisation est la circonscription de la situation dans son environnement. Cela rejoint la signification contextuelle de Nebout (2000).

IV. METHODOLOGIE

1. Population et échantillonnage

La population cible concerne les enseignants de 2ème année du CAP, tous sortis d'un institut de formation des maîtres (IFM) avec une expérience professionnelle comprise entre quatre (4) et vingt (20) ans. Elle prend aussi en compte les élèves des classes tenues par ces enseignants. L'échantillon concerne dix (17) enseignants et cent quinze (115) élèves.

2. Instrument de collecte de données

Les données sont recueillies à l'aide d'une grille d'observation, d'un questionnaire, d'un guide d'entretien et d'un test annexés.

V. RÉSULTATS ET DISCUSSION

1. Résultats relatifs aux pratiques enseignantes Situation des préalables à la leçon chez les enseignants observés

Observables	**Variables**	**oui**	**non**	**Total**
1-Fiche de préparation	Existante	5	12	17
	Objectif dégagé	1	16	17
2-Organisation du travail	Frontal	15	2	17
	Groupe fonctionnel	0	17	17
	Groupe non fonctionnel	2	15	17
3-Matériels enseignant	Existant	12	5	17
	Suffisant	7	10	17
4-Manuels et matériels élève	Existant	0	17	17
	Suffisant	0	17	17

Tableau 1- *fréquences des observables de la leçon*

Dans ce tableau, nous avons quatre rubriques essentielles qui portent sur la situation des préalables à la leçon. En termes d'observation, les constats suivants restent patents :

L'existence de la fiche de préparation, n'est pas toujours une réalité. Sur les 17 enseignants, un seul avoue se soumettre permanemment à cette exigence.

Les enseignants pratiquent un enseignement frontal (15/2), caractéristiques d'une pédagogique traditionnelle, toute chose ayant des implications didactiques que nous développerons. Enfin la disponibilité de matériels didactiques adéquats, est un facteur de succès dans un processus d'enseignement-apprentissage. Ces outils sont quasi absents.

2. Résultats relatifs aux apprentissages-

Reconnaissance des valeurs des pièces en CFA

Pièces de monnaie	**Classes**	**Types de réponse**			**Taux réussite**	**Taux de représentation sociale**
		Réponse significative	Bonne réponse	Mauvaise réponse		
5F	A	2	6	31	15,38%	5,12%
	F	13	1	49	1,58%	20,63%
	H	0	0	13	0%	0%
Total		15	7	93	6,08%	13,04%
10F	A	2	10	27	25,64%	5,12%
	F	12	1	50	1,58%	19,04%
	H	0	0	13	0	0
Total		14	11	90	9,56%	12,17%
25F	A	1	10	28	25,64%	2,56%
	F	12	1	50	1,58%	19,04%
	H	0	0	13	0	
Total		13	11	91	9,56%	11,30%
50F	A	3	7	29	17,94%	7,69%
	F	12	1	50	1,58%	19,04%
	H	0	0	13	0%	0%
Total		15	8	92	6,95%	13,03%

Tableau 2 *- Fréquence de la reconnaissance des valeurs des pièces en CFA*

La classe H où le médium est le Bamanankan, n'a pu rien saisir de la valeur des pièces en CFA. Aucun travail didactique n'a été menée pour que les élèves puissent comprendre que les pièces ne leurs sont pas étrangères. Qu'elles sont les mêmes, mais que l'appellation change quand on est dans une autre unité. Cette représentation à laquelle les élèves se sont déjà familiarisés, n'a bénéficié d'aucune exploitation au cours des pratiques enseignantes.

Réponses aux additions orales en dôrômè

Opérations	Classes	Types de réponse		
		Bonne réponse	Mauvaise réponse	Taux de réussite (%)
dôrômèkelen et dôrômè fila d_1 d_2	A	38	1	97,4
	F	59	4	93,7
	H	13	0	100
Total		110	5	95,65
dôrômè fila et dôrômèduuru d_2 d_5	A	38	1	97,4
	F	57	6	90,5
	H	13	0	100
Total		108	7	93,91
dôrômèkelen et dôrômèduuru $d_1 d_5$	A	38	1	97,4
	F	58	5	92,1
	H	13	0	100
Total		109	6	94,78
dôrômèduuru et dôrômè tan d_5 d_{10}	A	38	1	97,4
	F	58	5	92,1
	H	13	0	100
Total		109	6	94,78

Tableau 3*- Fréquences des réponses aux additions orales en dôrômè*

La collection orale en bamanankan ou en dôrômè ne pose pas de problème. Les élèves font ces opérations quotidiennement. Ce sont ces pratiques orales en lien avec le vécu des élèves que les enseignants devraient suffisamment exploiter dans les groupes avant de passer aux

opérations écrites. Cela permettrait aux apprenants d'accorder un sens à la notion de FCFA. Ils se retrouveraient dans le contexte de leur environnement, et établiraient un lien avec le dôrômè qu'ils connaissent. Leurs pratiques ne contextualisent pas leur enseignement, les apprentissages qui en découlent ne sont pas certains.

Réponses aux additions orales en CFA

Opérations	Classes	Types de réponse			Taux de réussite	Taux représentation sociale
		Réponse significative	Bonne réponse	Mauvaise réponse		
5F et 10F	A	0	5	34	12,8	
	F	5	0	58	0	7,93
	H	0	0	13	0	
Total		5	5	105	04,34	04,34
10F et 25F	A	0	4	35	10,3	
	F	2	0	61	0	3,17
	H	0	0	13	0	
Total		2	4	109	3,94	1,73
5F et 25F	A	0	1	38	2,6	
	F	2	0	61	0	3,17
	H	0	0	13	0	
Total		2	1	112	0,86	2
25F et 50F	A	0	3	36	7,7	
	F	2	0	61	0	3,17
	H	0	0	13	0	
Total		2	3	110	2,6	1,73

Tableau 4 *- Fréquence des réponses aux additions orales en CFA*

Nous avons décelé trois difficultés : le calcul mental, les difficultés pour la collection en CFA et les élèves n'arrivent pas à échanger les monnaies, par exemple 50F en 5 jetons de 10F. Les manipulations de pièces, multipliées dans des groupes de travail, pouvaient permettre aux élèves de construire cette compétence. Dans leurs pratiques, ils ont fait fit de la manipulation.

3. Discussions

L'étude a décelé que 58% des enseignants ne pas préparent pas leur leçon. Ce type d'enseignement qui aurait dû être un enseignement concret, fait d'observation et de manipulation, se fait, dans la plupart des cas, très théoriquement. Aucun élève n'a un manuel, ni une pièce à identifier. Cette leçon est un cours de manipulation. Les élèves entre eux doivent communiquer suffisamment sur les valeurs des pièces, leur caractéristique et faire des collections de valeurs ne dépassant pas 100. Ils doivent en petits groupes disposer d'un nombre suffisant de pièces ou de photos de pièces pour mener des activités de correspondance et de monnayage. Cependant l'insuffisance professionnelle constatée dans l'enseignement de ce contenu curriculaire, nous fait penser à la formation initiale reçue à son sujet.

VI. CONCLUSION

Les représentations sociales que les enfants se font des pièces d'argent, la différence d'unité des valeurs de ces pièces en CFA et en dôrômè et le contexte de la langue maternelle, sont des aspects cruciaux que les enseignants doivent prendre en charge didactiquement. Nous trouvons que l'équivalence 1 « *dôrômè* » égal 5F CFA est difficilement perçu par les élèves. Cela nécessite des préalables à concevoir et à mener avec sérieux. Le nombre de cours qui est de un ou deux selon certains enseignants, sur l'identification et la collection des pièces ainsi

que la méthodologie employée, ne permettent pas de lever les difficultés pour permettre une acquisition des connaissances sollicités.

Devant la double complexité, complexifiée par les difficultés additives, des mesures rigoureuses sont envisageables.

RÉFÉRENCES

Altet, M. (1994). L'analyse des pratiques et de l'activité des enseignants des formateurs en situation, *CREN-CRCRIE*, 101-111.

Guegan, D. (1983). *Enseignement et mathématiques en langues africaines*. Paris : Agence de coopération culturelle et technique.

Kanoute, M. L. (2007). *Mathématiques et langue nationale en milieu scolaire bambara : Influence de l'apprentissage oral du bamanan sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques au premier cycle de l'enseignement fondamental*. Thèse de Doctorat. Université de Bamako.

Nebout Arkhurst, P. (2000). *Les cultures disciplinaires et cultures contextuelles sont-elles indépendantes dans la perspective de la transposition didactique ?* 5ème biennale Education Formation. Paris : INRP.

Nebout Arkhurst, P. (2012). *La motivation scolaire, une clé didactique pour l'apprentissage*. Abidjan : Editions Balafonds.

Poth, J. (1988). *L'enseignement des langues maternelles en Afrique à l'école*. *Comment ?* Dakar : Unesco- Bureau régional pour l'éducation en Afrique.

ANNEXE

Grille d'observation

Observables	Indicateurs	Remarques /observations
Organisation de la séance	Fiche de préparation	
	Objectifs pédagogiques	
	Organisation de la classe	
	Manuels	
	Matériel	
Animation	Pré évaluation	
	Formulation des consignes	
	Fixation des connaissances	
	Contextualisation Des objets	
	Gestion des erreurs	
Evaluation	Evaluation formative	
	Qualité des exercices	

Un questionnaire

Item 1 : Quelles sont les difficultés rencontrées dans l'exécution de cette séance ?

Item 2 : Que proposeriez-vous pour améliorer l'enseignement /apprentissage de la monnaie?

Item 3 : Quelles sont les erreurs fréquentes rencontrées lors de la séance sur la monnaie?

Item 4 : Quelles sont d'après vous les sources de ces erreurs?

Item 5 : Comment les traitez- vous?

Item 6 : Quelles sont les différentes pièces de monnaie du franc CFA ?

Item 7 : Quelle est la valeur de 1f en doromè

Item 8 : Tenez-vous compte des représentations de vos élèves au cours de la séance sur la monnaie ? Dites comment?

Item 9 : Quels types d'évaluation faites-vous sur la séance relative à la monnaie ?

Guide d'entretien

1- Dis l'activité que tu fais quand tu ne viens pas à l'école ?
ɛ bɛ bara wɛrɛ jumɛn kɛ ni tɛ taa kalan yɔrɔ la ?
2- Quelles difficultés as-tu quand le maitre fait le cours sur la monnaie?
gɛlɛya jumɛn b'i la ni karamɔkɔ bɛ wari kalan kɛ aw kun ?
3- Citer toutes les pièces de monnaie ?
ganaw fɔli wa ?
4- Reconnaitre les pièces ?
u ye gana dɔnni wa ?
5- Dire leur valeur en français ?
u hakɛ fɔli tubabukan na wa ?
6- Faire la somme de plusieurs pièces ?
u fara li ɲɔgɔn kan wa ?
7- Autres (à préciser) ?
ni dɔ wɛrɛ min beye (k'o pereperelatigɛ)
8- Quelle est la valeur de 1franc en dôrômè .
Faran kelen ye joli ye dɔrɔmɛ la ?
9- Quelle est la valeur de 5francs en dôrômè.
Faran duuru ye joli ye dɔrɔmɛ la ?
10- Quelle est la valeur de 10francs en dôrômè ?
Faran tan ye dɔrɔmɛ joli ye?
11- Quelle est la valeur de 25francs en doromè ?
Faran mugan ni duuru ye dɔrɔmɛ joli ye?
12- Quelle est la valeur de 50francs en dôrômè ?
Faran biduuru ye dɔrɔmɛ joli ye ?
13- Quelle est la valeur de 100francs en dôrômè ?
Faran kɛmɛ ye dɔrɔmɛ joli ye ?

Un test

Ce test concerne l'identification orale et l'addition sur des pièces de 5F, 10F, 25F et 50F.

THEORIE DE LA DOUBLE APPROCHE ET STRUCTURATION DU MILIEU APPORTS ET COMPLEMENTARITES

COUTAT* Sylvia

Résumé – Différents cadres théoriques peuvent être mobilisés pour étudier la pratique d'un enseignant. Ce texte présente deux analyses (chacune s'appuyant sur un cadre spécifique) d'une même séance de classe autour d'une situation de recherche. Notre ambition est d'identifier les apports spécifiques de chaque approche ainsi que leurs éventuelles complémentarités afin de saisir au mieux les effets de la pratique de l'enseignante étudiée sur les apprentissages supposés des élèves.

Mots-clefs : double approche, structuration du milieu, situation de recherche.

Abstract – Differents frameworks can be used to analyze teacher's practice. This text presents two analyses (each one with a specific framework) of the same class session around a research situation. Our ambition is to identify the specific contributions of each approach as well as their possible complementarities in order to better understand the effect of the practice of the teacher studied on the students' knowledge.

Keywords: dual approach theory, structuration of the milieu, research situation

I. CONTEXTE ET AMBITIONS DE L'ETUDE

1. Tâche analysée – le loup et les renards

La tâche (Figure 1) qui est au cœur de la situation de recherche observée est issue du manuel de mathématiques de 6ième année (élèves de 9-10 ans) pour la Suisse romande. Elle appartient au chapitre « Des problèmes pour apprendre à conduire un raisonnement » et vise à « chercher une stratégie gagnante dans un jeu de déplacement simple » (Danalet, Dumas, Studer & Villars-Kneubühler, 1998, p.64). Cette tâche peut être considérée comme un problème pour chercher (Hersant, 2008). En effet les élèves doivent faire des conjectures et argumenter pour valider ou invalider ces conjectures. Nous appelons *démarches de recherche* ces connaissances que les élèves doivent mobiliser.

Règle du jeu pour 2 joueurs
Le joueur-renard place ses 3 jetons bleus sur les cases noires d'un bord. Le joueur-loup place son jeton rouge sur une des cases noires du bord opposé.
A tour de rôle, chaque joueur déplace un de ses jetons d'une case en diagonale.
Le loup peut avancer ou reculer, les renards ne peuvent qu'avancer.
Le but du loup est de traverser le jeu, et pour les renards de bloquer le loup.

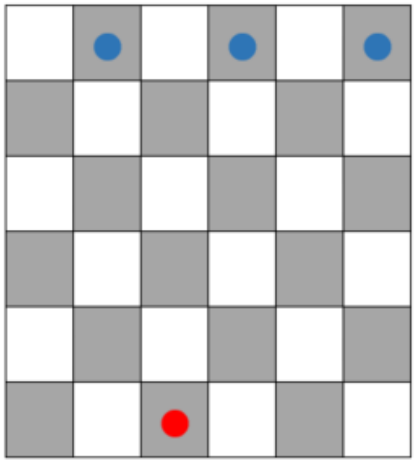


***Figure 1** : énoncé de la tâche (Danalet, Dumas, Studer & Villars-Kneubühler, 1998, p.64)*

Selon le livre du maître, l'enchainement de plusieurs parties permet aux élèves d'identifier que pour gagner, il faut commencer. Etant donnée la taille du plateau de jeu, de nombreux

* Université de Genève – Suisse – sylvia.coutat@unige.ch

déplacements sont nécessaires entre le début et la fin d'une partie. En enchainant les parties, les élèves observent des déplacements ou configurations de jeu spécifiques, dangereux ou avantageux pour le loup ou pour les renards. Par exemple, le joueur-loup doit éviter de se déplacer vers les bords ou les coins. Le joueur-renards doit quant à lui, conserver ses renards en ligne afin de « pousser » le loup vers des bords ou des coins pour l'immobiliser. Finalement si le loup parvient à « casser » la ligne des renards, il pourra les dépasser et traverser le plateau. Ces différentes observations sont les *stratégies* de jeu. Une fois que ces stratégies de jeu sont validées, il reste à déduire quels seront les déplacements et positions initiales qui permettent la victoire. Que les élèves parviennent à trouver toutes ces stratégies de jeu ainsi que les configurations initiales de victoires n'est qu'une étape. L'ambition de la tâche est d'amener les élèves à identifier comment ils sont parvenus à ces découvertes, c'est-à-dire quelles sont les démarches de recherche qu'ils ont mobilisées dans leurs recherches qui ont permis l'identification des stratégies de jeu. Ainsi ils doivent identifier que les différentes parties leur ont permis d'amasser des observations et qu'à partir de ces observations ils ont pu expliciter quelques conjectures (stratégies pour la victoire ou l'échec). Ces stratégies de jeu qui sont ensuite testées et validées permettent d'anticiper les différents déplacements pertinents et la victoire. Alors que les stratégies de jeu sont très locales au jeu, les démarches de recherches peuvent être réinvesties dans d'autres tâches mathématiques.

Nous avons observé la réalisation de cette tâche dans une classe de 6^{ième} année (9-10 ans). L'enseignante qui a collaboré lors de cette recherche est titulaire depuis plus d'une dizaine d'années, elle collabore régulièrement avec notre équipe et connait très bien le moyen d'enseignement de mathématique. Elle considère que les situations de recherche (assez présentes dans le moyen d'enseignement) restent les tâches les plus difficiles pour elle à mettre en œuvre. Elle se sent souvent démunie ayant des difficultés à identifier les savoirs en jeu et les relances qui seraient pertinentes pour faire avancer les élèves dans la résolution de ces tâches. Ainsi nous avons choisi d'observer une enseignante chevronnée dans la réalisation d'une tâche de situation de recherche afin d'identifier quels sont les choix dans le scénario construit, les échanges menés et les attentes de cette enseignante relativement à cette situation de recherche.

2. Double analyse : structuration du milieu et double approche

Pour analyser la pratique de cette enseignante pour la réalisation de cette tâche, nous mobilisons deux cadres d'analyse : le cadre de la double approche (Robert & Rogalski, 2002) et celui de la structuration du milieu (Margolinas, 2002). En effet, nous faisons l'hypothèse que l'utilisation conjointe de ces 2 outils d'analyses nous apporteront des réponses complémentaires autour des pratiques enseignantes. Dans la suite nous présenterons les résultats de chaque analyse, puis nous discuterons sur les spécificités de chaque analyse ainsi que leurs et complémentarités. Cette double analyse de la séance devrait nous permettre de répondre aux questions :

- Quels sont les savoirs travaillés lors de la résolution de la tâche ?
- Quels moyens l'enseignante se donne-t-elle pour l'explicitation des démarches de recherche, des stratégies de jeu ?

Pour la suite des analyses nous nous appuyons sur le scénario réalisé (tableau 1) que nous avons reconstruit principalement en utilisant les différentes organisations de travail (binôme, groupe, collectif) ainsi que les consignes de l'enseignante.

Scénario Réalisé	
Consigne (4 mn)	Explication par l'enseignante des règles et du but du jeu
1er temps de recherche - Binôme (15 mn)	« Vous essayez de trouver quelles sont les stratégies, enfin ce qu'il faut faire pour ne pas se faire prendre ou pour gagner et après ça on essaiera de voir quelles sont les règles que vous avez trouvées. »
1er moment collectif - (22mn)	« Qu'est-ce que tu as remarqué comme chose ? » Discussion à l'aide de parties jouées ou extraits de parties pour faire ressortir des configurations gagnantes pour les renards ou le loup. Elles ne sont pas toutes «justifiées» ou «testées»
2ème temps de recherche - 4 groupes (7 mn)	« Alors maintenant je vais vous demander de placer ça comme ça, c'est aux renards de jouer, ce sont les renards qui gagnent débrouillez-vous pour faire gagner les renards. Attention lors de la mise en commun je choisirai un des élèves du groupe qui ira jouer contre un des élèves de celui-là. »
2ème moment collectif - (6 mn)	« Bien est-ce que vous avez une stratégie pour gagner ? »
3ème temps de recherche - 2 Groupes (10 mn)	« Je vous donne la position il faut faire gagner le loup, c'est au loup de jouer. Donc le loup commence et le loup gagne »
3ème moment collectif - (9 mn)	Reprise de la consigne du temps de recherche précédent
Bilan (4 mn)	Qu'est-ce qu'on vient de faire ? Comment vous pouvez dire non pas ça ?

***Tableau 1** : scénario réalisé*

Lors du deuxième moment collectif, l'enseignante propose la configuration de jeu présentée dans figure 2 avec comme consigne : « C'est aux renards de jouer, ils doivent gagner, lequel doit bouger, pourquoi ? Où doit-il aller, pourquoi ? ». Le troisième moment collectif est semblable au précédent, la configuration de jeu est celle de la figure 3 avec comme consigne : « C'est au loup de jouer, il doit gagner, Comment doit-il bouger, pourquoi ? »

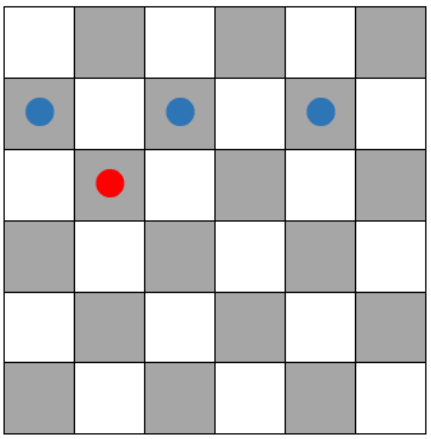


***Figure 2** : plan de jeu - moment collectif 2*

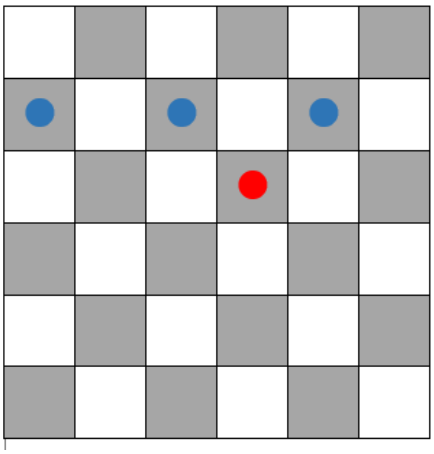


***Figure 3 :** plan de jeu - moment collectif 3*

II. ANALYSE AVEC LA DOUBLE APPROCHE

La théorie de la double approche développée par Robert et Rogalski (2002) vise à identifier les pratiques enseignantes au sein d'une institution donnée et les apprentissages potentiels des élèves associés afin de définir les contraintes et marges de manœuvre d'un enseignant. Dans notre étude, nous considérons une seule enseignante lors d'une séance de classe sur la résolution de problème. Ainsi notre analyse s'intéresse aux apprentissages des élèves, par l'intermédiaire des activités des élèves provoquées par l'enseignante en classe. Pour cela nous avons utilisé les trois dimensions d'analyses des scénarios du côté des activités élèves en identifiant :

- les contenus travaillés en classe et à la répartition des activités prévue entre enseignante et élèves (scénario prévu),
- les formes de travail des élèves pendant la séance
- les échanges avec l'enseignante pendant la séance

Nous centrons nos analyses sur les moments collectifs, où nous avons le plus de dialogues entre les élèves et entre les élèves et l'enseignant. Le deuxième et troisième moment collectif sont regroupé car tous les deux traitent de la justification des stratégies de déplacements pertinentes.

1. Moment collectif 1 : Identification de configurations ou déplacements pertinents

Lors de ce premier moment collectif les élèves sont amenés à partager les observations qu'ils ont pu faire lors des premières parties à deux. Trois observations principales sont partagées. La première observation des élèves concerne une position des renards en « muraille » (les renards sont alignés) oblique ou horizontale qui permet de « pousser » le loup sur un bord ou dans un coin. Cette configuration a été utilisée plusieurs fois par les élèves lors de différentes parties du moment de recherche à deux. Lorsque cette position est proposée au tableau, les élèves ne gagnent pas systématiquement car parfois le joueur-renard « ouvre » la « muraille » et le loup se faufile vers la victoire. On remarque que les élèves ne peuvent pas facilement rejouer les parties car il est très difficile de revenir sur les déplacements une fois que ceux-ci sont effectués. Le fait de ne pas garder une trace des coups joués rend difficile les discussions autour des choix précédents de déplacements et leur pertinence. Cette difficulté d'accès aux coups précédents apparait plusieurs fois lors des tentatives de validation des propositions. On voit que l'anticipation qui s'appuie sur l'étude des possibles déplacements pour une configuration de jeu donnée est centrale mais rendue difficile. Pour valider leur proposition, les élèves s'appuient sur leurs diverses expériences acquises dans le moment de recherche à deux (« j'ai fait ça avec Claire et j'ai toujours gagné ») ou sur la partie présentée à la classe. Les deuxième et troisième propositions concernent le loup qui doit éviter les bords et les coins et doit dépasser les renards pour assurer sa victoire. Ces stratégies de jeu sont validées par des simulations de parties où le loup se retrouve coincé dans un coin ou sur un bord par les renards.

Au cours de ce moment collectif, les élèves argumentent peu entre eux sur la validité de leurs propositions, chacun présente et tente de convaincre ses camarades, ces derniers sont assez preneurs des stratégies de jeu proposées, ils ont souvent obtenu les mêmes.

Quant à l'enseignante, elle distribue la parole et s'assure que les parties sont jouées dans les respects des règles. Elle relance les élèves pour qu'ils partagent leurs observations et reformule certaines propositions. L'enseignante note les propositions des élèves mais ne se

prononce pas sur leur validité. Elle se focalise surtout sur la forme des échanges que sur leur contenu.

2. Moments collectifs 2 et 3 : Justification des stratégies de déplacement pertinentes

Pendant le moment collectif 2 les élèves s'affrontent sur une configuration de jeu (Figure 2) proposée par l'enseignante pour laquelle les renards doivent gagner. Les élèves doivent trouver comment les renards, qui commencent, peuvent s'assurer la victoire. Les élèves font de nombreuses propositions mais la victoire des renards n'est pas automatique, ils rencontrent des difficultés à trouver les déplacements des renards qui leur assurent la victoire car ils s'appuient sur les règles explicitées précédemment mais ces règles ne sont pas toutes pertinentes pour cette configuration, en particulier la « muraille ». Il n'y a pas vraiment d'échanges ou de discussions entre les élèves, les propositions sont assez peu discutées. Les élèves proposent des stratégies de jeu alors que l'enseignante essaie de leur faire expliciter les démarches de recherches qu'ils ont utilisé, ce que les élèves parviennent très difficilement à faire (« on réfléchit »).

Le troisième moment collectif reprend la même consigne avec une nouvelle configuration (Figure 3) et la victoire du loup à assurer. Les premières observations des élèves restent très présentes et la « muraille » continue d'être la stratégie de jeu principale des élèves-renards. Un élève-loup finit par trouver les déplacements qui permettent au loup de gagner. Il utilise une démarche de recherches qui analyse les prochains coups. Cette étude préalable lui permet de choisir les déplacements favorables à sa victoire. Les interactions entre les élèves sont beaucoup plus riches dans ce dernier moment collectif. Les élèves qui ne sont pas au tableau proposent des déplacements à l'avantage du loup ou des renards, propositions qui sont souvent discutées mais peu justifiées. L'enseignante tente d'orienter les échanges vers des justifications afin de faire expliciter les démarches de recherche aux élèves. Ces justifications ne sont quasiment pas données par les élèves qui semblent plus dans une urgence de victoire, et l'identification d'une stratégie gagnante, que dans une réflexion sur le moyen de trouver des stratégies de déplacements.

3. Bilan collectif : Explication des démarches de recherche

Ce dernier moment collectif est mené par l'enseignante qui interroge sur les raisons des choix des élèves, cherchant à leur faire expliciter leurs démarches de recherches. Les élèves font quelques propositions qui sont plus des stratégies de jeu (la « muraille ») que des démarches de recherches. Finalement, l'enseignante utilise le jeu d'échec pour que les élèves s'écartent du contexte du Loup et des renards et en viennent aux démarches de recherches. Les élèves parviennent peu à expliciter les démarches de recherches, ils restent sur les stratégies de jeu identifiées au début de la séance. Pour conclure, l'enseignante reformule les différentes propositions des élèves. Elle propose une démarche de recherches autour de l'étude des cas possibles comme moyens d'anticipation : « ce qu'il faut voir un petit peu dans ce qu'on a fait ce matin c'est que vous êtes obligé d'imaginer ce que l'autre peu jouer pour pouvoir jouer vous-même parce que vous connaissez la stratégie et l'autre connait la stratégie gagnante, pour l'empêcher ou pour l'obliger à faire ce que vous voulez, si il va là moi qu'est-ce que je vais jouer et s'il va là qu'est-ce que moi je vais jouer d'accord pour le bloquer comme tu l'as dit ». Cependant on peut se demander si les élèves ont effectivement reconnu leurs propos dans cette reformulation …

4. Bilan de la séance

Cette séance autour de la résolution d'une situation de recherche vise la mise en œuvre de démarches de recherche autour d'observations, étude de cas possibles, conjectures et validation pour l'anticipation et l'identification d'une stratégie gagnante dans un jeu de déplacement. Étant donné cet objectif, l'enseignante propose différents moments de recherche en groupe et différents moments collectifs. Les moments de recherche en groupe visent la mise en œuvre de démarche de recherche pour trouver les stratégies gagnantes de déplacement. Les moments collectifs visent l'explicitation des démarches de recherches associées. On peut voir que ce dernier objectif de formulation est très difficile chez les élèves qui restent sur la formulation des déplacements et n'explicitent que très peu les moyens qu'ils ont utilisé pour trouver et valider ces déplacements. Pourtant dans leurs actions, les élèves utilisent l'étude des cas possible, l'anticipation, les conjectures. L'enseignante relance et reformule largement pour amener les élèves aux démarches de recherche. La dernière reformulation de l'enseignant, qui conclut sur une (seule) démarche de recherches, reprend en effet certaines actions d'élèves mais semble très générale au vu des échanges des élèves. Nous pouvons nous interroger sur l'impact de cette proposition chez les élèves.

III. ANALYSE AVEC LA STRUCTURATION DU MILIEU

Pour analyser une séance d'enseignement-apprentissage, il est aussi possible d'utiliser la structuration du milieu (Margolinas, 2002) qui permet d'étudier les interactions entre enseignante et élèves relativement à un savoir dans une situation à finalité didactique. L'activité du professeur est analysée selon 5 niveaux (P+3 à P-1). Le rôle de l'élève, définit par ses actions sur le milieu, est aussi définit selon 5 niveaux (E-3 à E+1). Ces différents niveaux et leur imbrication sont présentés dans le tableau 2 issu de Margolinas (2002). L'étude de la séance de classe s'appuie sur une analyse descendante : On part de la situation (S+3), « descend » vers la situation didactique (S0), elle permet de caractériser le point de vue du professeur. Dans cette analyse on s'intéresse aux interactions du professeur avec le milieu d'observation dans une situation qui est caractérisée par la nécessité de conclure (évaluation ou validation) sur les productions des élèves. Cette analyse descendante est complétée par une analyse ascendante qui part de la situation la plus interne de la structure (S-3) « remonte » vers la situation didactique (S0), elle permet de caractériser le point de vue de l'élève. Dans cette analyse, le professeur est un élément du dispositif permettant la réalisation de situations. On s'intéresse aux interactions de l'élève avec le milieu d'apprentissage dans une situation qui est caractérisée par la production explicite de l'élève dirigée vers le professeur.

M+3 : M.construction		P+3 : P. noosphérien	S+3 : S. noosphérienne
M+2 : M. projet		P+2 : P. constructeur	S+2 : S. construction
M+1 : M.didactique	E+1 : E. réflexif	P+1 : P. projeteur	S+1 : S. de projet
M0 : M.apprentissage	E0 : E.	P0 : professeur	S0 : S. didactique
M-1 : M.référence	E-1 : E. apprenant	P-1 : P. observateur	S-1 : S. d'apprentissage
M-2 : M. objectif	E-2 : E. agissant		S-2 : situation de référence

M-3 : M. matériel	E-3 : E. objectif		S-3 : S. objective

***Tableau 2** : structuration du milieu (Margolinas, 2002)*

1. Analyse descendante

Pour la préparation de son projet (P+3), l'enseignante peut s'appuyer sur le Plan d'Etude Romand (PER) et le moyen d'enseignement pour la Suisse romande. En ce qui concerne le PER, la démarche de résolution de problème est mise en avant à travers : « [les mathématiques] promeuvent une attitude de recherche par essai-erreur, généralisation, conjecture et validation. ». Dans le livre du maître des moyens d'enseignement, un chapitre, d'où est extrait la tâche le Loup et les renards, vise l'apprentissage et le développement de démarches de recherche. Pour construire la séance (P+2), nous avons alors identifié les différentes stratégies pour gagner au jeu du Loup et des renards. C'est à ce moment que l'on peut prendre conscience de la difficulté que les élèves vont rencontrer étant donné le nombre de déplacements important pour une partie. Les trois premiers déplacements de l'élève-loup et de l'élève-renards impliquent une des configurations présentées dans la figure 2 ou 3. C'est pour cela que ces deux situations sont proposées, elles économisent les élèves de 3 coups. Enfin le scénario de la séance (P+1) est défini et comme l'on vise l'explicitation par les élèves de démarches de recherche, plusieurs moments collectifs sont proposés, les premiers visant l'explicitation des déplacements, stratégies pour gagner au jeu, les suivants visent les démarches de recherches qui ont permis d'identifier ces déplacements gagnants. Lors de la séance (P0) l'enseignante s'assure que les élèves mettent en œuvre de démarches de recherche dans l'exploration des déplacements possibles pour gagner au cours des moments de recherche. Lors des moments collectifs, elle relance les élèves sur ces démarches de recherches.

2. Analyse ascendante

Du point de vu de l'élève, la situation vécue (E-3) est un jeu de déplacements sur un plateau, avec un loup qui doit traverser le plateau et des renards qui doivent capturer le loup. Son objectif est de faire gagner le personnage qu'il incarne. Pour s'assurer la victoire, l'élève (E-2) va enchainer plusieurs parties tentant à chaque fois de faire gagner son personnage. Lors des moments collectifs (E-1) les élèves identifient quelques configurations de jeu spécifiques comme la position de la « muraille » qui permet aux renards de « pousser » le loup sur un bord ou un coin. Ils identifient aussi que le loup doit dépasser les renards sur le plateau, comme ils ne peuvent reculer, ils ne peuvent pas rattraper le loup. Finalement au cours de la situation didactique, certains élèves essaient de valider leurs propositions ($E0_1$) alors que d'autres essaient de mémoriser les configurations spécifiques ($E0_2$). Les réflexions des élèves qui cherchent à valider les propositions portent sur une validation par l'étude des cas possibles ($E1_1$), d'autres s'appuient sur leurs expérience de jeu ($E1_2$).

3. Bilan de la séance

Si on associe le projet de l'enseignante et sa situation S+1 associée avec les réflexions des élèves et leurs situation S+1 associées, on trouve ainsi 3 profils d'élèves réflexifs dont un seul ($E1_1$) est compatible avec le projet de l'enseignant, les deux autres ne sont pas sur les démarches de recherche mais les stratégies pour gagner au jeu. Ainsi le contexte de la situation qui utilise un jeu de déplacement prend le dessus chez 3 profils d'élèves qui restent très attaché à l'enjeu de gagné et n'investissent pas de réflexion sur les démarches de recherches. Le projet de l'enseignante qui s'appuie fortement sur les échanges entre les élèves

pour orienter les débats vers les démarches de recherches se trouve mis à mal car les élèves échangent davantage sur les stratégies de jeu que sur les démarches de recherches.

IV. BILAN DES ANALYSES

- Quels moyens l'enseignante se donne-t-elle pour l'explicitation des démarches de recherches, des stratégies de jeu ?

Dans le dernier moment collectif, les élèves sont proches de la stratégie gagnante pour le jeu. Ils utilisent les différentes parties, pour recueillir des observations. La justification des propositions est parfois discutée mais ce n'est clairement pas une priorité pour les élèves. Leur objectif est de trouver une stratégie gagnante pour le jeu. Cet objectif de justification et de preuve est celui de l'enseignante qui souhaite que les élèves s'engagent dans un processus de preuve de leurs conjectures. Ainsi les élèves échanges sur des stratégies de jeu alors que l'enseignante attend des évocations de démarches de recherche. Si on répond à notre première question autour des savoirs travaillés lors de la résolution de la tâche, l'enseignante conclut sur une démarche de recherche alors que les élèves ont finalisé leurs échanges sur les stratégies de jeu. Cet écart dans les attentes de l'enseignante et celles des élèves apparaissent à travers les deux analyses. La double approche montre que l'enseignante refuse de prendre la responsabilité de validation dès le premier moment collectif. Les relances et reformulations des moments collectifs suivant sont bien dans l'intention de faire expliciter les élèves autour des démarches de recherche qu'ils ont investies, ils ont pourtant peu d'effets sur les propositions des élèves qui restent sur les stratégies du jeu.

La structuration du milieu permet de reconstruire le projet de l'enseignante mais aussi les différents milieux présents en parallèles au cours de la séance. Du point de vu des élèves, étant donné leurs actions et formulations, leur situation consiste à trouver une stratégie gagnante au jeu du Loup et des renards. Cette situation n'est pas celle que vit l'enseignante qui elle vise une discussion des démarches de recherches. Cette bifurcation didactique peut expliquer ou justifier la place importante que finalement prend l'enseignante dans les échanges. A la fin de la séance son projet n'est toujours pas atteint et elle cherche à faire expliciter les élèves sur les démarches de recherches qu'elle visait (étude des cas possibles, conjecture puis validation pour anticipation) alors que certains élèves restent sur d'autres aspect de leur activité de recherche qui est plus de la mémorisation de déplacements que de la déduction. Cette enseignante a organisé son scénario afin que les échanges des élèves évoluent progressivement vers des discussions centrées sur les démarches de recherches qui ont permis l'identification des stratégies de jeu. En restant bloqués sur un objectif de victoire immédiat, les élèves n'ont pas cherchés à théoriser leur recherche et son restés sur les stratégies de jeu. Le jeu et son enjeu de victoire ont largement participé à la dévolution de la tâche. Le scénario doit cependant accompagner l'évolution de cette dernière afin que les élèves dépassent l'ambition de gagner pour se recentrer sur les démarches de recherches qui permettent l'identification des stratégies de jeu.

REFERENCES

Danalet C., Dumas, J. P., Studer, C. & Villars-Kneubühler, F. (1998) *Mathématiques, Quatrième année, Livre du maître*. Neuchâtel : COROME.

Hersant M. (2008) Les problèmes pour chercher. Grand N, 81, 57-75.

Robert A. & Rogalski J. (2002) Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques: une double approche. *Canadian Journal of Math, Science & Technology Education, 2*(4), 505-528.

Robert A. (2007) Stabilité des pratiques des enseignants de mathématiques (second degré) : une hypothèse, des inférences en formation. *Recherches en didactique des mathématiques*, *27*(81), 271-312.

Margolins C. (2002) Situation, milieu, connaissance. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris. (eds) *Actes de la 11ième Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques,* version électronique du cederom d'accompagnement.

DETERMINANTS DE L'ANXIETE LIES AUX MATHEMATIQUES CHEZ DES SUJETS DE 10 A 18 ANS

DJELLE[*] Opely Patrice-Aimé – COULIBALY [**] Haoua

Résumé–Notre objectif est d'identifier et d'analyser les déterminants de l'anxiété sur les apprentissages en mathématiques, de conduire l'étude sous l'éclairage des représentations sociales, notamment la théorie du noyau central. Le matériel d'enquête est essentiellement constitué d'un questionnaire de choix composé de vingt items et la méthode d'analyse est de l'analyse de similitude appliquée à l'étude. Les enjeux sont de développer les compétences émotionnelles des apprenants à partir d'une approche pédagogico-thérapeutique.

Mots-clefs : Représentations sociales, anxiété, questionnaire de caractérisation, analyse de similitude.

Abstract–Our objective is to identify and to analyze the determiners of anxiety on trainings in mathematics, to drive study under the lighting of social representations, notably theory of the central core. The equipment of inquiry is principally constituted of a questionnaire of choice composed of twenty items and the method of analysis is of the analysis of similarity applied to study. Stakes are to develop emotional skill of leaners from a pedagogic-therapeutic approach.

Keywords: Social Representations, anxiety, questionnaire of characterization, analysis of similarity

I. INTRODUCTION

L'anxiété est un concept de source indéterminée (Daigneault, Laurin et Perrault, 2011) qui ajoutent toutefois qu'il y a un lien avec l'environnement. Il survient lorsque l'individu constate le manque de concordance entre ce que la situation exige et les ressources qu'il possède. Selon La fortune et Massé (2002), « c'est un état affectif caractérisé par des sentiments d'aversion et de panique à l'égard de cette discipline ». Ces auteurs considèrent que l'anxiété des mathématiques a des conséquences au niveau du choix de carrière et qu'elle cause de la désorganisation mentale, de l'évitement, des trous de mémoire et des pertes de contrôle.

Cette anxiété spécifique aux mathématiques peut être définie comme un « état affectif caractérisé par de l'inquiétude, des malaises et de la peur qui peut empêcher de faire des mathématiques » (La fortune et Massé, op.cit.). Zakaria et Nordin (2008) ajoutent que l'anxiété due aux mathématiques est généralement liée à de la désorganisation et une perte des moyens. Ashcraft et Moore (2009), ajoutent que l'anxiété mathématique découle beaucoup de l'anxiété par rapport aux évaluations. Comme les élèves sont anxieux à l'idée de ne pas performer, ils sont anxieux à l'idée d'être évalués. Les auteurs comme Servant (2003), La fortune (1992), Daigneault, Laurin et Perrault (op.cit.) expliquent ce phénomène par la pression de la réussite. En effet, l'école et les parents exigent beaucoup de l'élève et celui-ci vit dans un climat de compétition où il lui est difficile d'établir ses priorités (Servant, op.cit.). Selon La fortune (op.cit.), cette pression est accrue en mathématiques puisque cette matière constitue un outil de sélection grandement utilisé. Finalement, lorsque la réussite devient si importante qu'elle occupe une place démesurée dans son quotidien et nuit à sa qualité de vie, l'élève ressent de l'anxiété de performance, ce qui s'ajoute aux difficultés qu'il a des mathématiques.

Or, depuis les travaux de Moscovici (1961), il est établi que les relations des individus au monde extérieur sont médiatisées par les représentations sociales. C'est pourquoi, notre

[*] Ecole Normale Supérieure d'Abidjan – Côte d'Ivoire – opelydjelle@yahoo.fr
[**] Laboratoire d'Etudes et de Prévention en Psychoéducation à l'Ecole Normale Supérieure d'Abidjan – Côte d'Ivoire, mahcoulwendy@gmail.com

travail s'inscrit dans la problématique théorique des représentations sociales. Et notamment, la théorie du noyau central (Abric,1994, 2003).

La théorie des représentations sociales en tant que théorie de la connaissance du sens commun peut nous aider à appréhender les croyances, les opinions, les attitudes, développées par les sujets à propos des échecs massifs en matière de mathématiques.

Quelles sont pour eux les causes c'est-à-dire les déterminants d'anxiété ? Qu'est-ce qui, en ce qui concerne les apprenants, sont sujets a de l'anxiété provoquée par les mathématiques ? Ont-ils peur des mathématiques? La peur des mathématiques est-elle la cause de la désorganisation mentale, de l'aversion et de panique? Quels sont les éléments constitutifs des structures cognitives élaborées à propos de l'anxiété ? La recherche des points d'ancrage pour une meilleure définition des causes ou déterminants de l'anxiété nous amènera à identifier et analyser les déterminants de l'anxiété en lien les apprentissages en mathématiques tout en conduisant l'étude sous l'éclairage des représentations sociales, notamment la théorie du noyau central.

Notre problème est que les contre-performances des apprenants lors des évaluations pourraient être attribuables à des comportements, des perceptions et surtout à des émotions due aux mathématiques.

Quels sont les déterminants de l'anxiété en mathématiques source des difficultés de l'apprentissage des élèves ?

Notre objectif est d'identifier et d'analyser les déterminants de l'anxiété sur les apprentissages en mathématiques, de conduire l'étude sous l'éclairage des représentations sociales, notamment la théorie du noyau central.

L'hypothèse est que les déterminants de l'anxiété ont un impact sur les apprentissages en mathématiques.

II. METHODOLOGIE

Le matériel d'enquête est essentiellement constitué d'un questionnaire de caractérisation. Ce questionnaire est composé de vingt items qui ont été conçus à partir d'une première approche. Sur cette base, à partir des réponses à un questionnaire d'évocation, nous avons retenu les items les plus fréquents et les plus pertinents sur cette base nous avons constitué une liste définitive de douze items. Ces items ont alors été présentés aux sujets dans un ordre aléatoire en leur demandant de choisir cinq items. En effet, il s'agissait pour eux, de procéder à un repérage des 5 items les plus importants ou les plus pertinents par rapport à leurs propres conceptions des conditions de travail.

1. Traitement des données

Pour étudier la structure des représentations sociales construites par les enseignants et prouver la valeur de vérité de nos hypothèses qui ont été énoncées, nous avons procédé à une analyse de similitude. Les données ont été traitées par le logiciel informatique Evoc 2005 et Simi 2003.

Introduite Flament (1981), la méthode d'analyse de similitude part du principe que, par nature, les représentations sociales se présentent sous forme de structure d'implication entre éléments cognitifs et constitutifs. Par exemple, si deux items A et B entretiennent une relation R, on peut considérer qu'ils sont plus ou moins fortement associés dans la représentation sociale que dans leurs relations aux autres les plus proches mais aussi par opposition avec les

plus lointains. On peut donc considérer que l'intensité de la relation de similitude entre deux items sera d'autant plus forte dans la relation qu'elle apparaîtra chez un plus grand nombre de sujets. C'est pourquoi Flament suggère donc d'associer à chaque paire d'éléments une valeur numérique calculée à partir de la proportion de leur cooccurrence. En d'autres termes, il s'agit de traiter chaque paire d'éléments en évaluant la proportion des sujets qui ont associé les éléments de la paire considérée (qui les ont rangés dans le même tas). La valeur ainsi obtenue est appelée indice de similitude.

L'analyse de similitude appliquée à l'étude des représentations sociales peut être décomposée en plusieurs étapes successives. La première étape consiste à la recherche des éléments susceptibles d'entrer dans le champ de la représentation sociale. Cette étape permet de faire l'inventaire des items supposés significatifs de la représentation sociale étudiée. La deuxième étape a pour objectif de recueillir les données de telle sorte que l'on puisse faire apparaître les relations « fortes » entre les items. L'arbre permettra de visualiser l'ossature principale de la structure qui relie les éléments de la représentation sociale entre eux. Il permet également de repérer les lignes de force et le regroupement sémantique des items. Dans notre cas ici, l'analyse de similitude a pour objectif essentiel de mettre en évidence le type d'organisation des cognitions relatives à l'apprentissage lié aux mathématiques.

2. Echantillon

Cette recherche a porté sur 218 sujets, dont 118 élèves de sexe féminin et 100 élèves de sexe masculin et 114 élèves au second cycle et 104 élèves au premier cycle. Les sujets auxquels le questionnaire a été administré provenaient de l'établissement Jean Piaget de la commune de Cocody. Les élèves ont un âge qui varie de 10 à18 ans.

Quelle la procédure d'enquête ? Les sujets enquêtés durant cette étude ont reçu le questionnaire en situation de groupe. Après avoir donné des consignes, le questionnaire a été administré collectivement en notre présence.

Quels sont, à votre avis, les 5 facteurs les plus importants découlant de l'anxiété et qui ont une incidence sur les apprentissages A l'issu des items du questionnaire de caractérisation ? Nous avons obtenu les résultats suivants :

1.Inquiétude 2. Panique 3. Angoisse 4. Perte des moyens 5. Désorganisation mentale 6. Trou de mémoire 7. Pertes de contrôle 8. Migraines 9. Manque de motivation 10. Envie d'uriner 11. Frustration 12. Désintérêt.

III. RESULTATS

1. Tableau regroupant la taxinomie des items

		Fréquences en % selon les codes 1-2-3 (ou le nombre d'échelons)		
Items	Moyenne	1	2	3
02. Panique	1.41	75.7	7.8	16.5
10. Perte confiance en soi	1.58	63.8	14.2	22.0
01. Inquiétude	1.86	46.8	20.2	33.0
05. Trous de mémoire	1.89	45.4	19.7	34.9
03. Angoisse	2.03	41.3	14.2	44.5
07. Manque de motivation	2.05	33.5	28.0	38.5
04. Perte des Moyens	2.14	29.8	26.6	43.6
11. Frustration	2.14	20.3	45.6	34.1
09. Maux de tête	2.20	11.1	57.6	31.3
12. Désintérêt	2.22	9.6	59.2	31.2
08. Envie d'uriner	2.23	7.4	62.2	30.4*
06. Migraines	2.30	13.8	42.2	44.0

Tableau 1 *–Taxinomie des items*

2. Analyse des similitudes chez l'ensemble des 218 sujets

Le graphe de similitude nous a permis de découvrir trois (03) champs sémantiques relatifs aux déterminants anxiogènes liés aux mathématiques.

Le premier nous présente des liaisons entre les items « trous de mémoire » (.05), « envie d'uriner » (.01) « migraines », et, « trous mémoire » (05) « panique » (5).

Le deuxième champ sémantique est organisé autour des items « frustration » (11) « angoisse » (02), et « frustration » (11) « désintérêt » (5).

Le troisième champ sémantique est structuré autour des items « perte confiance en soi » (12) « manque de motivation ».

Nous remarquons que le champ sémantique (01), avec l'item (05) « trous de mémoire » a le plus grand nombre de liaisons avec l'indice de connexité le plus élevé (5) avec les items (envie d'uriner) et (panique). Nous dirons que cet item est le plus caractéristique, mais ne constitue pas le noyau central de cette représentation sociale chez l'ensemble des sujets sous étude.

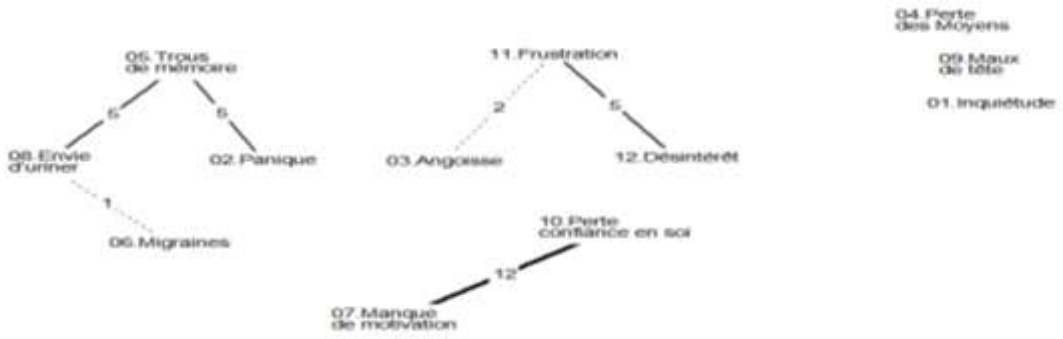


Figure 1 *- Graphe de similitude au seuil 1 associé à la caractérisation des déterminants de l'anxiété chez l'ensemble de la population sous étude.*

3. Analyse des similitudes chez l'ensemble des 100 sujets –garçons

Le graphe-seuil révèle de fortes liaisons entre des items représentationnels.

Le graphe nous présente des liens organisés autour de trois items :

- Des liens autour de l'item « intérêt » cet item a le plus grand nombre de connexions (05), et des indices de liaisons assez élevés entre les items « perte confiance » (8) et « manque de motivation » (8).

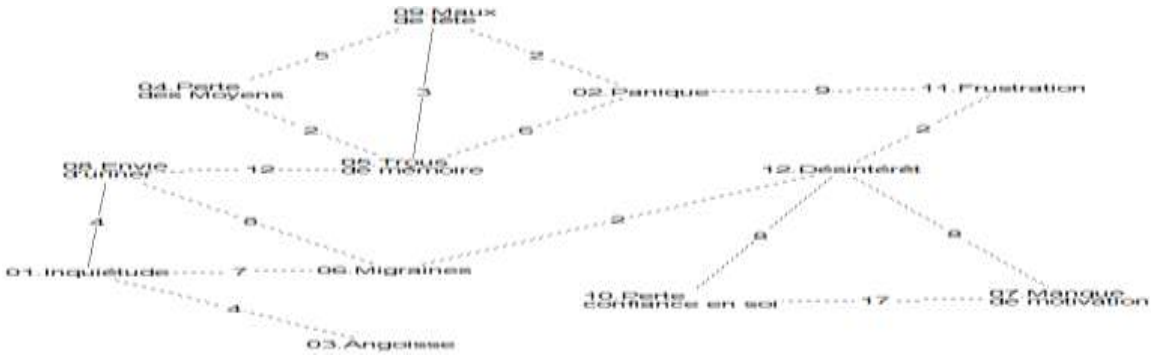


Figure 2 *- Graphe de similitude au seuil 2 associé à la caractérisation les déterminants de l'anxiété chez les garçons*

Le graphe-seuil révèle de fortes liaisons entre des items représentationnels.

Le graphe nous présente des liens organisés autour de trois items :

- Des liens autour de l'item « intérêt » cet item a le plus grand nombre de connexions (05), et des indices de liaisons assez élevés entre les items « perte confiance » (8) et « manque de motivation » (8).

- Le deuxième axe est celui des liaisons entre les items « trous de mémoire » (12) « envie d'uriner », « trous de mémoire » (5) « panique », « trous de mémoire » (3) « maux de tête », « trous de mémoire » (2) « perte des moyens ».

- Le troisième axe est celui qui organise des liens entre l'item « envie d'uriner » (4) « inquiétude », « envie d'uriner » (.8) « migraine ».

Deux items nous apparaissent centraux sur ce graphe :

L'item « désintérêt » et « trous de mémoire ». Ces deux items ont le plus grand nombre de connexité et les indices de lisons les plus forts.

4. Analyse des similitudes chez l'ensemble des 118 sujets –filles

Le graphe de similitude des représentations sociales des déterminants anxiogènes liés aux mathématiques chez les élèves les filles fait apparaitre une organisation autour de l'item « angoisse ». Cet item a le plus de liaisons (3) et un indice de liaison élevé entre cet item (03) (.14) et (02) « panique ». Il apparait comme élément central de la représentation sociale des déterminants anxiogènes liés aux mathématiques.

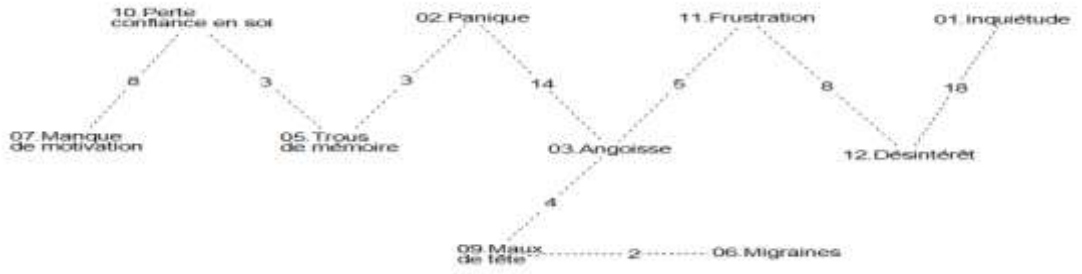


Figure 3 *- Graphe de similitude au seuil 2 associé à la caractérisation les déterminants de l'anxiété chez les filles*

5. Analyse des similitudes chez l'ensemble des 104 sujets au premier cycle

Le graphe de similitude nous a permis de visualiser les liens entre les items de la représentation sociale des déterminants anxiogènes liés aux mathématiques.

L'analyse de ce graphe de similitude révèle que deux items par leur connexité émergent comme éléments centraux de cette représentation sociale.

- Un pôle organisé autour de l'item (08) « envie d'uriner » avec trois liaisons et l'indice de liaison élevé (11) avec (05) « trous de mémoire ».

- Un autre pôle organisé autour de l'item (12) « Désintérêt ». Cet item a un indice de liaison élevé avec l'item (.7) « perte confiance ».

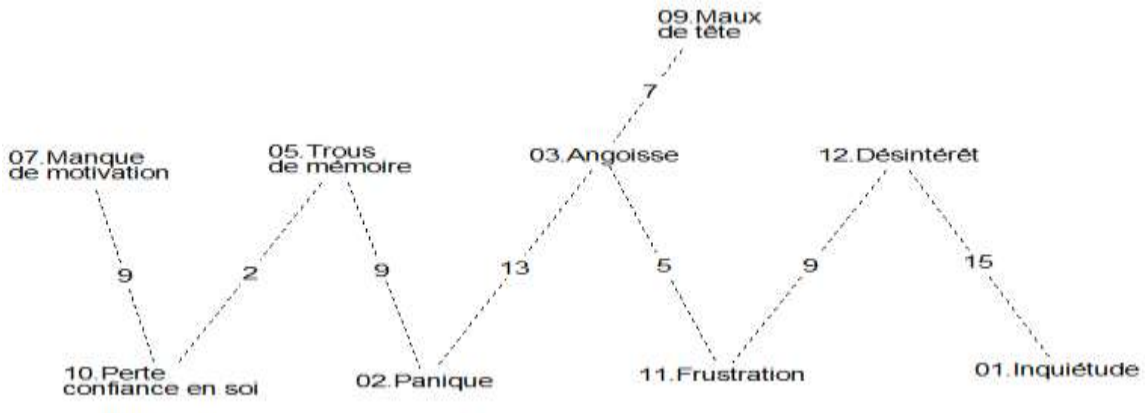


Figure 4 *- Graphe de similitude au seuil 2 associé à la caractérisation les déterminants de l'anxiété chez les élèves du premier cycle*

6. Analyse des similitudes chez l'ensemble des 114 sujets au second cycle

L'examen du graphe de similitude des représentations sociales des déterminants anxiogènes liés aux mathématiques chez l'ensemble de la population sous étude fait

apparaitre une organisation autour de l'item (03) « angoisse ». Cet item a le nombre de liaisons le plus élevé (3) et un indice de liaison élevé avec l'item (5) « frustration ».

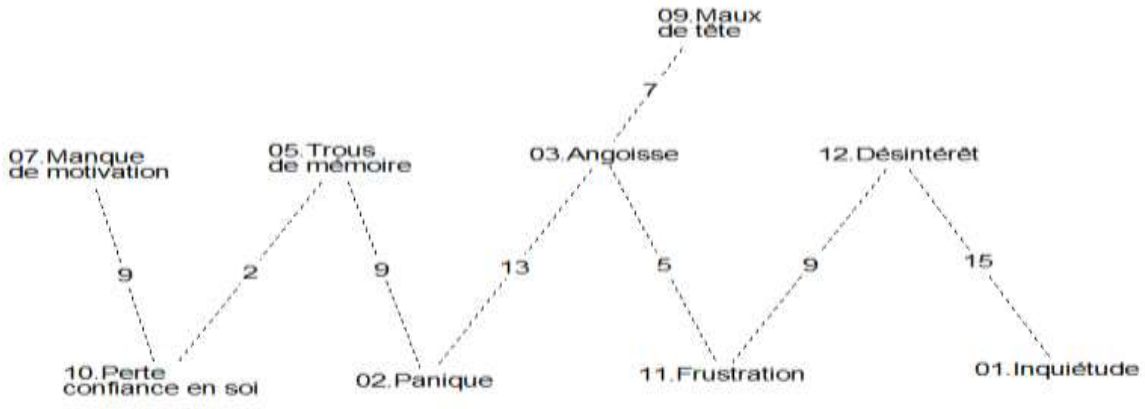


Figure 5 *- Graphe de similitude au seuil 1 associé à la caractérisation les déterminants de l'anxiété chez les élèves du second cycle*

IV. DISCUSSION

La présente étude avait pour objectif de connaitre et d'analyser les représentations sociales construites par les élèves à l'égard des déterminants de l'anxiété, enjeu d'apprentissage face aux difficultés en mathématiques chez les élèves. Et pour ce faire, il fallait déterminer les représentations sociales des élèves et comparer les représentations sociales de ces sous populations. Les hypothèses ont porté sur l'influence du statut d`élève sur les représentations sociales des déterminants de l`anxiété dues aux mathématiques. L'analyse structurale des représentations sociales construites par cette population avait pour but de dégager les éléments fédérateurs des constructions cognitives et de voir si en définitive, la population concernée partage les mêmes principes organisateurs dans la construction de ces représentations sociales.

Au regard des résultats de cette étude nous pouvons affirmer que les constructions que nous avons obtenues indique les représentations sociales des déterminants des échecs stabilisés, bien structurée chez la population sous étude. Cependant, les acteurs et partenaires du système n'ont des représentations sociales univoques et unidimensionnelles des déterminants des échecs aux examens de fins d'années. La position sociale des sujets constitue donc une variable différentielle influençant leurs constructions sociocognitives. Ce qui confirme notre hypothèse de départ qu'il y a un lien entre les déterminants de l'anxiété en mathématique. Ce qui pourrait jouer sur les performances scolaires comme confirment les auteurs comme Servant (op.cit.); La fortune (1992) ; Daigneault, Laurin et Perrault (op.cit.) C'est pourquoi, nous suggérons, pour que l'élève renoue avec les performances scolaire, que l'enseignant agisse à la fois sur le conatif « le moteur des apprentissages » et sur le cognitif « directement lié au savoir ».Car une des missions essentielles des enseignants serait donc de créer un climat de confiance et un contexte pédagogique stimulant qui permettent à chaque élève de retrouver l'estime de soi et de renouer avec la réussite scolaire.

Selon Abric (op.cit.) l'approche structurale emmenée par la théorie du noyau central est l'une des approches élaborée pour l'analyse et l'interprétation des représentations sociales. Sa démarche consiste à décrire et à comprendre l'organisation des éléments constitutifs desdites représentations sociales, et s'avère utile pour l'étude de l'évolution des représentations sociales.

Le capital émotionnel des apprenants rencontre des difficultés liées entre autres, à l'anxiété, à un manque de confiance en soi, à un stress vient perturber la santé et les performances académiques et professionnelles de ce dernier. L'élève est une personne unique, on ne peut isoler le raisonnement intellectuel de son contexte affectif, émotionnel et conatif. Perrudeau (2004) insiste sur l'aspect affectif et son importance dans les apprentissages, où, dit-il, la dimension affective est exacerbée. Les émotions sont au cœur de nos échanges. Des travaux ont porté sur les différences possibles de compétences entre la dimension émotionnelle dans la relation enseignant-élève.

V. CONCLUSION

L'hypothèse du noyau structurant a une conséquence méthodologique. Si toute représentation est organisée autour d'un noyau, toute étude de représentation se doit d'identifier les cognitions constitutives de ce noyau, tout d'abord pour saisir l'organisation de la représentation étudiée, ensuite pour comparer des représentations différentes et enfin, pour estimer l'évolution d'une représentation. Ainsi, à l'aide d'une approche pluri-méthodologique, nous avons cherché à déterminer, à décrire, et à analyser les éléments constitutifs, l'organisation des représentations sociales des conditions de travail chez les enseignants afin de comprendre les modes de réflexion qui guident leurs actions et leurs attitudes.

Nous remarquons que le champ sémantique (01), avec l'item (05) « trous de mémoire a le plus grand nombre de liaisons avec l'indice de connexité le plus élevé (5) avec les items (envie d'uriner) et (panique). Nous dirons que cet item est le plus caractéristique, mais ne constitue pas le noyau central de cette représentation sociale chez l'ensemble des sujets sous étude chez l'ensemble des sujets. Deux items nous apparaissent centraux sur ce graphe : l'item désintérêt et trous de mémoire. Ces deux items ont le plus grand nombre de connexité et les indices de lisons les plus forts chez les sujets masculins tandis que les sujets féminins que c'est l'angoisse qui apparait comme noyau central. Les sujets au collège ont noyaux centraux envie d'uriner et désintérêt quant à ceux sont au second cycle. Au terme de cette étude, trois items apparaissent centraux sur ce graphe : les items désintérêt, angoisse et trous de mémoire.

La reconnaissance des compétences socio-émotionnelles, en tant que produits perfectibles à travers l'éducation et la formation continue, peut mobiliser des efforts soutenus afin de reconnaître leur rôle décisif non seulement dans les relations que les enseignants développent avec leurs élèves. Mais aussi au niveau individuel, en termes de performances et niveau de satisfaction, il y a un parallélisme entre affectivité et les fonctions cognitives c'est à dire entre intelligence et affectivité. L'affectivité intervient dans les opérations d'intelligence qu'elle les perturbe ou les stimule. Quels en seraient les enjeux ?

Les enjeux seraient de développer les compétences émotionnelles des apprenants à partir d'une approche pédagogico-thérapeutique. Bien que la dimension émotionnelle dans la relation enseignant-élève fût négligée, il faudrait agir différemment, c'est que pensent Gendron et La Fortune (2009). Ceux-ci soutiennent qu'aucune activité associée aux activités éducatives ne peut pas se limiter aux activités de nature cognitive, puisque des processus de nature socio-émotionnelle sont impliqués de la même manière et influencent la nature du climat d'enseignement et de mise en relation. Govaerts et Grégoire en concluent qu'« il ne suffit pas, pour une élève, d'être cognitivement convaincu de l'intérêt d'une matière scolaire pour s'y engager. Encore faut-il qu'il le ressente également affectivement. Ce n'est que lorsque cette double condition est remplie que le succès est à la clef. « Et, insistent-ils, il ne

suffit donc pas non d'aider les élèves à gérer leur stress ou leur anxiété lors d'un examen de mathématique pour augmenter leur performance, il est encore mieux de réussir à leur rendre la tâche agréable. »

REFERENCES

Ashcraft, M. H., & Moore, A. M. (2009). Mathematics anxiety and the affective drop in performance. *Journal of Psycho educational Assessment*, 27(3), 197-205.

Abric, J-C. (2003). *Méthodes d'études des représentations sociales*. Saint-agne, Erès.

Abric, J-C. (1994). *Pratiques sociales et représentations sociales.* Paris : PUF.

Daigneault, G., Laurin, A-J., & Perrault, A-C. (2011). *L'apprenti ado : favoriser les apprentissages scolaires des adolescents en tenant compte des fonctions cognitives et du stress.* Montréal Chenelière éducation.

Flament, C. (1981). L'analyse de similitude: une technique pour les recherches sur les représentations sociales. *Cahiers de psychologie cognitive*, 1(4), 377.

Gendron, B. (2008). *Capital émotionnel et éducation. Dictionnaire de l'éducation*. Van Zanten A. (dir.), Paris : PUF.

Gendron, B., & Lafortune, L. (2004). *Leadership et compétences émotionnelles. Dans l'accompagnement au changement*. Québec : Presses de l'Université du Québec.

Govaerts, S., Grégoire, J. (2006). *Motivation et émotions dans l'apprentissage scolaire*. Paris : PUF.

Lafortune, L. (2012*). Pédagogie et psychologie des émotions, vers la compétence émotionnelle*. Québec : PUQ.

Lafortune, L., Massé, B. avec la collaboration de Lafortune, S. (2002). *Chères mathématiques : susciter l'expression des émotions en mathématiques.* Québec : Presses de l'Université du Québec.

Moscovici, S., & Buschini, F. (2003). *Les méthodes des sciences humaines fondamentales*. Paris : Presses Universitaires de France.

Perraudeau, M. (2004). Accompagner les apprentissages. A. Weil-Barais *Les Apprentissages scolaires,* Bréal.

Servant, D. (2003). *Soigner le stress et l'anxiété par soi-même*. Paris : Odile Jacob.

Zakaria, E., & Nordin, N. M. (2008). The effects of mathematics anxiety on matriculation students as related to motivation and achievement. *Eurasia J. Math. Sci. Technol. Educ*. 4, 27-30.

PRISE EN COMPTE DES ERREURS PAR LES ÉLÈVES : LE CAS DES NARRATIONS DE RECHERCHE

FAVIER* Stéphane

Résumé – Ce texte décrit un travail exploratoire mené sur la thématique de l'erreur du point de vue des élèves. Il s'appuie sur l'analyse de narrations de recherche, au secondaire, dans le canton de Genève. La narration de recherche est une modalité de travail écrit qui devrait permettre d'accéder aux erreurs des élèves. Nos analyses montrent que la part du contrat spécifique à l'erreur du côté de l'élève peine à s'imposer face au statut négatif associé à celle-ci.

Mots-clefs : erreur, erreur repérée, narration de recherche, essai, vérification,

Abstract – This text describes an exploratory work conducted on the theme of error in the students' point of view. It is based on the analysis of research narrations, in secondary school, in the canton of Geneva. Narrative research is a form of written work that should show students' errors. Our analyzes highlight that the part of the contract specific to the error on the student's side struggles to prevail against the negative status associated with it.

Keywords: error, identified error, research narration, trial, verification

I. INTRODUCTION

Notre travail doctoral débutant s'intéresse à l'erreur. En particulier, comment sa gestion, par l'élève et l'enseignant, intervient dans les phénomènes d'apprentissage en résolution de problème. Dans ce texte, nous présentons une analyse exploratoire sur cette thématique à partir de données immédiatement exploitables recueillies dans le cadre du travail de Chanudet (Thèse en cours). Ces données correspondent à des narrations de recherche produites par des élèves de 10°LS, profil S[1]. La narration de recherche est le moyen prescrit par le Département de l'Instruction Publique (DIP) du canton de Genève pour évaluer la démarche de résolution de problème. C'est en lien avec cette thématique de l'évaluation du GT9 que nous souhaitons présenter ce travail : évaluation de la narration de recherche par les enseignants mais aussi auto-évaluation pour les élèves dans la mesure où la narration leur permet de mesurer les différentes étapes dans leur démarche. Dans cette communication, nous souhaitons montrer un travail exploratoire sur la façon dont des élèves, en situation de résolution de problème complexe, repèrent et éventuellement rectifient leurs erreurs. Après une brève revue de littérature sur la notion d'erreur, nous présenterons le contexte spécifique de ce recueil de données. Une analyse de ces données nous permettra d'interroger le statut de l'erreur dans la narration de recherche, la dimension de vérification des résultats ou conjecture trouvés par les élèves et la dialectique entre erreur repérée et essai.

II. L'ERREUR DANS LA LITTÉRATURE DE RECHERCHE

Le Centre National de Ressources Textuelles et Lexicales (CNRTL) définit l'erreur comme « action, fait de se tromper, de tenir pour vrai ce qui est faux et inversement ».

Dans le contexte de l'enseignement, Astolfi (1999) décrit trois conceptions de l'erreur.

- L'erreur vue comme une faute, dont la charge incombe à l'élève et est sanctionnée par l'enseignant. Cette conception reflète un modèle à dominante transmissive.

* Université de Genève – Suisse – stephane.favier@unige.ch

[1] En Suisse romande la classe de 10e correspond au deuxième des trois niveaux du secondaire 1, Grade 8, élèves de 13-14 ans. LS signifie qu'ils ont choisi la filière littéraire et scientifique, et profil S pour scientifique.

- L'erreur vue comme un bug. Dans ce cas, c'est le concepteur de la séance qui en a la responsabilité. Le modèle behavioriste est sous-jacent à cette conception.

- Enfin, dans les modèles constructivistes, les erreurs « deviennent les symptômes intéressants d'obstacles auxquels la pensée est affrontée » (p. 15). L'erreur a ainsi un statut plus positif, elle est « la trace d'une activité intellectuelle authentique » (p. 45).

Plaçons-nous à présent dans le champ de la didactique des mathématiques. Prenons un élève engagé dans la recherche d'un problème mathématique. La résolution va conduire à modifier le milieu. Selon Brousseau (2001), les écarts entre les états actualisés du milieu et le projet de l'élève vont être interprétés par lui (ou une autre personne). Il parle d'erreur lorsque ces écarts sont jugés négatifs, c'est-à-dire qui ne permettent pas de progrès vers le but visé. Nous retrouvons cette idée d'écart entre « le produit attendu et la production de l'élève » (p. 83) chez Ravestein et Sensevy (1993) qui l'associent à la « partie publique du rapport au savoir de l'élève, celle qui se montre à tous » (p. 84). Si l'enseignant mesure l'écart entre la tâche prescrite à l'élève et la tâche effective de l'élève (pour reprendre les termes de la psychologie ergonomique) il n'obtient pas pour autant des « informations concernant l'activité réelle de l'élève au travail, les procédures qu'il met en œuvre et les processus qu'il active » (Ibid). Ces deux auteurs proposent ainsi de considérer l'erreur comme une décision parmi toutes les possibilités qui s'offrent à l'élève. Cela concerne le « rapport privé de l'élève au savoir, c'est-à-dire sa manière très personnelle, unique, de ''s'approprier'' ce qu'on lui enseigne » (p. 85). Brousseau (2001) suggère que l'élève interprète les écarts et prend les décisions « après chaque action à l'aide d'indices et de connaissances » (p. 6). De leur côté, Ravestein et Sensevy (1993) évoquent « un système d'auto-régulation » (p. 84). Ainsi, si un élève dispose des connaissances permettant d'effectuer les bons choix, il est envisageable qu'il ne les utilise pas de manière correcte. En ce sens, nous parlons d'erreur. Par contre, dans le cas où les connaissances ne sont pas disponibles pour l'élève, nous ne considérons pas qu'il s'agisse d'une erreur. Nous distinguons également l'erreur de la faute par la « composante ''morale'' » (Brousseau, 2001, p. 15) que comprend cette dernière qui ne concerne donc pas des élèves en cours d'apprentissage.

Si l'erreur, dans sa conception constructiviste, est au cœur du processus d'adaptation, nous constatons qu'il y a finalement peu de travaux spécifiques qui lui sont dédiés. Enfin, Brousseau (2001) souligne qu' « une erreur doit être rapportée à un moment précis d'une situation, et à une connaissance ou à un savoir déterminés qui permettent de la concevoir » (p. 8). Précisons donc à présent le contexte et les caractéristiques des données que nous avons analysées.

III. LE CONTEXTE

1. Le cours de Développements en mathématiques

Une spécificité cantonale propre au contexte genevois du Plan d'Etudes Romand (PER) prévoit, pour les élèves de 10°LS profil S, une période hebdomadaire intitulée Développements en mathématiques (DIP, 2012) qui s'appelle aujourd'hui Démarches mathématiques et scientifiques (DIP, 2017). L'objectif de cet enseignement est de contribuer au « renforcement et au développement des capacités et des compétences des élèves dans les stratégies de résolution de problèmes et les activités de situations mathématiques » (DIP, 2012). Ces prescriptions institutionnelles proposent également aux enseignants d'évaluer les travaux de leurs élèves par une narration de recherche (Bonafé *et al*., 2002). Dans ce cas, un nouveau contrat est passé avec l'enseignant-e : l'élève s'engage à raconter du mieux possible toutes les étapes de sa recherche, à décrire ses erreurs, comment lui sont venues de nouvelles

idées ; en échange, l'enseignant-e s'engage à faire porter son évaluation sur ces points précis sans privilégier la solution. (DIP, 2012, p. 22).

2. Le problème

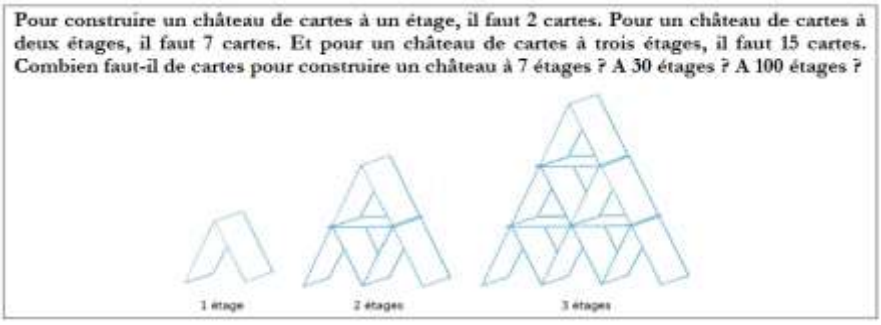


Figure 1 *– Enoncé du problème*

Dans le cadre du travail de Chanudet, nous avons pu recueillir 71 narrations de recherche transmises par 34 enseignants répartis sur 15 des 19 cycles d'orientation[2] du canton de Genève. Il s'agit du problème du *château de cartes*[3] :

Les conditions de passation (nombre de périodes, modalités de travail, etc…) ont relevé du choix de chaque enseignant. A l'issue de ce travail, chacun a sélectionné deux (ou trois) copies qui lui paraissaient représentatives en prenant soin d'écarter les productions aux contenus extrêmes. Ces 71 narrations de recherche ont été analysées sous l'angle des erreurs.

La narration de recherche est un exercice écrit qui conduit l'élève à donner à voir ses erreurs, qui les valorise : « Le droit à l'erreur est reconnu et intangible » (Bonafé et al, 2002, p. 16). Ceci étant, nous avons conscience qu'une limite de ce travail tient au fait que même si l'élève est encouragé à expliciter ses erreurs, il est probable qu'il ne narre pas tout ce qu'il fait. Aussi, nous veillerons à ne pas sur-interpréter certains éléments de ces productions.

3. Typologie a priori des erreurs

Voici de manière synthétique les différentes erreurs relatives à la résolution de ce problème:

- Erreurs de comptage sur les dessins de châteaux comportant 4 étages ou plus ;

- Erreurs de calcul ou assimilées :

• Erreurs liées à la gestion de la récurrence : certaines procédures arithmétiques nécessitent de mener de front l'incrémentation des étages, le nombre de cartes par étage et éventuellement total et l'augmentation qui incrémente également d'un étage à l'autre ;

• Erreurs de calculs (mental, posé, utilisation de la calculatrice) ou de gestion des opérations du type : n*2+ (n-1)*2+…+2*2+1*2 ;

- Erreurs de raisonnement :

• Erreurs liées à l'énumération : les élèves peuvent recourir à des décompositions du château par étages (ou autres…) pour repérer un mode de calcul ou générer une formule. Ces décompositions peuvent entraîner des oublis ou des recomptages de certaines parties ;

[2] Qui correspond aux 3 années de secondaire1, l'équivalent du collège en France.
[3] Chanudet (2017) propose une analyse *a priori* et une synthèse des procédures mises en œuvre par les élèves dans la *Revue de Mathématiques pour l'école n°228, p4-13.*

- Erreurs de conjecture ou formule (arithmétique ou algébrique) : après avoir trouvé le nombre de cartes pour les châteaux à 4, 5, 6 (ou plus) étages, les élèves peuvent émettre une conjecture ou proposer une formule erronée ;
- Erreurs liées à l'utilisation de la proportionnalité induite par le fait que ce problème met en jeu deux grandeurs (nombre d'étages et nombre de cartes) dont l'augmentation est corrélée ;

- Erreurs relatives au sens de la preuve : par exemple affirmer qu'une conjecture ou une formule est valide pour toutes les valeurs d'étages après avoir testé sa validité seulement sur une ou deux valeurs particulières.

Cette typologie va nous servir de point d'appui pour explorer comment l'erreur vit dans une situation qui lui est favorable.

IV. ANALYSE

1. Statut de l'erreur dans la narration de recherche : les erreurs non repérées

Nous avons analysé ces 71 productions au regard des erreurs qu'elles comportaient. Nous avons listé toutes les erreurs à savoir celles que l'élève a décrites parce qu'il les avait repérées et celles qui restaient effectivement, non décelées par l'élève ou en tout cas non corrigées par lui. Il ressort une seule erreur de comptage du nombre de cartes d'un château à 7 étages (75 cartes au lieu de 77). Ceci semble confirmer (sans être une surprise) que cette procédure est maîtrisée par ces élèves. Nous n'évoquons pas ici les erreurs relatives au sens de la preuve c'est-à-dire les cas où l'élève vérifie que sa conjecture ou formule est valide sur un ou deux exemples et qu'il la déclare valide pour tous les cas. A ce niveau de leur scolarité, ces élèves ne disposent pas des connaissances nécessaires pour prouver de telles conjectures.

Ainsi, nous avons repéré 18 erreurs de calcul ou assimilées. Il est souvent difficile de déterminer avec certitude l'emplacement exact de l'erreur dans ces cas, d'autant que les élèves pouvaient utiliser la calculatrice. Observons la production n°1. Le raisonnement est correct toutefois la réponse fausse révèle une erreur qui pourrait être au niveau de la gestion des calculs ou bien une ou plusieurs fautes de frappe, l'oubli de 1 dans la dernière opération, etc…

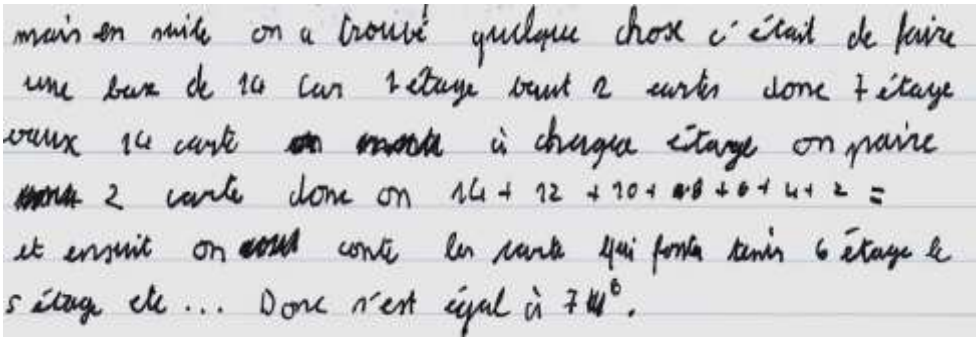

mais ensuite on a trouvé quelque chose c'était de faire une base de 14 car 1 étage vaut 2 cartes donc 7 étages vaux 14 carte on ajoute à chaque étage on paire 2 carte donc on 14 + 12 + 10 + 8 + 6 + 4 + 2 = et ensuit on compte les carte qui font tenir 6 étage le 5 étage etc ... Donc n'est égal à 77.

Figure 2 *– Production n°1*

Ce nombre d'erreurs est à mettre en relation avec la quantité de calculs à effectuer et ne nous apparaît pas significatif.

Nous avons relevé 28 erreurs liées au raisonnement. Par exemple, l'élève n°2 trouve le bon nombre de triangles (435) mais ne multiplie pas par 3 pour obtenir le nombre de cartes

correspondant. Une autre erreur de raisonnement concerne l'élève n°3 qui utilise la proportionnalité entre le nombre d'étages et le nombre de cartes.

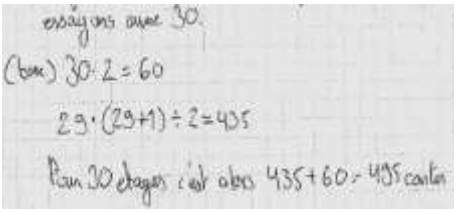


Figure 3 *– Production n°2*

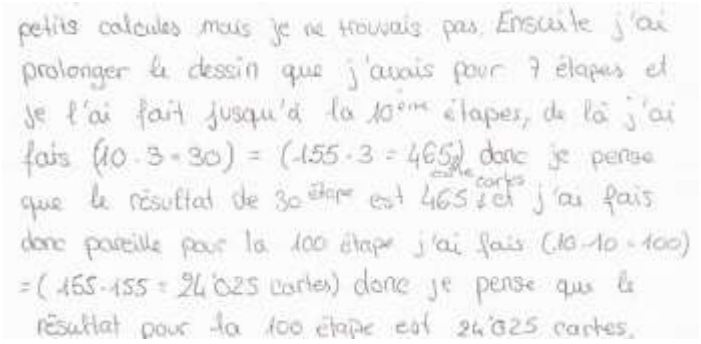


Figure 4 *– Production n°3*

Au-delà de ces catégories et de manière plus qualitative, nous constatons que certaines erreurs auraient pu (dû ?) être décelées par une tentative de vérification. Le premier exemple (production n°4) fait appel aux connaissances en calcul mental tandis que le suivant (production n°5) tient en la vérification du caractère plausible de la réponse au regard des différents éléments trouvés.

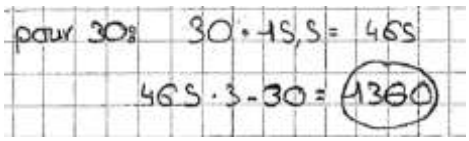


Figure 5 *– Production n°4*

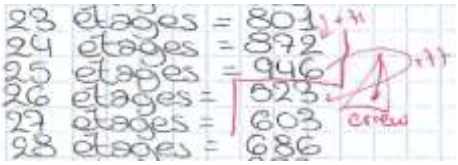


Figure 6 – *Production n°5*

Ces deux cas semblent mettre en évidence que les élèves n'interrogent pas les résultats qu'ils obtiennent. En effet, inutile de refaire les calculs pour trouver que 523 ne correspond pas à 946 auquel on aurait rajouté un certain nombre de cartes.

Dans le même ordre d'idée, la production suivante montre que si cet élève est bien dans une démarche de recherche, lorsqu'il parvient à émettre une conjecture, il ne la vérifie pas en la confrontant aux réponses qu'il avait trouvées précédemment. C'est d'autant plus regrettable que cela lui aurait permis de repérer une erreur de comptage sur le dessin du château à 7 étages qu'il a commise plus haut.

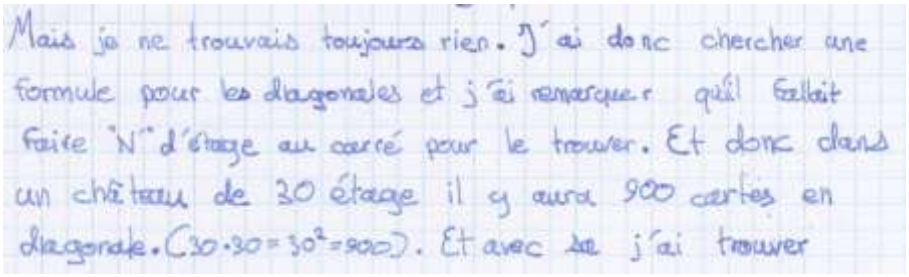


Figure 7 *– Production n°6*

2. Statut de l'erreur dans la narration de recherche : les erreurs repérées

Au total, nous avons pointé 12 erreurs repérées par les élèves eux-mêmes (qui concernent toutes la catégorie liée aux erreurs de raisonnement). Or, la narration de recherche est un dispositif qui encourage l'élève à décrire toute son activité, y compris les fausses routes et les erreurs qu'il a pu commettre. Il est très clairement précisé que c'est aussi important que de donner la seule bonne réponse. On pourrait donc légitimement s'attendre à ce que les élèves

décrivent souvent des erreurs et comment ils les ont éventuellement surmontées ou pas. Or sur notre échantillon, seuls 12 élèves (environ 17%) décrivent explicitement leurs erreurs. Cela conduit à nous interroger sur la place de l'erreur du point de vue des élèves. Plusieurs hypothèses sont possibles :

1) soit les élèves ne font qu'une seule tentative qui correspond à ce qui est écrit ;

2) soit ils narrent seulement la dernière piste envisagée dans leur recherche négligeant les premiers essais. Cela semblerait laisser penser que le statut négatif de l'erreur l'emporte sur le nouveau contrat didactique que tente d'instaurer la narration de recherche. Selon ce nouveau contrat on devrait attribuer une valeur heuristique à l'erreur dans ce type de problème. En effet, faire des essais dans des voies qui n'aboutissent pas ou s'avèrent incorrectes fait partie du jeu et est normal sur le chemin qui mène à la bonne réponse. L'analyse d'une erreur apparaît dès lors comme un moyen important de progresser, contrairement au contrat classique dans lequel, il ne faut surtout pas montrer les erreurs associées à la faute et donc vouées à rester cachées.

3) Il est aussi fort probable que les élèves ne sont pas entraînés à chercher leurs erreurs et donc à seulement les voir.

Par ailleurs, un autre point a attiré notre attention : une dizaine de copies montrent des formules qui ne sont pas expliquées ou n'ont aucun lien apparent avec les éléments narrés. Nous pensons que ces élèves ont trouvé cette formule sur internet ou ont demandé de l'aide à leur entourage (parents, camarades[4]). Pour 6 d'entre-elles, la formule est fausse. Cela tend à confirmer que le contrat de la narration de recherche ne parvient pas s'imposer pour ces élèves qui accordent plus de valeur à la réponse (même si elle risque de ne rien leur apprendre) qu'à la phase de recherche du problème.

3. Erreur repérée versus essai

Selon Auriac et Fiard (2006) "l'élève doit dépasser cette émotion, apprendre aussi à élucider son faire, à accepter de commettre l'erreur, mais aussi que ce n'est plus tout à fait une erreur que de dire que l'on a fait une erreur." (p. 190). Aussi, dans cette partie, nous allons nous intéresser plus particulièrement à ce que nous avons appelé les erreurs repérées plus haut. Est-il acceptable de les considérer comme des erreurs ou devrait-on plutôt leur attribuer le statut d'essai ?

Les textes de cadrage de la narration de recherche et les programmes officiels genevois ne donnent pas d'éléments supplémentaires sur ce point. L'un et l'autre associent comme c'est classiquement le cas, les termes essais et erreurs: « [les élèves] montrent leurs essais et leurs erreurs » (Bonafé et al, 2002, p. 147), ou dans les critères d'évaluation de la narration : « précision du récit (essais, idées, erreurs, voies sans issues,...) » (DIP, 2012, p. 57) sans les préciser davantage. L'erreur évoquée dans ces textes correspond effectivement à ce que nous appelons erreur repérée car pour que l'élève ait la possibilité de l'évoquer en tant que telle, il faut qu'il l'ait repérée au préalable.

Parmi ces erreurs repérées (conservons encore l'expression), six d'entre-elles correspondent à des formules (ou conjecture pour une élève) qui ont été invalidées par rétroaction avec le milieu. La production suivante est représentative de ce point :

[4] En effet, dans certains cas la narration de recherche a été rédigée une semaine après la première séance sur le problème.

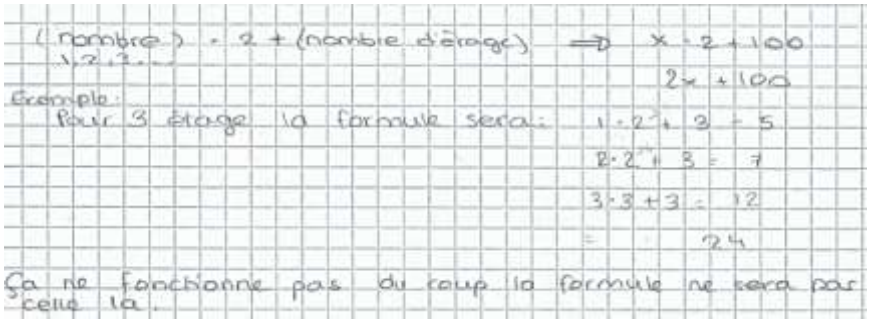


Figure 8 *– Production n°7*

Avec une analyse plus fine de ces productions, nous remarquons que suite à des essais numériques (dessins puis comptage dans la plupart des copies) pour des châteaux à 4, 5, 6 (ou plus) étages, les élèves repèrent un lien entre les nombres ou un mode de calcul et établissent une formule. Cette formule est ensuite invalidée par le milieu ce qui conduit au repérage d'une erreur. Dans ce cas, il s'agit d'une démarche par essais-erreur. C'est la confrontation des différents essais qui permet d'établir la formule. L'erreur porte dans ce cas sur la formule (conjecture) et non pas sur les réponses trouvées lors des essais numériques.

D'ailleurs, l'expression essais-erreurs désigne également une autre stratégie qui consiste à tester une valeur numérique comme réponse potentielle à un problème. Si ce n'est pas la réponse correcte, un nouvel essai est nécessaire. Dans ce cas, chaque essai utilisé avec pertinence permet d'avancer vers la solution. Cela induit une différence de statut nette en ce qui concerne l'essai. Même remarque pour l'erreur qui est ici à comprendre comme réponse non correcte au problème car d'un point de vue strictement mathématique, il n'y a pas d'erreur.

Les deux productions suivantes vont nous permettre de préciser un peu plus et d'illustrer en lien avec un raisonnement proportionnel les différences de statut entre erreur repérée et essai. Dans la production n° 8, l'élève souhaite mettre en œuvre l'outil de la proportionnalité. Puis, il invalide cette idée en développant un raisonnement un peu approximatif mais correct sur le fond. Nous pensons qu'il s'agit effectivement d'une erreur dans le sens où l'élève a eu besoin de détailler ses arguments pour convaincre et se convaincre que cette situation ne relève pas de la proportionnalité. La force de sa conviction révèle l'ancrage et par voie de conséquence le statut d'erreur de cette idée pour cet élève.

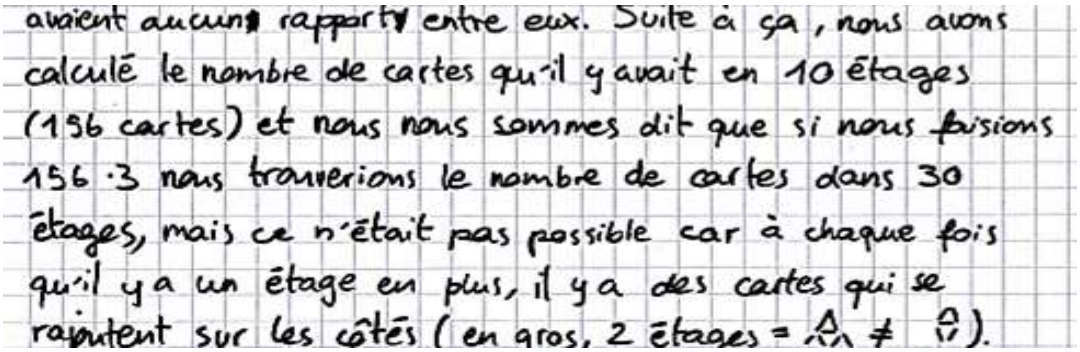

avaient aucuns rapports entre eux. Suite à ça, nous avons calculé le nombre de cartes qu'il y avait en 10 étages (196 cartes) et nous nous sommes dit que si nous faisions 156 · 3 nous trouverions le nombre de cartes dans 30 étages, mais ce n'était pas possible car à chaque fois qu'il y a un étage en plus, il y a des cartes qui se rajoutent sur les côtés (en gros, 2 étages = △ ≠ ▽).

Figure 9 *– Production n°8*

Dans la production n° 9, la piste proposée par cet élève nous semble plutôt correspondre à un essai. En effet, stratégiquement, il est peu coûteux de tester si le nombre d'étages et le nombre de cartes sont des grandeurs proportionnelles. Si tel avait été le cas, le problème aurait très vite été résolu. C'est ce que fait rapidement cet élève. L'argument numérique pour invalider la proportionnalité est très efficace. Cela semble laisser penser qu'il n'y croyait pas

beaucoup mais qu'il l'a quand même testé rapidement d'où le statut d'essai qui se situe ici au niveau de l'outil mathématique mis en œuvre.

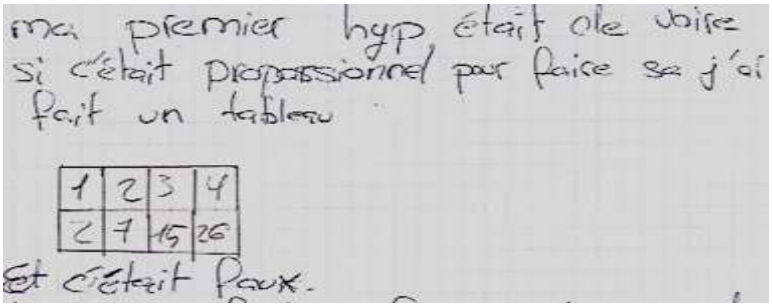


Figure 10 *– Production n°9*

Nos données ne nous permettent pas de préciser plus cet écart, seulement d'ouvrir la question de la caractérisation de la différence entre essai et erreur (repérée) propre à la narration de recherche.

V. DISCUSSION

En analysant ces copies, nous avons rencontré des erreurs liées à la résolution du problème en elle-même mais aussi des erreurs repérées et racontées par les élèves du fait du caractère particulier de la narration de recherche. Parmi celles liées à la résolution du problème et donc non identifiées par l'élève, certaines permettent de mettre en évidence que ces élèves ne disposent pas ou ne mettent pas en œuvre un processus de vérification du travail. Les productions choisies ici illustrent plusieurs aspects non exhaustifs: test rapide du résultat d'un calcul grâce à des connaissances de calcul mental (production n°4), cohérence d'un résultat (production n°5) ou encore test d'une conjecture (production n°6).

Le faible nombre d'erreurs repérées et explicitées, alors que cela fait clairement partie du contrat, semble révéler un statut négatif de l'erreur. Celle-ci pourrait ne pas être perçue comme un point d'appui, une étape du raisonnement mais plutôt comme un accident de parcours à dissimuler. Si tel est le cas dans ces conditions favorisantes, cela conduit à penser que ces élèves ne sont pas dans un paradigme constructiviste.

Enfin, une analyse plus fine des narrations de ces erreurs identifiées fait apparaître une diversité au niveau de la précision de l'argumentation. De prime abord, nous pourrions associer une argumentation détaillée à la performance de l'élève. Toutefois, nous avons envisagé une deuxième interprétation : plus une idée est ancrée pour un élève, plus son argumentation nécessite d'être détaillée pour en justifier (pour autrui mais aussi pour soi) l'abandon. C'est à ce niveau que nous proposons de situer l'écart entre un essai et une erreur dans l'analyse d'une narration de recherche.

VI. CONCLUSION

Le champ de la didactique des mathématiques montre une certaine unité au sujet du statut que devrait avoir l'erreur en mathématiques dans une perspective constructiviste. Pour autant, une situation comme celle de la narration de recherche qui pourrait installer un nouveau contrat relatif à l'erreur peine à s'imposer face au statut négatif de celle-ci comme étant quelque chose à cacher (à l'enseignant). On peut se demander ce qu'il en est des situations plus classiques de classe. Dans cette étude prospective, nous soulevons par ailleurs la question de la dialectique essai/erreur, ce point mérite toutefois d'être approfondi. Ces termes ont des

significations très différentes, pourtant l'utilisation de l'un ou l'autre pour qualifier certaines productions d'élèves est parfois discutable.

Pour conclure nous citerons un document de l'IREM d'Aquitaine (2013) :

> l'erreur doit être dissociée du résultat erroné qui n'en est que la conséquence. Se rendre compte que l'on a commis une erreur fait partie du processus d'apprentissage. Avoir du recul pour la repérer et la corriger est une partie importante de l'activité mathématique réelle des élèves en classe. (p. 8)

Si repérer une erreur fait partie du processus d'apprentissage, est-ce que cela fait partie effectivement du processus d'enseignement ? Est-ce que l'on enseigne aux élèves à avoir ce recul nécessaire pour repérer les erreurs ou vérifier certains résultats?

REFERENCES

Astolfi, J.-P. (1999). *L'erreur, un outil pour enseigner* (3e éd.). Paris: ESF éditeur.

Auriac, E., & Fiard, J. (2006). *L'erreur à l'école. Petite didactique de l'erreur scolaire*. Editions L'Harmattan.

Bonafé, F., Chevalier, A., Combes, M.-C., Deville, A., Dray, L., Robert, J.-P., & Sauter, M. (2002). *Les narrations de recherche de l'école primaire au lycée*. Paris; Montpellier: APMEP ; IREM de Montpellier.

Brousseau, G. (2001). Les erreurs des élèves en mathématiques. *Etudes dans le cadre de la théorie des Situations Didactique./Petix x, 57*, 5–30.

Chanudet, M. (2017). Le problème des châteaux de cartes. *Revue de mathématiques pour l'école*, (228), 4–13.

CNRTL. (s. d.). Erreur. Consulté à l'adresse http://www.cnrtl.fr/definition/erreur

Département de l'Instruction Publique, de la culture et du sport. (2012). Profil Scientifique 10° LS Développements en mathématiques.

Département de l'Instruction Publique, de la culture et du sport. (2017). Compléments cantonaux - Démarches mathématique et scientifiques (DMS) 10e-11e S.

IREM d'Aquitaine Groupe Didactique. (2013). L'erreur dans l'apprentissage des mathématiques. *Petit x, 93*, 7‑28.

Ravestein, J., & Sensevy, G. (1993). Statuts de l'erreur dans la relation didactique. *Grand N, 54*, 83-90.

RAPPORTS AUX MATHEMATIQUES DES ENSEIGNANTS DU PRIMAIRE ET LEUR ENSEIGNEMENT

GOUDENON* Martine épouse Bley

Résumé - Cette communication met l'accent sur les rapports aux mathématiques des enseignants au primaire. Malgré leur importance, l'enseignement des mathématiques rencontre encore des difficultés à l'école. Les résultats indiquent que l'intérêt des enseignants pour les mathématiques à ce niveau de scolarité, influence leurs pratiques qui, à leur tour, déterminent les représentations des apprenants de la discipline.

Mots clés : Rapports aux mathématiques, mathématiques, pratiques enseignantes, représentations, primaire.

Abstract - This paper focuses on mathematics relationships of primary school teachers. Despite their importance, mathematics education still struggles at school. The results indicate that teacher's interest in mathematics at this level of education influences their practices, which in turn determine learner's representations of this discipline.

Key words: Reports to mathematics, mathematics, teaching practices, representations, primary.

I. INTRODUCTION GENERALE

L'enseignement des mathématiques figure de façon générale parmi les discussions sur la qualité des pratiques enseignantes. Pour Nimier cité par Adihou (2011), les mathématiques, malgré leur contribution au développement d'habiletés intellectuelles et psychomotrices sont enseignées difficilement au primaire. En effet, nombre d'enseignants montrent une absence de motivation et leur moindre enthousiasme dans leurs pratiques enseignantes dans cette discipline. La présente étude situera les niveaux de rapports aux mathématiques chez les enseignants du primaire et leur impact.

Eudes (2016) identifie les rapports aux mathématiques comme le savoir, le savoir-faire, la compétence, la maîtrise, l'image mentale, en d'autres termes, comme les représentations et l'intérêt porté aux mathématiques. Pour Briand (2014**),** cette discipline est l'ensemble de sciences ayant pour objet la quantité et l'ordre. Pour le Conseil Supérieur de l'Education du Québec (1985), l'enseignement des mathématiques consiste en une reconstitution personnelle d'un ensemble de signes conventionnels destinés à accroître la maîtrise de la réalité.Reuter (2007) identifie les représentations chez les apprenants comme la manière dont les élèves reconstruisent les disciplines scolaires.

Calmel (2012) remarque que chaque enseignant du primaire a eu un parcours fait d'orientations induisant des choix disciplinaires par abandons successifs ou priorités de plus en plus réduites. Ainsi, les fréquents dysfonctionnements observés dans l'enseignement des mathématiques donnent lieu à plusieurs types d'enseignants et d'apprenants, avec des perceptions différentes. Adihou (2011) révèle que l'anxiété, la motivation, la confiance en soi et l'affectivité sont des facteurs qui agissent sur l'enseignement des mathématiques. Tabolt (2012) note que les pratiques efficaces d'enseignement permettent les bonnes performances des apprenants. Le Conseil Supérieur du Québec (1985) indique qu'on peut améliorer les rapports aux mathématiques des enseignants par la formation de base qui doit être adéquate et approfondie. Les études de l'ODCE selon Boesen et Helenius (2009) montrent que les élèves sont moins enthousiastes pour les Mathématiques, contrairement au Français. Les

* Laboratoire d'études et de prévention en psychoéducation (LEPPE), Ecole Normale Supérieure -Abidjan– Côte d'Ivoire – bleymartine@ gmail.com

recherches de Gazette (2004) révèlent que les Mathématiques sont enseignées au primaire dans le cadre d'une scolarité prolongée.

Ces écrits, bien que pertinents, n'insistent pas sur les rapports aux mathématiques des enseignants du primaire avec leur influence sur la qualité des pratiques sur le terrain. Il s'agit d'orienter la recherche dans le sens de décrypter cette relation.

Les mathématiques en Côte d'Ivoire sont une discipline fondamentale dans le primaire selon le circulaire n^{o} 3397/MEN/DPFC/OGI du 1er Août 201. Cependant, seuls les documents officiels en mathématiques, à savoir le guide pédagogique et le livre –élèves sont utilisés par les enseignants du primaire, comme les uniques référents, pour la préparation de leurs cours. Parallèlement, subsistent des difficultés d'enseignement chez ces derniers dans la discipline. Cette situation induit la question suivante : Quelle est la qualité des rapports aux mathématiques chez les enseignants du primaire? En d'autres termes, les pratiques enseignantes en mathématiques des enseignants du primaire sont- elles liées à ces rapports ? Quel est l'effet de ces rapports sur l'apprentissage des élèves dans cette discipline ?

Cette étude vise à analyser les rapports aux mathématiques des enseignants du primaire avec les mathématiques et leurs pratiques dans cette discipline, puis établir un lien entre ces rapports les apprentissages des élèves au cours primaire.

L'hypothèse de cette étude stipule que l'efficacité de l'enseignement des mathématiques au primaire est liée aux rapports aux mathématiques des enseignants. Plus ces rapports sont développés, plus l'enseignement est efficace, et plus les apprenants ont une représentation positive de la discipline.

Cette étude se réfère à la théorie de l'approche de psychologie ergonomique de l'activité de l'enseignant de Rogalski (2007). Celle-ci stipule que l'activité de l'enseignant répond à une double régulation des éléments centraux qui sont du côté de la situation de travail (les programmes et les instructions, les propriétés de l'apprenant, les ressources mobilisables, les contraintes qui pèsent sur l'action), et du côté de l'enseignant (ses compétences vis-à-vis du contenu enseigné et de l'intervention didactique sur les apprenants, les représentations qu'il se fait de son travail, l'autonomie qu'il se donne pour agir, la gestion de ses émotions et de son état). Cette théorie servira pour vérifier si la pratique enseignante en mathématiques au primaire prend en compte cette double régulation.

Les rapports aux mathématiques étant des rapports aux savoir, cette étude prend appui sur la théorie du rapport au savoir de Charlot (2012) qui stipule que le rapport au savoir est l'ensemble des relations qu'un sujet entretient avec tout ce qui relève de « l'apprendre et du savoir ». C'est un processus par lequel un sujet, à partir des savoirs acquis, produit de nouveaux savoirs singuliers, lui permettant de penser, de transformer, de sentir le monde matériel et savant. Il est à la fois relation de sens et de valeur, c'est-à-dire qu'une personne valorise ce qui prend du sens pour elle et à l'inverse, elle donne du sens à ce qui représente une valeur pour elle. Le rapport au savoir répond à la question pourquoi apprendre et qu'est-ce-qu' apprendre. Cette théorie aidera à comprendre quelle valeur, les enseignants du primaire accordent aux mathématiques et si les enseignants parviennent à transformer leurs connaissances en mathématiques en vue d'un enseignement efficace.

II. METHODOLOGIE

Site et participants à l'enquête

Le terrain de recherche est constitué d'un ensemble de cours moyens première et deuxième années des écoles primaires privées et publiques dans les zones urbaines et périurbaines. La Population cible est constituée des enseignants de ces écoles. L'échantillon est constitué de trente (30) enseignants qui ont pu remettre les questionnaires, avec celui raisonné des apprenants des deux types de classes.

Techniques de collecte des données

Les données ont été recueillies à partir d'un questionnaire adressé aux enseignants, relatif à leur niveau de formation des programmes enseignés dans la classe, ressources utilisées pour les cours)

L'enquête a nécessité une observation des pratiques enseignantes dans les classes (procédés utilisés- maîtrise des concepts mathématiques- technique opératoire personnelle- activités proposées pertinentes- travail de groupe- évaluation adaptée- fixation du concept étudiée).

Un entretien individuel semi dirigé relatif aux rapports aux mathématiques chez les enseignants (affectivité- estime de soi- utilité des mathématiques- utilisation d'autres documents pertinents pour la préparation du cours) a été utilisé pour consolider les informations

Un focus groupe avec les apprenants dans les classes, relatif à leurs représentations des mathématiques **(**affectivité – estime de soi- utilité des mathématiques) a situé leur perception des mathématiques.

Les élèves sont choisis au hasard, au nombre de quatre (4) ou cinq (5) par classe, selon que l'effectif est situé entre 40 et 50 élèves ou au-delà de 50 apprenants.

Méthodes d'analyse des données

L'analyse qualitative est utilisée. Il s'agit de l'analyse de contenu selon Walin (2007), exécutée à partir de la sélection des données obtenues qui sont regroupées en catégories pour caractériser les rapports aux mathématiques et les pratiques enseignantes. Puis un lien est fait à partir des tris croisés entre rapports et pratiques enseignantes puis entre pratiques enseignantes et représentations des élèves.

III. RESULTATS

Identification des enquêtés

Enseignants				élèves			
Séries d'études	Hommes	femmes	total	classes	Filles	garçons	total
scientifiques	7	3	10	Cm1	23	30	53
Littéraires	8	5	13	Cm2	36	36	72
autres	4	3	07	total	59	66	125
total	19	11	30				

Tableau 1- *Caractéristiques des enquêtés*

L'étude a concerné 10 enseignants à profil scientifique, dont 7 hommes et 3 femmes, puis 13 enseignants à profil littéraire dont 8 hommes et 5 femmes, et enfin 7 enseignants issus du premier cycle du secondaire dont 4 garçons et 3 femmes, soit 30 enseignants. Elle a aussi utilisé 59 filles dont 36 au CMI et 23 au CMII, puis 66 garçons dont 30 au CM1 et 36 au CMII, soit 56 apprenants au CMI et 59 au CMII, soit au total 125 apprenants.

Caractérisation des rapports aux mathématiques

Qualité des rapports / Types d'enseignants		Bons rapports	Mauvais rapports	Total %
Séries Scientifiques	hommes	3	4	10 33 .33%
	femmes	1	2	
Séries littéraires	hommes	1	7	
	femmes	0	5	13 43. 33%
Sans séries	hommes	2	2	
	femmes	0	3	7 23 .33%
Total		7 : 23,33%	23 : 76,66%	30 100%

Tableau 2- *Rapports aux mathématiques des enseignants du primaire*

Sept (7) enseignants, soit 7,33% entretiennent de bons rapports aux mathématiques dont une seule femme Parmi ces enseignants et un seul issu des séries littéraires. Propos de façon générale des enseignants : « ***les mathématiques étant une matière comme toutes les autres n'ont pas encore besoin d'un rapport particulier. Nous les considérons au même titre que les autres*** »

Caractérisation des pratiques enseignantes

Qualité des Pratiques / Niveaux des rapports		Pratiques efficaces	Mauvaises Pratiques	**T**otal
Bons rapports	série scientifique	3	1	4
	séries littéraires	1	0	1
	sans série	1	1	2
Total 1		5 : 71,42%	2 : 28,58%	7
Mauvais rapports	séries scientifiques	1	5	6
	série littéraire	0	12	12
	sans série	0	5	5
Total 2		1 : 4,35%	22 : 95,65%	23
Total global		6 : 20%	24 : 80%	30

Tableau 3 - *Rapports aux mathématiques et pratiques enseignantes*

Seulement six (06) sur trente (30) enseignants, soit un cinquième de l'échantillon, ont les bonnes pratiques enseignantes avec cinq (5) enseignants à bons rapports aux mathématiques.

Tous les enseignants à mauvais rapports ont des mauvaises pratiques enseignantes en mathématiques. 71 ; 42% des enseignants à bons rapports ont les bonnes pratiques enseignantes en mathématiques tandis que 95,65% de ceux à mauvais rapports présentent les mauvaises pratiques. Pour cet enseignant à bons rapports, « ***les mathématiques sont à la base de toutes découvertes ; c'est dire combien cette matière mérite une attention dès, déjà le primaire. Les enseignants doivent donc être amenés à utiliser la rigueur dans leur prestation pour que motiver les apprenants à la pratique quotidienne de cette discipline*** ». Tandis que cet enseignant à mauvais rapport « ***nous n'avons pas de matériel pour enseigner correctement surtout en Géométrie. Aussi nous n'avons que notre formation depuis le CAFOP ; alors qu'aujourd'hui il est de plus en plus question*** de numérique. IL nous faut alors du matériel pour mieux enseigner »

Rapports entre pratiques enseignantes et représentations des apprenants

Qualité des représentations-élèves / **Qualité des pratiques enseignantes**	Bonnes représentation	Mauvaises représentations	Total
Pratiques efficaces	25 : 83,33%	5 : 16,66%	30
Pratiques non efficaces	10 : 10,52%	85 : 89,47%	95
Total global	35 : 28%	90 : 78%	125

Tableau 4 - *Pratiques enseignantes et représentations des mathématiques des élèves*

Pour les enseignants à pratiques efficaces, 83% des apprenants ont une bonne représentation des mathématiques contre 10,55% pour les enseignants à mauvaises pratiques.

Les mauvais rapports aux mathématiques chez les enseignants au primaire peuvent s'expliquer par la formation scolaire au primaire et au secondaire et les pratiques inefficaces des enseignants ayant créé la phobie des mathématiques, par l'insuffisance de la formation professionnelle censée mettre en exergue les facteurs d'un enseignement efficace en mathématiques à travers les micros enseignements, les stages suivis. Ils peuvent aussi s'expliquer par l'absence d'autres outils à consulter en dehors des documents officiels.

IV. DISCUSSION ET SUGGESTIONS

Discussion

L'objectif de cette étude était d'analyser les rapports aux mathématiques des enseignants du primaire. Les résultats font observer que 7,33% des enseignants ont de bons rapports avec les mathématiques, c'est-à-dire, donnent une valeur à la discipline (Charlot : 2012). Cela provient des parcours des enseignants fait d'orientations induisant des choix disciplinaires par abandons successifs ou priorités de plus en plus réduites, comme l'indique Calmel (2012).Ainsi, pour les enseignants issus des séries , l'approche des mathématiques est difficile parce qu'ils n'ont pas la formation mathématique, tandis que pour ceux des séries scientifiques, le fait de ne pas parvenir à leur fins diminue leur motivation pour la discipline ; ils expriment leur sentiment de frustration les conduisant au découragement et au désintérêt pour la discipline. La plupart indique faire juste l'essentiel, la grande passion pour les mathématiques ayant complètement disparu.

Ceux issus du premier degré de l'enseignement secondaire ayant embrassé la profession ne parviennent pas à distinguer une matière fondamentale de celle non fondamentale. Pour ces derniers toutes les matières au primaire sont égales et il n'existe pas de rapports particuliers à une discipline. L'absence d'intérêt particulier pour les mathématiques est identifiée surtout chez les enseignants marqués par la stigmatisation et traumatisés pendant la formation scolaire, parce que lents à comprendre et à réagir, ou objets de dyscalculie. Ceci a développé la peur des mathématiques pour lesquelles ils sont devenus réfractaires. Ils ne peuvent alors s'en approcher en dehors des moments de préparation ou des heures de cours. L'absence de variation de stratégies pédagogiques à travers le travail uniquement collectif, l'inexistence ou l'insuffisance du matériel, les mauvaises conditions de préparation des fiches de séance ou leur mauvaise exploitation, conduisent à des cours théoriques qui créent un flou chez les apprenants, laissant entrevoir des pratiques inefficaces. Cela indique que les enseignants du primaire ne privilégient pas les rapports aux mathématiques et n'accordent pas de valeur particulière aux mathématiques. Il n'y a pas de nouveaux savoirs singuliers, permettant de penser, de transformer les concepts mathématiques en une réalité, avec un transfert dans la vie quotidienne des élèves. Toutefois, ceux dont les pratiques enseignantes sont bonnes, sont en formation continue pour préparer des concours dans cette discipline. Ils profitent pour mieux comprendre les objectifs des mathématiques et ceux de leur enseignement; les cours sont préparés avec soins et des stratégies pédagogiques adéquates sont identifiées. Les élèves sont épanouis lors des apprentissages.

L'enseignant du primaire doit alors comprendre et maîtriser les fondements des mathématiques, pour savoir saisir les occasions en vue de développer des capacités de raisonnement et de réflexion chez les apprenants. Il doit avoir une connaissance approfondie du contenu à enseigner et un répertoire des techniques pédagogiques. Cela participe des pratiques efficaces, précurseurs de bonnes représentations qui constituent le point de départ des apprentissages; contrairement, celles non efficaces favorisent le blocage face à la discipline. Les bons rapports aux mathématiques génèrent les pratiques enseignantes efficaces et les bonnes représentations pour cette discipline. Ce qui montre que les rapports aux mathématiques ont une influence sur les pratiques enseignantes qui agissent à leur tour sur les représentations des apprenants. Ces résultats montrent que les enseignants n'entretiennent pas des relations avec tout ce qui relève de l'apprendre et du savoir en mathématiques, comme le stipule Charlot (2012) dans sa théorie de rapport au savoir. Ainsi, il n'existe pas de la double régulation de l'activité de l'enseignement selon la théorie de Rogalski (2007). L'efficacité de l'enseignement des mathématiques est liée à la qualité des rapports aux mathématiques comme l'indique l'hypothèse de recherche. Que faire alors pour développer davantage les rapports aux mathématiques chez les enseignants du primaire ?

Suggestions

Etant donné que l'acquisition de fondements solides en mathématiques et le développement d'une attitude positive à l'égard de la matière dès le primaire constitue les bases nécessaires à l'apprentissage des mathématiques tout au long de la vie, le développement des rapports aux mathématiques s'impose aux enseignants du primaire. Pour cela, quelques suggestions sont faites. Les écoles peuvent organiser un atelier sur l'utilisation des matériels pédagogiques employés dans l'enseignement des mathématiques, sous la direction d'un enseignant ou instituteur ayant expérimenté ce matériel.

Il conviendrait par ailleurs d'élaborer des matériels d'enseignement en mathématiques (planches, des questionnaires, des feuilles d'exercices, en mathématiques lors de la formation initiale des enseignants. Pendant la formation initiale, il convient d'élaborer un document

d'auto instruction qui est en relation avec les activités de formation pour que l'élève maître puisse s'approprier les différents concepts de mathématiques.

Le livre maître doit expliquer de façon détaillée les programmes contenant les activités, les matériels de l'enseignement des mathématiques ? Aussi les micros enseignements fréquents en mathématiques peuvent apporter au futur maître une assistance pour faciliter le rapprochement.

Aussi, la formation continue peut aider le maître à surmonter les difficultés pédagogiques et le rapprocher d'avantage des mathématiques en minimisant la peur de la matière. Cette formation doit être permanente pour contribuer à mettre le maître en confiance. Car la formation initiale ne peut pas faire apprendre tout ce qui est utile à l'enseignement des mathématiques L'influence des rapports aux mathématiques sur les pratiques enseignantes exige de minimaliser l'écart entre les enseignants du primaire et cette discipline. Pour cela, au niveau des enseignants, lors de leur formation pédagogique dans les centres de formation pédagogique, la pratique doit l'emporter sur la théorie qui, elle-même doit être dominée par l'acquisition et la fixation solide des contenus à enseigner dans les différents niveaux, dans chaque domaine de compétence, en vue de faciliter leur enseignement. Car l'on ne maîtrise que ce qu'il a bien appris.

La fréquentation des bibliothèques pour les mathématiques permettrait aux enseignants de découvrir certains documents en mathématiques et certains concepts susceptibles d'améliorer l'enseignement du maître.

En outre, la fourniture des puces de recherches pour les téléphones portables en mathématiques au primaire pourrait accélérer les capacités de recherche en mathématiques chez tous les enseignants du primaire, quelle que soit la zone d'implantation des écoles. Ce qui améliorerait l'enseignement des mathématiques avec plus de clarté dans la représentation des concepts mathématiques chez les apprenants que sont les élèves.

V. CONCLUSION GENERALE

Cette étude est effectuée à partir d'un travail exploratoire mené sur terrain à l'aide d'un questionnaire, d'une observation avec les enseignants, et d'un focus-groupe avec les élèves qui elle a analysé les rapports aux mathématiques chez enseignants du primaire et leurs pratiques enseignants dans la discipline en s'appuyant sur la l'approche ergonomique de l'activité enseignante de Rogalski (2008) et sur la théorie du rapport au savoir de Bachelot (2012). Elle révèle que la majorité des enseignants du primaire n'accordent pas une valeur particulière aux mathématiques et qu'ils n'assument pas la double régulation de l'activité d'enseignement des mathématiques. Ceux-ci n'ont pas toujours des bons rapports avec cette discipline, avec pour corollaire l'inefficacité de leurs pratiques et la mauvaise représentation des mathématiques chez leurs apprenants. Il est alors possible d'améliorer ces rapports à travers une formation des techniques d'apprentissages motivantes déjà à la formation initiale puis par une formation continue permanente dans les écoles e les inspections. Car l'enseignant joue un rôle déterminant dans la compréhension des mathématiques par les élèves.

REFERENCES

Adihou, A. (2011). Enseignement/apprentissage des mathématiques et souffrance à l'école. In C. Meyor & A.- M. Lamarre (dir), *La souffrance à l'école, vol.2*- Les collectifs du Cirp (p. 90-102). Récupéré du site du cercle interdisciplinaire des recherches phénoménologiques

Boesen, J., Helenius, O. (2009). Améliorer l'enseignement des mathématiques : le cas de la Suède : traduction de Valérie Téhio. *Revue internationale d'éducation de Sèvres*, 51. Journals.openedition.org

Briand, J. (2014). *Des mathématiques à l'école maternelle ? Pourquoi faire ? Comment les présenter dans les programmes*. dial-154-math-matzer-jbriand

Calmal, J. J. (2012). *Enseignants/ Enseignements/Apprentissage des « mathématiques »*. IEN, Académie de Lilles.

Charlot (2012).

Conseil supérieur de l'éducation (1985). *L'enseignement des mathématiques à l'école primaire*. https : // www.esc.gouv.qc.ca. Consulté le 10/11/2017.

Eudes L M M. (2016). Rapports personnels des enseignants aux objets« variation » et « Co variation » comme conséquences des choix institutionnels pour leur formation initiale mémoire présenté en vue de l'obtention du grade de maîtrise des ès art en sciences de l'éducation. Option didactique. Université de Montréal

Gazette des mathématiciens. (2004). *La mathématique*.n°102 octobre 2004SMF Publication. Smf4.emath.fr publication 2004. Consulté le 07/11/2017.

Jesper, B., & Ola, H. (2009). Améliorer l'enseignement des mathématiques. Cas de la Suède. http://ries-revues-org. Consulté le 27/11/2017 à 8 heures.

Reuters, Y. (2007). La conscience disciplinaire : présentation d'un concept *Éducation et didactique*, 11 (2). https://journals.openedition .org. Consulté le 15/ 03/ 2018

Rogalski, J. (2007). *Approche de la psychologie ergonomique de l'activité de l'enseignant.* CNRS, Laboratoire CHart, Université Paris 8.

Talbot, L. (2012). Recherches sur les pratiques enseignantes efficaces, synthèses, limites et perspectives.volume n°18, Dossiers thématiques. https://questions vives.revues.org/124. Consulté le 10/12/2017.

Walin, P. (2007). L'analyse de contenu comme méthode d'analyse qualitative d'entretiens: une comparaison entre les traitements manuels et l'utilisation des logiciels www. Recherche-qualitative.qc.ca revue. Consulté le 11/11/ 2017.

ANNEXE

I-Questionnaire adressé aux enseignants : ramassé sur place (1er jour)

Entourer la bonne réponse

-Cours: CM1 CM2

-Série d'études effectuées: BAC C-D BAC A BEPC autres à préciser

-Participation aux Séminaires sur les mathématiques par an : 1 FOIS- 2 FOIS -autres à préciser

-Recherches personnelles en mathématiques en dehors des cours OUI NON

- Fréquences de recherches : JOUR-SEMAINE-MOIS- ANNEE

-Avez fait une découverte en mathématiques en dehors des techniques usuelles ? OUI NON

II- Observation: pratiques enseignantes (2ème jour)

Prérequis: situation problème en relation avec le cours, la technique opératoire précédente et avec le vécu des apprenants.

Développement:

-Stratégies pédagogiques (travail collectif, travail de groupe (échanges entre apprenants), travail individuel) en adéquation avec chaque étape du cours.

-Moyens utilisés (matériel suffisant, adapté et varié approfondissements du cours avec des connaissances personnelles, variation d'exemples en rapports avec la vie quotidienne des apprenants à partir de la technique opératoire), innovation pertinente et adéquate dans le cours.

-Attitude de l'enseignant (maîtrise et utilisation simplifiée des techniques opératoires, appréciations et valorisation des réponses des apprenants)

-Synthèse de la séance d'apprentissage, Fixation des acquis par les apprenants

Evaluation des acquis du cours et pourcentage de réussite des apprenants.

III- Guide d'entretien avec l'enseignant: (3ème jour) : rapports aux mathématiques des enseignants

Aimez- vous les mathématiques? Pourquoi?

Comment préparez- vous vos cours de mathématiques? (documents utilisés)

Que représentent les mathématiques pour vous?

Parvenez-vous à effectuer des recherches personnelles sur les mathématiques ?

IV- Focus- group: perceptions de mathématiques par les élèves ($2^{ème}$ jour)

Aimez- vous les mathématiques? Pourquoi.

A quoi servent les mathématiques?

Aimeriez- vous enseigner les mathématiques quand vous serez grand? Pourquoi?

DES OBJETS MATHEMATIQUES POUR CONSTRUIRE UNE FRISE CHRONOLOGIQUE EN CLASSE D'HISTOIRE

HONVO* Camille

Résumé - L'étude porte sur les apports des objets mathématiques dans la construction des frises chronologiques en classe d'histoire qui est une matérialisation du concept de temps. L'intérêt didactique de l'étude met en relief l'interdisciplinarité entre les disciplines mathématiques et l'histoire comme un exemple de décloisonnement disciplinaire.

Mots clés : frise chronologique, échelle, durée, interdisciplinarité, décloisonnement disciplinaire

Abstract - The study concerns the contribution of mathematical objects in the construction of timelines in history class which is a realization of the concept of time. The didactic interest of study accentuates the interdisciplinarity between the mathematical disciplines and the history as an example of disciplinary decompartementalization.

Keys words: timeline, scale, duration, interdisciplinarity, disciplinary decompartmentalization

I. INTRODUCTION

L'élève du cours élémentaire première année en Côte d'Ivoire, aborde l'histoire scolaire en commençant par une thématique intitulée « *Je situe les évènements dans le temps et dans l'espace* ». Cette thématique est composée de huit leçons et trois activités d'intégration qui mettent en filigrane les concepts d'espace et de temps. Cela passe par la matérialisation, notamment du concept de temps à travers la construction des frises chronologiques. Il n'existe aucune discipline qui ne soit reliée au concept de temps et pour l'apprendre, il faut pouvoir faire des liens entre des disciplines, notamment les mathématiques. C'est pourquoi Espinoza (2000, pp. 61-62.) affirme que le concept temps devient plus clair et limpide lorsqu'il est associé au nombre où à l'espace.

Quatre points structurent notre étude. Nous abordons dans le premier point le contexte de l'étude et la problématique rendus visibles par la formation des futurs enseignants du premier degré et la structuration difficile du concept de temps. Le deuxième point présente les référents théoriques de l'étude en convoquant l'éclairage de l'interdisciplinarité et la transposition didactique. Le troisième s'appuie sur un Corpus et des instruments de collecte de données qui permettent d'avoir des tendances qui sont mis à distance dans le quatrième point.

II. CONTEXTE DE L'ETUDE ET PROBLEMATIQUE

1. Contexte de l'étude

La didactique est liée à un terrain que l'on appelle souvent contexte (Demaizière et Narcy-Combes, 2007, p. 16). Pour notre recherche, nous opérons directement dans ce contexte parce

* Institut National Supérieur des Arts et de l'Action Culturelle (INSAAC), Centre de Recherche sur les Arts et la Culture (CRAC), Laboratoire de Recherche en Didactique (LAREDI-ENS) – Côte d'Ivoire - camille_honvo@yahoo.fr, Jeancamilleh6@gmail.com

que enseignant dans cette institution de formation de futurs enseignants de l'enseignement primaire. La formation théorique est alternée par des stages qui ont lieu dans les écoles d'application. Ces instituteurs sont des enseignants polyvalents au sens de (Flonneau, 2004, p. 3).

Ces deux terrains d'étude CAFOP[1] et écoles d'application nous paraissent à priori, favorables pour observer des pratiques de classe et la transposition didactique. Nous avons globalement associé 80 élèves-maîtres à notre recherche. Pour ce qui concerne les élèves-maîtres, nous avons aussi opté pour l'échantillon par choix raisonné car ceux-ci sont issus des groupes-classes tenus par des enseignants choisis en raison de leur expérience professionnelle et leur statut de tuteur pédagogique de stage[2]. Les classes en CAFOP sont nommées groupes-classes avec des effectifs réduits c'est-à-dire en moyenne vingt (20) élèves-maîtres par groupe par contre dans des classes d'école d'application nous avons en moyenne 50 élèves. Ces écoles d'application sont des groupes scolaires. En CAFOP nous nous sommes basé sur les séances d'entraînement pédagogique qui est un outil pédagogique professionnel pour préparer l'élève-maître plus efficacement à prendre en main une classe réelle après sa formation.

2. Problématique

La structuration du concept de temps est complexe et difficile même s'il est abordé de façon transversale au préscolaire, car la première difficulté ressentie par les enseignants touche à la représentation du temps chez les élèves (Falaize, p.51). A différente échelles, la perception du temps est une construction qui implique le passé, le présent et voire le futur. Ce sens du passé s'apprend et s'affine progressivement, car le concept de temps est abstrait pour l'apprenant du cours élémentaire première année qui doit l'appréhender, car dans sa démarche le présent est premier, et le passé est second (Flonneau, op. cit. p.23). L'enseignement-apprentissage du concept de temps et sa représentation matérielle en classe d'histoire pose des problèmes didactiques aux futurs instituteurs, car ils ne s'appuient que très peu sur la signification des dates, des évènements et la mobilisation des objets mathématiques pour construire des frises chronologiques en vue de leur donner du sens. Nous nous sommes aperçus que même après le cours moyen deuxième année c'est-à-dire dans des classes de sixième, les objets mathématiques qui pourraient faciliter la construction des frises chronologiques ne sont pas mobilisés. L'exploitation didactique de la frise chronologique ne se limite qu'à des activités de reconstitution, de coloriage dans lesquelles il est demandé aux élèves de compléter alors qu'elle doit être construite et raisonnée. C'est pourquoi l'étude ne peut pas faire abstraction de l'interdisciplinarité qui est essentielle dans la construction des frises chronologiques même si les enseignements en CAFOP sont organisés et structurés par des logiques disciplinaires.

Comment faire passer l'apprenant du temps vécu individuel et autocentré à la perception du temps historique tout au moins mesurable et reconnu par le groupe ? Quels sont les objets mathématiques à mobiliser pour construire une frise chronologique en classe d'histoire ?

Au regard de cette problématique, qui met en relief le besoin d'une étude exploratoire, l'approche conduit à rester relativement ouvert aux significations construites par les acteurs

[1] Centre d'animation et de Formation Pédagogique

[2] Encadreur des stagiaires de la filière CAP/CAFOP de l'École Normale Supérieure d'Abidjan

du champ étudié et à ne pas se laisser trop rapidement enfermer dans un jeu de vérifications d'hypothèses (Bouhon, 2009, p.6).

L'objectif de l'étude est de mobiliser des objets mathématiques en classe d'histoire pour construire des frises chronologiques.

III. REFERENTS THEORIQUES

1. Interdisciplinarité et construction de frise chronologique

Nous rappelons la définition de Milner, J-Cl. (1984, pp.124-125) qui va contre ceux qui s'opposent aux pratiques interdisciplinaires : « *l'interdisciplinarité est un moyen propre dans une institution à condamner ceux qui ont investi quelque passion dans une discipline et dans le fait se ramène à la juxtaposition des ignorances.* » En d'autres termes il s'agit d'une démarche didactique et pédagogique qui cherche à dépasser la séparation habituelle en associant deux ou plusieurs disciplines. Ainsi, les disciplines associées, tout en gardant leurs spécificités, participent à un projet collectif en y apportant leurs savoirs et leurs méthodes et permettent de sortir de zone de confort monodisciplinaire pour aller vers une logique interdisciplinaire. Il s'agit de l'intervention d'une discipline de service qui coopère avec une discipline d'ouverture comme l'histoire. Par exemple, les mathématiques sont utilisées comme discipline-outil au service de la réalisation de frises chronologiques en histoire en utilisant la proportionnalité, la durée, l'échelle, le rectangle, la distance, la fréquence, la symétrie.

2. Construction de la frise chronologique : un exemple de transposition didactique

Enseigner une matière suppose une transformation des savoirs de référence pour les rendre accessibles aux élèves d'un niveau d'enseignement donné. Dans la mise en exercice de la discipline historique, la frise chronologique révèle l'idée même de transposition didactique qui est un travail d'adaptation, de transformation des savoirs en vue de favoriser leur construction pour des systèmes cognitifs d'apprenants (Chevallard, 1991). Le terme de chronologie est un système de mise en forme des faits historiques. L'habileté à situer un événement, un phénomène, un personnage par rapport à ce qui l'a précédé et à ce qui l'a suivi est la chronologie (Johnson, 1975, p.483–516). La représentation graphique transposée de la chronologie est la frise chronologique. Elle représente le support canonique de la topologie temporelle et la manifestation déguisée d'une causalité temporelle : ce qui précède est, au moins visuellement, perçu comme la cause de ce qui succède[3]. La frise chronologique oblige à la schématisation, à la sélection des connaissances et la synthèse des informations. La construction d'une frise chronologique est donc un ensemble d'exercices intellectuels à plusieurs niveaux incluant le contenu en histoire et l'usage d'outils mathématiques. La transposition didactique permet d'arrimer des outils mathématiques au contenu historique pour construire la frise chronologique.

[3] http://www.inrp.fr/Tecne/histimage/TeD1.htm

IV. CORPUS ET INSTRUMENTS DE COLLECTE DE DONNEES

1. Corpus

Elle s'appuie essentiellement sur la structuration du temps en travaillant sur la première leçon intitulée « *Je découvre les différents moments du jour* »[4] de la nouvelle collection « Ecole et Nation » et la quatrième leçon intitulée « *Le siècle, l'histoire* »[5] dans laquelle est étudiée la chronologie à travers la construction de la frise chronologique. L'intérêt pour ces thématiques doit être l'occasion de mieux comprendre la complexité du concept de temps caractérisé par des attributs : la chronologie, la durée, la fréquence, la vitesse et le rythme.

2. Instruments de collecte de données

Nous avons choisi d'utiliser un questionnaire exploratoire qui a porté sur l'identification des objets mathématiques et le rôle de ceux-ci pour la construction des frises chronologiques en classe d'histoire. Outre le questionnaire exploratoire, nous avons observé des classes. Il s'agit pour nous de mettre en évidence la relation entre le « dire » et le « faire » et d'observer comment s'opère la transposition didactique et la construction des situations didactiques dans lesquelles des objets ou notions mathématiques apparaissent comme des outils de construction de savoirs.

Les variables didactiques qui constituent les observables de notre grille d'observation sont : les objets mathématiques (les grandeurs proportionnelles, calcul d'échelle et calcul de la durée) et la construction des frises chronologiques à travers deux séances de perfectionnement et d'entraînement pédagogique.

Les séances de perfectionnement ont porté sur l'Unité de Formation intitulée « *Le temps historique* » avec comme Module « *La journée, le jour* ».

Après la clarification des notions de temps vécu (la journée, le jour) et de temps historique, nous avons avec la collaboration des élèves-maîtres montré l'importance de cette unité de formation dans le programme du Cours élémentaire première année.

L'appréhension du temps historique est difficile pour les élèves du Cours élémentaire première année qui sont en général au stade de temps vécu et perçu c'est-à-dire celui de l'actualité de chaque jour qui se traduit en termes concrets. Il importe donc de commencer l'étude de temps historique par ce que les élèves connaissent à travers leurs propres activités c'est-à-dire « la journée, le jour ». Cela permet aux élèves de situer un évènement en respectant la chronologie. Cela nécessite la construction de la frise chronologique qui est une activité fondamentale pour favoriser la perception du temps historique.

Ces séances de perfectionnement en CAFOP ont été suivies d'activités d'application sur le calcul de l'échelle pour placer des dates et les évènements correspondants (Annexe 1). Il s'agit de dégager l'échelle du temps la plus appropriée à partir de ces activités.

Les séances d'entraînement pédagogique proposent des séances plus courtes avec un nombre d'élèves restreint. Ces séances d'entraînement pédagogique se sont déroulées après

[4] MEN (2008) Histoire-géographie. CE1. Abidjan : Frat Mat. Collection Ecole et Nation, p.6

[5] MEN (2008) Histoire-géographie. CE1. Abidjan : NEI. Collection Ecole et Développement, p.18

chaque séance et suivies de test avec un groupe restreint d'élèves du cours élémentaire première année.

V. RESULTATS ET INTERPRETATION

1. Résultats issus du questionnaire

Objets mathématiques	Fréquences	Pourcentages
Echelle	60	75
Durée	15	18,75
Proportionnalité	05	06,25

Tableau 1 *- Distribution des réponses relative aux objets mathématiques*

L'échelle est l'objet mathématique le plus dominant. C'est en quelque sorte un marqueur de l'histoire et de la géographie lorsqu'il s'agit de tracer une carte et de construire un graphique. L'échelle est un modulateur de l'écriture historique (Verdier, 2004, pp.25-56).

La signification que nous donnons aux énoncés des futurs enseignants, résulte des coutumes didactiques et du parcours scolaire des futurs enseignants qui sont habitués à la dénomination échelle du temps.

2. Résultats issus des observations de classe et de l'évaluation

La mention « *oui* » dans le tableau correspond à la situation didactique observée tandis que le « non » met en relief la situation didactique non observée.

Séances concernées / **Eléments observés**	*Je découvre les différents moments du jour*	*Le siècle, l'histoire*
Les objets mathématiques		
Les grandeurs proportionnelles	**Non**	**Oui**
Calcul d'échelle	**Oui**	**Oui**
Calcul de la durée	**Non**	**Non**
La construction des frises chronologiques		
Bande rectangulaire	**Oui**	**Oui**
Utilisation des objets mathématiques	**Non**	**Non**
Frise chronologique utilisée comme synthèse	**Non**	**Non**
Frise chronologique utilisée comme évaluation	**Non**	**Non**

Tableau 2 *- Bilan des deux séances d'entraînement pédagogique*

Il faut noter que dans l'ensemble, l'articulation objets mathématiques et construction de frise chronologique n'a pas été observée. L'on a aussi constaté que le seul élément pour institutionnaliser et évaluer les connaissances apprises reste la trace écrite. Ces résultats mettent en relief deux postures possibles, l'une qui est centrée sur la monodisciplinarité qui se situerait du côté de la tradition disciplinaire, l'autre centrée sur l'interdisciplinarité par l'approche constructiviste de l'histoire scolaire. Cette dernière approche consiste à construire, à déconstruire et à reconstruire le savoir.

Les résultats du test (Annexe 2) nous indiquent qu'il y a difficulté à la question 1 parce que les élèves n'ont pas tenu compte du calcul de l'échelle. Lorsqu'on fait appel à certains objets

mathématiques (symétrie, énumération avec l'addition ou la multiplication…) pour construire des frises chronologiques, ces élèves ont des difficultés. Cela est dû à une construction mécanique des frises chronologiques qui ne propose pas d'activités nécessitant des connaissances procédurales basées surtout sur la mobilisation des objets mathématiques.

VI. CONCLUSION

Le temps est un concept transversal qui permet cette ouverture aux disciplines. Il conviendrait peut-être d'encourager les futurs enseignants du premier degré, leurs formateurs à partager d'avantage leurs expériences en classe et à coopérer avec l'ensemble des disciplines. En notre sens, cette démarche à deux avantages. D'abord montrer aux futurs enseignants du premier degré qu'il existe une vraie équipe pédagogique, unie autour d'un projet de classe ; ensuite les inciter à faire tomber les barrières hermétiques qui cloisonnent trop souvent les attributions respectives des différentes disciplines enseignées, car la coopération entre deux ou plusieurs disciplines n'est pas une nouveauté. Que l'on parle de multi, de pluri, de trans ou d'interdisciplinarité. Cela nous renvoie à des prolongements possibles de l'étude à travers la question suivante : Comment lier les disciplines pour comprendre sa propre discipline ?

REFERENCES

Bouhon M. (2009), *Les représentations sociales des enseignants d'histoire relatives à leur discipline et à son enseignement.* Thèse de Doctorat. Louvain-la-Neuve : Université Catholique.

Chevallard, Y. (1991), *La Transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné*, Grenoble : La Pensée sauvage.

Demaizière, F., Narcy-Combes, J-P. (2007). Du positionnement épistémologique aux données de terrain. Journées NeQ, Méthodologie de recherche en didactique des langues. *Les Cahiers de l'Acedle* 4, 16.

Espinoza, M. (2000). La mesure du temps. *Education enfantine* 3, 61-62.

Falaize, B. (2015), *Enseigner l'histoire à l'école. Donner goût et interroger le passé pour faire sens aujourd'hui*. Paris : RETZ.

Flonneau M. (2004) De *la découverte du monde à l'histoire*. Paris : Nathan.

Johnson M. (1975) Le concept de temps dans l'enseignement de l'histoire. *Revue d'histoire de l'Amérique française* 28, 483–516.

Milner, J-CL. (1984). De *l'école*. Paris : Seuil.

Verdier, N. (2004). L'´échelle dans quelques sciences sociales : Petite histoire d'une absence d'interdisciplinarité. *Echelles et temporalités* en géographie 2, 25-56.

ANNEXE 1 - ACTIVITES (ELEVES-MAITRES)

Exercice 1

1 cm …….. 100 ans

Placez la date 300 ans avant Jésus Christ, 300 après Jésus Christ et 622 sur une frise chronologique.

Exercice 2

Les dates des grandes périodes de l'histoire de la Côte d'Ivoire : 1470 ; 1701 ; 1842 ; 1893 ; 1960 ; 1999 ; 2002 ; 2010

A partir d'une liste de dates des grandes périodes de l'histoire de la Côte d'Ivoire, calculez-la durée.

ANNEXE 2 - TEST D'EVALUATION (ELEVES CE1)



Test d'évaluation sur la leçon intitulée << le jour >> PP 8-9-10 du manuel histoire CE

journée

0 2 4 6 8 10 14 16 18 20 22 24

Lever du soleil midi coucher du soleil

Extrait du manuel d'histoire : école et développement pages 9 -10

A l'aide de la frise ci-dessus, réponds aux questions suivantes

On admet 1 carreau pour 2 heures.

1- Complète la frise pour obtenir la durée du jour.

2 - Quand commence le jour ? quand finit-il ?

le jour commence à minuit?
le jour et la nuit
les différents sont

3 - Cite les différents moments du jour et dis leur durée.

les différents sont la journée et la
journée = 12

4 - Observe le document ci-dessus et place les deux moments du jour.

5 - colorie avec la couleur noire et rouge pour faire la différence entre les différents moments.

REGULATIONS DIDACTIQUES ET PRATIQUES ENSEIGNANTES

KIWAN-ZACKA[*] Michella – RODITI[**] Éric

Résumé – Un outil méthodologique est proposé pour l'analyse didactique d'interactions élèves-enseignant à visée d'évaluation formative. La proposition s'appuie sur les travaux menés dans le champ de l'évaluation, sur la théorie de l'activité et sur la double approche didactique et ergonomique des pratiques d'enseignement. L'outil est mis en œuvre pour comparer deux séquences d'enseignement de l'algèbre avec une mise en relation avec les apprentissages des élèves.

Mots-clefs : évaluation formative, régulation, double approche, théorie de l'activité, algèbre

Abstract – A methodological tool is proposed to analyze pupils-teacher interactions with the aim of formative assessment. The proposal leans on research led in the field of evaluation, on the activity theory and on the double approach. The tool is implemented to compare two sequences of teaching algebra with a link with students' learning.

Keywords: formative assessment, regulation, double approach, activity theory, algebra

INTRODUCTION

Les recherches récentes sur l'évaluation formative scolaire sont nombreuses à se référer à une approche vygotskienne de l'apprentissage. En ce qui nous concerne, la théorie de l'activité, telle que définie par Leontiev (1975/1984) – auteur qui s'inscrit dans la lignée des travaux de Vygotski – puis reprise par Leplat (1997) et Rogalski (2003) fonde à la fois nos travaux relatifs aux pratiques enseignantes et aux activités des élèves. Le croisement de cette théorie avec la didactique des mathématiques a été formalisé dans des recherches antérieures de la fin des années 2000 : Robert (2008), Rogalski (2008), Vandebrouck (2008), Roditi (2011, 2013).

Ce texte propose un outil méthodologique pour l'analyse didactique d'interactions élèves-enseignant à visée d'évaluation formative. Nous développons dans une première partie nos appuis théoriques concernant les pratiques enseignantes, les activités des élèves et leur articulation avec l'apprentissage des élèves. Nous précisons, dans une deuxième partie assez courte, notre utilisation des travaux concernant l'évaluation formative et plus largement la régulation des apprentissages. Nous exploitons enfin ces fondements théoriques pour développer, dans une troisième partie, notre outil d'analyse de ce que nous appellerons des « régulations didactiques ». Nous proposons ensuite une exploitation de cet outil, pour mettre aux jours quelques caractéristiques des pratiques de deux enseignants que nous relions à quelques données relatives aux apprentissages de leurs élèves.

I. LES ACTIVITES DE L'ENSEIGNANT, DES ELEVES ET LEUR INTERACTION

En psychologie ergonomique, l'activité est – par hypothèse – co-déterminée par le sujet et la situation à laquelle il est confronté qui se compose d'une tâche et du contexte dans lequel il doit la réaliser (Leplat, 1997 ; Rogalski, 2008). La double approche didactique et ergonomique des pratiques d'enseignement des mathématiques (Robert & Rogalski, 2002, 2005) propose de prendre en compte le fait que l'enseignant vise, par son activité, non seulement l'apprentissage des élèves, mais aussi la réponse à diverses contraintes du métier, dont celle, qui nous intéresse ici particulièrement, de maintenir les élèves en activité par les interactions.

S'intéresser aux activités de l'enseignant conduit ainsi à considérer deux activités en cascade qui s'influencent réciproquement. Celle de l'enseignant produit une situation pour

[*] Université Saint-Joseph – Liban – michella.kiwan@gmail.com
[**] EDA, Université Paris Descartes, Université Sorbonne Paris Cité – France – eric.roditi@paris5.sorbonne.fr

l'élève, elle a également un effet sur l'élève lui-même, lorsque l'enseignant l'encourage par exemple. Celle de l'élève est co-déterminée par l'élève et par la situation produite par l'enseignant. En classe, ces activités en cascade se déroulent dans la même unité de temps et de lieu. L'activité en classe de l'enseignant peut ainsi avoir un effet simultané sur la situation pour l'élève, sur l'élève et sur la relation élève-situation, c'est le cas par exemple lorsque l'enseignant donne une indication pour simplifier la tâche à réaliser, ce qui stimule l'élève pour agir.

Leplat (1997), et Rogalski (2003) à sa suite pour le cas de l'enseignement, envisagent une double-régulation de l'activité, liée au fait que l'activité a des effets sur la situation et sur le sujet qui a agi. Dans sa *dimension productive* d'un résultat, l'activité a un effet sur la situation ; cette dernière évolue, et cela permet au sujet d'ajuster son activité. On peut penser par exemple au professeur qui pose une question à un élève dont le début de réponse témoigne d'une connaissance erronée ; la situation pour le professeur a évolué, elle comprend maintenant cette réponse partielle sur laquelle il peut décider d'agir. On peut aussi penser à l'élève qui perçoit que la réponse qu'il est en train de produire n'est pas adaptée (un mauvais ordre de grandeur d'une réponse numérique par exemple) ou qui perçoit des signes de réprobation de la part du professeur, et qui agit alors avec la situation de départ et l'information sur sa réponse en cours d'élaboration. Dans sa *dimension constructive* du sujet, l'activité peut avoir un effet sur le sujet lui-même. On peut considérer l'enseignant qui comprend une erreur sur l'application d'une notion, qui en révise sa conception de son apprentissage et qui pourra, en conséquence, changer définitivement sa manière de préparer, d'enseigner et d'évaluer cette notion. Du côté de l'élève, on peut penser à celui qui, au tableau, échoue à réaliser une tâche et qui, avec un sentiment de honte, renforce une image négative de ses capacités à apprendre et à faire des mathématiques. On peut aussi envisager, au contraire, un élève qui, ayant résolu un problème, construit de nouvelles connaissances mathématiques et réorganise celles qu'il avait déjà construites. Ces exemples permettent de comprendre que, pour l'enseignant, la notion de double-régulation peut s'envisager à deux niveaux : la double régulation issue de son activité dont les visées sont adressées à lui-même (enseigner) et celle issue de son activité dont les visées sont adressées aux élèves (faire apprendre). Dans la suite de ce texte, nous allons nous concentrer sur le second niveau de régulation de l'activité enseignante.

II. LA REGULATION INTERACTIVE EN CLASSE DE MATHEMATIQUES

Notre objectif est d'analyser les pratiques d'évaluation formative des enseignants, en lien avec les apprentissages visés, et telles qu'elles sont à l'œuvre dans le quotidien des interactions avec les élèves. En nous appuyant sur quelques résultats des recherches menées sur l'évaluation et sur l'évaluation formative en particulier, les précédents développements théoriques vont nous être utiles pour préciser notre objet de recherche et l'orientation choisie pour son étude.

Les travaux de De Ketele (1993) et de Black & William (1998) invitent à définir l'évaluation comme l'acte de prendre de l'information, de l'interpréter et d'agir en conséquence. Dans le contexte qui est le nôtre : une prise d'information s'effectue sur la base des activités des élèves ; leur interprétation s'effectue en référence au passé de la classe, aux objectifs visés, etc. ; l'action est celle de l'enseignant sur la situation de l'élève (simplifier la tâche, par exemple) ou sur l'élève lui-même (l'encourager, par exemple). L'évaluation formative est une notion qui a connu différentes évolutions ; Allal & Mottier Lopez (2005) ont réalisé une revue de la littérature sur ce sujet en s'appuyant sur une centaine d'articles publiés dans la revue *Mesure et évaluation en éducation*. Introduite d'abord au niveau institutionnel, la notion d'évaluation formative désigne la collecte des données permettant de concevoir de nouveaux programmes d'étude (Scriven, 1967, cité par Allal et Mottier Lopez).

La notion est étendue par Bloom (1968, cité par Allal et Mottier Lopez) à l'enseignement et l'apprentissage des élèves.

La notion a encore été étendue par des chercheurs de langue française (Audibert, 1980 ; Allal, 1979, 1988 ; Perrenoud, 1998 ; cités par Allal et Mottier Lopez) pour envisager l'évaluation formative non seulement dans les moments spécifiquement dédiés, mais aussi dans chaque activité d'enseignement-apprentissage. Les moyens pour recueillir l'information sur les acquis des élèves ne se limitent pas à un moment formel d'évaluation, ils concernent tous les moments de l'enseignement. L'équation « *Remédiation = Feedback + Correction* » devient alors « *Régulation = Feedback + Adaptation de l'enseignement* ». Dans cette dernière équation, la régulation se décline suivant trois types : 1°) la *régulation interactive* qui se déroule quand l'évaluation est fondée sur les interactions entre les élèves et l'enseignant (ou du matériel, informatique par exemple) ; 2°) la *régulation rétroactive* qui correspond à une évaluation formative réalisée en fin d'enseignement pour améliorer les apprentissages ; 3°) la *régulation proactive* qui intervient lorsque l'évaluation formative vise à définir les tâches proposées aux élèves suivant leurs performances, elle peut conduire à une différenciation pédagogique.

L'évaluation formative qui nous intéresse ici est donc la régulation interactive, avec un sens très large accordé aux adaptations de l'enseignement qui comprend toute modification de la situation (tâche ou contexte de réalisation de la tâche). La revue de littérature effectuée précédemment ainsi que nos propres recherches (Roditi, 2005, 2014) ont montré que, vis-à-vis de la tâche à réaliser par les élèves, les *feedback* des enseignants peuvent relancer leur activité en préservant à peu près leur responsabilité mathématique. C'est le cas lorsque l'enseignant demande de poursuivre un travail effectué partiellement, donne des explicitations sur la réponse produite, des compléments quant aux procédures mises en œuvre, etc. C'est moins vrai lorsque l'enseignant indique la marche à suivre et demande à l'élève de l'exécuter. Ce n'est plus le cas lorsqu'il produit lui-même la réponse attendue. Nous n'analysons pas ici comment les interactions professeur-élèves font évoluer la répartition de la responsabilité mathématique ; les travaux déjà publiés sont en effet suffisamment convaincants. Nous proposons en revanche un outil méthodologique, fondé sur la théorie de l'activité, pour analyser les régulations interactives des enseignants et leur effet potentiel sur l'apprentissage.

III. UNE CATEGORISATION DIDACTIQUE DES REGULATIONS INTERACTIVES

Parmi les régulations interactives, nous distinguons celles où les adaptations de l'enseignement portent sur la tâche ou sa réalisation, et concernent ainsi directement le savoir en jeu (nous les appelons « régulations didactiques »), de celles où les adaptations sont davantage relatives aux contextes de réalisation de la tâche, par exemple l'organisation de l'enseignement. Une « régulation didactique » est caractérisée par la production d'un ou plusieurs élèves lors de la réalisation d'une tâche mathématique, de son interprétation par l'enseignant, et de l'intervention de ce dernier qui peut être un aide à la réalisation de la tâche ou une modification – simplification – de la tâche à réaliser. C'est l'étude de la « proximité » entre les interventions de l'enseignant et les productions des élèves qui constitue notre objectif, en lien avec nos références théoriques sur l'apprentissage, et plus particulièrement à celle de « zone proximale de développement » (Vygotski, 1934/1997).

Nous avons souhaité pouvoir nous appuyer sur des analyses qualitatives des interactions aux cours de différents épisodes[1] puis monter en généralité et nous donner ainsi les moyens de mettre au jour des régularités et variabilités (inter et intra enseignants) dans les interactions enseignant-élèves où le savoir est explicitement en jeu. Nous partons, pour cela, dans chaque

[1] À chaque tâche mathématique que le professeur donne à réaliser correspond un épisode de la séance en classe.

épisode, d'une étude didactique de la tâche (spécifique du contenu mathématique en jeu) et d'un recueil de données issues des activités des élèves comme de l'enseignant. Ces données sont construites de manière telle que nous puissions aboutir à des catégories de régulations didactiques suffisamment générales pour permettre une étude sur des temps plus longs que celui d'un épisode. Ces catégories devant rester stables malgré l'évolution des tâches, et donc des contenus mathématiques en jeu, nous sommes retournés, pour les élaborer, à la théorie de l'activité (Leontiev, 1975/1984, Leplat, 1997, Rogalski, 2003). Dans le cas d'une activité mathématique effectuée par un élève en classe, cela nous conduit à associer à l'élève (le sujet) un état de *connaissance* qui lui permet d'analyser la situation et de redéfinir la tâche prescrite par l'enseignant pour mettre en œuvre une *procédure* conduisant à une production (orale ou écrite). L'élève effectue généralement cette activité en pensée, il peut aussi l'effectuer verbalement ou par écrit. La production observable de son activité peut être un *résultat* mathématique, mais il se peut aussi qu'elle soit la procédure qu'il a mise en œuvre (s'il s'explique sur sa démarche) ou qu'il doit mettre en œuvre pour réaliser la tâche (s'il indique ce qu'il doit faire). Il se peut aussi que la production soit une connaissance ; nous considérons que c'est le cas lorsque l'élève justifie la procédure mise en œuvre ou à mettre en œuvre selon lui.

Dans le cas où l'élève produit une réponse erronée, différents *feedback* ont été répertoriés dans la littérature : indiquer l'erreur, indiquer aussi les raisons qui permettent de juger que la réponse est fausse, demander d'expliquer la démarche, interroger un autre élève, indiquer la procédure correcte, etc. Notre cadre conduit, de manière analogue, à distinguer les manières d'agir de l'enseignant suivant qu'elles portent sur le résultat seulement (par exemple, indiquer que la réponse est fausse), sur la procédure (celle de l'élève ou celle à mettre en œuvre) ou sur les connaissances (celles de l'élève ou celles qui fondent la procédure à mettre en œuvre). Le choix entre ces trois types d'intervention dépend de différents facteurs : certains correspondent aux interprétations que fait l'enseignant de la réponse de l'élève, d'autres sont liés aux contraintes de déroulement (le professeur dispose-t-il de suffisamment de temps ? A-t-il déjà développé des explications à propos d'un exercice analogue ? etc.)

Cette façon d'analyser les déroulements conduit à traiter la transcription des échanges en classe, de manière à mettre en évidence une succession d'interactions élève(s)-enseignant pour chacune desquelles est associé un couple information-action. L'information – pour l'enseignant – est la production de l'élève qui peut être un résultat R, une procédure P ou une connaissance C. L'action – de l'enseignant – suite à l'interprétation de cette information peut concerner un résultat R (produit ou à produire), une procédure P (explicitée, supposée ou à mettre en œuvre) ou une connaissance C (correcte, erronée ou à construire) de l'élève. Chaque couple information-action peut ainsi être classé dans un tableau à double entrée (Tableau 1) où figurent les neuf possibilités de couples RR, RP, RC, PR, PP, PC, CP, CP, CC.

Information / Action	Résultat	Procédure	Connaissance
Résultat	RR	RP	RC
Procédure	PR	PP	PC
Connaissance	CP	CP	CC

Tableau 1. *Classification des régulations didactiques*

Les couples information-action qui sont repérés pour un même enseignant se répartissent parmi les neuf possibilités. Une étude de cette répartition permet de repérer des tendances dans les pratiques d'évaluation formative des enseignants, et donc de déterminer des différences inter-enseignants ou une variabilité de la pratique d'un enseignant (c'est-à-dire des différences intra-enseignant). Nous faisons en outre l'hypothèse que la répartition des couples information-action pour un même enseignant constitue une expression de la cohérence de sa pratique, et donc que les enseignants peuvent s'interpréter comme des différences de pratiques.

L'analyse de la « proximité » entre l'activité de l'élève et celle de l'enseignant nous conduit à répartir les couples information-action suivant deux catégories. La première rassemble les couples où l'information et l'action portent toutes les deux sur le résultat (couples RR), une procédure (couples PP) ou une connaissance (couples CC). L'enseignant agit alors exactement au même niveau que celui de la production de l'élève. C'est le cas, par exemple, lorsque l'enseignant déclare que le résultat proposé par un élève est un résultat incorrect, sans arguments complémentaires (couple RR). Ce n'est pas le cas, en revanche, lorsque l'élève produit un résultat faux et que le professeur intervient en questionnant la procédure mise en œuvre pour y parvenir (couple RP), ou les connaissances qui ont conduit au choix de la procédure (couple RC). Ce n'est pas le cas non plus lorsqu'un élève indique la procédure qu'il veut mettre en œuvre et que le professeur l'aide à contextualiser cette procédure à l'énoncé de la tâche à réaliser pour produire le résultat attendu (couple PR). La seconde catégorie regroupe ces régulations où l'objet de l'information et celui l'action sont différents.

Nous distinguons ainsi les régulations didactiques « horizontales » où l'enseignant agit au même niveau que l'information reçue de l'élève (couples RR, PP ou CC) des régulations didactiques « verticales » où l'enseignant, dans son retour à l'élève, change de niveau (couples RP, RC, PR, PC, CR, CP). Les régulations didactiques des enseignants peuvent alors être comparées en considérant la répartition des régulations horizontales et verticales. Une question portant sur l'effet quant à l'apprentissage se pose (elle ne sera pas traitée ici où seules les pratiques des enseignants sont analysées) : l'apprentissage est-il favorisé par des régulations didactiques plus fréquentes ? Suivant la répartition entre régulations horizontales et verticales ?

Cette catégorisation des régulations didactiques constitue un outil méthodologique pour leur analyse ; nous poursuivons maintenant par une présentation de sa mise en œuvre dans deux séquences d'enseignement des expressions algébriques en classe de 4^{e}, chacune conduite par un professeur différent.

IV. ANALYSE DE DEUX SEQUENCES D'ENSEIGNEMENT

Le contexte de l'étude. Dans le cadre de notre travail, nous avons analysé et comparé les interactions qui ont eu lieu au cours de la première séquence d'enseignement de l'algèbre élémentaire en classe de 4^{e}, chez deux professeurs de mathématiques à Beyrouth – Liban, désignés par professeur A et professeur B. La séquence du professeur A est composée de cinq séances, et celle du professeur B de sept séances, la durée de chaque séance étant d'une quarantaine de minutes environ. Les séquences ont été observées telles qu'elles étaient prévues par les enseignants, sans aucune intervention de notre part pour éviter, autant que possible, d'influer sur leur pratique. Cela explique l'écart dans les durées des deux séquences et la différence du contenu travaillé par chacun des professeurs. Toutes les séances ont été filmées (par une caméra posée au fond de la classe) puis transcrites.

Un extrait d'une séance d'enseignement. L'extrait suivant appartient à la 4^{e} séance de la séquence du professeur B. La séance porte sur le développement d'une expression algébrique en utilisant les identités remarquables. Un élève doit développer et réduire, au tableau, l'expression : $C = (x-2)(x+2) - (x-3)^2 = (x-2)^2 - (x-3)^2$. Les échanges ont eu lieu entre l'élève (désigné par E) et le professeur (désigné par P) qui s'adressait au groupe classe et non à l'élève en particulier ; les informations I et les actions A sont codées par R, P ou C suivant qu'elles ont pour objet un résultat, une procédure ou une connaissance.

N°	Interventions de l'élève E et du professeur P	I	A
1	E : $C = (x-2)(x+2) - (x-3)^2 = (x-2)^2 - (x-3)^2$	R	
2	P : la question demandée c'est de développer ou factoriser ?		R

3	E : développer	R	
4	P : développe. C'est de quel type $(x-2)(x+2)$?		C
5	E : $(a-b)(a+b)$	C	
6	P : $(a-b)(a+b)$. À quoi est égal $(a-b)(a+b)$?		C
7	E : a^2-b^2	R	
8	P : a^2-b^2		R
9	E : $C=(x-2)(x+2)-(x-3)^2=x^2-2^2$	R	
10	P : $(x-2)(x+2)=x^2-2^2$. Quand il y a le moins, et pour éviter les erreurs, essayez de développer entre les parenthèses. Alors je développe (a-b)² entre les parenthèses.		P
11	E : $C=\ x^2-2^2-(x^2-2\times x\times 3+3^2)=x^2-4-(x^2-6x+9)$ $=x^2-4-x^2+6x-9$	P	

Toute information ou action portant seulement sur le résultat est codée par R. Elle ne comporte pas de justification ou d'étape intermédiaire, comme à la ligne 1 par exemple, où l'élève se trompe en remplaçant, sans justifier ou expliciter la procédure utilisée. Nous considérons qu'il s'agit d'une procédure (P) lorsque les étapes intermédiaires d'un calcul sont explicitées, comme à la ligne 11 : les identités remarquables utilisées sont contextualisées et les calculs se font étape par étape. La reconnaissance de l'identité remarquable à utiliser pour effectuer un calcul donné révèle un état de connaissance, comme dans les lignes 4 et 5. Mais le fait de réciter l'égalité correspondante n'est qu'une réponse, comme à la ligne 7. Nous avons ainsi codé la transcription des interactions des déroulements des séquences des professeurs A et B, nous avons reporté ces résultats au sein de tableaux analogues au tableau1.

Comparaison des régulations didactiques des deux professeurs. Le tableau A présente ainsi la répartition des 215 régulations didactiques relevées chez le professeur A, et le tableau B présente celle des 501 régulations dégagées chez le professeur B.

A / I	R	P	C	Total
R	81 **72%**	25 **22%**	7 **6%**	113 (74%) **100%**
P	10 **30%**	21 **64%**	2 **6%**	33 (22%) **100%**
C	1 **14%**	1 **14%**	5 **71%**	7 (5%) **100%**
Total	92 (60%)	47 (31%)	14 (9%)	153 (100%) **100%**

Tableau A : Professeur A

A / I	R	P	C	Total
R	185 **69%**	50 **19%**	35 **13%**	270 (72%) **100%**
P	15 **31%**	24 **50%**	9 **19%**	48 (13%) **100%**
C	12 **22%**	8 **15%**	35 **64%**	55 (15%) **100%**
Total	212 (57%)	82 (22%)	79 (21%)	373 (100%) **100%**

Tableau B : Professeur B

Aide à la lecture des tableaux. Les effectifs des régulations figurent en maigre dans chaque case ; dans la case RP du tableau A, on peut ainsi lire que la séquence du professeur A comporte 25 régulations didactiques de type RP c'est-à-dire où l'information recueillie porte sur un résultat et où l'action du professeur porte sur la procédure. Entre parenthèses et dans les marges du tableau est mentionnée la répartition des informations (I) et des actions (A) entre les modalités résultat (R), procédure (P) et connaissance (C) ; on peut lire ainsi que, dans la séquence du professeur A, 74% des informations portent sur un résultat tandis que 60% des actions portent sur un résultat. Enfin, les fréquences (pourcentage en ligne) des régulations didactiques sont mentionnées en caractères gras ; la valeur 30% qui figure dans première case de la deuxième ligne du tableau A indique que, parmi les régulations didactiques dont l'information porte sur la procédure, 30% correspondent à une action portant sur le résultat.

L'examen de ces tableaux fournit quelques éléments de comparaison des pratiques des deux enseignants[2]. Nous pouvons observer dans un premier temps que les régulations

[2] Une analyse des tâches et un croisement entre cette analyse et celle menées sur les régulations didactiques seraient de nature à enrichir cette comparaison des pratiques des enseignants. Nous ne le proposons pas ici, faute de place.

didactiques sont bien plus nombreuses chez le professeur B que chez le professeur A (373 contre 153) et que la différence reste importante même si l'effectif est rapporté au nombre de séances (53 pour le professeur B, 30 pour le professeur A). Chez les deux professeurs, les produits des activités des élèves sont majoritairement des résultats (74% de R pour le professeur A et 72% de R pour le professeur B) ; les autres sont pratiquement tous des procédures chez le professeur A (22% de P et 5% de R) alors qu'ils sont équitablement répartis entre procédures et connaissances chez le professeur B (13% de P et 15% de C). De même, les actions des professeurs portent majoritairement sur les résultats (60% pour le professeur A et 57% pour le professeur B) ; les autres portent pratiquement toutes sur des procédures chez le professeur A (31% de P et 9% de R) alors qu'elles sont équitablement réparties entre procédures et connaissances chez le professeur B (22% de P et 21% de C).

Nous observons également que, chez les deux professeurs, les régulations didactiques horizontales sont dominantes, elles représentent deux tiers environ des régulations didactiques. Autrement dit, pour deux régulations sur trois, l'action des professeurs A et B est au même niveau que l'information que constitue le produit de l'activité de l'élève. L'examen des régulations didactiques verticales conduit à affiner notre outil méthodologique. Les fréquences des régulations de types PR, CP et CR sont analogues chez les deux enseignants, elles apparaissent sous la diagonale du tableau et correspondent à des moments où, dans une démarche de contextualisation, l'enseignant agit pour passer de la procédure au résultat, ou de la connaissance à la procédure ou au résultat. Nous qualifions ces régulations didactiques de verticales descendantes. Au contraire, les fréquences des régulations situées au-dessus de la diagonales (de types RP, RC et PC) correspondent à des moments où, dans une démarche de décontextualisation, l'enseignant agit pour passer du résultat à la procédure ou à la connaissance, ou de la procédure à la connaissance. Nous remarquons alors que les régulations dont l'action concerne la connaissance sont très peu présentes chez le professeur A, ce qui n'est pas le cas chez le professeur B (6% de RC et 6% de PC chez le professeur A contre 13% de RC et 19% de PC chez le professeur B).

L'ensemble de ces résultats fait apparaître des régulations didactiques assez variables pour chacun des enseignants avec toutefois des régulations didactiques horizontales dominantes. Il met au jour quelques différences de pratiques qui peuvent se résumer en indiquant que les régulations didactiques sont plus nombreuses chez le professeur B et, qu'en outre, il apparaît que le professeur B privilégie une action portant sur les connaissances, tandis que le professeur A agit plutôt préférentiellement au niveau des procédures.

V. CONCLUSION

Les apports scientifiques produits dans le champ des recherches en évaluation conduisent à aborder certaines interactions en classe de mathématiques comme des régulations didactiques, c'est-à-dire des activités de l'enseignant reposant sur : 1°) une prise d'information concernant l'activité de l'élève ; 2°) une interprétation de cette information ; et 3°) une adaptation de l'enseignement portant sur la tâche à réaliser ou sa réalisation. Les travaux de Vygotski et la théorie de l'activité fondent nos analyses des situations d'enseignement-apprentissage en classe. Pour analyser l'enseignement des mathématiques, nous avons différencié les niveaux d'intervention de l'enseignant au cours des régulations didactiques suivant que la prise d'information et l'action consécutive concernent plutôt le résultat produit par l'élève, la procédure qu'il a mise (ou qu'il devrait mettre) en œuvre ou ses connaissances.

Cette catégorisation permet de spécifier l'analyse des régulations didactiques aux savoirs enseignés (l'exemple développé porte sur l'enseignement de l'algèbre élémentaire), tout en constituant un outil de portée suffisamment générale pour être opérationnel indépendamment des savoirs mathématiques enseignés. Cette catégorisation constitue ainsi un outil d'analyse

qui pourra s'avérer fructueux pour des analyses comparées de pratiques enseignantes qui prennent en compte les spécificités disciplinaires des activités des élèves en classe. Des croisements entre les régulations didactiques des enseignants avec les apprentissages des élèves ont été envisagés dans cette recherche, les résultats obtenus feront l'objet d'une autre publication.

RÉFÉRENCES

Allal, L. & Mottier Lopez, L. (2005). L'évaluation formative de l'apprentissage : revue de publications en langue française. In OCDE, *L'évaluation formative – Pour un meilleur apprentissage dans les classes secondaires* (pp. 265-290). Paris : OCDE / CERI Publication.

Allal, L. (1979). Stratégies d'évaluation formative : conceptions psychopédagogiques et modalités d'application. In L. Allal, J. Cardinet & P. Perrenoud (Eds), *L'évaluation formative dans un enseignement différencié* (6e éd., pp. 153-183). Berne : Peter Lang.

Allal, L. (1988). Vers un élargissement de la pédagogie de maîtrise : processus de régulation interactive, rétroactive et proactive. In M. Huberman (Ed.), *Assurer la réussite des apprentissages scolaires ? Les propositions de la pédagogie de maîtrise* (pp. 86-126). Neuchâtel : Delachaux & Niestlé.

Audibert, S. (1980). En d'autres mots l'évaluation des apprentissages ! *Mesure et évaluation en éducation, 3,* 59-64.

Black, P. & D. Wiliam (1998). Assessment and Classroom Learning. *Assessment in Education, 5*(1), 7-74.

Bloom, B.S. (1968). Learning for Mastery. *Evaluation Comment, 1*(2), 1-12.

De Ketele, J.-M. (1993). L'évaluation conjuguée en paradigmes. *Revue française de pédagogie, 103*(1), 59-80

Leontiev, A. (1975/1984). *Activité Conscience Personnalité*. Moscou : Éditions du progrès.

Leplat, J. (1997). *Regard sur l'activité en situation de travail. Contribution à la psychologie ergonomique*. Paris, France : Presses Universitaires de France.

Perrenoud, P. (1998). From formative evaluation to a controlled regulation of learning processes. Towards a wider conceptual field. Assessment in Education: Principles, Policy & Practice, 5(1), pp. 85-102.

Robert, A. & Rogalski, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche, *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies, 2*(4), 505-528.

Robert, A. & Rogalski, J. (2005). A Cross-Analysis of the Mathematics Teacher's Activity. An Example in a French 10th-Grade Class, *Educational Studies in Mathematics, 59*(1-3), 269-298.

Robert, A. (2008). Problématique et méthodologie commune aux analyses des activités mathématiques des élèves en classe et des pratiques des enseignants de mathématiques. *In* F. Vandebrouck (coord.). *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (31-68). Toulouse, France : Octares.

Roditi, E. (2005). *Les pratiques enseignantes en mathématiques. Entre contraintes et liberté pédagogique.* Paris : L'Harmattan.

Roditi, E. (2011). *Recherches sur les pratiques enseignantes en mathématiques : apports d'une intégration de diverses approches et perspectives*. Note de synthèse présentée pour l'habilitation à diriger des recherches. Université Paris Descartes.

Roditi, E. (2013). Une orientation théorique pour l'analyse des pratiques enseignantes en didactique des mathématiques. *Recherches en didactiques, 15,* 39-60.

Roditi, E. (2014). Les actes de parole de l'enseignant : déterminants et révélateurs de sa pratique. *Spirale – Revue de Recherches en Éducation, 54,* 85-101.

Rogalski, J. (2003). Y a-t-il un pilote dans la classe ? Une analyse de l'activité de l'enseignant comme gestion d'un environnement dynamique ouvert. *Recherches en didactique des mathématiques*, *23*(3), 343-388.

Rogalski, J. (2008). Des compléments sur les théories de l'activité et du développement pour l'analyse liée des pratiques des enseignants et des apprentissages des élèves. *In* F. Vandebrouck (coord.). *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (429-456). Toulouse, France : Octares.

Scriven, M. (1967). The Methodology of Evaluation. *AERA Monograph Series on Evaluation, 1*, 39-83.

Vandebrouck, F. (2008). (coord.). *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*. Toulouse, France : Octares.

Vygotski L. (1934/1997) *Pensée et langage*. Paris : La Dispute.

QUEL APPORT DES MATHEMATIQUES DANS L'ENSEIGNEMENT-APPRENTISSAGE DE LA GERMINATION DE LA GRAINE EN CE1 ?

KOUADIO* Kouamé David

Résumé – La germination de la graine, objet d'enseignement-apprentissage en Sciences et Technologie pose la problématique de l'interdisciplinarité entre sciences et technologie et mathématiques. Les résultats de l'étude montrent que les enseignants n'envisagent pas la prise en compte des notions mathématiques dans l'enseignement apprentissage de la germination de la graine.

Mots-clefs : Germination, graine, transposition didactique, enseignement- apprentissage.

Abstract – The germination of the seed, object of teaching-learning raises the problem of interdisciplinarity between science and technology and mathematics. The results of the study show that teachers do not consider taking into account mathematical concepts in teaching seed germination learning.

Keywords: Germination, seed, didactic transposition, teaching, learning

I. CONTEXTE DE L'ETUDE

En Côte d'Ivoire, la germination de la graine constitue un objet d'enseignement dans les classes de cours élémentaire première année (CE1) en Sciences et Technologie. Les pratiques en vigueur en sciences et technologie ne s'inscrivent pas dans une démarche interdisciplinaire. Pourtant, l'objet sur la germination de la graine pourrait associer des objets mathématiques à expliciter. Dans les documents officiels, l'objet de la germination de la graine est modélisé selon une logique monodisciplinaire des sciences et technologie. L'enseignement-apprentissage de cet objet ne prévoit pas d'outils issus d'autres disciplines pour consolider l'apprentissage de la germination de la graine en cours élémentaire première année (CE1).

Les enseignants sont formés en sciences et en mathématiques, mais dans la pratique l'enseignement est cloisonné, en particulier au niveau de l'usage du vocabulaire spécifique des mathématiques qui est absent lors de la séance sur la germination de la graine. Pourtant des objets mathématiques pourraient être convoqués pour trouver leur champ d'application dans l'enseignement-apprentissage de la germination de la graine dans les classes de CE1.

Quelles sont ces objets mathématiques susceptibles d'être convoqués dans l'enseignement-apprentissage de la germination de la graine en CE1 ?

Comment sont-ils utilisés pour améliorer l'apprentissage de la germination de la graine ?

L'objectif visé est d'expliciter les notions mathématiques sous-jacentes et leur usage dans l'enseignement-apprentissage de la germination de la graine en CE1.

II. CONSIDERATIONS THEORIQUES

1. Transposition didactique

Les objets disciplinaires enseignés aux élèves sont le résultat d'une déconstruction, d'une construction ou d'une reconstruction didactique pour être modifiés en savoirs scolaires. C'est cette reconstruction que Chevallard (1985) appelle « transposition didactique ». Les deux principaux effets de transposition didactique sont la sélection et la transformation des savoirs. Nous convoquons Chevallard (1985) car il pose la question du quoi transposer et du comment transposer dans la construction des savoirs. Nous convoquons l'auteur car les notions

* Laboratoire de didactique (LAREDI) – Côte d'Ivoire –daffeliac@gmail.com

mathématiques sous-jacentes ne sont pas explicitées lors des séances sur la germination. Cette situation pourrait constituer un obstacle didactique dans la construction des savoirs de l'apprenant. Nous nous appuyons également sur Nebout (1995) relativement à son postulat sur la signification contextuelle, concept qui se situe dans le cadre général de l'analyse du processus de transposition didactique. Pour elle, la signification contextuelle s'emploie à décrire les facteurs déterminants d'une situation didactique. L'objet d'enseignement s'inscrit dans un contexte donné en référence à l'ancrage socioculturel.

2. Notion de germination

La germination est la reprise du développement et du métabolisme d'un embryon de spermatophyte jusqu'à émergence de la radicule. C'est le début du développement d'un nouvel être végétal, à partir d'une graine placée dans les conditions favorables. C'est le passage à l'état de vie active d'un organe clos dont la vie a été jusque-là très ralentie (spore, tubercule). Opération de malterie au cours de laquelle germent les grains d'orge. L'enseignement-apprentissage de la germination convoque des tâches et activités comme déclinées dans le tableau ci-après :

Objets des séances	Tâches de l'enseignant	Activités de description des élèves
1 Description une graine	- Invitation des élèves à observer et à décrire une graine	Observation et description d'une graine
2 Conditions de la germination	- Proposition d'un dispositif expérimental de semis avec ou sans eau. - Invitation à formuler des hypothèses consensuelles sur les conditions de germination.	Observation du dispositif sur 5 jours. Relevé des informations sur les facteurs internes et des facteurs externes favorisant ou non la germination. - Formulation d'hypothèse de recherche sur les conditions d'une bonne germination
3 Les étapes de la germination	Invitation à observer, à décrire et à mesurer la jeune plante issue de la germination	Observation, description des étapes de la germination Prise de mesures de la jeune plante

Tableau 1- *Tâches et activités sur la germination*

3. Dialectique outil-objet

Douady (1992) place les concepts dans une dynamique d'évolution à travers les cadres. Ces cadres peuvent changer à partir de nouvelles formulations qui prennent en compte les anciennes formulations. Le statut de chaque concept ou notion change d'un cadre à un autre. Les objets développés en mathématique interviennent dans d'autres champs scientifiques comme des outils permettant de résoudre circonstanciellement des situations problèmes. La consolidation de tout savoir fonctionne donc par cette dynamique de régulation objet-outil selon Douady (1992)

III. HYPOTHESE DE RECHERCHE

Les objets mathématiques sous-jacents sont insuffisamment exploités pour améliorer les apprentissages de la germination de la graine en CE1.

IV. CADRE METHODOLOGIE

Le cadre méthodologique traite du terrain de recherche, de la population et de l'échantillonnage ainsi que les outils et techniques de collecte de données.

1. Terrain de recherche

Dix écoles de l'Inspection de l'enseignement préscolaire et primaire (IEPP) de Cocody 1 ont été choisies de manière aléatoire.

2. Population et échantillonnage

La population cible concerne tous les enseignants tenant les classes de cours élémentaire première année (CE1) de l'IEPP Cocody 1 de la DREN d'Abidjan 1. L'échantillon concerne dix (10) enseignants des écoles choisies au niveau de l'IEPP.

3. Outils et techniques de collecte des données

L'outil de collecte de données est un questionnaire (annexé) de trois items qui cherchent à faire citer notions mathématiques susceptibles d'intervenir dans l'enseignement- apprentissage de la germination de la graine ainsi que la manière de les utiliser sur cet objet.

4. Méthodes d'analyse

Notre travail s'articule autour de l'analyse interdisciplinaire entre sciences et technologie d'une part et les mathématiques à travers l'enseignement de la germination de la graine en CE1. L'analyse présente une double articulation, qualitative et quantitative.

V. RÉSULTATS

1. Présentation des résultats du questionnaire

Réponses	Oui	Non
Fréquences	8	2

Tableau 2*- Fréquences des réponses*

Huit (8) enseignants sur dix (10) pensent que les mathématiques interviennent dans l'enseignement-apprentissage de la germination de la graine au CE1

Contenus visés	Nombres	Capacités	Proportionnalité	Mesure	Intervalles
Fréquences	8	4	2	4	7

Tableau 3*- Fréquences des contenus mathématiques*

Le nombre et les intervalles apparaissent en moyenne 75 % dans l'enseignement de la germination de la graine

Les notions de capacité, de mesure et de proportionnalité présentent un taux moyen de 33% d'apparition dans les séances sur la germination de la graine.

Objets	Modalités d'utilisation
Nombres	Dénombrer les graines à semer Dénombrer les jours du semis à l'apparition des deux premières feuilles
Capacité	Déterminer la quantité d'eau utile à une bonne germination
Proportionnalité	Aucune justification
Mesure	Prise de mesures sur la croissance en longueur de la jeune plante
Intervalles	Déterminer l'intervalle entre les semis

Tableau 4 *- Modalités d'utilisations des notions mathématiques*

Pour toutes les notions, les modalités d'utilisation des objets mathématiques sont proposées par quatre (4) enseignants. Six (6) n'ont pas pu expliquer correctement comment ces notions interviennent dans l'enseignement de la germination de la graine.

2. Interprétation et discussion des résultats

Les enseignants interrogés ont majoritairement cité les nombres et les intervalles comme étant les notions mathématiques pouvant intervenir dans l'enseignement-apprentissage de la germination de la graine en CE1. Ils ont reconnu d'avance l'importance que pourraient avoir les notions mathématiques pour enseigner la germination de la graine.

D'autres notions telles que la capacité, les mesures et la proportionnalité ont été insuffisamment appréhendées comme des notions à prendre en compte.

Dans l'un des cas ou dans l'autre, les enseignants dans leur grande majorité, n'ont pu expliquer comment utiliser ces notions mathématiques dans l'enseignement-apprentissage de la germination de la graine. Cela pose alors un problème de transposition didactique lié à la sélection et la transformation des savoirs. Les enseignants sont donc confrontés à la question du « quoi transposer » et du « comment transposer » didactiquement les savoirs en référence aux préoccupations soulevées par Chevallard (1985).

Ces difficultés d'ordre didactique pourraient tirer leurs sources dans la formation initiale des enseignants. Elles peuvent également être liées à d'autres facteurs tels que l'absence d'un modèle intégré en Mathématiques et en Sciences et technologie.

Le lien didactique n'est pas toujours fait entre les disciplines, sur un niveau mais aussi entre les niveaux. L'apprenant dispose d'un savoir qu'il réinvestit dans sa vie courante. D'où la nécessité d'introduire le vocabulaire spécifique assez tôt lorsque l'élève n'utilise pas le français à la maison. Il est pertinent de faire référence aux mathématiques par rapport à l'apprentissage des Sciences et technologie. Il faudrait alors considérer en formation initiale une modélisation interdisciplinaire des notions mathématiques.

La mise en place d'une pépinière de graine pourrait nécessiter l'usage d'outils mathématiques au sens de Douady (1992). La confection de la pépinière demande l'usage de

piquets en triangle équilatéral, de tracer de lignes parallèles. La confection de trous à intervalles réguliers est à envisager comme le montre le dispositif ci-après :

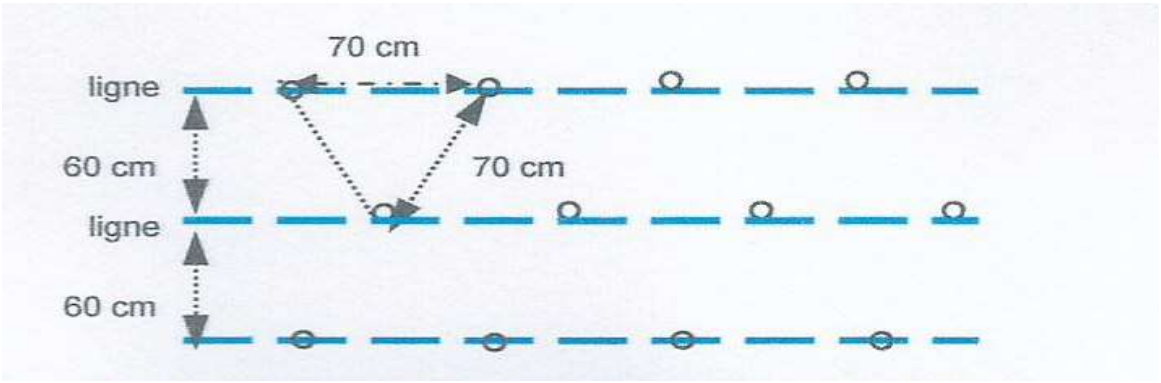


Figure 1 *- Dispositif de conception d'une pépinière de graine*

Ce dispositif est soutenu par la prise de mesures avec des mélanges d'eau à l'eau de javel à la proportionnelle (45 litres d'eau pour 1 litre d'eau de javel à 36 %) pour désinfecter le sol.

Les questions d'intervalles et de nombres sont très nécessaires aux apprenants dans le réinvestissement des acquis mathématiques en situation de vie courante. Les semis de graines sous forme de billons à intervalles réguliers dans les champs ou dans les activités coopératives à l'école font partie des activités courantes des apprenants en milieu rural. Associer donc ces objets mathématiques à l'enseignement-apprentissage de la graine présente un intérêt didactique et social en lien avec le milieu de vie des apprenants. Un tel choix serait un facteur déterminant des situations didactiques de l'enseignement-apprentissage de la germination de la graine de manière à conférer aux apprenants du sens par rapport à leurs apprentissages en sciences et technologie et en mathématique en rapport avec la signification contextuelle telle que envisagée par Nebout (1995).

VI. CONCLUSION

L'étude retrace les opinions des enseignants sur l'utilisation des notions mathématiques dans l'enseignement- apprentissage de la graine. Ces enseignants, bien que conscients de l'importance des notions mathématiques (nombre, mesure, proportionnalité, intervalles, mesure, parallèle, triangle, capacité, longueur, ..) dans l'enseignement de cet objet gagneraient à les convoquer convenablement dans leurs pratiques pour donner davantage un sens utilitaire aux apprentissages.

REFERENCES

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble : Pensée Sauvage.

Douady, R. (1992). Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. *Repères IREM* 6, 132-158.

Kouadio, K. D. (2018.) *Pour une didactisation de la Démarche Scientifique Expérimentale (D.S.E). Exemple de la germination de la graine en Cours Elémentaire Première année (CE1).* Thèse de doctorat, Bouaké : Université Alassane Ouattara.

Nebout Arkhurst, P. (1995). *La signification contextuelle dans les processus de Transposition didactique : L'exemple de la géométrie au niveau du collège en Côte d'Ivoire.* Thèse de doctorat. Paris : Université de Paris V.

ANNEXE : QUESTIONNAIRE

Item 1 : Pensez-vous que les mathématiques interviennent dans l'enseignement-apprentissage de la germination de la graine au CE1? (Cochez la réponse qui vous convient).

Oui ☐ Non ☐

Item 2 : Parmi les notions mathématiques suivantes, cochez celles qui pourraient intervenir dans l'enseignement-apprentissage de la germination de la graine. (Cochez la réponse qui vous convient)

Nombres ☐

Capacité ☐

Proportionnalité ☐

Mesures ☐

Intervalle ☐

Autres (préciser) ☐ ……

Item 3 : Pour chaque notion cochée, expliquez en trois (3) lignes comment vous l'utilisez dans l'apprentissage.

Explication du choix de la notion de « *nombres* »

……

Explication du choix de la notion de « *Capacité* »

……

Explication du choix de la notion de « *Proportionnalité* »

……

Explication du choix de la notion de « *Mesure* »

……

Explication du choix de la notion de « *Intervalles* »

……

Explication du choix de la notion de « *Autres à préciser* »

……

EFFETS POTENTIELS D'UNE EVOLUTION DES PRATIQUES ENSEIGNANTES D'EVALUATION SUR LES APPRENTISSAGES ALGEBRIQUES DES ELEVES AU COLLEGE

PILET[*] Julia – HOROKS[**] Julie

Résumé – Nous montrons en quoi une entrée dans l'analyse des pratiques enseignantes par l'évaluation permet de faire le lien avec les apprentissages des élèves sur un domaine mathématique donné, ici l'algèbre élémentaire. Nous présentons notre cadre d'analyse des pratiques évaluatives ainsi que le contexte de travail collaboratif avec des enseignants de collège. Nous présentons quelques résultats sur les évolutions des pratiques enseignantes et tentons de faire le lien avec les apprentissages des élèves.

Mots-clefs : Evaluation, Pratiques évaluatives, Apprentissages, Algèbre, Travail collaboratif

Abstract – We show how focusing on assessment to analyze teachers' practices, can be used to link teachers' assessment practices with students' learning about a given mathematical field, and specifically here elementary algebra. We present our framework for the analysis of teachers' assessment practices in a context of collaborative work with secondary teachers. We present some results about the professional development of teachers' assessment practices and try to establish a link with students' learning.

Keywords: Assessment, Assessment Practices, Learning, Algebra, Collaborative work

Nous nous intéressons aux effets de l'évolution des pratiques d'enseignants dans le cadre d'un travail collaboratif en mathématiques au cycle 4 en France (élèves de 12 à 15 ans) sur les apprentissages de leurs élèves. Plus particulièrement, nous interrogeons l'impact des pratiques enseignantes d'évaluation sur le développement des compétences mathématiques des élèves, ici en algèbre élémentaire. Après avoir présenté notre cadre d'analyse pour définir les pratiques d'évaluation des enseignants, nous montrons comment, au sein d'un projet collaboratif regroupant enseignants et chercheurs en didactique des mathématiques, nous avons favorisé une évolution des pratiques évaluatives. Nous essayons d'en montrer l'impact sur les apprentissages des élèves.

I. L'EVALUATION : UN NŒUD POUR INTERPRETER LES LIENS ENTRE PRATIQUES ET APPRENTISSAGES

1. L'évaluation dans les pratiques enseignantes

Le fait que l'évaluation joue potentiellement un rôle dans les processus d'apprentissage des élèves, notamment en mathématiques, et pas uniquement de manière indirecte à travers la motivation des élèves à travailler pour réussir, fait consensus dans le champ de recherche sur l'évaluation (par exemple, Allal & Mottier-Lopez, 2007). Nous nous appuyons sur la définition de l'évaluation donnée par De Ketele (1989) pour définir ce que nous entendons par pratiques d'évaluation :

« Évaluer signifie:

- recueillir un ensemble d'informations suffisamment pertinentes, valides et fiables
- examiner le degré d'adéquation entre cet ensemble d'informations et un ensemble de critères adéquats aux objectifs fixés au départ ou ajustés en cours de route, en vue de prendre une décision. »

Par conséquent, nous incluons dans les pratiques d'évaluation des enseignants, toute activité qui consisterait à prendre de l'information sur ce que les élèves savent (leurs connaissances plus anciennes, leur compréhension d'une notion nouvelle) ou sur ce qu'ils font. Nous incluons aussi dans les pratiques enseignantes l'exploitation de l'information ainsi

[*] Laboratoire de Didactique André Revuz, Université Paris Est Créteil – France – julie.horoks@u-pec.fr
[**] Laboratoire de Didactique André Revuz, Université Paris Est Créteil – France – julia.pilet@u-pec.fr

prise et comparée à une référence générale (liée à l'institution) ou plus locale (liée à la classe ou à chaque élève), et son exploitation à plus ou moins court terme dans le but de faire apprendre. L'évaluation est ainsi pour nous diffuse dans l'enseignement, à partir du moment où l'enseignant s'appuie, de manière plus ou moins importante, sur ce qu'il sait de ses élèves.

Les informations prises peuvent porter sur les activités mathématiques des élèves, à travers lesquelles nous supposons qu'une partie au moins des apprentissages se font, et, plus particulièrement, sur les connaissances des élèves, mobilisées dans les procédures mises en œuvre pour résoudre les tâches proposées par les enseignants. Ces informations peuvent être prises à travers les traces des connaissances ou des activités des élèves, qui peuvent être écrites ou orales, et recueillies plus ou moins formellement, lors d'évaluations étiquetées comme telles, ou non.

Les informations ainsi prises par l'enseignant, pour pouvoir être exploitées, devront être interprétées, à la lumière d'une référence de ce qui peut être attendu des élèves. Cette référence peut être de nature :

- institutionnelle : ce qui est attendu des élèves d'un niveau scolaire compte-tenu des programmes ;
- sociale : à partir de ce qu'on pense du public d'élèves et de ses capacités, ou ce qu'on sait de chaque élève individuellement, avec des biais éventuels : par exemple une tendance à baisser les exigences pour un public en Zone d'Education Prioritaire (par exemple Butlen et al. 2003) ou à porter un jugement sur les élèves parfois influencé par les notes qu'ils ont déjà eues (Caverni et al., 1975) ;
- mathématique : pour une tâche donnée, d'un certain type et mettant en jeu certains contenus mathématiques, à partir de l'analyse *a priori* de la tâche et des procédures possibles des élèves, appuyée sur l'analyse épistémologique et cognitive de la notion, et compte tenu de ce qui a été enseigné en classe.

L'exploitation des informations ainsi recueillies et interprétées peut être utilisée de différentes façons et ainsi infléchir le projet d'enseignement immédiatement après la prise d'informations ou lors de futures séances.

On peut en particulier évoquer, parmi ces exploitations, la question du retour aux élèves, quel que soit son format, son moment, et son contenu, avec un appui plus ou moins important sur les activités mathématiques effectives des élèves. La mobilisation des mathématiques en jeu peut être explicitée à différents niveaux pour justifier, valider, voire comparer ce que les élèves ont produit, et les responsabilités données aux élèves peuvent être plus ou moins grandes dans ces processus.

Faire apprendre n'est cependant pas le seul objectif des enseignants lorsqu'ils évaluent leurs élèves, puisque l'évaluation participe aussi à la certification ou à l'orientation des élèves, notamment avec la notation chiffrée (Merle, 2015). Comment prendre en compte dans nos analyses, des pratiques évaluatives qui n'ont pas directement pour finalité les apprentissages des élèves ? Nous nous appuyons sur la Double Approche (Robert et Rogalski, 2002) pour caractériser les pratiques des enseignants en prenant en compte non seulement les contenus, et en particulier les tâches qu'ils proposent, et la gestion de leur déroulement en classe (composantes cognitive et médiative des pratiques) mais aussi des composantes externes à ces dimensions, et qui relèvent du public concerné (composante sociale), de l'expérience de l'enseignant (composante personnelle) ou des programmes et instructions officielles (composante institutionnelle).

2. Liens entre évaluation et apprentissages

Du côté des apprentissages mathématiques des élèves, nous faisons l'hypothèse qu'ils peuvent être favorisés par plusieurs facteurs liés pour nous au processus d'évaluation (prise d'information / interprétation / exploitation), que nous détaillons ici.

Nous considérons que les apprentissages peuvent être favorisés si la prise d'information et l'interprétation sont essentiellement liées aux mathématiques en jeu. L'enseignant s'appuie sur les savoirs et activités mathématiques effectives des élèves, dans leur relative variété, pour bâtir ses enseignements, à plus ou moins court ou terme, au plus près des besoins cognitifs de chaque élève - ou plus raisonnablement de chaque profil d'élève (Pilet 2015), donc dans leur Zone Proximale de Développement (Vygotski, 1994). En cela nous nous appuyons sur un élément constitutif de la définition de ce qu'est l'évaluation formative (cf. Ash & Levitt, 2003).

Cette prise d'information, pour être pertinente, nécessite une proposition de tâches qui couvrent l'ensemble du domaine mathématique considéré (à la fois pour faire rencontrer aux élèves les différents types de tâches qui recouvrent les compétences visées par rapport à ces notions, et pour en attester les apprentissages chez les élèves). Elle requiert aussi pour chaque tâche, une analyse *a priori* des procédures possibles des élèves, hiérarchisées suivant les niveaux de conceptualisation qu'elles indiquent chez l'élève, permettant un repérage fin de ces procédures dans les productions effectives des élèves en classe et une interprétation de ces productions en lien avec les connaissances mathématiques des élèves.

Nous supposons de plus que, pour favoriser les apprentissages des élèves, des retours sur leurs activités mathématiques, lors de moments d'évaluation formelle ou non, doivent rendre explicites les mathématiques visées et impliquer les élèves dans cette explicitation, en particulier à l'aide d'une argumentation mathématique explicite au service de la formulation, de la justification et de la validation des productions de ces activités.

Nous pensons de plus que le fait de donner aux élèves des responsabilités dans ces différents processus permet de mettre en place une évaluation potentiellement formatrice pour les élèves (Hadji, 1989).

3. Lien avec le contrat didactique

Brousseau (2011) inclut le processus d'évaluation dans le contrat didactique : *« [...] ce contrat (didactique) régit les rapports du maître et de l'élève au sujet des projets, des objectifs, des décisions, des actions et des évaluations didactiques »* (Brousseau, 2011, p. 33). L'idée de "contrat d'évaluation" est évoquée par House (2010), comme contrat contenant les éléments nécessaires (dont les objectifs, les attentes et les retours de l'évaluateur) pour assurer la "justice" de cette évaluation. Sayac (2017, p 70) définit la notion de *contrat didactique en évaluation*, pour spécifier l'idée de contrat didactique aux *épisodes évaluatifs* - pendant lesquels les élèves sont confrontés à une évaluation par l'enseignant - et les responsabilités de chacun par rapport aux savoirs visés lors de ces moments.

Nous faisons l'hypothèse, dans le cadre de notre étude, d'un probable manque de transparence du contrat didactique lié à l'évaluation des apprentissages. Qu'est-ce qui est effectivement rendu explicite par l'enseignant dans le processus d'évaluation, tant du côté de ce qui est attendu de l'élève, que de ce qui lui est renvoyé par la suite ? Les attentes réciproques des différents acteurs en la matière sont probablement régies par des habitudes bien installées dans la classe, tant les pratiques enseignantes nous semblent stables. Nous constatons que les tâches d'évaluation sommative restent plus ou moins proches de ce qui a été travaillé auparavant en classe pour un enseignant donné et que la nature des retours faits aux élèves sur ces évaluations, souvent limités à la notation chiffrée, évolue mais sur un temps long. En ce qui concerne l'évaluation formative, les routines (Charles-Pézard et al.,

2012) des enseignants dans la gestion des interactions nous paraissent elles aussi relativement stables.

On peut s'interroger de plus sur les effets possibles du choix et de l'explicitation de ce contrat d'évaluation auprès des élèves. Ainsi Dufays (2002), réalise une comparaison de deux enseignantes de littérature en Belgique dont les pratiques en termes d'enseignement et d'évaluation diffèrent. Les effets produits chez les élèves sont comparés mais ne sont pas décrits en termes d'apprentissage. Pour notre part ce sont bien les apprentissages pour lesquels nous souhaitons mesurer un impact des choix des enseignants pour l'évaluation, même s'il est difficile de séparer ce qui relève de l'évaluation, et plus généralement de l'enseignement.

Ainsi, il nous semble pertinent, pour caractériser le contrat d'évaluation, de regarder ce qui est rendu visible de ce contrat en classe en aval et en amont des évaluations formelles, et plus particulièrement l'explicitation des attentes de l'enseignant, en ce qui concerne les contenus évalués (étiquetage des tâches / compétences visées) et les procédures à mettre en œuvre (hiérarchisation des différentes procédures possibles et justification de cette hiérarchisation).

Nous montrons dans la suite de cette étude, de quelle façon un travail collaboratif entre enseignants et chercheurs a permis de faire évoluer le contrat d'évaluation mis en place dans les classes concernées tout en mettant en lumière cette stabilité des pratiques d'évaluation.

II. ANALYSER L'EVOLUTION DES PRATIQUES EVALUATIVES DANS UN CONTEXTE DE TRAVAIL COLLABORATIF : ELEMENTS DE METHODOLOGIE

1. Un contexte de travail collaboratif

Pour analyser les pratiques évaluatives et en mesurer les effets d'apprentissages sur les élèves, nous avons choisi de mettre en place un travail collaboratif avec une équipe d'enseignants de collège (élèves de 12 à 15 ans en France) en travaillant avec eux un contenu mathématique spécifique sur un temps long (quatre ans et plus), l'algèbre élémentaire. L'équipe d'enseignants provient d'une Zone d'Education Prioritaire de la région parisienne. Le travail collaboratif répond aux attentes des enseignants de se former pour faire évoluer l'enseignement de l'algèbre et cela a été l'occasion de travailler avec eux sur les conditions à mettre en place pour favoriser une évaluation formelle comme informelle au service des apprentissages de leurs élèves. Le groupe se retrouve mensuellement autour de données issues principalement des classes des enseignants, mais aussi des recherches en didactique, notamment de l'algèbre. Les choix de séquences d'enseignement sont discutés, mais chaque enseignant s'approprie ensuite le travail collectif pour construire un enseignement adapté à ses élèves. Pour analyser leurs pratiques nous recueillons régulièrement leurs documents pour la classe ainsi que des vidéos tournées dans leurs classes, des enregistrements des réunions du groupe et des entretiens sur les pratiques déclarées d'évaluation. Nous avons également des productions d'élèves aux évaluations sommatives en classe et les résultats des élèves à un même test diagnostique Pépite (voir plus loin) à plusieurs moments pour le suivi de cohorte.

2. Nos questions de recherche

Dans ce contexte, nous nous interrogeons sur les effets d'un tel travail collaboratif sur les pratiques d'évaluation selon plusieurs entrées. Tout d'abord nous interrogeons les effets sur le choix des tâches. En effet il nous paraît nécessaire de questionner la couverture du domaine mathématique, la nature et la complexité de l'ensemble des tâches proposées, d'une part, parce que certains types de tâches ont plus de potentialités que d'autres pour repérer les raisonnements des élèves et remettre en question des conceptions erronées (Pilet, 2015),

d'autre part, parce qu'il pourrait exister des écarts plus ou moins grands entre les tâches proposées par les enseignants pour faire apprendre et les tâches données pour évaluer les élèves. Nous étudions également la façon dont les enseignants régulent les moments de mise en commun en classe, à travers à la fois les informations prises sur les productions des élèves, celles qui sont discutées en grand groupe et les retours faits aux élèves, notamment en ce qui concerne la qualité des arguments mathématiques utilisés par l'enseignant pour valider les réponses. Enfin, nous interrogeons les effets de ces nouvelles pratiques sur les apprentissages des élèves dont nous pensons qu'ils dépendent en grande partie des activités mathématiques auxquelles ils sont confrontés, activités qui découlent des choix de l'enseignant, notamment en termes de tâches et d'évaluation formative.

Nous faisons l'hypothèse que les apports en didactique de l'algèbre permettront de faire évoluer les tâches proposées aux élèves et de faire mieux interpréter les productions des élèves par les enseignants mais qu'étant donné la stabilité et la cohérence des pratiques enseignantes (Robert, 2007), l'évolution de la gestion des mises en commun et les effets sur les apprentissages des élèves se feront sur un temps long.

III. QUELQUES RESULTATS

Nous commençons par présenter nos résultats sur l'évolution des pratiques évaluatives des enseignants pour ensuite faire le lien avec les apprentissages des élèves.

1. Des pratiques évaluatives en cours d'évolution

L'analyse de l'ensemble des tâches proposées par les enseignants relevant de l'algèbre s'effectue à partir d'un modèle épistémologique de référence du domaine (Grugeon-Allys et al., 2012 ; Pilet, 2015) exprimé sous la forme de praxéologies (Chevallard, 1999) et notamment de la notion de types de tâches. Nous pouvons ainsi repérer les types de tâches les plus travaillés et ceux qui ne le sont pas du tout. Nous analysons de plus la complexité des tâches proposées suivant les niveaux de mise en fonctionnement des connaissances de Robert (1998). L'analyse de l'ensemble des tâches proposées par l'un des enseignants du groupe de travail, sur trois années consécutives, dévoile une couverture du domaine algébrique plus grande d'une année à l'autre, et une apparition des types de tâches permettant de revenir sur les raisons d'être de l'algèbre en début de séquence et dans les évaluations formelles des élèves. Les tâches retenues permettent donc de prendre des informations sur les niveaux de raisonnement potentiellement mobilisés par les élèves, et les tâches des évaluations sommatives restent toujours proches de celles qui ont été travaillées en amont. Nous pouvons donc conclure à un écart relativement constant entre ce qui est évalué et ce qui a été travaillé en amont. Certains types de tâches sont travaillés en classe sans être évalués sommativement, ce qui interroge la place de l'évaluation informelle dans les pratiques.

L'analyse de la gestion des mises en commun sur plusieurs années pour un même enseignant ou pour différents enseignants sur une même séance (Horoks & Pilet, 2016) montre que la prise d'informations sur les productions des élèves est enrichie par une meilleure interprétation des différentes procédures possibles, correctes ou non, et non plus seulement des résultats de ces procédures. Toutefois la hiérarchisation explicite de ces procédures reste anecdotique en particulier à l'issue des tâches qui permettent de travailler les enjeux de l'algèbre (prouver, traduire d'un registre à un autre, etc.), tâches souvent nouvelles pour les élèves, comme elles l'ont été pour ces enseignants. De plus le discours des enseignants ne permet que rarement de remonter jusqu'aux propriétés mathématiques, et même si elles sont parfois nommées, il n'est pas fait explicitement référence aux conditions de leur application. Cette tendance est certainement accentuée par le fait que les élèves sont

en Zone d'Education Prioritaire : c'est la raison invoquée par ces enseignants pour expliquer qu'ils refusent de formaliser les propriétés de manière totalement décontextualisée. Nous constatons toutefois qu'ils engagent petit à petit une implication des élèves plus grande dans les processus d'évaluation des procédures, avec davantage d'initiatives laissées aux élèves dans les processus de formulation et de validation. De plus les retours faits aux élèves par les enseignants lors des évaluations sommatives comme formatives nous paraissent s'être enrichis avec des frontières moins marquées entre ces deux types d'évaluation. Nous proposons maintenant de relier ces résultats aux apprentissages des élèves.

2. Des effets nuancés sur les apprentissages des élèves

Pour repérer des effets sur les apprentissages des élèves, nous nous sommes appuyés sur l'évaluation diagnostique Pépite des connaissances et compétences des élèves (Grugeon-Allys et al., 2012). Cette évaluation, fondée sur une analyse épistémologique du domaine de l'algèbre élémentaire, couvre l'ensemble des types de tâches du domaine et est basée sur une analyse multidimensionnelle des réponses des élèves permettant d'établir automatiquement le profil de chaque élève suivant trois composantes : l'usage de l'algèbre, la traduction d'un registre de représentation à un autre et le calcul numérique et algébrique. Une échelle de maîtrise permet de situer l'élève sur chaque composante (voir tableau 1). L'échelle présentée ici est celle pour le niveau attendu en fin de collège en France.

Composante	**Niveau**	**Description**
Usage de l'algèbre	Niveau 1	Disponibilité de l'outil algébrique et usage adapté aux types de problèmes du domaine
	Niveau 2	Usage de l'outil algébrique adapté dans certains types de problèmes
	Niveau 3	Usage de l'outil algébrique non motivé et non adapté
	Niveau 4	Non disponibilité de l'outil algébrique et usage persistant de démarches arithmétiques
Traduction entre différents registres sémiotiques	Niveau 1	Traduction adaptée et contrôlée
	Niveau 2	Traduction fréquemment sans reformulation
	Niveau 3	Traduction pour schématiser
Calcul algébrique	Niveau 1	Calcul intelligent et contrôle préservant l'équivalence des expressions
	Niveau 2	Calcul basé sur des règles syntaxiques souvent à l'aveugle ne préservant pas l'équivalence des expressions
	Niveau 3	Calcul sans signification et non opératoire, erreurs du type $3+x \rightarrow 3x$ et $a^2 \rightarrow 2a$

Tableau 1 *- Les niveaux sur les composantes permettant de décrire les connaissances et compétences des élèves en algèbre (Grugeon-Allys et al. 2012)*

Les tâches d'évaluation du test ont été déclinées suivant les attentes institutionnelles des programmes français, si bien qu'il en existe une version pour l'entrée en classe de 4e, une pour l'entrée en classe de 3e et une pour l'entrée en classe de 2de. Les sept enseignants de notre étude ont fait passer trois tests à leurs élèves, répartis sur deux années : le test de début de 4e, le test de début de 3e et enfin le test de fin de 3e. Les élèves de notre cohorte n'ont pas tous passé l'ensemble des tests diagnostiques, suivant qu'ils étaient ou non, lors de chacune de ces deux années, dans la classe de l'un des enseignants de notre étude, mais aussi selon les aléas technologiques : 21 élèves ont passé les tests de début de 4ème et de début de 3ème, 11 élèves les tests de début 4ème et de fin 3ème, 59 les tests de début et de fin de 3ème et seulement 5 élèves les trois tests ! Nous présentons l'ensemble des données tout en soulignant que l'échantillon est par conséquent limité. Notons qu'il conviendrait de faire des analyses statistiques supplémentaires pour affiner et interpréter ces résultats.

La répartition des élèves sur les composantes *Usage de l'algèbre* et *Calcul algébrique* est notable (tableau 2, colonne 1). Au fil des années, de moins en moins d'élèves utilisent des

démarches arithmétiques et de plus en plus utilisent l'algèbre dans la résolution de problème ce qui peut être mis en lien avec le fait que le moment de reprise de l'algèbre est davantage organisé par les enseignants autour des raisons d'être de l'algèbre. Toutefois ce recours à l'algèbre est limitée car les élèves convoquent les lettres mais ne savent pas toujours les utiliser ensuite (niveau 3). Le niveau des élèves baisse en *Calcul algébrique* et en *Traduction* entre la 4e et la 3e (tableau 2, colonnes 2 et 3), ce qui peut être expliqué par le fait que les expressions algébriques sont de plus en plus complexes. Entre le début et la fin de la 3e, le nombre d'élèves de niveau 3 en calcul algébrique diminue. Le niveau sur la traduction algébrique est stable entre le début et la fin de la 3e.

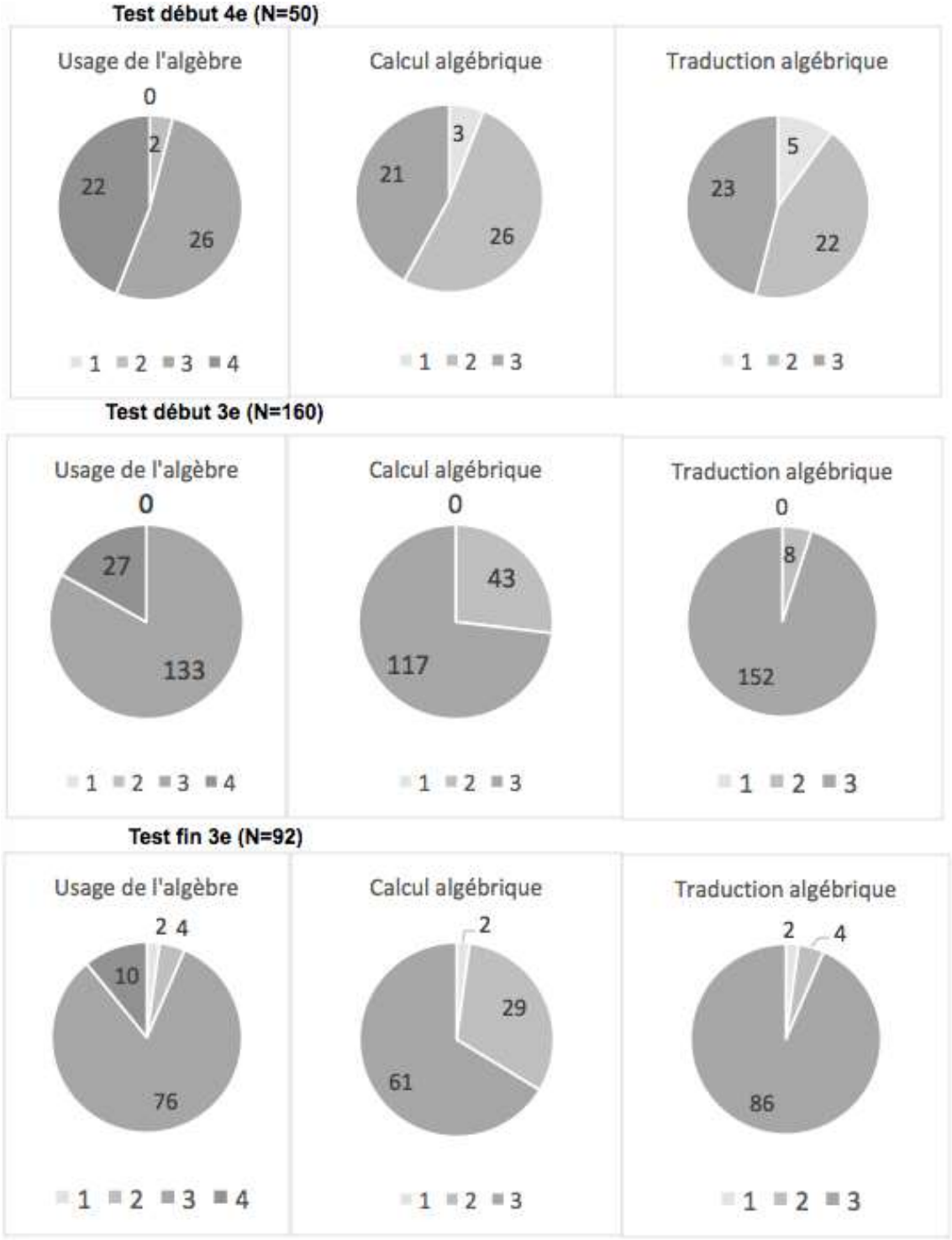


***Tableau 2** - Répartition des élèves suite les trois composantes algébriques et pour chaque test*

IV. DISCUSSION ET PERSPECTIVES

Nous avons développé des outils qui semblent pertinents pour analyser les pratiques évaluatives des enseignants de collège en algèbre mais il nous faut revenir sur nos résultats qui sont encore exploratoires. En effet, étant donné le contexte de notre étude et la complexité du lien entre pratiques d'évaluation et apprentissages, la méthodologie à mettre en place doit prendre en compte de nombreux facteurs qui ne relèvent pas toujours de la didactique des mathématiques comme le rapport à l'école des élèves et les contextes sociologiques.
Nous avons constaté la difficulté à trouver des leviers pour faire évoluer les pratiques évaluatives. Des perspectives sont à explorer du côté du contrat évaluatif. Récemment les enseignants de notre collectif, suite aux nouveaux programmes et à nos apports didactiques, ont proposé de nouvelles grilles d'évaluation, davantage appuyées sur une analyse préalable des tâches, notamment en terme de complexité et de compétences mises en œuvre, et une volonté d'anticipation et de hiérarchisation des procédures. Ces grilles présentent de nouvelles potentialités pour expliciter les attentes aux élèves et leur faire des retours puisqu'elles peuvent être travaillées directement avec les élèves en cours de séquence et ainsi favoriser une évaluation de plus en plus formatrice.

REFERENCES

Allal, L. & Mottier Lopez, L. (Ed.) (2007). *Régulation des apprentissages en situation scolaire et en formation*. Bruxelles : De Boeck.

Ash, D., & Levitt, K. (2003). Working within the zone of proximal development: Formative assessment as professional development. *Journal of Science Teacher Education*, *14*(1), 23-48.

Brousseau, G. (2011). *Le cas de Gaël revisité* (1999-2009). https://hal.archives-ouvertes.fr/hal- 00582620/fr/

Butlen, D., Masselot, P., Pézard, M., Amigues, R., & Kherroubi, M. (2003). De l'analyse de pratiques effectives de professeurs d'école débutants nommés en ZEP/REP à des stratégies de formation. *Recherche & Formation*, *44*(1), 45-61.

Caverni, J. P., Fabre, J. M., & Noizet, G. (1975). Dépendance des évaluations scolaires par rapport à des évaluations antérieures: études en situation simulée. *Le travail humain*, 213-222.

Charles-Pézard, M., Butlen, D., Masselot, P. (2012). *Professeurs des écoles débutant en ZEP. Quelles pratiques ? Quelle formation ?* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (2009). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19(2) 221–265.

De Ketele, J.-M. (1989). L'évaluation de la productivité des institutions d'éducation. *Cahiers de la Fondation Universitaire : Université et société. le rendement de l'enseignement universitaire*, 3, 73-83.

Dufays, J. L. (2002). De la tâche prescrite à la tâche perçue: regards croisés sur l'enseignement de la littérature. In *Les tâches et leurs entours en classe de français: Actes du 8ème colloque de la DFLM (Neuchâtel, 26-28 septembre 2001)*.

Grugeon-Allys B., Pilet J., Chenevotot-Quentin F., Delozanne E. (2012). Diagnostic et parcours différenciés d'enseignement en algèbre élémentaire. In Coulange, L., Drouhard, J.-P., Dorier, J.-L., Robert, A. (Eds.) *Recherches en Didactique des Mathématiques, Numéro spécial hors-série, Enseignement de l'algèbre élémentaire : bilan et perspectives (137-162).* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Hadji, C. (1989). *L'évaluation, règles du jeu. Des intentions aux outils.* Edition ESF, Paris.

Horoks, J., Pilet, J. (2016). Analyser les pratiques d'évaluation des enseignants de mathématiques. In Y. Matheron et G. Gueudet (Eds), *Actes de l'école d'été de didactique des mathématiques, août 2015*, Brest (p.623-636). Grenoble : La Pensée Sauvage.

House, E. R. (2010). *Evaluating with validity*. IAP.

Merle, P. (2015). *Les notes. Secrets de fabrication*. Presses universitaires de France.

Pilet, J. (2015). Réguler l'enseignement en algèbre élémentaire par des parcours d'enseignement différencié. *Recherches en didactique des mathématiques*, 35(3), 273-312.

Robert, A. (2007). Stabilité des pratiques des enseignants de mathématiques (second degré) : une hypothèse, des inférences en formation. *Recherches en didactique des mathématiques*, 27(3), 271- 311.

Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 18(2), 139-190.

Robert, A., & Rogalski, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques: une double approche. *Canadian Journal of Math, Science & Technology Education*, *2*(4), 505-528.

Sayac, N. (2017). *Approche didactique de l'évaluation et de ses pratiques en mathématiques: enjeux d'apprentissages et de formation*. Habilitation à diriger des recherches, Université Paris Diderot.

Vygotsky, L. S. (1994). Extracts from thought and language and mind in society. *Language, literacy and learning in educational practice. Clevedon: Multilingual Matters*, 45-48.

FACTEURS DE DÉCISIONS DIDACTIQUES DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES AU SECONDAIRE EN ANDORRE

PONS_DURÓ Rosa[*] – CHAACHOUA Hamid[**]

Résumé – Notre thèse porte sur les décisions didactiques prises par les enseignants de mathématiques et les facteurs qui peuvent les influencer. Nous nous situons au niveau secondaire en Andorre, contexte caractérisé par une diversité éducative particulière. Nous construisons un modèle de référence pour une analyse comparative sur l'enseignement des équations algébriques dans ce contexte, à partir du modèle de décisions didactiques inscrit dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD).

Mots-clefs : facteur institutionnel de décisions didactiques, TAD, transposition didactique, enseignement des mathématiques au secondaire en Andorre, équations algébriques

Abstract – This thesis is about didactical decisions taken by teachers of mathematics and the factors that can influence them. We are on secondary school in Andorra, a context characterized by a particular educational diversity. We build a model of reference on this subject know for a comparative analysis on the teaching of algebraic equations in this context from the model of didactic decisions inscribed within the framework of the Anthropological Theory of Didactics (ATD)

Keywords: institutional factor of didactical decisions, ATD, didactic transposition, secondary mathematics teaching in Andorra, equations

I. INTRODUCTION

1. Le contexte

Cette étude s'intéresse aux pratiques des enseignants et en particulier au rôle de l'enseignant dans le processus d'apprentissage des mathématiques à un niveau secondaire. Nous nous situons dans la société andorrane où coexistent trois systèmes éducatifs pour le niveau secondaire : le système éducatif espagnol (SEE), le système éducatif français (SEF) et le système éducatif andorran (SEA).

La société andorrane instaure le même calendrier scolaire pour les trois systèmes éducatifs. La structure organisatrice de chaque système éducatif s'articule suivant ce calendrier et selon l'institution scolaire du pays d'origine. Dans ce contexte, les trois systèmes éducatifs permettent les échanges d'élèves mais pas des enseignants. En effet, chaque système intègre ses enseignants en fonction de leur formation initiale. Cette formation initiale diffère selon le pays d'origine de chaque système éducatif. Dans les SEE et SEF, ceux sont les institutions universitaires et administratives du pays d'origine correspondant qui assurent la formation initiale nécessaire pour devenir enseignant de mathématiques. Dans le SEA, l'administration publie les conditions d'admission en fonction des études supérieurs antérieures des candidats. En effet, il n'existe pas à nos jours, à l'Université d'Andorre, (UdA) une formation initiale spécifique pour les professeurs de collège et lycée en mathématiques. Dans cette diversité éducative de ce contexte propre à l'Andorre, il s'avère donc intéressant d'étudier comment un enseignant de mathématiques développe ses compétences professionnelles dans un système éducatif donné afin d'enseigner les mathématiques aux élèves et comprendre ce qu'un élève apprend en mathématiques. En définitive, nous nous intéressons aux facteurs qui influencent les décisions didactiques de l'enseignant de mathématiques suivant sa formation initiale et le

[*] Université de l'Andorre Uda- Andorre- mponsdu@uda.ad
[**] Université Grenoble Alpes - LIG (Laboratoire d'Informatique de Grenoble)- Hamid.Chaachoua@imag.fr

développement de ses compétences professionnelles selon le système éducatif auquel il appartient. Nous centrons ainsi notre étude sur le facteur épistémique institutionnel c'est-à-dire sur comment peut être nourrit le rapport personnel de l'enseignant par différents éléments liés aux contraintes et conditions institutionnelles.

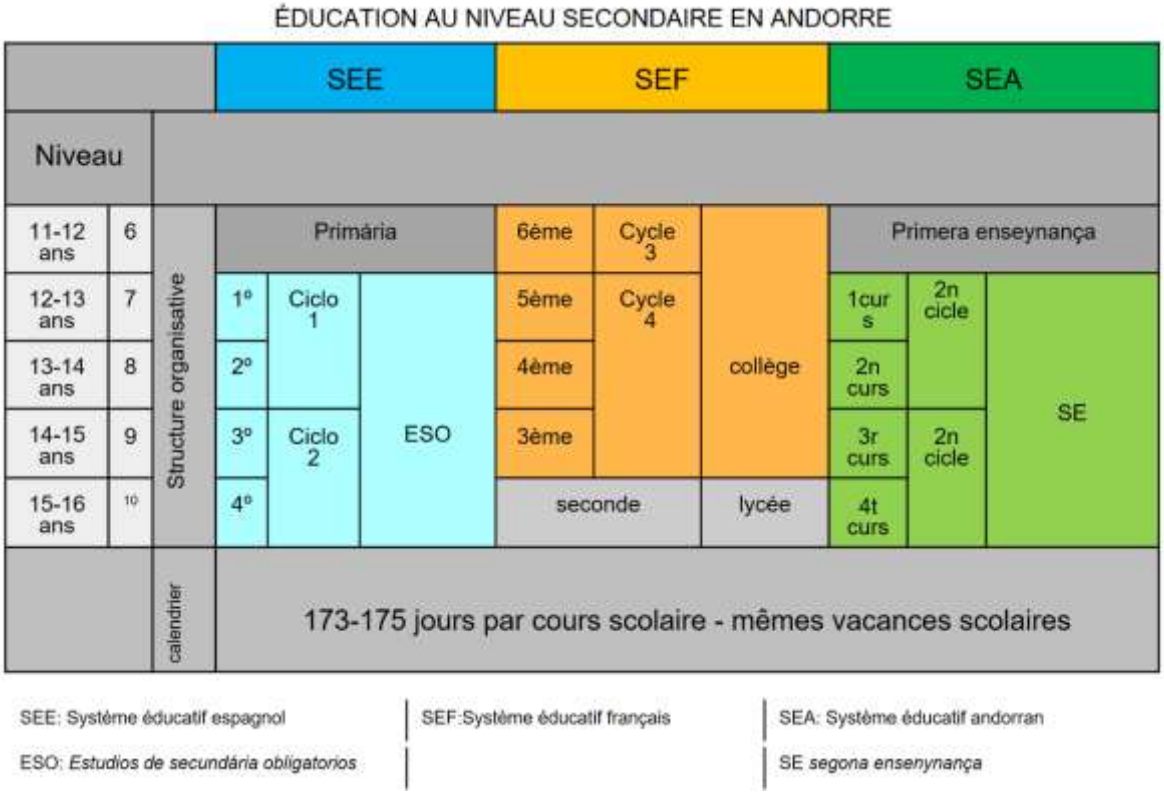


Figure 1 : *systèmes éducatifs publics de l'Andorre*

2. La problématique

La grande variété institutionnelle à petite échelle qui existe en Andorre constitue un contexte intéressant pour étudier la position de l'enseignant dans la l'enseignement des mathématiques. Actuellement, 3 collèges du SEA, 1 collège du SEF et 5 collèges du SEE assurent l'enseignement des élèves au niveau secondaire en Andorre en respectant une répartition équilibrée des élèves dans les trois systèmes éducatifs. En effet, depuis quelques décennies les élèves se répartissent librement à raison d'à peu près un tiers du nombre total de la population entre 6 et 18 ans, par système éducatif. Cette diversité éducative amène l'enseignant de mathématiques à faire des choix sur les ressources à utiliser pour la conception de ses cours et la mise en œuvre en classe des séquences d'activité. En effet, pour enseigner les mathématiques en Andorre, un spectre riche de différentes ressources se présente à l'enseignant. Celui-ci dispose non seulement des programmes et manuels selon le collège dans lequel il travaille et selon le système dont son collège relève, mais aussi il est inévitablement en contact avec les programmes et manuels des autres systèmes éducatifs co-existants dans le pays, puisque les caractéristiques de ce petit pays favorisent particulièrement les échanges entres les élèves et les interactions entre les enseignants. Comment ces interactions et cette coexistence d'institutions scolaires diverses influencent ou non l'enseignement des mathématiques ? Comment l'institution influence-t-elle les décisions

didactiques de l'enseignant lors de la mise en place des séances d'enseignement à un niveau secondaire ? Notre première question de recherche se pose :

Q1 : Quel est l'impact du facteur institutionnel sur les décisions didactiques de l'enseignant ?

L'analyse des différents collèges selon les trois systèmes éducatifs nous porte à affiner notre interrogation. Alors que le SEF est présent en un seul collège dans tout le pays, les SEE et SEA se distribuent en plusieurs collèges. Alors que les trois collèges du SEA suivent le programme andorran et un unique manuel, dans le SEE, trois collèges suivent le programme provenant du gouvernement de l'autonomie catalane de l'Espagne et les deux autres collèges espagnols du pays suivent le programme espagnol à l'étranger. D'autre part, dans les SEE et SEF, les collèges choisissent les manuels en mathématiques parmi tous les manuels publiés par différents éditorialistes respectant les programmes officiels. Ainsi, dans le seul collège français, un seul manuel par niveau éducatif existe, tandis que dans le SEE chacun des cinq collèges font des choix différents des manuels utilisés. Trois des collèges espagnols utilisent trois manuels différents suivant le programme catalan, les deux autres collèges suivant le programme espagnol à l'étranger utilisent des manuels castillans différents. En ce qui concerne le SEA, les collèges disposent d'un seul manuel, la réalisation de celui-ci différant à celui des manuels des autres systèmes éducatifs : ceux sont des enseignants des trois collèges, choisis par l'administration, qui élaborent le manuel en puisant au choix dans les ressources onlines et les manuels des SEF et SEE. Cette diversité de ressources à laquelle est exposé l'enseignant de mathématiques en Andorre dépend donc de chaque système éducatif tout en tenant compte des particularités du pays. Ce qui fait que l'enseignant du SEF appartient à une institution scolaire avec un programme et un manuel au choix et l'enseignant du SEA appartient à une institution scolaire avec un programme et un manuel unique dont la réalisation est spécifique. De plus, deux institutions scolaires sont à considérer dans le SEE, l'une suivant le programme catalan, l'autre le programme castillan, avec un choix sur plusieurs manuels dans chacune. La richesse institutionnelle d'un tel contexte s'avère être spécialement favorable à l'étude de la question de l'influence de l'institution dans la prise de décision de l'enseignant. Ainsi une deuxième question de recherche se pose :

Q2 : Quels éléments spécifiques des institutions ont un effet sur les décisions didactiques de l'enseignant de mathématiques ?

L'objectif de notre recherche est donc d'apporter des éléments de réponse aux questions Q1 et Q2.

II. MÉTHODOLOGIE DE TRAVAIL

1. Organisation du travail

Pour répondre aux deux questions de recherche présentées ci-dessus nous mettons en place une organisation de travail en plusieurs étapes. L'état de l'art sur la position de l'enseignant dans l'enseignement des mathématiques nous permet, tout d'abord, de situer notre cadre théorique. Notre objectif est d'étudier le phénomène social en éducation de la prise décisions didactiques dans l'enseignement des mathématiques au secondaire en Andorre, d'une manière qualitative sans pour autant laisser de côté des éléments d'analyse quantitative. Le cadre de l'étude s'appuie sur la Théorie Anthropologie du Didactique (TAD), plus précisément sur le modèle praxéologique et l'échelle des niveaux de co-détermination. Ces modèles nous permettent de mettre en place une méthodologie cohérente pour recueillir, analyser et traiter les données nécessaires afin de modéliser comment l'enseignant du secondaire interagit avec

un objet de savoir pour l'enseigner à ses élèves. En s'appuyant sur la procédure de la transposition didactique du savoir savant au savoir à enseigner puis au savoir enseigné, nous mettons en place notre organisation du travail (figure 2).

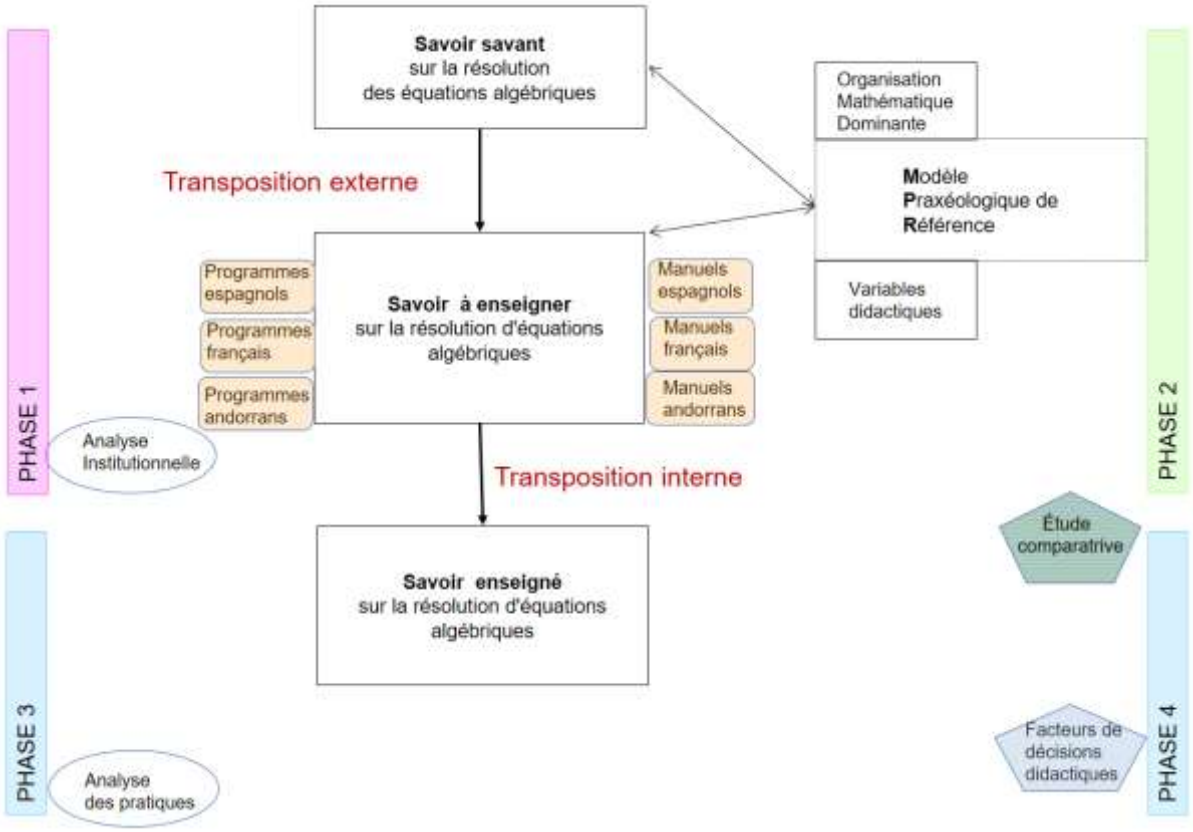


Figure 2 : *Organisation de travail s'appuyant sur la transposition didactique*

2. *Analyse des travaux*

Apporter des éléments de réponses à nos questions de recherche implique la compréhension des choix que fait l'enseignant pour que l'élève apprenne en mathématiques dans une institution donnée. Pour cela, nous partons des travaux (Pons_Duro, 2014) portant sur les décisions didactiques prises par les enseignants de collège et de lycée de deux disciplines (mathématiques et sciences de la vie et de la terre) et les facteurs qui peuvent les influencer. Nous définissons un objet de savoir, les équations, existant à un même niveau scolaire dans les trois institutions observées, et nous développons une analyse synchronique du point de vue didactique. Nous nous interrogeons ainsi sur l'enseignement de l'algèbre dans les institutions éducatives de l'enseignement secondaire en Andorre. Comme dans ce contexte les échanges d'élèves sont permis entre les trois institutions mais pas les échanges d'enseignants, nous étudions comment un enseignant de mathématiques développe ses compétences professionnelles dans un système éducatif donné. Pour cela nous centrons notre étude sur comment l'on enseigne la résolution d'équations dans les différentes institutions éducatives de l'enseignement secondaire publiques andorranes. Ce savoir est présent dans les trois institutions à des niveaux du secondaire équivalents, le 7ème, 8ème, 9ème et 10ème niveau du secondaire (classes de cinquième, quatrième, troisième et seconde au collège et lycée français, classes de 1r,2n,3r et 4t ESO au collège espagnol et, classes de 1r et 2n cycle du collège andorran). Cela nous amène à réfléchir sur comment articuler une étude didactique

comparative entre les trois institutions par rapport à l'enseignement de la résolution d'équations.

Nous mettons en place, alors, une analyse synchronique institutionnelle des programmes officiels et des manuels des trois institutions pour constituer notre première source de données. La théorie anthropologique du didactique (TAD) constitue notre cadre théorique et nous construisons un modèle praxéologique référence (MPR) à partir de l'enrichissement des modèles épistémologiques mis en évidence dans différents travaux de recherche dans le même cadre théorique de la TAD. L'analyse du rapport institutionnel de l'objet équations dans les trois programmes, nous amène à nous centrer sur le 9ème niveau du secondaire. L'analyse des manuels du 9ème niveau du secondaire, nous permet de détecter les types de tâches sur la résolution d'équations présentes dans l'enseignement de ce savoir dans les différentes institutions scolaires en Andorre. Le rapport institutionnel à l'objet équations nous permet d'établir pour chaque institution les organisations mathématiques que nous définissons comme organisation mathématique dominante (OMD) de l'institution. Dans un premier temps nous construisons notre MPR à partir de l'étude comparative des manuels par la mise en relation des OMD de chaque institution. Divers travaux (Chaachoua, 2010) , (Pilet, 2013) , (Bosch & Gascón, 2005) , (Ruiz, Bosch, & Gascón, 2010) , (Monzón, Gascón, & Bosch, 2015) , (Ferraton, Desmoulins , & Chaachoua, 2013) , (Matheron, 1999 -2000) , (Espinosa, 2014), nous permettent d'enrichir notre MPR avec des éléments sur la résolution d'équations selon des configurations de l'algèbre, l'arithmétique, l'analyse et la géométrie. Le questionnement sur l'articulation de ces quatre domaines des mathématiques dans la résolution d'équations nous conduit à nous intéresser à d'autres travaux, (Erdogan, 2006), (García F. , 2007), (Croset, 2009) et à réfléchir sur de nouveaux éléments pour l'interprétation de données obtenues dans les manuels. Dans le cadre T4TEL (plus *précisément* (Chaachoua & Bessot, 2016), (Jolivet, 2013) nous introduisons la notion de variable didactique dans la construction de notre MPR sur la résolution d'équations.

En parallèle, nous nous appuyons sur d'autres travaux dans le cadre de la TAD, qui portent sur la comparaison de l'enseignement des mathématiques entre différentes institutions, comme l'étude de (Bessot & Comiti, 2008) sur l'enseignement de l'algèbre en France et au Vietnam, ou encore le travail de (Larguier, 2016) sur l'enseignement de l'algèbre au Québec et en France.

Pour revenir sur les facteurs de décisions didactiques de l'enseignant, certains travaux nous interpellent, (Briant, 2013) (Ravel, 2003).avec l'articulation d'Organisations Didactiques (OD) et d'Organisations Mathématiques (OM),

Finalement, sur la base de données de notre MPR, nous établissons une grille d'analyse des observables nécessaires pour dégager les décisions didactiques prises par l'enseignant et les facteurs institutionnels qui l'influencent, tenant compte des spécificités de chacune des trois institutions étudiées. En effet, notre MPR développe le générateur de tâches (GT), résoudre des équations, par la combinaison des valeurs des variables didactiques établies (tableau 1). Nous considérons 29 Types de Tâches TT.

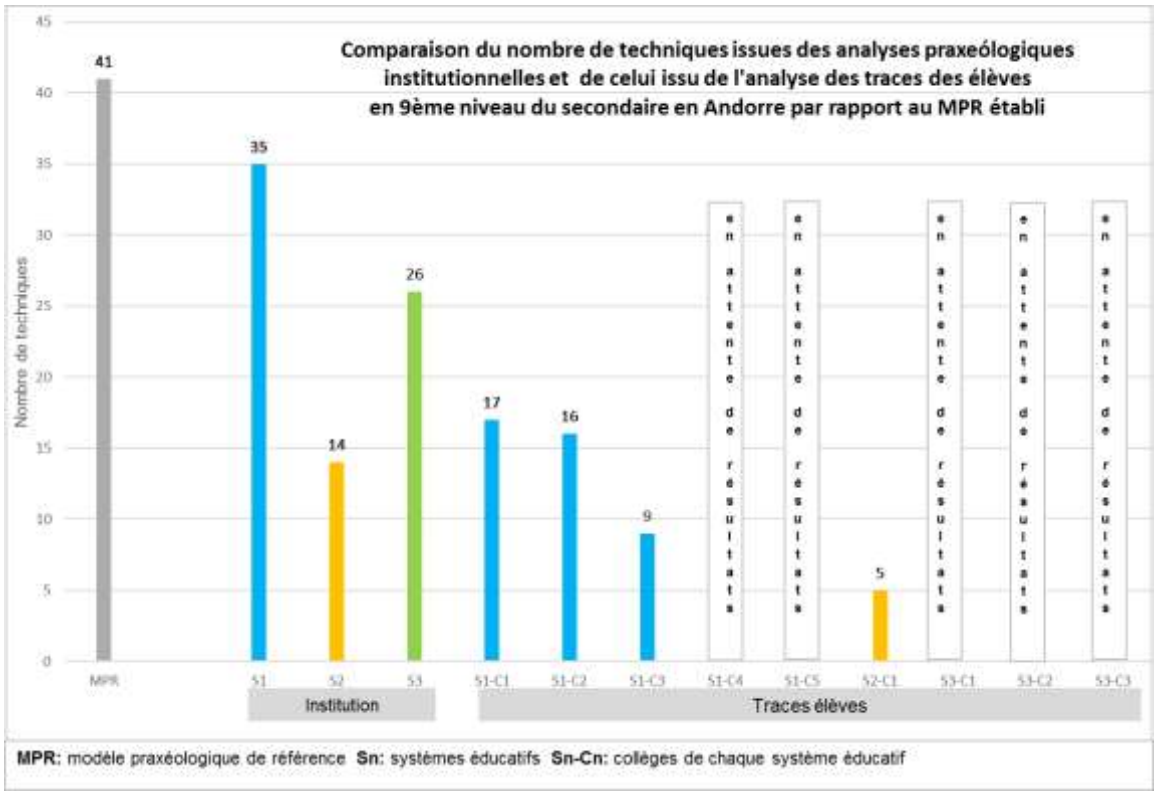
Modèle Praxéologique de Référence MPR										
GÉNÉRATEUR DE TÂCHES GT: RÉSOUDRE UNE ÉQUATION										
Type_Tâches	Variables							Technique	Technologie	Théorie
	Degré	Membre_ Gauche	Membre_ Droite	Nombre_ Solutions	Factorisabilité	Nature_ Solutions	Nature_ Coeficients			
TT	VD	VMG	VMD	VNbS	VF	VNtS	VNtC	τ	θ	Θ
Résoudre une équation de degré 1 de type constante = x+b	1	constante	x+b	1				Commuter deux membres d'une égalité	a=b est équivaut à b=a	arithmétique
								Résoudre une équation de degré 1 de type x+b = constante	Règle : "Si a=b alors a+c = b+c"	

Tableau 1 : *Extrait du Modèle Praxéologique de Référence MPR*

La qualité des observables rattachés aux spécificités de chaque institution est de donner des éléments pour décider s'il s'agit ou non d'un facteur institutionnel. L'analyse de nos premières données sur les programmes et manuels, nous permet ainsi d'organiser le recueil des données à recueillir auprès des enseignants. La construction et l'établissement de grilles d'analyse nous permet ainsi d'élaborer les outils pour le recueil des données afin de mesurer l'impact du facteur institutionnel dans la prise de décisions de l'enseignant. Nous définissons ainsi deux niveaux d'analyse de données, l'institution avec ses spécificités (programmes, manuels…) et l'équipement praxéologique des enseignants (cahier de l'élève, ressources utilisées, questionnaires et entretiens avec les enseignants).

III. CONCLUSION

Afin d'arriver à des conclusions pertinentes, nous travaillons dans la prochaine étape sur le terrain d'expérimentation dans le contexte andorran où il existe une trentaine d'enseignants de mathématiques répartis dans les trois systèmes éducatifs. Les analyses des premières données recueillies, nous permettent d'établir et contraster les praxéologies institutionnelles et l'équipement praxéologique des enseignants par rapport au MPR (graphique 1).



Graphique 1 : *Comparaison du nombre de techniques par rapport au MPR*

Ces premiers résultats nous donnent quelques éléments de réponses par rapport à nos questions de recherche sur l'impact du facteur institutionnel décisionnel de l'enseignant selon les spécificités de chaque institution. La mise en relation entre le nombre de techniques des praxéologies institutionnelles et celui des praxéologies enseignées nous mène à nous interroger sur les types de ressources auxquelles se réfèrent les enseignants pour préparer ses classes, sur ce que fait l'enseignant si l'élève mobilise des techniques non attendues par l'institution, etc. La complétion, l'enrichissement et l'interprétation des données sur les pratiques auprès des enseignants nous permettra approfondir ces premières réflexions. Toutefois le nombre réduit d'individus constitue un risque pour notre étude. En effet, suivant le principe d'autonomie des institutions dans le cadre de l'éthique en recherche, il faut informer avec transparence et clarté la finalité de la recherche ainsi que l'usage des données recueillies, en tenant compte des risques et des avantages de notre étude, il ne s'agit pas de mettre en compétition et de déstabiliser l'équilibre établi entre les trois systèmes éducatifs coexistant dans le pays.

RÉFÉRENCES

Bessot, A., & Comiti, C. (2008). Apport des études comparatives aux recherches en didactique des mathématiques : le cas Viêt-Nam / France. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques* (págs. 171-193). France: HAL Id: hal-00464582:https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00464582.

Bosch, M., & Gascón, J. (2005). La praxeología local como unidad de análisis de los procesos didácticos. *Análisis del currículo actual de matemáticas y posibles alternativas,,* 135-160.

Briant, N. (décembre de 2013). Etude didactique de la reprise de l'algèbre par l'introduction de l'algorithmique au niveau de la classe de seconde du lycée fran¸cais. Histoire et perspectives sur les mathématiques. *thèse doctorale*. Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc: HAL Id: tel-00920506. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00920506.

Chaachoua, H. (octobre de 2010). La praxéologie comme modèle didactique pour la problématique EIAH. Étude de cas: la modélisation des connaissances des élèves. *Note de synthèse pour une Habilitation à Diriger des Recherches*. Grenoble: tecnology for Human Learning. Université de Grenoble: HAL Id: tel-00922383. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00922383.

Chaachoua, H., & Bessot, A. (2016). Introduction de la notion de variable dans le modèle praxéologique. *Citad 5*. Castro_Urdiales.

Chaachoua, H., & Comiti, C. (2010). L'analyse du rôle des manuels dans l'approche anthropologique. Apports de la. *actes du congrès CITAD 2*, (págs. 1–15).

Chevallard, Y. (1991). Concepts fondamentaux de a didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. En *Recherche en didactique des mathématiques, vol. 21/1* (págs. 73-112). Grenoble: éd. Grenoble : La pensée sauvage.

Croset, M.-C. (2009). *Marie-Caroline Croset. Modélisation des connaissances des élèves au sein d'un logiciel d'algèbre. Études des erreurs stables inter-élèves et intra-élève en termes de praxis-en-acte.. domain_other.* Grenoble I: Université Joseph-Fourier.

Erdogan, A. (novembre de 2006). Le diagnostic de l'aide à l'étude, en mathématiques: analyse didactique des difficultés relatives à l'algèbre et aux fonctions en seconde. *thèse doctorale*. Université Paris-Diderot-Paris VII.

Espinosa, M. (2014). *La solución de la ecuación de 3r grado según Omar Alkhayyam.* Santiago de Cali.

Ferraton, G., Desmoulins , C., & Chaachoua, H. (2013). Utilisation du modèle praxéologique de référence dans un environnement informatique d'apprentissage humain. *Conf. of the Anthropological Theory of the Didactic.*

Fonseca, C., Bosch, M., & Gascón, J. (2010). El momento del trabajo de la técnica en la completación de Organizaciones Matemáticas: el caso de la división sintética y la factorización de polinomios. En *EDUCACIÓN MATEMÁTICA, vol. 22, núm. 2.*

García, F. (2007). El álgebra como instrumento de modelización. Articulación del estudio en las relaciones funcionales. *En La Educación Secundaria . http://funes.uniandes.edu.co/1268/.*, 71–92.

Jolivet, S. (2013). *Modèle d'indexation de ressources : construction d'un modèle à partir d'une approche praxéologique.* Grenoble: Mémoire de Master UJF.

Larguier, M. (2016). Le développement de la pensée algébrique dans le curriculum officiel en France et au Québec. *TAD5.* Castro-Urdiales.

Matheron, Y. (1999 -2000). Analyser des praxéologies. Quelques exemples d'organisations mathématiques. *Petit x n° 54*, 51 à 78.

Monzón, N., Gascón, J., & Bosch, M. (2015). El problema didáctico del álgebra elemental: un análisis macro-ecológico desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *REDIMAT, Vol 4(2)*, 106-131. doi: 10.17583/redimat.2015.1386.

Pilet, J. (février de 2013). Parcours d'enseignement différenciel appuyés sur un diagnostic en algèbre élémentaire à la fin de la scolarité obligatoire modélisation, implémentation dans une plateforme en ligne et évaluation. *Thèse doctorale*. Université Paris-Diderot-Paris VII: HAL Id : Tel-0078:https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00784039.

Pons_Duro, R. (2014). *Etude des facteurs de décisions didactiques dans l'enseignement : Etude didactique dans le cas de l'enseignement des équations et équations produit du premier degré avec une inconnue dans une classe de 3ème au collège.* Grenoble : UJF.

Ravel, L. (2003). *Des programmes a la classe : Etude de la transposition didactique interne.* Grenoble: Université Joseph Fourier.

Ruiz, J., Bosch, M., & Gascón, J. (2010). La algebrización de los programas y la introducción del álgebra de cálculo aritmètico en secundària. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.),. *Investigación en Educación Matemática XIV* (págs. 545-556). Lleida: SEIEM.

DE L'ANALYSE D'UN DISPOSITIF D'ENSEIGNEMENT DU CALCUL SOUSTRACTIF EN CE2 A L'ANALYSE DES CONNAISSANCES REQUISES EN NUMERATION

RINALDI[*] Anne-Marie –CHAMBRIS[**] Christine

Résumé – Cette contribution s'intéresse à certaines difficultés des élèves dans l'apprentissage du calcul soustractif dans un dispositif expérimental d'enseignement de la soustraction. Il s'attarde sur les connaissances de numération en jeu dans les calculs mobilisés par les élèves, l'enseignant, et dans le scénario proposé. Il montre l'importance de préciser les justifications relevant de la numération décimale, notamment des alternatives à la récitation de la comptine numérique de dix en dix.

Mots-clefs : calcul soustractif ; numération ; justification ; comptine numérique

Abstract – This contribution focuses on some of the difficulties students have in learning subtractive computation in an experimental design for teaching subtraction. It focuses on the numeration knowledge involved in the calculations mobilized by the students, the teacher, and in the proposed scenario. It shows the importance of clarifying the justifications for decimal counting, including alternatives to reciting the ten-in-ten list of numbers.

Keywords: subtractive calculation; numeration; justification; list of numbers

I. INTRODUCTION

Notre contribution relève du groupe de travail n°9 consacré aux liens entre pratiques d'enseignement et apprentissages dans le sens où nous nous appuyons sur l'évaluation d'un dispositif d'enseignement en calcul pour revenir sur des questions relatives à l'enseignement de la numération.

Le calcul soustractif mental et posé est un enjeu majeur de l'enseignement des mathématiques au vu des difficultés d'apprentissages persistantes des élèves notament en début de cycle 3. En effet si on se réfère aux résultats des évaluations TIMS (2016), aux travaux Maurel et Sackur (2010), les calculs soustractifs posés ne sont pas maîtrisés par tous les élèves : « Ils font la soustraction dans le sens où c'est possible, en retranchant le plus petit au plus grand, quelle que soit sa place dans la soustraction posée, en haut ou en bas. » (p.48) C'est ainsi que pour effectuer $53-27$, ils vont effectuer $7-3$ et trouver 34 à la place de 26. Par ailleurs, en calcul mental, pour Butlen et Charles-Pézard (2007), les élèves à qui on n'a pas appris à faire autrement « privilégient en premier lieu l'algorithme posé dans la tête, en second lieu des procédures mobilisant des décompositions canoniques des nombres. » (p. 9) Cela est sans conséquence pour effectuer par exemple $53-21=50-20+3-1$ mais problématique pour effectuer le calcul proposé ci-dessus $53-27$.

Dans ce contexte, Rinaldi (2016) a conçu et expérimenté un dispositif d'enseignement du calcul soustractif en CE2 qui vise à relier calcul mental et calcul posé et à agréger l'étude de la numération décimale et l'étude des techniques de calcul soustractif. Les résultats obtenus dans deux classes de CE2 permettent d'évaluer les effets positifs d'un travail régulier et progressif à partir des écritures arithmétiques sur les apprentissages de bon nombre d'élèves, les deux tiers d'entre eux. Pour le tiers restant, il semble que, les difficultés se cristallisent dans un calcul comme 137-50. Ces élèves ne parviennent pas à soustraire un multiple de dix.

[*] ESPE Amiens, CAREF – France – anne-marie.rinaldi@u-picardie.fr
[**]Université de Cergy-Pontoise, LDAR (EA 4434), UA, UCP, UPD, UPEC, URN – France – christine.chambris@u-cergy.fr

Dans le dispositif mis en œuvre dans deux classes de CE2, les premières difficultés sont apparues quand les élèves ont eu à calculer □□□−□0. Elles se sont manifestées dans les productions écrites des élèves car ils ne trouvaient pas le résultat exact du calcul et, pour l'enseignant, pendant les phases de restitution car les élèves choisissaient des techniques peu économiques. Dans cette contribution, nous analysons les difficultés d'enseignement et d'apprentissage des élèves qui n'arrivent pas à adapter leurs techniques en fonction des nombres en jeu ou à conduire un calcul jusqu'au bout. Nous sommes amenées à présenter des éléments du dispositif et à conduire des analyses supplémentaires, pour comprendre ce qui pose problème. Nous interrogeons les connaissances requises en numération décimale pour arriver à effectuer un tel calcul soustractif.

II. CADRE THEORIQUE, HYPOTHESE ET METHODOLOGIE

Dans cette section, nous présentons le cadre théorique et des résultats préalables sur le dispositif de calcul soustractif étudié et l'enseignement de la numération avant d'énoncer notre hypothèse et de présenter notre méthodologie.

1. Cadre théorique

De la Théorie Anthropologique du Didactique, nous exploitons le concept d'*organisation mathématique* (ou *praxéologie mathématique)* qui permet de caractériser l'activité mathématique (Chevallard, 1999). Une praxéologie est constituée de quatre composantes : un *type de taches* –un ensemble de problèmes similaires-, une *technique* –une façon de faire pour traiter toutes les tâches du type, une *technologie* qui justifie la technique et qui est justifiée par la *théorie*.

2. Organisation mathématique de référence autour du calcul soustractif

Nous utilisons le concept d'*organisation mathématique de référence* (Chevallard, *1999*). Dans la thèse de Rinaldi (2016), cette organisation mathématique de référence autour du calcul soustractif a servi pour construire une organisation mathématique du dispositif conforme à la référence. L'organisation propre au calcul soustractif sur les entiers naturels est fédérée autour de quatre organisations mathématiques locales :

- ✓ La première organisation OM1 regroupe les types de tâches propres à la production de calcul. Tâches qui permettent essentiellement à l'école élémentaire de modéliser les situations additives en référence aux travaux de Vergnaud (1990). Exemple : J'avais 137 € avant de dépenser 50 €, combien me reste-t-il ?
- ✓ La seconde organisation OM2 regroupe les types de tâches qui consistent à associer ou transformer des représentations sémiotiques. Parmi ces représentations sémiotiques, nous retenons les écritures arithmétiques, les schémas et les expressions langagières. Cette organisation est motivée par OM1 et OM3. Traduire *la différence entre cent-trente-sept et cinquante* par une écriture arithmétique.
- ✓ La troisième organisation OM3 regroupe les types de tâches qui vont consister à effectuer un calcul. Exemple : Calculer 137− 50
- ✓ La dernière organisation OM4 est associée à la réécriture de calculs. C'est celle qui va permettre de montrer quelles sont les propriétés des nombres et des opérations qui sont mobilisée donc de développer la valence épistémique du calcul au sens d'Artigue (2005). Réécrire 137− 50 en décomposant le nombre 50.

L'étude de l'organisation propre à l'effectuation de calculs (OM3) a conduit à identifier différents types de tâches. Ces types de tâches sont soustraire un nombre à un chiffre (Ta−□),

soustraire un multiple de dix (Ta−□0), soustraire un nombre à deux chiffres (Ta−□□) puis soustraire un nombre à trois chiffres (Ta−□□□). Pour chaque type de tâches, les techniques potentielles ont ensuite été recensées en appui sur (Fuson et al., 1997 ; Carpenter et al., 1998 ; Klein et al., 1998 ; Thompson, 1999), puis regroupées autour de quatre technologies savantes.

La première technologie Θ_{DD} met en jeu la décomposition des deux nombres, la recomposition d'un nombre, les répertoires additifs et soustractifs, les aspects décimalité et position (Serfati, 2005) de la numération chiffrée, les propriétés de la soustraction sur N. Elle génère deux techniques de décomposition τ_{1010}, $(\tau_{1010})'$.

Technologie Θ_{DD}	Technique de décomposition τ_{1010}	Exemple de calcul : $168 - 23 = (100 + 60 + 8) - (20 + 3)$ $= (100) + (60 - 20) + (8 - 3)$
	Technique de décomposition $(\tau_{1010})'$	Exemple de calcul : $165 - 27 = (100 + 50 + 15) - (20 + 7)$ $= (100) + (50 - 20) + (15 - 7)$

La seconde technologie Θ_D s'appuie sur les mêmes propriétés que la première. Elle nécessite de décomposer un seul des deux nombres (le plus petit). Elle génère trois techniques séquentielles τ_{N10}, τ_{A10} et τ_{N10C}.

Technologie Θ_D	Technique séquentielle τ_{N10}	Exemple de calcul : $125 - 23 = 125 - (20 + 3) = (125 - 20) - 3$
	Technique séquentielle τ_{A10}	Exemple de calcul : $125 - 27 = 125 - (25 + 2) = (125 - 25) - 2$ Ou $123 - 27 = 123 - (20 + 7) = (123 - 20) - 7$
	Technique séquentielle τ_{N10C}	Exemple de calcul : $125 - 47 = (125 - 50) + 3$

τ_{N10} est une technique séquentielle qui consiste à décomposer canoniquement le nombre à soustraire. τ_{A10} et τ_{N10C} sont deux techniques séquentielles qui consistent à décomposer le nombre à soustraire afin d'obtenir des calculs soustractifs intermédiaires plus simples à effectuer.

La troisième technologie $\Theta_{SOU/ADD}$ s'appuie sur la définition de la soustraction comme opération inverse de l'addition sur les entiers naturels et génère la technique $\tau_{SOU/ADD}$.

Technologie $\Theta_{SOU/ADD}$	Technique $\tau_{SOUS/ADD}$	Exemple de calcul : Pour calculer $125 - 47$, on cherche le complément de 47 à 125

La dernière technologie Θ_{AN} s'appuie la propriété de conservation des écarts. Elle génère une technique de calcul mental τ_{AN} et l'algorithme de la soustraction par compensation qui consiste à ajouter aux deux termes du calcul si, besoin est, une ou plusieurs puissances de dix.

Technologie Θ_{AN}	Technique τ_{AN}	Exemple de calcul : $125 - 47 = (125 + 3) - (47 + 3).$

Parallèlement, nous avons cherché quels ostensifs, objets sensibles permettant d'évoquer les concepts (Bosch & Chevallard, 1999), pouvaient être utilisés pour mettre en avant les différentes fonctions des technologies (expliquer, évaluer, valider, motiver) (Castela et Romo Vasquez, 2011). En nous basant sur les études de Teppo et Van den Heuvel-Panhuizen (2014), Ernest (1985), Gravemeijer (1994), Bobis et Bobis (2005), Van den Heuvel-Panhuizen (2008), nous avons émis plusieurs hypothèses :

- ✓ La Droite Numérique Vide (DNV) aiderait à visualiser les différentes étapes d'un calcul donc à expliquer le mode d'emploi des techniques séquentielles ;
- ✓ la Droite Numérique Graduée (DNG) aiderait à visualiser l'écart dans le cadre de la mesure ;
- ✓ les Ecritures Chiffrées (EC) et les arbres permettraient de valider toutes les techniques.

3. Résultats sur l'enseignement de la numération, en France

Nous appelons *unités de numération* (Chambris, 2008) les unités (de nombre) utilisées en numération. Nous abrégeons les mots centaines, dizaines et unités par c, d et u.

Dans le tournant de la réforme des mathématiques modernes en France, les savoirs de référence pour l'enseignement de la numération décimale ont été modifiés. La théorie classique formulée avec les unités de numération a été remplacée par la théorie savante reposant sur le théorème d'existence et d'unicité de la décomposition polynomiale d'un entier n dans une base donnée a (i.e. $n = \sum_{i=0}^{p} r_i a^i$, $0 \leq r_i < a$).

Au-delà de la composante théorique, cette modification majeure a eu des effets sur les autres composantes de plusieurs praxéologies de numération. En effet, sans ces unités, il devient difficile d'exprimer la dépendance entre les chiffres de l'écriture chiffrée (e.g. 1 dizaine = 10 unités ou 1 centaine = 10 dizaines), ce que Serfati (2005) appelle la *décimalité* de la numération positionnelle. De fait, ces relations sont omises dans certains manuels. Cependant du fait du phénomène de transposition didactique (Chevallard 1985), d'autres praxéologies se sont développées et / ou sont devenues dominantes. Elles reposent sur les autres ostensifs de la numération : les noms des nombres (une correspondance naturalisée entre l'écrit et l'oral, la récitation des comptines de un en un, dix en dix, cent en cent, etc.) et les écritures chiffrées des puissances de dix –liées au nouveau savoir de référence- (notamment les décompositions du type 300+40+5 qui se calculent soit en référence à l'oral, soit « en colonnes ») (Chambris, 2008, 2014, 2018, Mounier, 2013).

4. Hypothèse

Les difficultés rencontrées par un tiers des élèves pour soustraire un multiple de dix (Ta−□0) $(137-50)$ puis -par voie de conséquence- soustraire un nombre à deux chiffres (Ta−□□), peuvent s'expliquer (au moins en partie) par la situation actuelle de l'enseignement de la numération, certaines praxéologies alternatives à celles impliquant les unités de numération vivent dans les classes et sont inadaptées pour certains apprentissages en calcul.

5. Méthodologie

Pour étudier notre hypothèse, la méthodologie suivante est mise en œuvre. L'étude est centrée sur les tâches problématiques du type : $137-50$. Sont reconstruites la praxéologie locale de calcul soustractif associée à ce type de tâche dans le scénario élaboré par le chercheur (après étude des pratiques des enseignants auxquels il sera communiqué) et les praxéologies de numération qui sont engagées dans cette praxéologie locale. Nous analysons, sur le plan des praxéologies de numération, les données dont nous disposons (scénario élaboré par le chercheur, productions d'élèves sur les calculs de ce type dans l'ingénierie, extraits et transcription de séances de classe pour les calculs de ce type).

III. ELEMENTS D'ANALYSE PROPRES AUX DIFFICULTES RELATIVES A UNE TACHE DE TYPE TA−□0 ET RESULTATS, LIMITES

1. Analyse des techniques des élèves en échec : un point sensible pour les apprentissages

Pour soustraire un multiple de dix, par exemple effectuer le calcul $137-50$ les élèves en échec choisissent 100 comme nombre pivot, utilisent : $137-37=100$, restent $(50-37)$ à enlever à 100. Autrement dit plutôt que d'enlever 5 dizaines, et se ramener au calcul de 13-5, les élèves sont confrontés à deux calculs mentaux relativement complexes (50-37 et 100-13).

Dans le scénario, l'étape antérieure proposée est l'élaboration de techniques pour les calculs du type : $130-50$. Les élèves faibles ne transfèrent pas cette connaissance, qu'ils semblent pourtant avoir acquise, au calcul de $137-50$.

2. Analyse du scénario

Pour les calculs du type □□0−□0, le scénario propose plusieurs techniques (en fonction des nombres en jeu) et en particulier : revenir au nombre de dizaines □□ d - □ d et calculer sans les zéros. Le scénario ne propose pas de technologie pour justifier ces techniques de calcul.

Pour les calculs du types □□□−□0, si le scénario indique qu'il s'agit de transférer la technique des calculs précédents : □□□−□0=□□0−□0 + □, les techniques proposées pour ces calculs ne montrent pas explicitement le transfert pour trois des deux calculs qui ont des « retenues ». En particulier, le scénario ne propose pas d'institutionnaliser la 3e des techniques indiquées dans le calcul corrigé juste avant dans le scénario : $125-30=12\text{d}-3\text{d}+5$ qui se traduirait ici en $137-50=13\text{d}+7-5\text{d}=8\text{d}+7$. La technique proposée pour le calcul de $137-50$ (et pour l'autre calcul du même type, à savoir $418-20$) est une technique séquentielle qui s'appuie sur le pivot 107 (et pour l'autre calcul sur 408 ou 400). L'appui sur $137=130+7$ n'est pas explicite (pas plus que $410+8$ qui serait d'ailleurs à questionner : $420-2$ serait peut-être plus adapté). Dans les deux cas, la DNV est un ostensif qui est proposé, avec les écritures arithmétiques (ou un discours séquentiel).

Avec la DNV, comme avec les écritures arithmétiques ou un discours séquentiel, il faut calculer $107-20$. La technique pour calculer $107-20$ n'est pas indiquée (ni travaillée dans le scénario). On peut considérer que c'est une faiblesse du scénario mais c'est ainsi. Par suite le professeur doit faire appel à ses ressources personnelles s'il souhaite expliquer ce calcul à ses élèves (tout du moins celles qu'il pense adaptées à ces élèves qui ne savent pas).

Quelles sont les techniques pour calculer cette différence ? En appui, sur les unités de numération, on peut voir 107 comme $100=100+7$, puis 1 centaine dans 100 qui font 10 dizaines, puis $10\text{d}-2\text{d}=8\text{d}$, $8\text{d}+7=87$; en appui sur les écritures chiffrées de puissances de dix (ou des connaissances naturalisées en numération) : $100-20=80, 80+7=87$. La propriété de la troncature permet de trouver :$10\text{d}+7-2\text{d}=8\text{d}+7$. Toutes ces techniques reposent sur une décomposition de 107 en $100+7$ (ou 1 c 7 u) et se justifient par les relations entre unités et le calcul en unités. Le scénario ne les propose pas, pas plus que la décomposition de 107 en $100+7$.

3. Analyse des phases de restitution dans la classe B (calculs de $125-30$ et $137-50$)

Calcul de $137-50$: Un premier élève propose de calculer $137-37$, puis $100-13$. Le professeur indique que c'est compliqué. Le professeur demande une autre solution. Un

deuxième élève propose la même solution. Vient ensuite : cent-trente-sept moins trente, cent-sept[1]. Il faut ensuite enlever vingt à cent-sept. L'élève hésite, puis répond quatre-vingt-sept. Le professeur donne alors une explication : « Si on ne sait pas faire quatre-vingt-dix-sept moins vingt, on peut faire quatre-vingt-dix-sept moins dix, moins dix. Quatre-vingt-dix-sept, quatre-vingt-sept. C'est compliqué. Vous avez encore du mal à retirer dix ou vingt quand on passe de cent-sept à quatre-vingt-dix- sept. » puis il interpelle le chercheur : « C'est compliqué ils ont encore un peu de mal quand il faut passer de cent-sept à quatre-vingt-dix-sept ».

Quels sont les savoirs en jeu dans ces discours du professeur ? Moins vingt est interprété comme moins dix, moins dix (un comptage de dix en dix), la soustraction s'effectue par un décomptage de dix en dix en appui sur la numération orale. C'est la comptine numérique qui permet de traiter le problème. L'interpellation du chercheur par le professeur laisse penser que le professeur ne semble pas imaginer d'autre solution que passer par la connaissance de la comptine pour effectuer cette soustraction. Ceci confirme le rôle de la comptine comme clé de voute des technologies pour la numération. Signalons que l'utilisation de la comptine n'incite pas à passer par des « nombres ronds » dès qu'on sait la réciter à partir de n'importe où, en faisant des sauts qui sont des puissances de dix. Signalons aussi que cette technologie, qui repose sur l'oral (et les noms des nombres), est censée justifier des calculs qui demandent à être faits par écrit. Elle devient par ailleurs extrêmement coûteuse dès que le nombre de termes égaux à dix à retrancher devient un peu grand. Elle est particulièrement délicate dès que le chiffre des unités est entre 1 et 6 et qu'on passe dans la tranche 70-99 du fait des irrégularités de la numération orale.

Une alternative à cette technique est proposée par un élève, à la fin de la correction du calcul précédent :$125-30$. Il propose cent-vingt moins trente, quatre-vingt-dix et cinq, quatre-vingt-quinze. La technique consiste donc à décomposer le grand nombre en un multiple de dix et un petit nombre d'unités (inférieur à dix). Dans le scénario, comme on l'a vu, la décomposition apparaît dans les calculs précédents lorsqu'il n'y a « pas de retenue » et le calcul sur les multiples de dix dans les séances antérieures. Le professeur valide mais ne donne pas de technologie : ni sur le plan du choix de la décomposition, ni sur celui du calcul (il aurait pu faire référence aux calculs qui ont précédé, dans la même séance et dans les deux séances précédentes). D'ailleurs, il ne s'empare pas de la technique pour le calcul suivant comme on l'a montré.

Pour mettre en œuvre cette technique, il faut être capable, sur le plan de la numération, de décomposer un nombre en une somme (ou une différence) d'un multiple de dix et d'un petit nombre d'unités (et de pouvoir traiter chaque partie séparément, ce qui renvoie à la notion de unitizing (Steffe & Cobb, 1988)). Il faut donc savoir choisir un « bon » multiple de dix (un nombre entier de dizaines) et calculer avec ce nombre dizaines (ou bien à calculer sans les zéro), puis à ajouter (ou retrancher) « le reste ». Les multiples de dix inférieur et supérieur se repèrent dans l'encadrement entre deux dizaines (ou tronquer le nombre à la dizaine la plus proche), encore faut-il que cette connaissance ne se limite pas à un jeu d'écriture de zéros qui remplace le chiffre des unités. Ils sont liés aux décompositions qui s'appuient sur la numération ($130+7$;$13d+7$; $140-3$; voire $100+30+7$). Ces décompositions ne sont fondamentalement intéressantes que si on a compris qu'on calcule avec des dizaines comme on calcule avec les unités simples, ou bien qu'on peut « aligner les zéros » (dans sa tête ou sur le papier) et que, pour le calcul, on peut faire comme s'ils n'étaient pas là. La deuxième partie de la technique a été enseignée dans les séances précédentes mais elle nécessite d'être adaptée

[1] Les nombres utilisés dans les phases orales sont délibérément écrits en mots car l'écriture chiffrée ne constitue a priori pas un appui pour les techniques utilisées.

pour être transférée. L'adaptation requiert des connaissances sur les nombres, le unitizing, d'être capable de les « désarticuler » de façons variées en fonction des puissances de dix.

4. Limites liées aux données analysées

Les analyses des séances de classe, sur le plan de numération, se sont limitées aux phases de restitution de 137 – 50 et 125 – 30. Des analyses d'autres moments du dispositif pour les calculs du même type et du type 130 – 50 permettraient peut-être d'affiner l'identification des praxéologies de numération qui sont enseignées. Plus généralement, les données dont nous disposons, productions d'élèves et transcriptions de séances, dans le cadre d'un dispositif d'enseignement du calcul soustractif (à partir de propositions de scénarii) ne permettent pas de connaitre les praxéologies enseignées dans le cours de numération par le professeur. Nous ne savons pas si les élèves ont eu ponctuellement ou régulièrement des tâches **de désarticulation des nombres** en fonction des puissances de dix à effectuer, si ces tâches sont attachées à des problèmes (par exemple du type « bons de commande ») ou posées pour se familiariser avec l'écriture chiffrée des nombres.

IV. CONCLUSION

Afin d'établir un lien entre les difficultés repérées des élèves pour soustraire des multiples de dix et les pratiques enseignantes, nous avons fait le choix de nous centrer sur les discours technologiques produits autour du calcul de 137-50. Les analyses montrent le rôle déterminant de l'utilisation de la comptine numérique (de dix en dix) dans l'enseignement du calcul lorsque des savoirs de numération sont en jeu. Ces résultats rejoignent les constats observés dans l'analyse de l'enseignement de la numération. Jusqu'à présent, ces constats se cantonnaient essentiellement à des constats internes à l'enseignement de la numération. Même si les liens avec le calcul étaient envisagés, ils n'étaient pas réellement mis en évidence. Cette étude permet de confirmer que ce qui est considéré comme un problème dans l'enseignement de la numération a effectivement un impact sur l'enseignement du calcul et probablement sur son apprentissage et permet d'envisager des moyens pour avancer. Le dispositif permet notamment de montrer une autre fonction des tâches de « désarticulation » des nombres : **calculer.** En l'état la proposition de scénario mériterait d'être complétée par les techniques et les technologies qui amènent à désarticuler les nombres. Resterait notamment à convaincre enseignants et élèves qu'il existe une alternative à l'utilisation de la comptine numérique pour calculer vite et bien.

REFERENCES

Bobis, J., & Bobis, E. (2005). The empty number line: Making children's thinking visible. *Making mathematics vital*, 66-72.

Bosch, M., & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(1), 77-124.

Butlen, D., & Charles-Pézard, M. (2007). Conceptualisation en mathématiques et élèves en difficulté. Le calcul mental entre sens et technique. *Grand N*, 79, 7-32.

Carpenter, T.-P., Franke, M.- L., Jacobs, V.-R., Fennema, E., & Empson, S.-B. (1997). A longitudinal study of invention and understanding in children's multidigit addition and subtraction. *Journal for research in mathematics education*, 29(1), 3-20.

Castela, C., & Romo Vazquez, R. (2011). Des mathématiques à l'automatique : étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en didactique des Mathématiques,* 31(1), 79-130.

Chambris, C. (2008). *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20e siècle. Connaissances des élèves actuels.* (Thèse de doctorat).

Chambris, C. (2014). *Contribution à propos de la numération décimale*. http://cache.media.education.gouv.fr/file/CSP/23/3/Chambris_Christine_-_MCF-_CSP_363233.pdf.

Chambris, C. (2018). The influence of theoretical mathematical foundations on teaching and learning: A case study of whole numbers in elementary school. *Educational studies in mathematics.* DOI: 10.1007/s10649-017-9790-3

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique*. Grenoble : La pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques,* 19(2), 221-265.

Ernest, P. (1985). The number line as a teaching aid. *Educational studies in Mathematics, 16.* 411- 424.

Fuson, K. C., Wearne, D., Hiebert, J., Human, P., Murray, H., Olivier, A., Carpenter, T.-P., & Fennema, E. (1997). Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, 130-162.

Gravemeijer, K. (1994). Educational development and developmental research in mathematics education, *Journal for Research in Mathematics Education*, 25, 443-471.

Klein, A.-S., Beishuizen, M., & Treffers, A. (1998). The Empty Number Line in Dutch Second Grades: Realistic versus Gradual Program Design. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29, 443- 464.

Maurel, M., & Sackur, C. (2010). Il ne faut pas désarticuler un nombre. Mise en œuvre du dispositif Cesame en primaire. *Grand N, 85*, 43-59.

Mounier, E. (2013). Y a-t-il des marges de manœuvres pour piloter la classe durant une phase de bouclage ? *Recherches en didactique des mathématiques*, 33(1), 79–113.

Rinaldi, A.-M. (2016). Place et rôle des technologies *dans l'enseignement et l'apprentissage du calcul soustractif en CE2 : proposition d'ingénierie.* Thèse de doctorat. Université Sorbonne Paris Cité. Université Paris Diderot. Disponible en ligne.

Serfati, M. (2005). *La révolution symbolique: la constitution de l'écriture symbolique mathématique* : Editions Petra.

Steffe, L. P. & Cobb, P. (1988). *Construction of arithmetical meanings and strategies*. New York, NY: Spinger

Teppo, A., & Van den Heuvel- Panhuizen, M. (2014). Visual representations as objects of analysis: the number line as an example. *ZDM: the International Journal on Mathematics Education,* 46(1), 45-58.

Van den Heuvel- Panhuizen, M. (2008). *Learning from ''didactikids'': an impetus for revisiting the empty number line.* Mathematics Education Research Journal, 20(3), 6–31.

DIFFICULTÉS D'EXTRACTION DE LA MOYENNE ARITHMÉTIQUE À PARTIR D'UN GRAPHIQUE STATISTIQUE : CAS DE L'HISTOGRAMME

ROUAN[*] Omar – EL IDRISSI[**] Abdellah

Résumé- L'article vise la mise en évidence de difficultés d'interprétation des graphiques statistiques chez les élèves marocains du secondaire. Pour ceci 140 étudiants sont appelés à estimer la moyenne à partir d'un histogramme. Aucun n'est arrivé à l'extraire à partir de la forme globale du graphique, mais tous ont eu recourt à la formule de la moyenne ou à des formules semblables. En plus, cette dernière n'était que rarement maitrisée, surtout lorsqu'il s'agit de son adaptation à l'histogramme.

Mots clés : Graphiques, statistiques, lecture, interprétation, difficultés

Abstract- The article aims to highlight difficulties in interpreting statistical graphs among Moroccan high school students. For this 140 students are asked to estimate the average from a histogram. None managed to extract it from the overall form of the graph, but all used the average formula or similar ones. In addition, the latter was only rarely mastered, especially when it comes to its adaptation to the histogram.

Keywords: Graphs, statistics, reading, interpretation, difficulties

I. POSITION DU PROBLEME

En statistique, l'analyse descriptive des données relatives à une seule variable passe par plusieurs étapes dont la collecte, l'organisation, la représentation et le résumé des données. De même, les outils et les concepts statistiques conçus pour la réalisation de ces étapes sont nombreux et variés. Parmi ces outils, les graphiques statistiques tels que le diagramme en bâtons, l'histogramme ou le polygone des fréquences, jouent un rôle important dans la modélisation des distributions statistiques et dans l'organisation et la simplification de l'accès à l'information.

Avec Janvier (1978), et comme nous l'avons souligné (Rouan, 2001), nous considérons que l'exploitation de ces graphiques repose sur deux processus essentiels, la lecture et l'interprétation. En effet, la lecture d'un graphique revient à un décodage de ses composantes syntaxiques. C'est la reproduction verbale de ce qui est effectivement écrit sur le graphique, elle ne fait appel à aucun élément externe à la syntaxe du graphique. Son interprétation est un processus interactif où interagissent les représentations que le sujet s'est construites autour des éléments du graphique et ceux de la situation. Ce processus peut prendre la forme d'un questionnement continu qui part, soit du graphique, soit de la situation. Dans le premier cas, il peut être question d'expliquer un maximum ou une décroissance pour une fonction numérique à variable réelle. Dans le deuxième cas, il peut s'agir de voir comment s'explique le caractère mixte de la population statistique dans le graphique. L'interprétation nécessite donc un raisonnement qui se réfère continuellement et de manière concomitante aux éléments du graphique et au contexte de la situation.

Pour rendre opérationnel ces deux processus, nous les avons liés aux aspects d'un modèle de compréhension proposé par Lamrabet (1992, 1993) et inspiré du modèle de Bergeron et Herscovics (1982, 1988, 1989). Ainsi, la lecture peut être associée aux deux aspects, structural et opératoire du modèle. Ces derniers auraient pour objectif de répondre à des

[*]ENS, UCA, Marrakech, omarrouan@gmail.com
[**]ENS, UCA, Marrakech, abdellah_elidrissi@yahoo.fr

questions du type : Quelle est la grandeur utilisée pour représenter la variable figurant sur l'axe des ordonnées? Est-ce une longueur? Est-ce une surface? Est-ce une autre grandeur? Quels sont les signes et les symboles utilisés dans ce graphique? Quel type de données statistiques peut représenter ce graphique? Quels sont les concepts statistiques qui interviennent dans ce graphique? Y a-t-il des conventions liées à ce graphique? Comment les données sont-elles organisées? Est-ce sous forme d'une distribution? Est-ce des données individuelles? Y a-t-il des choix arbitraires, relatifs à l'organisation des données ou aux signes graphiques, à faire avant la construction de ce graphique? Si oui, lesquels? Y a-t- il des cas à distinguer dans la construction de ce graphique? Quelles sont les différentes configurations que peut avoir ce graphique? Faut-il choisir une échelle pour chacun des axes? Quelles sont les conventions liées à la construction de ce graphique?

Quant à l'interprétation, elle peut être associée aux aspects descriptif et fonctionnel de ce modèle. Les questions susceptibles d'être évoquées à cet égard sont du type : Quelles sont les propriétés caractéristiques de ce graphique? Quelles sont les différentes formes qu'il peut prendre? Quelles sont les propriétés mathématiques (géométriques, analytiques...) qu'il peut présenter? Quels sont les concepts mathématiques auxquels il est lié? Quels sont les concepts statistiques qu'il peut illustrer, approcher ou donner directement? Comment se manifeste chacun de ces concepts? Quels sont les problèmes statistiques que ce graphique peut aider à résoudre ? Peut-il aider à estimer une probabilité? Une proportion? Une moyenne? Un écart-type? Une fonction de densité? Comment? Peut-il servir à donner le nombre ou le pourcentage d'individus ayant une certaine caractéristique donnée? Peut-il servir à prendre des décisions? A prévoir la valeur d'un certain caractère statistique? Ou prévoir des résultats? Lesquels?

L'extraction de la moyenne à partir du graphique, et qui nous intéresse dans cet article sera donc considérée davantage parmi les questions d'interprétation de ce dernier.

En fait, la moyenne arithmétique est un outil particulier de description des données statistiques. C'est une des valeurs centrales possibles d'une variable statistique, qui donne l'ordre de grandeur des observations statistiques, une valeur autour de laquelle se situe l'ensemble de ces observations. C'est un paramètre qui essaie de résumer avec plus ou moins de fidélité, l'information contenue par les observations.

La formule élémentaire de la moyenne arithmétique ($\bar{x}= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$, n étant la taille de l'échantillon) part des différentes observations individuelles et, comme le rapporte Gal (1995), met en évidence un procédé d'addition et de division. Comme nous allons le voir vers la fin de ce texte, c'est ce procédé qui est le plus retenu de l'enseignement de cette notion par nos élèves du secondaire.

Cette formule traduit le fait que la moyenne arithmétique est la valeur qu'aurait chaque individu de l'échantillon (ou de la population), si l'on supposait que tous ont la même valeur. C'est le partage équitable de la masse totale obtenue par tous les individus. Donc la définition de la moyenne arithmétique repose sur une hypothèse implicite d'équité -ou plutôt d'équitabilité- du partage de la masse totale des observations. Ceci représente une première interprétation de la moyenne.

Une deuxième interprétation de la moyenne est soutenue par la formule de « la moyenne pondérée » donnant la moyenne à l'aide des fréquences et des modalités. Cette formule est liée à la distribution des fréquences, qui est une organisation avancée des données statistiques.

Cette seconde interprétation revient à considérer la moyenne comme la valeur qu'aurait chaque individu si les modalités étaient également partagées entre les individus. Ainsi chaque

individu aurait une part f_1 de la modalité 1, une part f_2 de la modalité 2, une part f_3 de la modalité 3, et ainsi de suite. La moyenne sera alors égale à:

$$f_1x_1 + f_2x_2 + \ ... + \ f_kx_k$$

Une troisième interprétation de la moyenne arithmétique revient à associer à chaque modalité une masse égale à sa fréquence, qu'on placerait sur un axe à la position exacte de cette modalité. La moyenne correspond alors au centre de masse. C'est le point où l'axe va être en équilibre horizontal.

Du fait qu'elle tient compte de toutes les observations, la moyenne arithmétique peut être biaisée par quelques valeurs extrêmes et ainsi, elle perd son caractère de représentativité quand la distribution est **fortement** dissymétrique.

En effet, si on se situe sur un axe, une valeur très élevée (resp. très faible) entraînera un glissement de la valeur moyenne vers la droite (resp. vers la gauche) et alors la valeur obtenue pour la moyenne peut ne pas refléter la valeur générale obtenue par la majorité. Ce constat nous informe sur la façon dont la moyenne est sensible aux valeurs extrêmes ; il nous informe également sur les conditions sous lesquelles la moyenne peut refléter une « bonne image » de la réalité de la distribution.

En d'autres termes, une dissymétrie vers la gauche (resp. vers la droite) situera la moyenne à droite (resp. à gauche) du mode et donnera ainsi une valeur qui ne correspond pas à la majorité (mode) des individus.

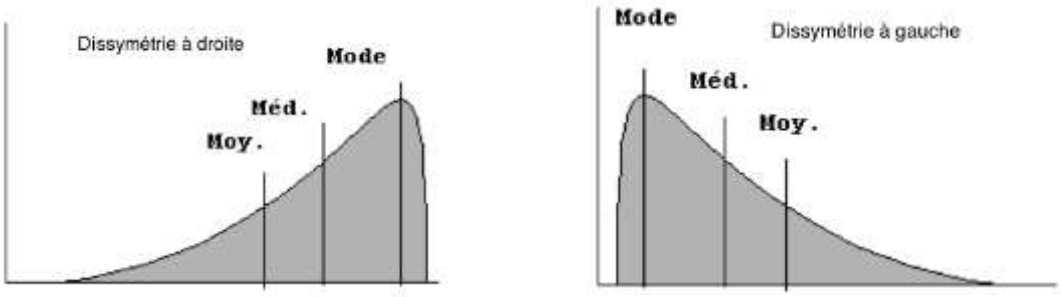


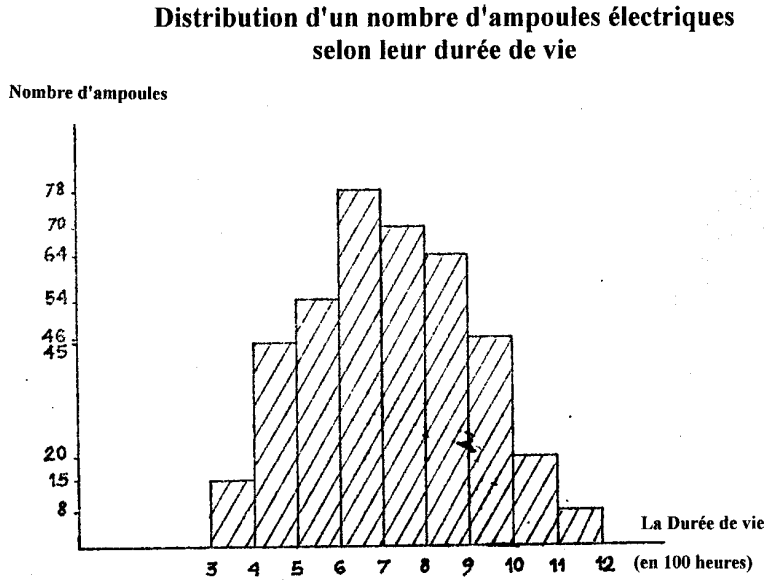
Figure 1*-Distributions dissymétriques*

Ainsi, dans un contexte statistique, la représentativité de la moyenne ne dépend pas seulement de celle de l'échantillon utilisé, elle est aussi tributaire de la nature ou de l'allure de la distribution.

Dans le cas de graphiques tels que le diagramme en bâtons ou l'histogramme, présentant un modèle fonctionnel, nous aboutissons à une certaine correspondance entre la configuration graphique de la distribution statistique et la position de la valeur moyenne sur l'axe des abscisses du graphique. En effet, pour ce type de graphiques il y a des situations où la moyenne arithmétique peut être déduite directement, c'est le cas d'une distribution uniforme ou d'une distribution uni modale symétrique. Dans ce dernier cas, les trois paramètres, la médiane, le mode et la moyenne sont égaux, et se confondent au milieu de la distribution. Dans le cas d'une distribution asymétrique à gauche, la moyenne se situe à droite du mode, c.à.d. entre le mode et la valeur maximale. Alors que dans le cas d'une distribution asymétrique à droite, elle se situe entre le mode et la valeur minimale. Enfin, pour certains autres graphiques tel que le diagramme circulaire, cette extraction de la moyenne ne peut se faire directement à partir du graphique.

II. OBJECTIF, METHODOLOGIE ET ANALYSE PREALABLE

Dans le but d'évaluer la compréhension de la moyenne arithmétique chez des élèves, Gal (1995) propose une activité qui consiste à estimer cette dernière à partir d'une représentation graphique des données statistiques. Rouan (2001) qualifie cette activité comme une activité d'interprétation de la RGDS en question. Dans cet article, nous nous situons dans le prolongement de cette étude en nous focalisant sur l'histogramme. Notre objectif est d'explorer particulièrement les difficultés qu'affrontent les élèves du secondaire lors de l'extraction de la moyenne à partir de l'histogramme. Ainsi, nous avons présenté à 140 élèves de tronc commun, (10ème année de scolarité, 16-17 ans) un histogramme représentant la distribution d'un nombre d'ampoules électriques selon leur durée de vie. Les élèves sont appelés à ressortir la valeur de la moyenne à partir du graphique. Voici l'histogramme proposé ainsi que les questions qui l'accompagnent :



Question

La durée de vie moyenne des ampoules représentées par ce graphique est :

a) 650 heures

b) 714 heures

c) 717 heures

d) 1000 heures

e) autre réponse

Laquelle? ....

Justifier votre réponse : ....

Figure 2 *- Histogramme et questions posées*

Notons d'abord que ces élèves ont tous suivi un cours de statistique descriptive comportant une unité sur les graphiques statistiques dont l'histogramme, tandis qu'une autre unité porte sur les paramètres de position, dont la moyenne arithmétique. L'objet de la question étant de donner une valeur approchée de la moyenne relative à l'échantillon proposé, cette valeur

peut provenir directement du graphique, résulter d'un calcul effectué à partir d'une formule de la moyenne arithmétique, objet du cours, ou provenir d'un autre procédé que l'élève devra justifier en montrer la convenance.

En fait, le calcul de la moyenne à partir de l'histogramme peut s'articuler autour de trois composantes : 1) la connaissance des caractéristiques du graphique, 2) la connaissance de la formule de la moyenne, et 3) la connaissance de la correspondance des éléments constituant cette dernière avec les informations représentées par l'histogramme.

Dans la question nous demandons la durée de vie moyenne relative à l'échantillon étudié. Il n'a pas précisé qu'il s'agit de la moyenne arithmétique. Mais c'est le seul type de moyenne, étudié et connu par les élèves de la première année de la section « sciences expérimentales » ici concernés. Nous estimons que la réponse à cette question devra reposer,

a) soit sur l'utilisation de la formule, ce qui demande de passer du graphique au tableau de données avant d'appliquer la formule,

b) soit, sur l'allure symétrique de la distribution, où la moyenne se rapproche du mode et de la médiane et se situe au milieu, entre la valeur minimale et la valeur maximale.

La bonne réponse à la question est le choix « c », soit 717.

III. RESULTATS ET ANALYSES

Les résultats recueillis sont résumés dans le tableau suivant (S.R.: sans réponse):

réponse	a	b	c*	d	e	S.R.
%	18	2	13	7	49	10

Tableau 1 *– tableau des résultats*

Dans les résultats rapportés dans cette question, on notera que 13% des sujets seulement ont fait le bon choix de réponse en utilisant correctement la formule de la moyenne. 18% ont donné le premier choix (650 heures), 50% ont opté pour des réponses hors des quatre choix proposés (le choix « e »), alors que 10% n'ont pas donné de réponse.

Les réponses alternatives données en "e" quant à elles sont nombreuses et différentes. Quelques-unes sont d'ailleurs difficilement compréhensibles. Nous y avons repris ci-dessous en particulier les réponses numériques suivantes : "1200"; "7500"; "5700"; "133,3"; "833,33"; "243"; "638"; "750"; "900"; "600" ; "entre 300 et 1200". A ces réponses il faut ajouter deux réponses standards : « *je ne sais pas* » et « *impossible de donner une réponse* »

Ces résultats sont pour la majorité, justifiés soit par le recours à une formule de calcul, soit que les élèves confondent la moyenne avec un autre paramètre statistique. En effet, plus de 20% des sujets ont donné comme « moyenne de l'échantillon »la valeur 600 ou la valeur 650, en soulignant que ces valeurs sont les plus fréquentes. Une autre catégorie importante de ce type de réponses manifeste une confusion entre « la moyenne » avec « la valeur maximale observée » (1200 heures). D'autres sujets considèrent que la moyenne doit se situer au milieu, entre la valeur maximale et la valeur minimale. Toutefois, les arguments évoqués à propos de cette réponse ne font pas de référence explicite à la symétrie apparente du graphique.

"Parce que 750 est le milieu entre 1200 et 300"

"Parce la moyenne dans ce cas, est égale à la demi-solde de la plus grande et de la plus petite valeur"

Certains ont même confondu « la moyenne » avec « l'étendue » de la distribution, qui elle est plutôt une mesure de dispersion qui s'apparente davantage à une distance et ne peut pas correspondre à une valeur spécifique de la variable statistique étudiée.

En fait, ni les formules, ni les paramètres utilisés n'ont été amplement justifiés. Seulement 6% des sujets ayant opté pour le choix « e », ont utilisé correctement la formule de la moyenne, alors que plus de 90% des réponses fausses ont utilisé des formules autres que celles données dans le cours. Le tableau suivant présente ces dernières, aussi bien que certaines des justifications qui les accompagnent. Dans le tableau qui suit, chaque justification est accompagnée de la réponse correspondante. Pour la lisibilité du tableau, les notations suivantes sont utilisées:

Les e_i sont les extrémités des classes.

Les c_i sont les centres des classes.

Les n_i sont les effectifs des classes.

M est le nombre de classes.

	Procédé	Formules et justifications
1	$\sum e_i$	7500 car 300+400+500+ ...+ 1200= 7500
2	$\sum c_i$	5700 car 350+450+550+ ... + 1150 = 5700
3	$\sum n_i$	243 car 32+33+47+63+14+54=243
4	$\frac{\sum c_i}{M}$	638 car $\frac{350+450+550+650+750+850+950+1050+1150}{9} = 638$
5	$\frac{\sum e_i}{M}$	833,3 car la moyenne est : $\overline{X} = \frac{\sum durée de vies}{\sum nombre de rectangle}$
6	$\frac{\sum e_i}{\mathrm{Sup}(n_i)}$	$\frac{300 + 400 + 500 + 600 + 700 + 800 + 900 + 1000 + 1100 + 1200}{78}$
7	$\frac{\sum e_i n_i}{\mathrm{Sup}(e_i)}$	$\frac{[(300x15) + (400x46) + \ldots + (1200x8)]}{1200}$
8	Milieu	750 car $\frac{1200+300)]}{2} = 750$
9	Mode	650 car c'est le milieu de la classe qui a le plus grand effectif
10	Sup (e_i)	1200 « car les durées de vie ne dépassent pas 1200 heures » « car c'est la plus grande durée de vie »
11	$\mathrm{Sup}(e_i) - \mathrm{Inf}(e_i)$	900 car 1200 - 300 = 900

Tableau 2 *– tableau récapitulatif des résultats obtenus*

Les six premières formules semblent utiliser de façon partielle et/ou erronée la formule élémentaire de la moyenne qui est le rapport de la somme des observations brutes sur leur nombre total (taille de l'échantillon). Elle est différente de la formule de la moyenne pondérée.

Ainsi considérée, cette formule ne s'adapte pas à l'histogramme, parce que ce dernier ne représente pas les données brutes, mais part des regroupements de ces dernières en classes. Pour être appliquée à l'histogramme, cette formule doit subir des adaptations et des changements qui tiennent compte de la structure de l'histogramme, c'est-à-dire de l'organisation des données sous forme d'une distribution, de leur regroupement en classes et de la perte d'informations engendrée par ce regroupement.

Les différentes réponses ont montré que cette formule est utilisée tantôt avec une seule variante, tantôt avec deux variantes. Pour les trois premières lignes du tableau, les calculs se limitent respectivement à la somme des extrémités des classes (e_i), de leurs centres (c_i), et des effectifs partiels (n_i) sans s'occuper aucunement de la division. Néanmoins, pour les deux lignes suivantes, ou la moyenne est calculée par un rapport, il y a un recourt aux centres ou aux extrémités des classes avec leur nombre pour les deux première, et aux extrémités des classes avec le sup des effectifs (n_i).La dernière formule de la moyenne semble utiliser la forme de la moyenne pondérée, mais avec un dénominateur inapproprié.

Soulignons que ces six procédés de calcul nous laissent supposer, voire conjecturer que les élèves ont une conception discrète et localisée de l'histogramme, contrairement à sa vocation qui demeure de permettre un traitement fonctionnel, continue et global de la situation.

Plus encore, il ressort des résultats présentés que les sujets ont des difficultés à reproduire la formule de la moyenne pondérée, et surtout lorsque les modalités doivent être remplacées par les centres des classes. Remarquons le recours au mode discret de lecture de l'histogramme, qui prend les extrémités des classes pour les modalités de la variable statistique étudiée et leur nombre pour effectif global.

A part le milieu et le mode (formules 8 et 9) qui peuvent coïncider avec la moyenne dans le cas d'une distribution symétrique, les autres formules (10 et 11) nous éloignent de la formule de la moyenne et du sens qu'elle incarne.

Donc, l'extraction de la moyenne à partir du graphique se fait dans un grand nombre de cas, par un recours à la formule apprise en classe. Ce recours n'est pas toujours réussis, car les élèves ne s'en rappellent pas ou ne réussissent pas à en faire une application judicieuse et appropriée sur un histogramme. Dans les autres cas, la moyenne est assimilée à des paramètres tels que le mode, le milieu, une extrémité, ou l'étendu de la distribution. Les résultats ont donc illustré que la notion de moyenne interfère, chez les élèves, avec un grand nombre de paramètres (mode, sup, inf, (max + min)/2, étendu, etc), qui sont quelquefois de nature complètement différente de la moyenne.

Nous pouvons donc affirmer que la notion de moyenne n'a pas chez les sujets, une signification qui permette de la distinguer des autres paramètres, de retrouver les différentes versions de sa formule, et de la reconnaître sur un graphique tel que l'histogramme. En plus, les réponses et les arguments donnés montrent que les propriétés graphiques de la distribution statistique (symétrie, dispersion ...) ne sont pas exploitées par les élèves. En effet, ces propriétés ne sont explicitement signalées dans aucun des arguments fournis.

IV. DISCUSSION

Dans la question posée, la tâche d'interprétation consiste à déduire du graphique une valeur qui n'est pas directement lisible sur le graphique, à savoir celle de la moyenne. Cette valeur représente une information globale qui peut, dans certains cas, être anticipée à partir du graphique. Son extraction ou sa déduction du graphique peut aussi faire appel à un processus

de réorganisation des informations issues de l'histogramme en une distribution statistique sous forme de tableau ou par le biais de la formule de la moyenne.

Les difficultés mises en évidence par les résultats que les élèves ont donnés à cette question, comme le révèle notre analyse, sont variées et peuvent être situées à trois niveaux de compréhension différents :

Le premier type de difficultés concerne la signification du concept de moyenne et le sens que l'élève associe à sa formule. Il concerne donc tous les concepts statistiques figurant sur le graphique (variable statistique, modalité, effectif ou fréquence, valeurs extrêmes, mode, etc). Il concerne aussi la signification de chacun d'entre eux (problème de sens), l'articulation et les interactions qu'ils peuvent entretenir entre eux, les différentes façons dont ils sont combinés, la différentiation de chaque concept et enfin leur exploitation pour faire des calculs, des comparaisons ou d'autres opérations. Ce type de difficultés peut être lié aux aspects structurel et descriptif de la compréhension de la notion de moyenne.

Le deuxième type de difficultés concerne les opérations et les connaissances nécessaires pour le passage des données du graphique à la formule de la moyenne. En effet, ce passage nécessite une étape intermédiaire qui revient à préciser les valeurs de la variable et les effectifs qui leur sont associés et à appliquer la formule en respectant les hypothèses qui sont derrière ce passage. De ce fait, cette difficulté peut être liée à l'aspect sémiotique de la compréhension.

Le troisième type de difficultés est lié à la maîtrise des propriétés graphiques de la distribution statistique (symétrie, dispersion, valeurs extrêmes, etc) et à la capacité de faire le lien de ces dernières avec la notion de moyenne. Ce type se situe donc au niveau de l'aspect descriptif de la compréhension du graphique utilisé, en l'occurrence, l'histogramme.

V. CONCLUSION

Pour le calcul approché de la moyenne à partir de l'histogramme, nous n'avons remarqué aucun recours à la symétrie de ce dernier graphique comme argument soutenant les réponses des élèves. Par contre, nous avons constaté que la moyenne interfère avec plusieurs autres concepts apparentés : milieu, valeurs extrêmes, mode, l'étendu, etc. Ceci semble justifier les difficultés de distinction entre la moyenne et ces autres concepts, difficultés liées à l'aspect sémiotique de compréhension de la moyenne.

Il parait que cette multitude de formules erronées et de confusions provient du fait que la moyenne n'a pas un sens clair chez les élèves. Elle n'a pas une signification de référence qui permette de la reconstruire et de la distinguer des autres paramètres et surtout qui constitue un recours sûr en cas de situation inédite ou ambigüe. Ceci explique en partie, la difficulté de retrouver la bonne formule pour calculer la moyenne. A ce propos, on ne peut ignorer le rôle ou plutôt l'absence de rôle des activités d'enseignement dans le développement d'une signification de la moyenne chez les élèves.

La compréhension de la relation graphique/ moyenne concerne alors 1) le passage du graphique à la formule en identifiant les différentes composantes de cette dernière sur le graphique, 2) l'illustration de la valeur moyenne sur le graphique en recourant à une stratégie pratique ou à une technicité basée sur le sens associé à la moyenne 3) la reconnaissance des différentes *formes* caractérisant le positionnement de la moyenne (inférieure au mode, coïncide avec le mode, supérieure au mode). Ces éléments éclairent les difficultés qui se manifestent chez les sujets questionnés, difficultés liées à l'aspect descriptif de l'histogramme.

RÉFÉRENCES

Gal, I. (1995). Statistical tools and statistical literacy: The case of the average. *Teaching statistics*, 17(3), 97-99.

Bergeron, J. C., Herscovics, N. (1982). Des modèles de la compréhension. *Revue des sciences de l'éducation*, 8(3), 576– 596.

Herscovics, N., Bergeron, J. C. (1988). An extended model of understanding. In *Proceedings of the Tenth Annual Meeting PME-NA*, 15-22. Dekalb, Illinois.

Bergeron, J. C., Herscovics, N. (1989). Un modèle de la compréhension pour décrire la construction de schèmes conceptuels mathématiques. In *Actes de la 41ème rencontre de C.I.E.A.E.M. (commission internationales pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques)*, 139-147. Bruxelles, Belgique.

Janvier, C. (1978). *The interprétation of complexcartesian graphs representing situations – studies and teachingexperiment*».Thèse de Doctorat (Ph. D) soumise à l'université de Nottingham.

Lamrabet, Driss (1993). Réflexions sur le problème de la compréhension en mathématiques. *Printemps de la didactique des mathématiques à Fès, Faculté des sciences de Fès- ENS de Rabat* – Ambassade de France, Mars 1993.

Lamrabet, D. (1992). Printemps des mathématiques à Fès du 4 au 8 mai. *Document réalisé par la faculté des sciences de Fès et l'ENS de Rabat en collaboration avec la Coopération éducative*.

Rouan, O. (2001). *Lecture et interprétation des représentations graphiques des données statistiques chez les élèves et les enseignants du secondaire »*, Thèse de Doctorat (Doctorat d'état) soumise à l'université Mohamed V de Rabat.

L'ENSEIGNEMENT DU LANGAGE MATHÉMATIQUE ABSTRAIT ET LA RÉUSSITE SCOLAIRE ABUSIVE CHEZ LES APPRENANTS : CAS DES ÉLÈVES DE LA TROISIÈME DES COLLÈGES DE LA COMMUNE D'ATAKPAMÉ

TCHASSAMA[*] Ati-Mola

Résumé - la présente étude permettrait d'améliorer la réussite des élèves en mathématiques. Nous pensons que la réussite abusive des élèves est due à l'enseignement du langage mathématique abstrait. Une enquête a concerné 15 enseignants de mathématiques et 150 de leurs élèves de la sixième de la commune d'Atakpamé. Il ressort des résultats que l'acquisition du langage mathématique chez les élèves crée une réussite abusive.

Mots-clefs : langage mathématique, apprentissage, réussite scolaire abusive.

Abstract - this study would improve student success in mathematics. We believe that students' abusive success is due to the teaching of abstract mathematical language. One survey involved 15 mathematics teachers and 150 of their pupils in the sixth grade of Atakpamé commune. The results show that the acquisition of mathematical language in students creates an abusive success.

Keywords: mathematical language, learning, abusive academic success.

I. INTRODUCTION

Les mathématiques, c'est comme une langue étrangère, c'est une matière qui a son propre vocabulaire, qui a ses propres codes, sa façon unique de réfléchir. Leurs acquisitions par les apprenants nécessitent une méthode adaptée d'enseignement/apprentissage afin de les réussir. Piaget (1967) considère que le concept du nombre est acquis chez l'enfant vers 6 ou 7 ans, avec l'acquisition de la notion de conservation. Pourtant, on note une détérioration problématique des connaissances mathématiques chez les élèves de tout niveau scolaire. Le problème d'échec en mathématique est un phénomène qui ruine le système éducatif au Togo et a pour impact, le désintérêt pour cette matière enseignée. Pour expliquer ce problème d'échec scolaire, Avanzini (1977) a pensé aux causes intellectuelles, affectives et pédagogiques, qui s'impliquent. Nous nous proposons de nous intéresser aux causes pédagogiques, parce que, parmi les 28 facteurs influençant l'apprentissage des élèves à l'école, les deux facteurs qui se situent en tête de liste sont : la gestion de la classe et les processus métacognitifs. L'effet de l'enseignant devance ainsi celui de la famille qui ne vient qu'au quatrième rang (Steve, Mario & Clermont, 2005).

Le présent travail permet de fournir aux pédagogues des stratégies susceptibles d'améliorer l'apprentissage des mathématiques au niveau des élèves du collège.

Après une problématique qui va consister à analyser la situation et énoncer le problème d'enseignement/apprentissage de cette discipline, notre méthodologie de recherche nous permettra de préciser les résultats explicatifs de cette situation

II. PROBLEMATIQUE

La réussite scolaire suppose l'idée d'accomplissement d'un apprentissage scolaire et son éventail de possibilités, bonnes ou mauvaises. La réussite scolaire que nous allons présenter, fait référence à ce qui est normalement attendu d'un élève pour pouvoir le déclarer en

[*] Ecole Normale Supérieure (ENS) d'Atakpamé-Togo- atimola1111@yahoo.fr

situation de réussite. Elle recourt aux performances scolaires et aux compétences qu'elles exhibent comme c'est le cas, dans l'approche par les compétences.

1. Approche par les compétences

Cette approche se fonde sur des théories psychologiques comme le cognitivisme, le constructivisme et le socioconstructivisme au sens Piagetien. Il s'agit des apprentissages plus globaux s'effectuant par restructuration progressive des connaissances. D'après Pelpel (1986), dans le processus de l'apprentissage scolaire, l'approche par les compétences se situe essentiellement à trois niveaux : donner du sens aux apprentissages, rendre ces apprentissages plus efficaces, fonder les apprentissages ultérieurs. Une compétence est la possibilité, pour un apprenant, de mobiliser un ensemble intégré de ressources en vue de résoudre une situation-problème qui appartient à une famille de situations (Roegiers, 2000). C'est pourquoi, Dewey (1947) explique que l'apprentissage implique d'abord que le sujet se trouve aux prises avec les problèmes rencontrés. C'est la première phase des cinq qu'il a définies où naît le besoin d'apprendre, phase de motivation. Dans la pratique, cela revient d'abord, à créer une situation où le problème devrait être posé de façon concrète en relation avec la réalité, ensuite énoncer les compétences. Ainsi, l'acquisition d'une compétence conditionne la réussite scolaire.

2. Réussite et échec scolaires

Pour Avanzini (1977, p.16), « Est en situation d'échec, soit l'élève dont les performances sont inférieures à celles qu'exigent le niveau officiel de sa classe ou de son cours ou les normes de l'examen qu'il prépare, soit celui par voie de conséquence qui est placé dans des classes, sections peu estimées ». Selon Sillamy (1983, p.506), la performance est la « mise en œuvre d'une aptitude et le résultat de cette action à partir duquel on peut déduire les possibilités d'un sujet dans un domaine particulier ». Pour Isambert-Jamati (1992, p.55), « l'élève qui échoue est celui qui n'a pas acquis dans le délai prévu, les nouvelles connaissances et les nouveaux savoir – faire que l'institution, conformément aux programmes, prévoit qu'il acquiert ». Ces définitions se distinguent selon qu'elles parlent de l'apprenant lui-même dans son action ou de sa progression dans le système scolaire. C'est dans ce sens que Bouteyre (2004) les a catégorisées du point de vue statistique et pédagogique. Par rapport à la définition statistique, on parle d'enfant en situation de réussite à l'école primaire lorsque celui-ci poursuit sa scolarité en passant chaque année en classe supérieure. Concernant la définition pédagogique, l'école, par l'éducation qu'elle dispense, est avant tout un outil préparatoire à la société, à l'économie et à la vie professionnelle. Pour notre part, lorsqu'on considère le résultat d'un apprentissage, on peut porter un jugement non seulement sur ce même résultat mais aussi sur les conditions ou les méthodes qui ont entraîné l'individu à produire le résultat. C'est pourquoi les définitions statistiques et pédagogiques intéressent cette étude afin de pouvoir comprendre et expliquer la relation qui existe entre les méthodes d'enseignement et la réussite scolaire des apprenants. Cependant, nous nous limiterons à l'échec en mathématique, ce que Avanzini (1977) appelle échec partiel parce qu'il affecte une discipline spécifique. Celui-ci a distingué deux dimensions de l'échec : la dimension objective et la dimension subjective de l'échec. La première dimension concerne l'échec au travail scolaire c'est-à-dire les mauvaises notes obtenues par l'élève et les critères qui définissent les décisions par rapport à ces notes. Ces critères sont établis dans un ordre d'implication causale. Par exemple, une ou des mauvaises notes obtenues entraînent un redoublement ou une orientation vers une filière spécialisée ou pour une pédagogie spécialisée. La dimension subjective tient compte de la manière dont l'élève ressent l'échec objectif. Avanzini (1977) a reconnu qu'un apprenant peut aussi être en situation d'échec que

nous jugeons objectif, lorsqu'il subit une fragilité des acquis scolaires après un apprentissage. Autrement dit, s'il n'arrive pas à mettre en valeur les connaissances apprises. Ces acquisitions de connaissances demeurent précaires et instables. Gerard et Roegiers (2010) parlent de réussite abusive et d'échec abusif. Un échec abusif est un échec qui sanctionne un apprenant qui pourtant aurait dû réussir parce qu'il maîtrise les acquis essentiels qui ne sont pas mis en valeur. Une réussite abusive est une réussite dont bénéficie un apprenant qui n'aurait pas dû réussir parce qu'il ne maîtrise pas les acquis essentiels. Il réussit sans avoir les acquis nécessaires pour suivre la suite de sa scolarité. Dans le cas des mathématiques, l'apprenant réussit ou échoue sans maîtriser le langage mathématique.

3. Langage mathématique

D'après Larousse (2000), le langage est un système structuré de signes non verbaux remplissant une fonction de communication. C'est aussi une manière de parler propre à un groupe social ou professionnel, à une discipline, etc. La situation d'apprentissage d'un langage consiste en la capacité d'un apprenant à utiliser les signes et de traiter les informations se rapportant aux objets concrets ou abstraits.

Le langage mathématique constitue l'ensemble des signes et symboles propres à ladite discipline. Ainsi les mathématiques ont leur propre vocabulaire traduit au collège par des signes : positif (+) ou signe négatif (-), symboles d'inégalité (<, >), d'inéquation : $x+1<x+3$, de factorisation $(x+2)(x^2-4)$, etc. Nous nous intéressons à la réussite des élèves qui intériorisent ce langage. Car, Jouvenet (1985, p.27) affirme que : « La réussite scolaire est l'effet d'un processus de formation et de changement de l'élève. Cette réussite scolaire suppose d'intérioriser, de faire siens des signes, des symboles, des savoirs, d'incorporer, de garder en son corps des attitudes, des conduites, des savoir-faire rationnels ». Selon cet auteur, la réussite concerne le sujet psychologique dans sa totalité, dans son individualité, car, après s'être familiarisé aux savoirs et à ceux qui les dispensent, il doit faire preuve d'appropriation et d'opérationnalisation de ce qui lui a été enseigné. Cela n'est possible que par l'apprentissage. Le langage est le véhicule de tous les autres apprentissages culturels (Vergez & Huisman, 1986) et qui obéissent au mécanisme d'assimilation/accommodation, au sens piagétien. Ainsi, si le langage mathématique abstrait n'est pas traductible en langage concret, cela rendrait difficile son apprentissage.

4. Apport des travaux piagétiens

C'est avec Piaget (1967) qu'on peut comprendre non seulement le développement de l'intelligence mais aussi les démarches d'acquisition des connaissances en général et des mathématiques en particulier. Toute connaissance est le fruit de l'interaction entre le sujet qui apprend et son environnement (Piaget, 1967) par un mécanisme qu'il a appelé assimilation/accommodation. L'assimilation consiste, pour un apprenant, à incorporer en lui les éléments, les connaissances ou les informations du milieu. L'accommodation est la mobilisation des structures mentales en fonction des modifications du milieu, c'est l'ajustement de soi au réel. Elle consiste à mobiliser les connaissances assimilées en vue de résoudre un problème. L'adaptation consiste en l'assimilation/accommodation au cours de l'apprentissage. A travers la théorie Piagétienne, on peut expliquer le cognitivisme et le constructivisme qui prônent le caractère actif de l'apprenant. Le premier tient compte des processus cognitifs au cours des apprentissages tels que le raisonnement et la résolution des situations-problèmes. Le second, le constructivisme, très proche du cognitivisme, tient compte du caractère opératoire des apprentissages du mécanisme de transfert des connaissances. C'est pourquoi nous adoptons dans cette étude, le constructivisme piagétien

comme modèle d'apprentissage qui détermine la réussite scolaire chez les apprenants. Du fait que cet auteur pense qu'on ne peut apprendre n'importe quoi à n'importe quel âge, l'enseignement/apprentissage doit tenir compte des aptitudes réelles des enfants à chaque période. De saines méthodes peuvent accélérer le développement cognitif et faciliter la réussite scolaire chez les enfants. Il a distingué quatre stades différents à partir desquels on peut mettre en exergue deux grandes formes d'intelligence :

- l'intelligence sensori-motrice qui s'appuie sur la coordination générale des actions du sujet et qui se développe pendant les premières années de la vie;

- l'intelligence du niveau préopératoire (2 à 6-7 ans) qui prépare l'individu à des opérations concrètes. Elle est caractérisée par une pensée symbolique et intuitive ;

- l'intelligence du niveau des opérations concrètes ou la pensée opératoire (6-7 à 12 ans). L'intelligence s'appuie à ce niveau sur des opérations logiques qui permettent de structurer adéquatement les données du réel au lieu de se limiter aux représentations imagées comme au niveau préopératoire. Le passage au stade concret se marque par une sorte d'équilibre mobile entre l'assimilation et l'accommodation qu'on appelle adaptation. L'enfant peut dès lors considérer plusieurs rapports simultanément.

- Le stade des opérations formelles (11-12 ans à 14-16 ans) débute au moment de la puberté et se caractérise par la maturité cognitive. Il se définit par l'emploi d'une méthode hypothético-déductive. Autrement dit, l'enfant est capable de : penser de façon abstraite, par exemple, il doit se montrer capable de se représenter une figure dans la réalité, dans le plan et dans l'espace.

Piaget (1967) estimait que, normalement, la plupart des adolescents accédaient à la pensée formelle. Pourtant, d'après Gaonac'h et Golder (1995), plusieurs chercheurs ont mis en doute cette affirmation. Ils ont constaté qu'une proportion importante d'adolescents et d'adultes n'étaient pas en mesure de résoudre les problèmes relevant du stade formel particulièrement dans le domaine des mathématiques et des autres sciences. Autrement dit, beaucoup de cours de mathématiques qui s'adressent à des adolescents adoptent d'emblée un niveau d'abstraction trop élevé qui échappe à la majorité des élèves. Or à partir de la classe de la 6ème, les élèves entrent dans la phase d'adolescence. Ils sont amenés à travailler avec plusieurs enseignants et leurs disciplines. Ceux-ci ont leurs méthodes de travail et des exigences propres, par exemple, l'enseignement des mathématiques se base sur l'abstraction, seules les stratégies adaptées permettent aux élèves de s'adapter à cet enseignement.

5. Méthodes d'enseignement inspirées du constructivisme piagétien

Si les mathématiques constituent un langage, l'enseignant devrait penser au choix des termes lorsqu'on s'adresse à ses apprenants. Pour rendre l'apprenant actif et faciliter sa réussite scolaire, Gaonac'h et Golder (1995) pensent qu'il faut adopter une approche concrète de l'enseignement qui s'appuie sur la manipulation et l'exploration des choses et favoriser la construction mentale chez l'élève par le questionnement progressif (méthode maïeutique ou socratique). Car l'action précède la pensée et les opérations proprement logiques ne font que prolonger les actions en les intériorisant (Vergez & Huisman, 1986). Il s'agit de l'apprentissage par la découverte personnelle plutôt que par la démonstration (enseignement des vérités au sens des sophistes). La méthode de Singapour appuie cela par la démarche suivante : les élèves sont d'abord, confrontés aux notions mathématiques par la manipulation d'objets réels : c'est l'étape concrète; Ensuite, les objets sont remplacés par des images qui les représentent: c'est l'étape imagée; Enfin, lorsque les élèves se sont familiarisés avec les

concepts de la leçon, ils ne travaillent plus qu'à l'aide de chiffres et de symboles : c'est l'étape abstraite;

Pour Barth (1995), durant l'apprentissage de l'abstraction, l'élève doit d'abord percevoir l'information, puis il la traite, ensuite il abstrait et, enfin il généralise. Il a acquis le concept abstrait quand il est capable de le transférer, de savoir pourquoi on appelle un objet par ce nom, de nommer ses propriétés, de donner des exemples de ce concept, les justifier et les contextualiser, de proposer ou créer de nouveaux exemples, de relier ce concept à d'autres concepts. D'où la nécessité d'une interdisciplinarité, il s'agit d'un enseignement basé sur l'approche par les compétences (DeKetele, 1980). Roegiers (2000) parle de la pédagogie d'intégration qui consiste sélectionner des compétences pour les apprenants en vue de les intérioriser par assimilation/accommodation au sens piagetien.

La méthode Kumon (1999) pense que l'apprentissage du calcul devrait permettre d'intégrer les notions fondamentales en respectant le rythme de chaque élève. Dans ce cas, l'enseignant doit adopter une pédagogie différenciée en phase avec les méthodes actives.

L'étude de Hubbard (1996) révèle trois barrières d'étude suivantes chez les apprenants. La première barrière à l'étude est le fait d'apprendre en l'absence de la masse ou de l'objet physique étudié. Une seconde barrière est le fait de tenter d'acquérir la maîtrise d'une compétence sans avoir saisi une étape précédente. La troisième barrière la plus importante est due aux mots mal compris. Parmi les trois barrières, c'est le mot mal compris qui influe le plus sur les relations humaines, sur l'esprit et la compréhension. En effet, c'est le mot mal compris qui établit l'aptitude ou le manque d'aptitude.

6. Synthèse

Nous soutenons qu'en situation d'enseignement/apprentissage, le langage mathématique devrait permettre à l'apprenant d'utiliser les signes et de traiter les informations se rapportant aux objets concrets ou abstraits. Pour faciliter la réussite scolaire des apprenants, cette situation d'enseignement/apprentissage doit se fonder sur des théories psychologiques comme le cognitivisme et le constructivisme au sens Piagétien et sur des apprentissages plus globaux suivant l'approche par les compétences.

Au Togo, il n'existe pas encore des études permettant d'explorer les pratiques pédagogiques d'enseignement du langage mathématique au collège. Nous pensons que la réussite abusive des élèves est due à l'enseignement du langage mathématique abstrait selon que ce langage s'applique ou non aux connaissances traductives et contextualisées. Le présent travail vise à étudier l'enseignement du langage mathématique et la réussite scolaire abusive chez les élèves du secondaire premier cycle. Cela permettra de fournir aux éducateurs des stratégies permettant d'améliorer la réussite des élèves en mathématiques. Dans la partie suivante nous procéderons à l'analyse des hypothèses explicitées.

III. METHODOLOGIE DE RECHERCHE

Une enquête a concerné 15 enseignants consentants de mathématiques en fin de formation initiale et 150 de leurs élèves de la troisième de la commune d'Atakpamé. Ces enseignants, outillés pour l'enseignement des mathématiques, ont été observés à partir d'une grille d'observation directe, chacun dans une classe de troisième, classe d'entrée au Lycée où les élèves ont eu à suivre tout le programme de mathématiques au collège. Dix (10) élèves de chaque classe, choisis au hasard, ont été soumis à un guide d'entretien semi-directif. La grille comporte les actes pédagogiques des enseignants observables en situation

d'enseignement/apprentissage des mathématiques. Le guide d'entretien a permis de cerner au niveau des élèves, comment ceux-ci mettent en valeur les connaissances mathématiques qu'ils ont acquises. Ces outils ont été élaborés en nous inspirant de Dewey (1947) qui a mis en exergue l'apprentissage par situation-problème, l'enseignement de l'abstraction de Barth (1995), la méthode du calcul de Kumon (1999), l'enseignement basé sur l'approche par les compétences de DeKetele, 1980). Roegiers (2000), etc. La taille de nos échantillons se justifie par le fait que la méthode d'observation nécessite plus de temps et d'attention. Une analyse documentaire de leurs performances scolaires a été faite. A travers les résultats de l'enquête, les fréquences des différents comportements des enseignants et leurs élèves observés ont été calculés. Cette analyse quantitative est appuyée par l'analyse qualitative. Il s'agit de l'analyse logico-sémantique qui s'intéresse directement au contenu manifeste (Mucchielli, 1984).

IV. RESULTATS

Pour un enseignement/apprentissage véritable, il est nécessaire que le contenu soit compréhensible. Ainsi, le langage mathématique obéit à des règles du jeu qui mettent en relation les nombres, les signes, les symboles, etc. avec la réalité. Ces relations complexes, comme c'est le cas pour les autres sciences, permettent soit de démontrer certaines vérités, soit de créer de nouveaux savoirs par une justification logique. Mais l'enseignement des mathématiques dans nos collèges demeure abstrait et semble dénué de sens. Ce qui complique son apprentissage aux élèves. L'analyse documentaire des performances scolaires des élèves de la troisième dans la dite discipline au Brevet d'Etude du Premier Cycle (BEPC) 2017 montre que les résultats sont médiocres.

PS	Effectif	%
Réussite	32	21,3
Echec	118	78,7
Total	150	100

Tableau 1*- Répartition des élèves enquêtés en fonction de leurs performances à l'examen de Mathématiques au BEPC 2017.*

L'analyse des performances scolaires (PS) des élèves à cet examen d'entrée en seconde (au Lycée) montre qu'il y a 21,3% de réussites contre 78,7% d'échecs. Nous avons demandé à chaque élève de choisir un chapitre de sa préférence et de dire à quoi servent les connaissances enseignées dans ce chapitre dans la vie ? Nous nous sommes rendu compte qu'ils éprouvent des difficultés à le faire. Ils n'arrivaient pas à expliquer ni contextualiser les concepts mathématiques et leurs symboles qu'ils utilisent tels que : équation, inéquation, factoriser, développement, racine carrée, etc. Tout ce qu'ils retiennent des connaissances mathématiques est qu'elles servent à compter ou à calculer dans le domaine du commerce. Pour expliquer ces difficultés scolaires des élèves, nous avons analysé quelques pratiques pédagogiques liées au développement des contenus de l'enseignement. Le tableau suivant nous renseigne à ce sujet.

	Effectifs et pourcentages des réponses					
Techniques d'enseignement	Oui		Non		Totaux	
Il amorce une leçon à partir d'une situation – problème en rapport avec la réalité ou au monde professionnel	3	20 %	12	80%	15	100%

L'enseignant énonce les compétences aux élèves	4	26,7 %	11	73,3%	15	100%

Tableau 2 *- Répartition des enseignants selon leurs manières d'aborder leur cours*

Les données que présente ce tableau récapitulent la démarche pédagogique adoptée par les enseignants de cette étude. Ainsi, 20% contre 80% des enseignants amorcent leur leçon à partir d'une situation-problème en rapport avec la réalité ou au monde professionnel. 26,7% des enseignants énoncent correctement les compétences de leur cours aux élèves. Les autres (73,3%) énoncent des objectifs vagues qui ne sont pas centrés sur l'apprenant (nous allons continuer avec le chapitre passé ou nous allons voir aujourd'hui ...). A travers nos observations, le tableau ci-après nous renseigne sur comment ces enseignants rendent concret les contenus qu'ils enseignent.

	Effectifs et pourcentages des réponses					
Matériels	Oui		Non		Totaux	
Fait allusion à la réalité, à chaque étape du cours	0	0	15	100%	15	100%
Illustre le cours par des figures, Schémas, symboles, signes, etc.	15	100%	0	0	15	100%
Il demande aux élèves des travaux manuels et leur demande de les exposer	0	0	15	100%	15	100%
Adopte des jeux et des sorties pédagogiques	0	0	15	100%	15	100%

Tableau 4 *- Répartition des matériels utilisés par les enseignants*

Ce tableau indique les différentes stratégies de concrétisation des enseignements par les enseignants. 100% des enseignants se servent des schémas, des figures, des symboles, des signes pour expliquer leur cours aux élèves. Par contre, aucun d'entre eux ne fait allusion à la réalité, à chaque étape du cours. Il n'existe pas de travaux manuels ou pratiques qu'ils demandent préalablement aux élèves afin de les exploiter. Il n'existe pas des jeux et des sorties pédagogiques. L'absence de toutes ces stratégies éloignent les enseignants des méthodes actives et de la prise en compte de l'approche par les compétences dans le processus d'enseignement/apprentissage.

V. DISCUSSIONS

L'objectif de cette étude est d'étudier l'enseignement du langage mathématique et la réussite scolaire abusive chez les élèves. L'analyse des résultats montre que nombreux sont les élèves qui échouent en mathématiques (78,7%). Les méthodes utilisées par les enseignants, dans nos écoles, sont en déphasage avec ce que préconise Piaget (1967), la méthode Singapour et celle de Barth (1995). Les élèves apprennent le langage mathématique sans pouvoir le traduire en concret. Cela s'explique par le fait que les enseignants n'énoncent pas aux élèves une situation-problème ni les compétences au début de leur enseignement comme l'a recommandé Dewey (1947). Selon (Grange, 1998), toute science s'exprime à travers un langage symbolique, qui est un ensemble des signes, renvoyant soit à des vécus concrets, soit à d'autres signes. C'est par la conceptualisation que la science peut s'exprimer et peut nous être utile. La négligence de cet aspect langagier de la science conduit au caractère

stationnaire de l'évolution des idées et une imitation servile, qui ne porte aucune expansion du progrès (Grange, 1998). Cela fait adorer les purs symboles opératoires comme des dieux, aliénant l'activité opératoire des mathématiques en une mystique superstitieuse des nombres (Vergez & Huisman, 1986). L'enseignement/apprentissage du langage mathématique est hermétique et ne peut être compris que par les adeptes (Ehrhard, Toraille & Villars, 1982). Le vocabulaire, les codes mathématiques ne sont pas suffisamment explicités. Or, parmi les trois obstacles à l'étude, c'est le mot mal compris qui influe le plus sur la compréhension (Hubbard, 1996). Cela crée chez les apprenants l'aphasie sensorielle : le malade entend les paroles mais ne les comprend (surdité verbale) ou bien, ne comprend pas ce qu'il lit (cécité verbale ou alexie) (Vergez & Huisman, 1986). De Saussure (cité par Vergez & Huisman, 1986) explique qu'il n'y a qu'un rapport conventionnel et arbitraire des signes linguistiques puisque les mêmes objets sont désignés différemment dans les multiples langues. Ce qui nécessiterait une contextualisation, une traduction des acronymes et connaissances mathématiques, une interdisciplinarité et un enseignement par décloisonnement. Il n'existe pas de dictionnaire de mathématiques permettant une traduction des concepts et des symboles. Cet enseignement conserve le sophisme plutôt qu'une pédagogie de découverte basée sur l'approche par les compétences. Il n'existe non plus des projets d'école pour la prise en compte des difficultés éventuelles des élèves. L'apprentissage des mathématiques chez les élèves demeure comme du psittacisme (du latin psittacus, le perroquet, l'animal qui reproduit les sons sans comprendre le sens) (Lavelle, 1990) (cité par Vergez & Huisman, 1986).

Les enseignant-chercheurs des mathématiques, même s'il y en a qui ont suivi la formation didactique organisée par l'Union Economique et Monétaire Ouest Africaine (UEMOA) en 2016, ceux-ci pensent que les inspecteurs sont plus outillés en didactique. Malgré la formation en approche par les compétences suivies par nos enseignants enquêtés et le soutien des inspecteurs en didactique des mathématiques au cours de leur formation initiale, ceux-ci éprouvent des difficultés dans leurs démarches d'enseignement. Ce qui expliquerait la réforme du gouvernement togolais qui a consisté à une formation des inspecteurs de différentes spécialités en approche par les compétences et à une révision des curricula. Les inspecteurs ont eu, à leur tour, à former (en deux semaines, dans le mois de novembre 2018) les enseignants tenant les classes de 6e pour l'expérimentation.

VI. CONCLUSION

Cette étude permet de fournir aux éducateurs des stratégies permettant d'améliorer la réussite des élèves en mathématiques, de les orienter vers un enseignement des mathématiques qui a du sens pour tous les élèves en situation de classe. Nous avons voulu vérifier l'hypothèse selon laquelle : la réussite abusive des élèves est due à l'enseignement du langage mathématique abstrait selon que ce langage s'applique ou non aux connaissances traductives et contextualisées. Après une enquête, l'analyse des résultats montre que nombreux sont les élèves qui échouent en mathématiques. Ils n'arrivent pas à mettre en valeur ce qu'ils apprennent en mathématique au secondaire. Ils apprennent le langage mathématique sans pouvoir le traduire en concret. Les méthodes utilisées par les enseignants, dans nos écoles, sont en déphasage avec ce que préconise Piaget (1967), la méthode Singapour et celle de Barth (1995). Ce qui suscite toujours des réflexions entre les produits issus de nos écoles et les exigences de la société.

REFERENCES

Avanzini, G. (1977). *L'échec scolaire.* Paris : collection « paidoguide » le Centrion formation.

Barth, B-M. (1995). *L'apprentissage de l'abstraction.* Paris : RETZ.

Bouteyre, E. (2004). *Réussite et résilience scolaire chez l'enfant de migrants.* Paris : Dunod.

DeKetele, J. M.1980). *Observer pour éduquer.* Berne : Peter Lang.

Dewey, J. (1947). *L'école et l'Enfant*. Neuchâtel : Delachaux et Nestlé.

Ehrhard, J., Toraille, R. & Villars, G. (1982). *Psychopédagogie pratique, l'Education scolaire et ses problèmes,* Paris : Librairie.

Gaonac'h, D., & Golder, C. (1995). *Manuel de psychologie pour l'enseignement*, Paris, Hachette.

Gerard, F.M. & Roegier, X. (2010). Curriculum et évaluation : des liens qui ne seront jamais assez forts, in M.P. Alves, & A. Machado. (Dir.). *Évaluation et curriculum*, Bruxelles-Porto : De Boeck (édition en français) et Porto Editor (édition en portugais).

Grange, J. (1998). Pierre Leroux, De l'égalité, précédé de De l'individualisme et du socialisme, préface de Bruno Viard. *Romantisme*, 101, 28, 123-124.

Granger, G.G. (1995). La science et les sciences. *Que sais-je*, 127.

Granger, G.G. (2001). *Science et réalités*. Paris : Odile Jacob.

Hubert, R. (1946). *Traité de pédagogie générale.* Paris: PUF.

Isambert-Jamati, V. (1992). Quelques rappels de l'émergence de l'échec scolaire comme ''problème social'' dans les milieux pédagogiques français. In B. Pirrehumbert (éd.), *L'échec à l'école : échec de l'école*. Lausanne : Delachaux et Niestlé.

Jouvenet, L.– P. (1985). *Echec à l'échec scolaire*. Paris : Privat.

Ministère de l'Education de Singapour (1982). *La méthode de Singapour L'étude internationale TIMSS* (Trends in International Mathematics and Sciences Studies) qui se base sur des tests menés tous les 4 ans auprès des élèves de CM1 et de 4ème de plus de 50 pays. (http://timss.bc.edu).

Pelpel, P. (1986). *Se former pour enseigner.* Paris : Bordas.

Piaget, J. (1967). *La psychologie de l'intelligence*. Paris: Armand Colin.

Roegiers, X. (2000). *Une pédagogie de l'intégration. Compétences et intégration des acquis dans l'enseignement*. Bruxelles : De Boeck.

Steve, B., Mario, R. & Clermont, G. (2005). Interventions pédagogiques efficaces et réussite scolaire des élèves provenant de milieux défavorisés. *Revue Française de pédagogie*, 150, 18 – 19.

Vergez, A. et Huisman, D. (1986). *Nouveau cours de philo.* Paris : Fernand Nathan.

MISE EN PLACE DE TRAVAUX COLLABORATIFS SELON LA DEMARCHE « JIGSAW TEACHING »

HALBERT* Roselyne – MANENS** Marie Catherine - BROUTTELANDE Christophe - FORGEOUX Emmanuelle - LAGRANGE Jean- Baptiste - LE BIHAN Christine - LE FEUVRE Bernard - LEMETAYER Agnès - MALAUSSENA Cathy - MEYRIER Xavier

Résumé - Rendre les élèves plus actifs dans les apprentissages de contenus et de méthodes est une préoccupation chez les professeurs. Les élèves sont réceptifs à de nouvelles méthodes d'enseignement et le groupe Jigsaw de l'IREM de Rennes[1] et oriente ses recherches sur le travail collaboratif dans les classes. Les travaux du groupe Casyopée[2] et le modèle de « jigsaw teaching » développé par Elliot Aronson[3] sont utilisés pour construire des activités visant aussi bien l'apprentissage de notions que des démarches d'investigation.

Mots-clefs : Jigsaw, travail collaboratif, apprentissage, mutualisation, investigation.

Abstract - One of the concerns of teachers is to make students more active when learnings contents and methods. Students are currently receptive to innovative teaching approaches. The Jigsaw group of the IREM of Rennes develops its research activity toward collaborative work in classes. The work of the Casyopee group and the "jigsaw teaching" model developed by Elliot Aronson are used to build classroom situations aiming content learning as well as inquiry-based learning.

Keywords: Jigsaw, collaborative work, learning, sharing, investigation.

I. OBJECTIFS

Nous utilisons la démarche du « jigsaw teaching », pour rendre tous les élèves acteurs. Dans la première étape de ce dispositif, chaque élève est amené à collaborer avec son groupe pour apprendre. Dans la deuxième étape, chaque élève, au sein d'un autre groupe, communique pour restituer ses connaissances. Le groupe réalise alors une nouvelle tâche qui nécessite le réinvestissement des connaissances de chacun.

Nous utilisons ce dispositif complexe de travail en groupe pour mettre en place une notion, pour résoudre une situation problème ou pour élaborer un cours.

II. ORGANISATION D'UN TRAVAIL EN « JIGSAW »

Une séance de travail en « Jigsaw » est organisée en trois étapes.

Etape 1. Le groupe classe est réparti en groupes qui ont un travail spécifique. A la fin de cette étape, chaque élève doit pouvoir communiquer le travail de son groupe. Il est appelé « expert ».

Etape 2. Les différents experts sont répartis dans de nouveaux groupes appelés « groupes d'apprentissage » avec une tâche complexe à réaliser qui exploite les travaux de chacun.

Etape 3. Le professeur organise une synthèse.

En fonction de l'objectif qui est visé dans la deuxième étape, le professeur élabore les fiches de travail de chaque groupe :

* IREM de Rennes – France – roselyne.halbert@ac-rennes.fr
** IREM de Rennes – France – mcmanens@gmail.com

[1] https://irem.univ-rennes1.fr/groupe-jigsaw
[2] https://casyopee.math.univ-paris-diderot.fr/
[3] https://aronson.socialpsychology.org/

- pour la deuxième étape : exposé clair et concis de la situation proposée (objectif final de la séance) avec des consignes qui permettent un travail autonome du groupe ;
- pour la première étape : élaboration de tâches complémentaires et équilibrées pour chaque groupe d'experts. Le professeur peut proposer pour un groupe d'experts une utilisation appropriée des TICE.

III. DES EXPERIMENTATIONS

Nos expérimentations ont concerné des élèves de lycée et collège français (14 – 19 ans). Les documents élèves sont élaborés par les membres du groupe, leur élaboration fait l'objet de nombreux échanges.

Une première expérimentation est réalisée avec un dispositif d'observation des élèves (observateurs extérieurs à la classe, film, enregistrement audio, relevés de production élèves…).

Une première analyse mesure l'adéquation des tâches proposées aux élèves dans la première étape avec l'objectif final. Dans un deuxième temps, nous regardons si, indépendamment de la réalisation par le groupe du but final, chaque élève a amené sa contribution dans le travail de la deuxième étape. Certaines fiches sont modifiées à l'issue de cette expérimentation.

Exemples de situations expérimentées[4] :
- découverte de la notion de vecteur, convexité ...
- modélisation des câbles du Golden Gate Bridge, suite d'intégrales, problèmes de poursuite ...
- trigonométrie, statistiques, logarithme népérien, nombres complexes …

IV. ANALYSE DU DISPOSITIF

L'architecture du dispositif contraint chaque élève à s'impliquer. Les différentes expérimentations nous ont permis de le constater. Toutefois il nous paraît qu'au début de l'étape 2, le groupe se focalise sur la nouvelle tâche parfois sans prendre un temps suffisant de mise en commun des travaux d'experts. Or, dans la première étape, les tâches des élèves sont complémentaires donc la méconnaissance d'un ou plusieurs travaux gène par la suite le groupe dans la réalisation de la deuxième étape. C'est pourquoi, afin de rendre plus efficace la participation de chacun, nous identifions un temps (5 à 10 minutes) de restitution du travail d'expert avant de faire le travail propre à l'étape 2. Pendant ce temps-là, chaque élève prend la parole et a l'attention des autres.

Le dispositif demande de la part du professeur une préparation nécessitant de :
- faire l'analyse a priori des différentes procédures et envisager les différents cadres d'étude ;
- préparer des tâches complémentaires et équilibrées pour l'étape 1 ;
- proposer pour l'étape 2 une tâche qui fédère les travaux des groupes d'experts.

Pendant la synthèse menée par le professeur, nous avons constaté que les élèves sont concernés et participent aux échanges et à la construction de cette synthèse. Tout au long de la séance, leur expérience s'est enrichie du travail des différents groupes (étape 1, temps de restitution, étape 2).

REFERENCES

[4] https://jigsawirem.wixsite.com/jigsaw-mathematiques

Lagrange JB., Halbert R., Le Bihan C., Le Feuvre B., Manens MC., Meyrier X. & Minh TK. (2015) Investigation, communication et synthèse dans un travail mathématique : un dispositif en lycée. *Actes de la conférence EMF,* Alger
Halbert R., Manens MC. (2017) Un jigsaw-teaching en classe de TS pour l'étude de la fonction ln. *Bulletin vert APMEP n° 522*

Groupe de travail 10 (GT10) Analyse des démarches d'enquête et d'investigation

BILAN DU GROUPE DE TRAVAIL 10 – ANALYSE DES DEMARCHES D'ENQUETE ET D'INVESTIGATION

Responsables

MANSOUR[*] Afaf – BURGERMEISTER[**] Pierre-François – OUVRIER-BUFFET[***] Cécile

Correspondant CS

VANDEBROUCK[****] Fabrice

Ce texte rend compte du travail effectué dans le Groupe 10 d'EMF 2018. Il décrit les enjeux de ce travail, les thématiques abordées, les questions restant en suspens et ouvre ainsi des perspectives pour la suite de la recherche quant aux démarches d'enquête et d'investigation. L'intégralité des textes relatifs aux communications présentées dans ce groupe figure dans les actes.

I. PRESENTATION DU GROUPE DE TRAVAIL

Les démarches d'investigation existent depuis longtemps au niveau international : elles représentent une pratique de classe qui est aujourd'hui une institution à elle seule, dont nous pouvons et devons (ré)interroger l'épistémologie. Dans ce groupe de travail, nous utiliserons le sigle générique DEI (Démarches d'Enquêtes et d'Investigations) afin d'englober toute pratique basée sur une activité/démarche scientifique en classe (et ainsi éviter la forte connotation curriculaire véhiculée par l'expression « démarches d'investigations »). Il est bien évident que les travaux conduits dans les cadres de l'IBE (*Inquiry-Based Education*) et l'IBSME (*Inquiry-Based Science and Mathematics Education*) au niveau international entrent dans la thématique du groupe.

Les précédents GT à EMF (Matheron, Morselli, René de Cotret & Schneider, 2012 ; Gandit, Morselli, & Sokona Bekaye, 2015) ont montré la grande variété des termes dans les pratiques et institutions (démarches d'investigation, démarches expérimentales, démarches scientifiques, démarches de recherche), ainsi que la multiplicité des pratiques d'enseignants. Plus particulièrement, à EMF 2015, la question de l'évaluation des processus impliqués dans les démarches d'enquête et d'investigation est ressortie avec une orientation sur l'évaluation formative et ses cadres théoriques, et le manque, en didactique, pour l'analyse des interactions didactiques ont été pointés.

Trois axes ont été proposés pour l'appel à contribution et sont décrits ci-après. Au vu des communications, ces axes n'ont pas pu être explorés et discutés tous de la même façon, nous y reviendrons en conclusion. Toutes les disciplines scientifiques étant concernées par l'ensemble des questions ci-dessous, ce bilan fera également ressortir les aspects propres à l'interdisciplinarité. Il s'agissait donc de trois questionnements :

[*] Université Libanaise – Liban – afafman@hotmail.com
[**] Institut Universitaire de Formation des Enseignants de Genève – Suisse – pierre.burgermeister@edu.ge.ch
[***] Université Paris-Est Créteil & LDAR – France – cecile.ouvrier-buffet@u-pec.fr
[****] Université Paris Diderot & LDAR – France – fvandebrouck@irem.univ-paris-diderot.fr

- **Quelle épistémologie pour les DEI ?**

La science progresse rapidement, nous pouvons faire l'hypothèse que les démarches scientifiques (propres à la recherche en sciences) aussi : quelle diffusion de cette évolution de la science dans les classes (quelle nécessité, quelles modalités, est-ce que cela doit passer par les DEI ou pas, quels fondements épistémologiques) ? Ou encore : faut-il renouveler, réactualiser l'épistémologie (ou les épistémologies) sous-jacente aux DEI ? La science qui s'enseigne doit-elle être « proche » de la science qui se pratique dans la recherche ? Une comparaison entre différentes disciplines scientifiques pourra être ici traitée. La question de la transposition sera également posée.

- **Quels dispositifs, quels lieux pour les DEI ?**

En classe, et hors classe, différents dispositifs existent et peuvent être le lieu de pratiques fondées sur les DEI (Maths.en.Jeans, Hippocampe, Maisons des Sciences, Laboratoire des machines mathématiques de Modène, etc.). Au niveau international, des laboratoires (de mathématiques et de sciences, tels décrits et préconisés par Borel au début du XX^{ème} siècle, et repris par Kahane au début des années 2000) se développent et proposent un lieu spécifique pour le travail scientifique des élèves. Nous proposons d'ouvrir une classification de tels dispositifs et lieux afin de faire ressortir les caractéristiques de ces environnements, mais aussi de discuter de leur nécessité et des modalités qu'ils proposent. Engager une telle discussion s'avère nécessaire à l'heure où l'union européenne incite fortement les chercheurs en éducation à explorer l'éducation scientifique des citoyens en classe et hors classe (Hazelkorn et al., 2015). Les fondements institutionnels et politiques pourront ici être élucidés. Par ailleurs, l'étude de tels dispositifs permettra d'actualiser les résultats des précédents GT à EMF quant aux pratiques d'enseignements et aux cadres théoriques d'analyse sollicités. Un focus sera fait sur l'analyse des interactions didactiques (au niveau de l'enseignant, mais aussi de l'élève).

- **Quels cadres pour l'évaluation des DEI ?**

Ce point est ressorti dans le dernier EMF. Il s'agit de développer toute forme d'évaluation des démarches d'enquête et d'investigation par rapport aux apprentissages réalisés par les élèves. Cela pose bien sûr la question de cadres théoriques propres à l'évaluation (formative et sommative), mais aussi la question de l'articulation de tels cadres avec ceux plus spécifiques à la didactique.

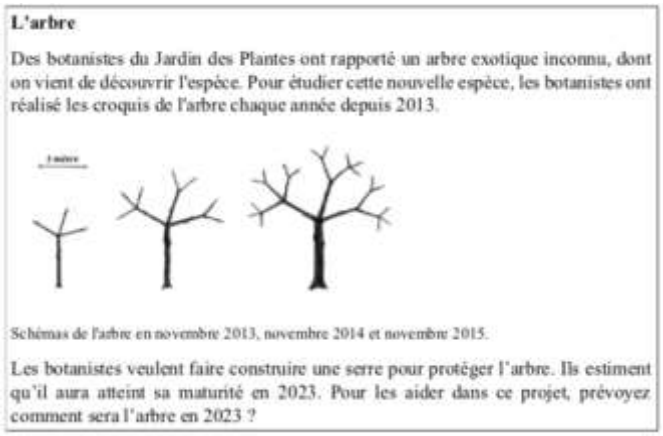
II. ORGANISATION ET THEMATIQUES ABORDEES

1. Organisation des séances

Compte tenu du temps alloué au groupe de travail (quatre séances de deux heures et une séance d'une heure et demie) et du nombre de contributions, les participants ont apprécié de pouvoir échanger sur les différentes communications.

La première séance avait pour objectifs de présenter les enjeux du groupe de travail d'une part (rappelés dans le paragraphe I.1 ci-dessus) et d'identifier des questionnements des participants. Une mise en situation a été proposée par les organisateurs pour lancer la discussion à partir des deux énoncés suivants (l'idée étant d'interroger l'activité de l'élève et la gestion par l'enseignant) :

Situation 1



(Situation Extraite de Yvain (2018))

Situation 2 - Le jeu de la course à *n* (variante de la course à 20 de Brousseau (1998)) : deux adversaires disent un nombre tour à tout. Il s'agit de réussir à dire *n* le premier. Le premier qui joue a le droit de dire 1, 2 ..., *p*. On ne peut dire un nombre que s'il s'obtient en ajoutant 1, ou 2 , ou *p* au nombre dit par l'adversaire.

1) Jeux « classiques » : (20, 2) ; (27, 4) ; (24, 3) ; (5929, 2)
2) Jeux « moins classiques » : le pas (*p*) peut être de la forme « on ajoute 1, ou 3 ou 4 »

Trois questions ont été posées sur ces deux situations :

- Ces situations génèrent-elles des DEI ?
- Quels concepts visent-elles ?
- Quel(s) type(s) d'implémentation en classe pourrait-on imaginer ?

La deuxième séance avait pour but d'étudier les contextes favorables (ou non) aux DEI et les mises en œuvre possibles en classe. Elle était fondée sur deux présentations et discussions (Lackova & Dorier ; Maheux). Les troisième et quatrième séances ont permis de poursuivre la discussion sur la mise en œuvre des DEI en classe (à partir des présentations de : Proulx ; Aldon et al. ; Tufféry-Rochdi) et d'interroger les points suivants : Quels types de situations permettent de favoriser une DEI ? Quels invariants peut-on identifier ? Mais aussi quels manques éventuels ? Quelle est la place et quels sont les rôles de l'enseignant ? Quelles évaluations seraient envisageables et pertinentes ? Quelles grilles d'analyse peut-on concevoir (pour l'enseignant, le chercheur, le formateur) ? La quatrième séance a également permis de revenir sur les définitions de DEI (notamment avec les présentations de : Manuel & Savard ; Ouvrier-Buffet). La dernière séance l'a prolongée (Lai & Polo) et un bilan sur la discussion depuis le début du colloque a été réalisé.

2. Participants et thématiques abordées

Huit contributions de différents pays (trois pour le Canada, une pour l'Italie, une pour la Suisse et trois pour la France) ont généré de nouveaux questionnements et permis de traiter des éléments suivants.

Les objets de recherche (recherche fondamentale et/ou appliquée) eux-mêmes étaient spécifiques à chaque article : de faire|mathématique à des situations de recherche ; les démarches d'enquête et d'investigation ; les dispositifs (interdisciplinaires ou non) ; l'évolution des pratiques savantes.

Les contextes des recherches et expérimentations réalisés concernaient la classe, avec des tâches ordinaires (temps court) ou des situations sur un temps long ou même des projets. Le pilotage des situations était opéré généralement par un chercheur ou un enseignant « préparé».

Les questionnements concernant les élèves portaient sur les apprentissages en jeu dans les DEI (savoirs mathématiques, compétences transversales, savoir-être).

L'aspect enseignant a été discuté selon différentes dimensions : quelles sont les croyances et convictions par rapport aux DEI ? Comment anticiper et construire des moments d'institutionnalisation ? Quelles évaluations (standard / non-standard) des connaissances et compétences mobilisées dans les DEI concevoir ? avec quelles fonctions ? Quels usages sont identifiés par les enseignants de situations générant des DEI ?

La dimension institutionnelle était également présente, notamment quant aux conditions et contraintes portant sur les DEI et les effets d'un enseignement par DEI ou par une recherche/activité mathématique. La question de l'élaboration de telles situations mobilisant une DEI et de leur diffusion a été discutée.

III. CONCLUSIONS DES DISCUSSIONS ET PERSPECTIVES

Le choix d'utiliser le sigle générique DEI (Démarches d'Enquêtes et d'Investigations) afin d'englober toute pratique basée sur une activité/démarche scientifique en classe pour ce groupe de travail a conduit à une grande variété d'interprétation de « DEI », de l'*Inquiry-Based Education* (Lackova & Dorier ; Manuel & Savard) à certains types de problèmes pour la classe (par exemple, les Situations Didactique de Recherche de Problème (Aldon et al.), des approches d'enseignement par les problèmes avec une vision pluraliste de l'éducation (Proulx, Maheux)) ou de démarche en classe (par exemple la démarche expérimentale (Lai & Polo) et l'interdisciplinarité). On s'est donc éloigné du contexte institutionnel de l'*Inquiry-Based Education* pour interroger les situations ayant suffisamment de potentiels pour générer une activité mathématique en classe d'une part (Maheux ; Proulx), et la viabilité de la démarche d'investigation en classe (Lackova & Dorier) d'autre part. La gestion de classe est alors fondamentale, quel que soit le potentiel de la situation initiale (ce que montre Proulx par exemple). Ici, ce n'est pas seulement l'activité de l'élève qui est à étudier, mais aussi l'implémentation en classe (Manuel & Savard apportent des outils d'analyse dans ce sens), et donc la gestion par l'enseignant et la co-construction de connaissances enseignant-élèves. Se pose ainsi la question de l'évaluation des apprentissages relatifs à une activité mathématique vécue en classe et donc de l'évaluation des dispositifs eux-mêmes qui ont généré une telle activité (Aldon et al.). La question « Comment observer et analyser une DEI en classe » lui est liée (Tufféry-Rochdi). La discussion a permis de souligner la difficulté de concevoir des évaluations « standards » pour étudier l'activité mathématique des élèves et la nécessité de prendre en considération un temps long (long du point de vue du vécu des élèves mais aussi du point de vue de l'évaluation elle-même). Il s'agit alors de tenter de caractériser les effets à long terme sur les pratiques des élèves.

Par ailleurs, il serait utile de déterminer les conceptions des enseignants, des formateurs et des didacticiens sur les DEI. En effet, on peut faire l'hypothèse que les DEI évoluent dans les classes en fonction des évolutions curriculaires, des obstacles rencontrés par les enseignants,

des ressources utilisées par les enseignants, de la formation initiale et continue, etc. Caractériser les conceptions initiales des enseignants, des formateurs serait un point d'appui pour le développement de ressources de différents types (qui restent à définir) pour les enseignants pour la définition de modes de diffusion à grande échelle appropriés.

Un tel travail nécessite de définir plus précisément les référents épistémologiques qui pilotent les conceptions des enseignants, des formateurs, mais aussi des didacticiens, notamment lorsque l'on vise l'interdisciplinarité (Ouvrier-Buffet). En effet, de nouveaux domaines scientifiques apparaissent dans la science qui se « fait » aujourd'hui, générant non seulement de nouveaux types de problèmes, et de nouveaux concepts, mais aussi de nouveaux modes de raisonnements ou de modélisations. L'intégration de ces nouvelles connaissances à la science « qui s'enseigne » pose de multiples questions en lien avec la transposition didactique.

REFERENCES

Brousseau G. (1998). Théorie des situations didactiques. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Gandit M., Morselli F., Sokona Bekaye S. (2015) Rôles et responsabilités des professeurs et des élèves dans les démarches d'investigation et dans la résolution de problèmes. Compte-rendu du groupe de travail n°10. In L. Theis (Ed), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage (actes du colloque EMF 2015)* (pp. 829-836). Université d'Alger.

Hazelkorn E., Ryan C., Beernaert Y., Constantinou C. P., Deca L., Grangeat M., Karikorpi M., Lazoudis A., Pinto Casulleras R., Welzel-Breuer M. (2015) *Science Education for Responsible Citizenship*. Report to the European Commission of the expert group on science education. Repéré à : http://ec.europa.eu/research/swafs/pdf/pub_science_education/KI- NA-26-893-EN-N.pdf

Matheron Y., Morselli F., René de Cotret S., Schneider M. (2012) La démarche d'investigation dans la classe de mathématiques, fondements et méthodes. Compte- rendu du groupe de travail n°10. In J.-L. Dorier & S. Coutat (Eds), *Enseignement des mathématiques et contrat social – Enjeux et défis pour le 21ème siècle (actes du colloque EMF 2012)* (pp. 1259-1281). Université de Genève.

Yvain S. (2018) *Etude de la transposition à la classe de pratiques de chercheurs en modélisation mathématique, dans les sciences du vivant. Analyse des conditions de la dévolution de la mathématisation horizontale aux élèves*. Université de Montpellier.

ANNEXE

LISTE DES TEXTES DU GT 10 PAR ORDRE ALPHABETIQUE DU PREMIER AUTEUR

ALDON, G., FRONT, M., & GARDES, M.-L.

Analyse des effets d'un enseignement fondé sur la recherche de problèmes

LACKOVA, J. & DORIER, J.-L.

La démarche d'investigation dans le cadre du Baccalauréat International

LAI, S. & POLO, M.

DEI et éducation mathématique : nécessité et viabilité dans les pratiques de classe ordinaires

MAHEUX J.-F.

Invitation à la pluralité du « faire mathématique »

MANUEL, D. & SAVARD, A.

Co-construire des connaissances mathématiques entre l'enseignant et les élèves : comment piloter l'approche par une démarche d'enquête et d'investigation ?

OUVRIER-BUFFET, C.

Vers une épistémologie commune pour l'étude didactique des démarches d'enquête et d'investigation en mathématiques et en physique ?

PROULX, J.

Investigation mathématique à travers un enseignement par résolution de problèmes : pistes initiales

TUFFERY-ROCHDI, C.

Proposition d'une grille d'évaluation des pratiques enseignantes lors de séances fondées sur des démarches d'investigation en mathématiques au primaire

ANALYSE DES EFFETS D'UN ENSEIGNEMENT FONDE SUR LA RECHERCHE DE PROBLEMES

ALDON[1*] Gilles – FRONT[2**] Mathias – GARDES[3***] Marie-Line

Résumé – Nos précédents travaux ont mis en évidence la possibilité de mettre en œuvre des situations de recherche en classe et de proposer ainsi une activité mathématique développant le lien entre faire des mathématiques et apprendre des mathématiques. Nous présentons maintenant un projet de méthode visant à comparer des enseignements fondés sur la recherche de problème et des enseignements plus traditionnels.

Mots-clefs : Problème de recherche, progression annuelle, évaluation d'un enseignement, dimension expérimentale

Abstract – Our previous work has pointed out the possibility to implement research situations in class and propose a mathematical activity developing the link between to do mathematics and to learn mathematics. Now, we present a method project to compare problem-based learning and more traditional learning.

Keywords: research problems, progression of teaching, evaluate a teaching, experimental approach

I. INTRODUCTION

Le travail présenté dans cette communication a une double origine : d'une part la volonté de chercheurs de fonder théoriquement l'enseignement des mathématiques par les problèmes et d'autre part la nécessité pour des enseignants de répondre aux volontés institutionnelles de développer chez les élèves des compétences générales transférables à des situations diverses. En d'autres termes, comment tisser les liens entre faire des mathématiques qui relève du métier des mathématiciens et apprendre des mathématiques qui relève de l'apprentissage scolaire d'une discipline. Comment ainsi tisser des liens entre ces deux mondes pour que, finalement, les élèves et les étudiants fassent l'expérience dans leur apprentissage d'une rencontre avec les mathématiques dans leur dimension la plus créative ?

« Redonner sens » aux mathématiques et aux sciences, au fait de les enseigner (d'un côté) et de les apprendre (de l'autre), telle est l'une des formulations les plus usuelles du problème d'ensemble auquel l'état de la société et des mathématiques nous confronte aujourd'hui (Chevallard, 2004, p.11).

Les problèmes sont au cœur de la création des mathématiques, au cœur de la construction de savoirs nouveaux. Nous avons donc choisi de revenir dans un premier temps sur ce que peut être une situation didactique ancrée sur l'activité de recherche de problème et d'identifier quelles peuvent être les potentialités de telles situations en termes d'acquisition de compétences et d'apprentissage de savoirs. Dans cette perspective, les SDRP peuvent être considérées comme relevant des « démarches d'enquête et d'investigation », thème central de ce groupe : il s'agit bien, pour les élèves, de mener une investigation sur le problème proposé, par la mise en œuvre d'une démarche (Gardes, 2018), le plus souvent de type expérimental afin de développer à la fois des connaissances et des compétences mathématiques.

Ce point sera l'objet de la première partie de cet article. Mais il s'agit ensuite de voir comment la mise en œuvre de telles situations peut être rendue compatible avec des

1 * ENS de Lyon, S2HEP, Université de Lyon – France – gilles.aldon@ens-lyon.fr

2 ** UCBL Lyon 1, S2HEP, Université de Lyon – France – mathias.front@univ-lyon1.fr

3 *** UCBL Lyon 1, ISCMJ, Université de Lyon – France – marie-line.gardes@univ-lyon1.fr

organisations imposées par un contexte institutionnel. En particulier on peut se poser la question de savoir s'il est envisageable de construire des progressions de classe en appui sur des problèmes de mathématiques permettant de donner du sens à la construction mathématique elle-même. Après avoir proposé une piste dans la deuxième partie, nous rendrons compte dans la troisième partie d'une première expérimentation qui doit permettre de poser les bases d'une étude sur une nouvelle organisation didactique.

II. LES SITUATIONS DIDACTIQUES DE RECHERCHE DE PROBLEME

Le cadre de référence que nous utilisons pour penser et produire des dispositifs permettant aux élèves d'apprendre est le cadre des situations didactiques de Brousseau (1998). Fondamentalement, nous pensons donc nos situations comme :

- des situations didactiques, c'est-à-dire des situations où

> le maître cherche à faire dévolution à l'élève d'une situation adidactique qui provoque chez lui l'interaction la plus indépendante et la plus féconde possible. [...] L'enseignant est donc impliqué dans un jeu avec le système des interactions de l'élève avec les problèmes qu'il lui pose. (Brousseau, 1998, p. 60).

- des situations d'apprentissage, c'est-à-dire des situations où l'élève fait fonctionner ses connaissances et où la réponse initiale que l'élève envisage à la question posée

> doit seulement permettre de mettre en œuvre une stratégie de base à l'aide de ses connaissances anciennes ; mais très vite, cette stratégie devrait se révéler suffisamment inefficace pour que l'élève soit obligé de faire des accommodations, c'est-à-dire des modifications de son système de connaissances, pour répondre à la situation proposée. (Brousseau, 1998, p. 300).

La seule solution pour produire les interactions évoquées ici est de poser un problème à l'élève et de lui permettre de s'y confronter. Il est à noter que ceci sous-entend effectivement que le projet commun de l'enseignant et de l'élève est, avant tout, l'engagement dans la résolution du problème proposé et l'élaboration de résultats au moins partiels. Des situations didactiques de recherche de problèmes peuvent être consultées sur le site DREAM : http://dreamaths.univ-lyon1.fr/. Pour aller plus loin nous sommes ensuite amenés à préciser ce que nous attendons par interactions dans l'activité de l'élève confronté à un problème et ceci va caractériser le type de problème que nous considérons. Nous concevons ces interactions dans le cadre du mode empirique de constitution des nouveaux objets mathématiques qui prévaut dans les phases de résolution de problème que nous considérons. Ce mode empirique se traduit dans l'activité de l'élève par des allers-retours entre les objets (au sens large) naturalisés par l'élève, c'est à dire suffisamment familiers pour permettre les validations, et l'(les) objet(s) en cours d'élaboration. Ces allers-retours s'accompagnent de conjectures, vérifications, argumentations, autant d'éléments constitutifs de l'activité mathématique. Autrement dit les problèmes que nous proposons doivent permettre d'observer une dimension expérimentale dans l'activité de recherche de l'élève. Confrontés à des problèmes robustes mais d'appropriation aisée les élèves vont produire des résultats qui vont faire l'objet de débats et de validations. L'exploration du nouvel objet mathématique va ainsi de pair avec la possibilité d'établir de nouvelles connaissances liées à cet objet. Il est alors possible et nécessaire pour l'enseignant de mettre en place une phase d'institutionnalisation des savoirs.

Les temps de présentation des enjeux de l'activité, de familiarisation avec le problème et de dévolution à l'élève par l'enseignant, de recherche individuelle puis collective, de débat, de validation et d'institutionnalisation sont autant de temps caractéristiques de ce que nous appellerons une Situation Didactique de Recherche de Problème (SDRP).

L'équipe DREAM (Aldon et al., 2010) a construit et soumis à l'expérimentation en classe des situations dont les potentialités en termes d'engagement dans une activité à forte dimension expérimentale, d'émergences de conjectures, de résultats partiels propices aux débats puis à l'institutionnalisation sont avérées. Les travaux de Front (2015) et Gardes (2013) mettent en évidence dans ce type de situation des émergences de connaissances mais également de « gestes » caractéristiques de l'activité du chercheur. Reste à savoir comment la mise en œuvre de telles situations peut rencontrer les pratiques enseignantes bordées par les recommandations institutionnelles.

III. SITUATIONS DIDACTIQUES DE RECHERCHE DE PROBLEME ET PROGRESSION

Les programmes français actuels de mathématiques à l'école et au collège présentent les attendus des acquisitions des élèves à partir de six grandes compétences qui sont au cœur de l'activité mathématique : « La mise en œuvre du programme doit permettre de développer les six compétences majeures de l'activité mathématique : chercher, modéliser, représenter, raisonner, calculer, communiquer. » (MEN, 2015, p. 367).

Mais par ailleurs, les connaissances à acquérir restent classées dans des rubriques reposant sur les branches des mathématiques, « nombres et calculs », « Organisation et gestion de données, fonction », « grandeurs et mesure », « espace et géométrie » et « algorithmique et programmation ». Les questions qui se posent alors très naturellement relèvent de l'articulation de cette approche par compétences et de l'approche à partir des connaissances.

La question de l'utilisation dans la classe des situations didactiques de recherche de problème conduit nécessairement à se poser la question de l'articulation de ces compétences et de ces connaissances à acquérir au sein d'une progression. Est-il ainsi envisageable de construire une telle progression de classe (ou de cycle dans les nouveaux programmes français) en détaillant l'année non plus sur des connaissances, nécessairement découpées et sans liens évidents les unes avec les autres, mais plutôt en articulant la progression sur des problèmes de mathématiques permettant de donner du sens à la construction mathématique elle-même. Les SDRP ne visent pas une connaissance précise et en ce sens se démarquent des situations fondamentales de la TSD mais cependant, les concepts mathématiques repérés comme potentiellement constitutifs de la situation permettent de construire des objectifs d'enseignement s'appuyant sur les objets en jeu et permettant d'en créer de nouveaux.

L'hypothèse que nous voulons mettre à l'épreuve de l'analyse et des observations est que les SDRP sont une réponse possible pour organiser la progression en tenant compte de ces deux aspects fondamentaux proposés par les programmes de mathématiques. D'une façon plus générale, les questions qui sont mises à l'épreuve concernent les apprentissages potentiels de savoirs et de savoir-faire qui peuvent être institutionnalisés dans la classe de mathématiques : qu'est-ce qui dans les curricula peut être atteint à travers la mise en œuvre de SDRP ? Qu'est ce qui ne pourra pas être travaillé et devra donc faire l'objet d'un enseignement spécifique ?

La proposition générale de construction d'une progression sur les SDRP s'appuie sur une analyse *a priori* fine des potentialités de chacune des situations. Les savoirs, méthodes et notions utilisables dans une situation particulière constituent le fondement de l'organisation de l'enseignement. Dans chaque SDRP, les analyses tout d'abord mathématiques puis les observations montrent, de façon robuste, que des notions vont être convoquées dans la recherche de la solution. Dans une situation adidactique, les élèves confrontés à la SDRP investissent des concepts mathématiques, les réorganisent et les actualisent dans le but de

résoudre le problème posé. Le contrat didactique fait que la responsabilité de l'enseignement revient au professeur qui doit alors attraper toutes les notions, connaissances, savoir-faire qui sont à l'œuvre dans la situation particulière de sa classe. C'est alors sur ces notions mises en œuvre effectivement que le professeur dans une situation d'apprentissage (en référence à la structuration des milieux de Margolinas (2004)) dans une position de professeur-observateur peut aménager la suite de son enseignement. A partir de ces observations, l'articulation des savoirs et des savoir-faire amène à la structuration de la leçon et des institutionnalisations qui pourront émerger de la SDRP. On voit bien alors la nécessaire analyse *a priori* des SDRP qui permettra cette organisation *a posteriori*.

La progression est alors construite sur les potentiels des SDRP et complétée par tous les apprentissages nécessaires pour la bonne maîtrise des concepts mathématiques du programme.

1. Organisation d'une séquence

Les séquences construites sur une SDRP ont une organisation reposant sur une structure identique :

	Rôle du professeur	Rôle de l'élève
• choix du problème suivant les analyses *a priori*	Les SDRP embarquent des thèmes généraux en lien avec les programmes. Le professeur choisit le problème en fonction de ces thèmes.	
• séances de recherche du problème	Le professeur organise les temps de recherche, de mise en commun. Pendant les temps de recherche il est observateur du travail des élèves.	Dans une situation adidactique l'élève confronte ses connaissances à la situation.
• organisation des connaissances techniques nécessaires concernant les connaissances effectivement mises en œuvre dans la recherche	Le professeur organise des temps spécifiques portant sur les techniques nécessaires pour affermir les connaissances rencontrées, lors de rituels ou de temps dédiés.	L'élève fait le lien entre les techniques entraînées et les connaissances mises en œuvre dans la recherche.
• Institutionnalisation et traces écrites	Le professeur institutionnalise les connaissances rencontrées et mises en œuvre par les élèves. Les traces écrites sont construites sur ces institutionnalisations.	L'élève organise son savoir à partir de l'institutionnalisation dans une perspective d'auto-évaluation.
• Entraînement et décontextualisation	Le professeur propose des situations d'exercice des connaissances dans de nouveaux contextes dans une perspective d'évaluation formative. Ces situations que l'on a appelées des problèmes de transfert sont plus spécifiquement ciblées sur une connaissance particulière.	L'élève confronte son auto-évaluation avec ses performances sur les notions étudiées.

Figure 1 *– Structure de l'organisation d'une séquence*

2. *Organisation de l'année*

Cette organisation est construite à partir des analyses des SDRP, comme le montre la figure 2 qui correspond à une progression entre les classes de 4ème et de seconde. Les connaissances « fondamentales », en ce sens qu'elles constituent les objectifs d'apprentissage des niveaux considérés, sont mises en lien avec des situations didactiques de recherche de problèmes. Ainsi, proposer une SDRP assure de pouvoir institutionnaliser des connaissances présentes dans les programmes, même si les connaissances rencontrées dépendront de ce que les élèves auront exploré et des mathématiques qu'ils auront rencontrées.

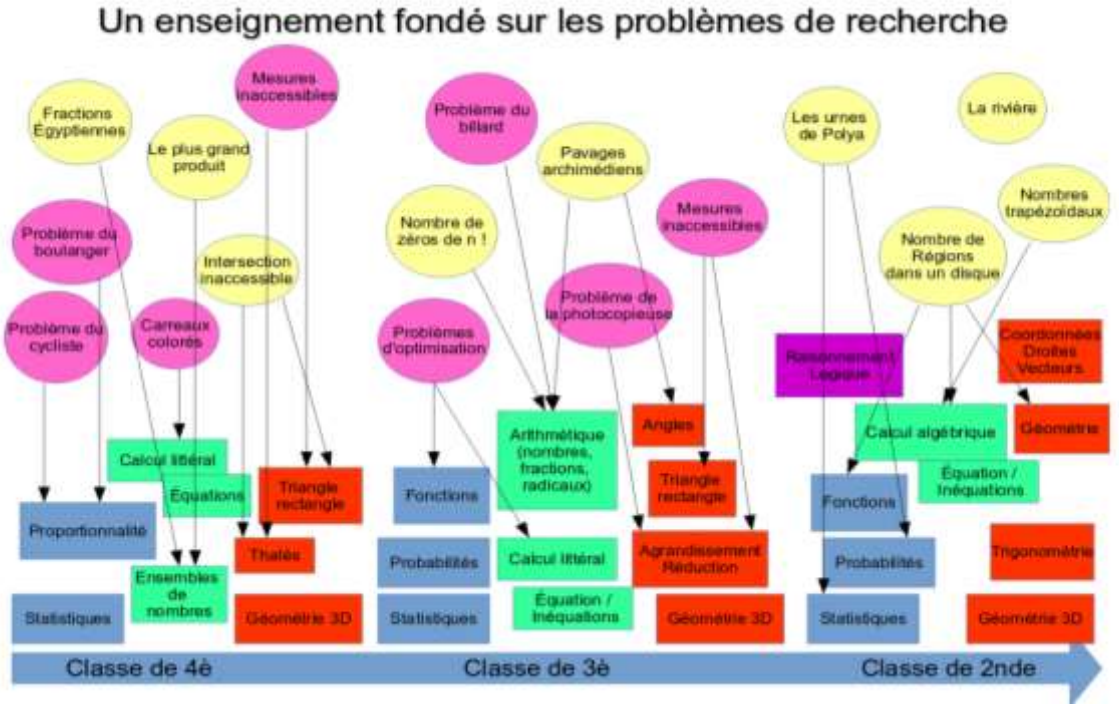


Figure 2 *- Mise en relation des problèmes et des connaissances « fondamentales » à acquérir dans le cycle 4*

IV. UN PREMIER REGARD CRITIQUE SUR LE DISPOSITIF

En 2017, après trois années de mise en place, par un enseignant de notre équipe de recherche, d'une progression fondée sur la recherche de problèmes en classe de troisième, nous avons mené une première expérimentation pour étudier certains effets du dispositif d'enseignement sur les apprentissages des élèves. Nous voulions étayer l'hypothèse suivante : le travail mathématique engagé dans une progression fondée sur la résolution de problèmes permet aux élèves, non seulement de construire des connaissances et des compétences en résolution de problème, mais également de développer un bagage technique. Cette question est initialement apparue dans notre travail suite à des interrogations des professeurs expérimentant les situations didactiques de recherche de problèmes. Ces interrogations relèvent d'une préoccupation professionnelle dans le contexte institutionnel de l'école et de son objectif de préparer les élèves à une poursuite d'études et de les évaluer sur des connaissances dans les évaluations certificatives de fin d'étude. Mais cette hypothèse est aussi liée au fondement épistémologique de notre travail : les problèmes sont en mathématiques le lieu de création de connaissances nouvelles qui se construisent sur les connaissances naturalisées et sur la mise à l'épreuve de ces connaissances dans des domaines de validité aux bornes des domaines habituellement validés. C'est ainsi une traduction didactique des fondements épistémologiques de notre travail qui nous conduit à cette hypothèse de travail. Sa

validation nous amènerait à mieux préciser la portée didactique des expérimentations en cours.

1. A la recherche d'une méthodologie

La première approche a consisté en la comparaison des connaissances et compétences mathématiques - d'un point de vue technique et d'un point de vue résolution de problème - d'élèves de troisième. Pour cela, nous avons construit une évaluation pour la classe comportant trois exercices de nature différente (cf. annexe). Le premier, intitulé *Un peu de technique*, avait pour objectif d'évaluer des connaissances techniques des élèves telles que trouver l'image ou l'antécédent d'un nombre par une fonction (cadre numérique et cadre algébrique) ; résoudre une équation du premier degré ou encore déterminer un pourcentage de réduction après deux réductions successives. Ces connaissances sont des attendus de fin de cycle 4 (c'est-à-dire de la fin du collège) et sont systématiquement évaluées au Diplôme National du Brevet (DNB). Le second exercice proposé, intitulé *Le plus grand produit*, est une adaptation d'un problème de recherche proposé par notre équipe (cf. dreamaths.univ-lyon1.fr) où il s'agit de déterminer parmi des sommes, celle dont le produit des termes est maximum. L'adaptation que nous avons faite pour cette première étude était nécessaire pour rendre accessible, dans le cadre d'une recherche individuelle courte, ce problème de recherche. En effet, l'énoncé initial est formulé dans le cadre d'une situation de recherche en groupe, avec échanges entre les élèves et sur un temps plus long. L'objectif de cet exercice est d'évaluer les connaissances et compétences des élèves lors d'une résolution d'un problème de recherche. Enfin, le troisième exercice, *Les pommiers*, est un problème issu des évaluations internationales PISA. L'objectif était double : d'une part évaluer les connaissances et compétences des élèves en résolution de problème mais avec un problème qui ne soit pas « de recherche », et d'autre part avoir un élément de comparaison avec des évaluations internationales.

Cette première étude a eu lieu en juin 2017 dans un collège de la région lyonnaise, auprès de six classes de troisième, soit 157 élèves et 3 enseignants de mathématiques. Chaque enseignant avait deux classes de troisième et tous étaient d'accord pour traiter en parallèle les mêmes thèmes mathématiques du programme de troisième. Un des enseignants, travaillant dans notre équipe de recherche, suivait une progression construite sur les problèmes dans deux de ces classes. Chaque évaluation a été passée en classe sous la surveillance de l'enseignant de mathématique de la classe. Les élèves disposaient de cinquante minutes. Les trois exercices ont été présentés sur trois feuilles séparées pour ne pas induire un ordre de traitement. Il était conseillé aux élèves de ne pas passer plus de 15 minutes sur chaque exercice. Les évaluations ont ensuite été corrigées par les membres de notre équipe de recherche, soit cinq personnes. Nous avions au préalable défini un barème de notation pour chaque exercice pour identifier la justesse des réponses d'une part et l'engagement des élèves dans une démarche de recherche d'autre part.

2. Résultats de cette première étude

Nous présentons ci-dessous la réussite des élèves des six classes de troisième à chaque exercice (cf. figure 3). Précisons à nouveau que la « réussite » à un exercice comprend la prise en compte de la justesse du résultat et de l'engagement dans une démarche de recherche de solutions. En ce qui concerne l'exercice 1 – exercice type DNB – la moyenne du groupe est proche de 50%. L'exercice 2 – exercice type problème de recherche – est nettement moins bien réussi, la moyenne étant à 22%. L'exercice 3 – exercice extrait de PISA – est celui qui est le mieux réussi par ces élèves, avec une moyenne à près de 58%.

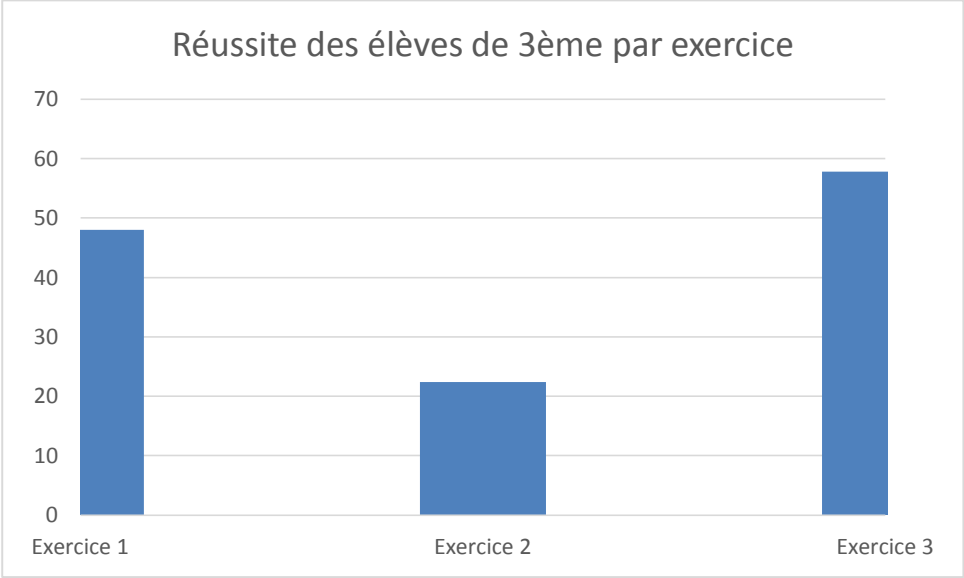


Figure 3 *– Diagramme des réussites des élèves de troisième par exercice.*

Il apparait donc nettement que l'exercice 2 est l'exercice le moins bien réussi. Après des échanges entre élèves et enseignants à l'issue de cette évaluation, il s'avère que tous les élèves ont été surpris par la présence d'un exercice type problème de recherche dans une évaluation. Mais cette pré-expérimentation nous a permis de cerner d'autres biais dans lesquels une telle étude comparative pourrait nous conduire. En effet, la comparaison de classes ne peut s'appuyer uniquement sur les résultats d'élèves à des tests en temps limités. D'une part, les profils de classe doivent être préalablement établis pour pouvoir comparer sérieusement des résultats. D'autre part, la nature même du test est à considérer. En effet, en interrogeant les élèves, il est apparu que le sujet proposé qui n'était pas habituel dans une évaluation, a empêché les élèves à se mettre dans une position de recherche. Le contrat didactique portant sur les savoirs « évaluables » doit être au préalable établi par des mises en situation d'évaluation variées permettant aux élèves de savoir se positionner vis-à-vis des énoncés proposés. Ici, le changement de contexte (recherche problème en classe versus évaluation) ne semble pas avoir permis aux élèves d'identifier la nature de l'exercice et donc de mettre en œuvre les éventuelles compétences de recherche de problèmes qui ont pu être construites au cours de l'année. De la même façon, les moments de l'évaluation des élèves devront être pensés pour que cette évaluation puisse être considérée comme une évaluation en cours d'apprentissage et non pas comme une situation en marge de la progression ; en particulier, la date tardive de notre intervention auprès des élèves a discrédité la portée qu'ils pouvaient lui attribuer. Ces premiers résultats nous amènent cependant à poursuivre cette recherche sur les effets d'un enseignement fondé sur la résolution de problèmes et en particulier sur le développement d'une méthodologie qui permettrait de comparer des classes selon la nature de l'enseignement dispensé.

V. CONCLUSION

Nous avons présenté dans cet article les situations didactiques de recherche de problèmes dans une perspective d'une nouvelle organisation didactique de la classe de mathématiques permettant de réconcilier les approches des programmes en partant des connaissances et des compétences. Les premières études nous permettent d'émettre des hypothèses sur le bien-fondé de cette approche qui devront encore être vérifiées par une évaluation du dispositif avec une méthodologie comparative en construction. Cette méthodologie nécessite un ensemble de

données suffisantes pour être représentatives. C'est pourquoi le travail en cours nous conduit à élargir les expérimentations dans un « deuxième cercle » de professeurs qui ont choisi d'expérimenter dans leurs classes cette nouvelle approche. Nous disposerons alors d'un panel suffisamment conséquent pour développer une méthodologie quantitative, basée sur la comparaison de classes selon la nature de l'enseignement dispensé, pour obtenir des conclusions fiables sur des effets d'un enseignement fondé sur la résolution de problèmes.

REFERENCES

Aldon G., Cahuet P.-Y., Durand-Guerrier V., Front M., Krieger D., Mizony M., & Tardy C. (2010) *Expérimenter des problèmes de recherche innovants en mathématiques à l'école*. Cédérom INRP.

Brousseau G. (1998) *Théorie des Situations Didactiques*. La Pensée Sauvage.

Chevallard Y. (2004) La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire : transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire. In *Actes de la 3ème Université d'été Animath*, Saint-Flour (Cantal), 22-27 août 2004, http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/La_place_des_mathematiques_vivantes_au_secondaire.pdf (consulté le 10 décembre 2017)

Front M. (2015) *Émergence et évolution des objets mathématiques en Situation Didactique de Recherche de Problème : le cas des pavages archimédiens du plan*. Thèse de doctorat, l'Université de Lyon.

Gardes M.-L. (2013) *Étude de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants, engagés dans la recherche d'un problème non résolu en théorie des nombres*. Thèse de doctorat, Université de Lyon.

Gardes M.-L. (2018) Démarches d'investigation et recherche de problèmes. In Aldon, G. (Ed.), *Le rallye mathématique dans la classe : un jeu très sérieux* (p. 73-96). Canopée-IREM de Lyon.

Margolinas C. (2004) *Points de vue de l'élève et du professeur. Essai de développement de la théorie des situations didactiques* (Habilitation à diriger des recherches, Université de Provence-Aix-Marseille I, France).

MEN (2015) *Bulletin officiel spécial*, n°11, 26 novembre 2015.

ANNEXE

Exercice 1 - Un peu de technique. *Les questions (1), (2) et (3) sont indépendantes.*

1. On considère deux fonctions *f* et g.
    1. Voici l'expression algébrique de *f* : $f(x) = 3x - 5$
    2. Voici un tableau de valeur de g :

x	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**
g(x)	5	2	1	2	5

    1. Quelle est l'image de 7 par la fonction *f* ?
    2. Quel(s) est(sont) le(s) antécédent(s) de -2 par la fonction *f* ?
    3. Quelle est l'image de 1 par la fonction g ?
    4. A partir du tableau de valeurs précédent, peux-tu dire quel(s) est(sont) le(s) antécédent(s) de 2 par la fonction g ?
2. Résoudre l'équation suivante : $5(x - 3) = 4 - (x + 2)$
3. Pendant les soldes, un magasin d'informatique propose d'abord une première réduction de 30% sur l'ensemble de ses produits puis une seconde réduction de 15 % sur l'ensemble des prix déjà soldés. Quel serait le pourcentage d'une réduction unique équivalente aux deux réductions successives ?

Exercice 2 - Le plus grand produit.

Le nombre 5 peut se décomposer de plusieurs façons comme la somme d'entiers. Par exemple :

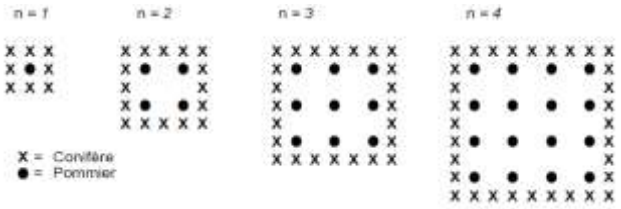
$$5 = 4 + 1 \text{ ou } 5 = 1 + 1 + 1 + 2$$

1. Pour la première ($5 = 4 + 1$), le produit des termes est $4 \times 1 = 4$
2. Pour la seconde ($5 = 1 + 1 + 1 + 2$), le produit des termes est $1 \times 1 \times 1 \times 2 = 2$

Parmi toutes les sommes dont le résultat est 5, trouvez la (ou les) décomposition(s) dont le produit des termes est le plus grand. Et si on recommence avec un autre nombre (différent de 5), quelle est la décomposition qui donnerait le plus grand produit ? Comment trouver cette décomposition ?

Exercice 3 - Les pommiers.

Un fermier plante des pommiers en carré. Afin de protéger ces arbres contre le vent, il plante des conifères tout autour du verger. Vous pouvez voir ci-dessous un schéma présentant cette situation, avec la disposition des



pommiers et des conifères pour un nombre (n) de rangées de pommiers :

Question 1 :

Complétez le tableau :

n	Nombre de pommiers	Nombre de conifères
1	1	8
2	4	
3		
4		
5		

Question 2 :

Il existe deux expressions que vous pouvez utiliser pour calculer le nombre de pommiers et le nombre de conifères dans cette situation :

- n^2 pour le nombre de pommiers
- $8n$ pour le nombre de conifères

où n est le nombre de rangées de pommiers.

Il existe une valeur de n pour laquelle le nombre de pommiers est égal au nombre de conifères. Trouvez cette valeur de n et expliquez votre méthode pour la déterminer.

LA DEMARCHE D'INVESTIGATION DANS LE CADRE DU BACCALAUREAT INTERNATIONAL

LACKOVA[*] Jana – DORIER[**] Jean-Luc

Résumé – Notre recherche questionne place de la démarche d'investigation dans un contexte institutionnel particulier (le Baccalauréat International) qui la place au cœur de sa philosophie éducative, en particulier lorsqu'elle devient un objet institutionnellement reconnu, sanctionné par une évaluation sommative. Dans ce texte nous proposons une analyse en utilisant le cadre théorique de la théorie anthropologique du didactique (TAD) de Chevallard et plus particulièrement de l'échelle des niveaux de co-détermination didactique.

Mots-clefs : (Baccalauréat International, la démarche d'investigation, TAD, l'échelle de codétermination didactique)

Abstract – Our research questions the place of inquiry in a particular institutional context (the International Baccalaureate) which places it at the heart of its educational philosophy, in particular when it becomes an institutionally recognized object, sanctioned by a summative assessment. In this text we propose an analysis using the theoretical framework of Chevallard's anthropological theory of didactics (ATD) and more particularly the scale of didactic co-determination.

Keywords: (International Baccalaureate, inquiry-based learning, ATD, didactic co-determination scale)

I. CONTEXTE

Ce texte présente le début du travail de thèse de doctorat de Jana Lackova, co-dirigée par Jean-Luc Dorier et Sylvie Coppé dans le cadre d'un projet de recherche plus global de l'équipe DiMaGe (http://www.unige.ch/fapse/dimage/fr/projets-de-recherche/projet-fns/) portant sur la résolution de problème financé par le FNS[1].

Depuis quelques années, plusieurs projets et groupes de travail affirment dans leurs rapports qu'il est nécessaire de « repenser l'enseignement scientifique en s'appuyant sur l'investigation » (Coquidé, Fortin, & Rumelhard, 2009, p. 51). Matheron (2010) relève deux points qui marquent l'enseignement des mathématiques actuellement : « une crise se manifestant par une perte de la visibilité sociale de son sens » et « une volonté institutionnelle d'un enseignement qui engage dans une authentique activité scientifique » (p. 14). De fait la démarche d'investigation (DI) et la résolution de problème en mathématiques (Dorier, 2012) ont suscité une volonté politique forte en réponse à la baisse d'intérêt des jeunes pour les filières scientifiques comme le suggère le rapport Rocard (2007). Les activités basées sur la DI amènent les élèves à :

> observe phenomena, ask questions, look for mathematical and scientific ways of how to answer these questions (like carrying out experiments, systematically controlling variables, drawing diagrams, calculating, looking for patterns and relationships, making conjectures and generalizations), interpret and evaluate their solutions and communicate and discuss their solutions effectively. (Dorier & Maass, 2014, p. 300)

Malgré de nombreuses initiatives et projets lors de la dernière décennie, l'enseignement traditionnel semble prévaloir sur la résolution de problèmes et la DI a du mal à trouver sa place dans les classes (Artigue & Blomhøj, 2013 ; Dorier & García, 2013 ; Dorier & Maass, 2014 ; Maaß & Artigue, 2013).

[*] Université de Genève – Suisse – Jana.Lackova@unige.ch
[**] Université de Genève – Suisse – Jean-Luc.Dorier@unige.ch
[1] Projet fiancé par le Fonds national suisse de la recherche scientifique– FNS (Subside no 100019_173105 / 1) : *La résolution de problèmes comme objet ou moyen d'enseignement au cœur des apprentissages dans la classe de mathématiques : un point de vue fédérateur à partir d'études dans différents contextes*.

Notre travail s'intéresse au contexte particulier du baccalauréat international (*International Baccalaureate* IB) qui dans un mouvement parti de Genève dès les années d'après-guerre a essaimé dans de nombreuses écoles internationales à l'échelle mondiale. Or, l'IB met en avant le développement de certaines compétences comme la réflexion critique ou les compétences de recherche à travers un enseignement qui reflète des principes pédagogiques basés sur la DI (International Baccalaureate (IB), 2015). Ainsi, dès sa création, l'IB émet des doutes sur l'efficacité de l'enseignement encyclopédique (Service d'examens des écoles internationales (ISES), 1967). De plus, l'IB est une de rares institutions, qui a mis en place un dispositif d'évaluation sommative (20% de la note finale) de la DI en mathématiques, obligatoire pour tous les élèves, dans le cadre du diplôme de fin d'études secondaires.

Au vu de ce contexte, notre premier objectif est d'identifier et d'analyser les conditions et les contraintes de la mise en application et de la viabilité de la DI en classe de mathématiques dans le cadre de l'IB, et en particulier le rôle et l'influence du dispositif d'évaluation dans l'intégration de la DI dans les classes de mathématiques. Dans ce texte, nous allons montrer cette analyse en utilisant le cadre théorique de la théorie anthropologique du didactique (TAD) de Chevallard et plus particulièrement de l'échelle des niveaux de co-détermination didactique.

La suite de notre thèse va consister à documenter et analyser la façon dont la DI vit dans l'institution IB, comment les enseignants investissent le dispositif et comment les élèves en bénéficient. Nous ambitionnons non seulement d'analyser comment ce dispositif fonctionne et ce qu'il produit, mais aussi comment il interagit avec le reste de l'enseignement de mathématiques. Pour ce faire nous mènerons d'une part une enquête assez large sous forme de questionnaires complétés par quelques entretiens dans deux institutions genevoises mais aussi dans des écoles du canton de Vaud et au Danemark. Nous analyserons également de près ce qui se passe dans la classe d'un ou deux enseignants genevois que nous observerons sur une année scolaire. Ces dernières analyses sont encore à l'état de projet et nous sommes actuellement (novembre 2017) en train de mettre en place le cadre théorique et la méthodologie. Dans ce texte nous nous limiterons donc à l'analyse du contexte, mais lors du colloque EMF2018 nous aurons probablement avancé sur les autres points.

II. CADRE THEORIQUE ET METHODOLOGIE

Dans cette partie préliminaire de notre travail, notre objectif consiste à donner à voir une institution (IB) et la façon dont la DI y vit. Autrement dit quelles sont les conditions qui ont présidé à son développement et les contraintes qui ont dû être dépassées ou tout simplement prises en compte pour que ce choix pédagogique de l'institution ait toutes les chances de se développer.

C'est donc assez naturellement vers la TAD que nous nous sommes tournés. En effet, comme le dit Chevallard (2007) lui-même :

> En vérité, le problème inaugural, qui reste jusqu'à ce jour le ressort des travaux auxquels mon nom est associé, fut pour moi celui de la diffusion – et surtout des difficultés de la diffusion, notamment dans l'enseignement secondaire français – des praxéologies didactiques engendrées par la théorie des situations didactiques (TSD). Quelles contraintes empêchaient leur libre circulation et leur pleine pénétration institutionnelle ? Sous quelles conditions ces praxéologies étaient-elles durablement viables, à un coût supportable, en telle ou telle partie de l'institution scolaire ? Il y a là, je ne saurais trop le répéter, le principe générateur de la plupart des travaux auxquels je me suis voué jusqu'à ces dernières années dans le cadre de la TAD. (Chevallard, 2007, p. 15)

Ainsi Chevallard définit « *la*[2] didactique : la didactique est la science des conditions et des contraintes de la diffusion sociale – auprès des personnes et des institutions – des praxéologies, *quelles qu'elles soient* » et précise alors qu'une « contrainte est une condition non modifiable » (Chevallard, 2011, p. 87).

C'est à ce niveau qu'apparaît l'échelle de co-détermination didactique :

> Les conditions qui sont l'objet de l'étude de la didactique ne peuvent être énumérées *a priori* : leur découverte progressive et la compréhension de leur rôle dans la diffusion de telle ou telle entité praxéologique P sont l'objectif permanent de la recherche en didactique. Mais il est apparu utile d'en ébaucher une classification, qui prend la forme d'une échelle de niveaux dits *de co-détermination didactique*. Je reproduis ici cette échelle dans sa version la plus compacte :
>
> Civilisation
> ↑↓
> Société
> ↑↓
> Ecole
> ↑↓
> Pédagogie
> ↑↓
> Discipline
>
> (…) Chaque niveau de cette échelle est le lieu d'origine de certaines conditions qui apparaissent souvent comme des contraintes aux autres niveaux. (Chevallard, 2011, pp. 87‑88)

Cette échelle permet donc d'organiser l'analyse que nous voulons mener. Nous nous sommes de plus inspirés de l'analyse réalisée dans le cadre du projet européen PRIMAS[3] sur les contextes des 12 pays partenaires au regard des facteurs pouvant favoriser ou au contraire gêner l'implémentation d'un enseignement basé sur la démarche d'investigation. Cette analyse qui constituait le deuxième délivrable de ce projet a été réalisé par l'équipe genevoise sous la direction de J-L. Dorier (http://www.unige.ch/primas/files/4814/5553/1668/Primas-rapport_WP2.pdf), en utilisant l'échelle de co-détermination et a fait l'objet d'un article (Dorier & García, 2013). Ces auteurs n'ont pas considéré le niveau de la civilisation, mais pour les quatre autres, ils ont établi une catégorisation visant à dresser un tableau des conditions et contraintes de la diffusion dans la société de *l'inquiry-based mathematics and science education* (IBMSE) :

> 1. Levels of society: Specific role of mathematics and sciences in society, tradition or recent changes in education relevant regarding IBMSE.
> 2. Level of school (global organization): Differentiation between primary, lower and upper secondary education, Pre-service and in-service teachers' training structures, etc.
> 3. Level of pedagogy: Law of education, general statement on pedagogy, tradition in education (transmissive or constructivist tradition, place of the learner...), type and role of national assessments, etc.
> 4. Level of discipline: Links between mathematics and sciences in the curricula, integrated science or separate subjects, etc., place of mathematics and sciences in the curricula (number of hours), competence of teachers in mathematics and sciences (profile of teachers), type of curricula in mathematics and sciences (signs of IBMSE?), type of resources for teachers in mathematics and sciences (textbooks, web, etc.). Are mathematics and science teachers using IBMSE? Why? If it is a requisite in the curriculum, even in the textbooks, why not? (Dorier & García, 2013, pp. 839‑840)

Du point de vue méthodologique, ils donnent également les sources à investiguer pour documenter cette analyse (curriculum, textes de loi, programmes, manuels, entretiens d'enseignants, d'élèves, de parents, articles de presse, etc.). Nous allons nous inspirer de ce travail pour décrire le contexte de l'IB et la place que la DI y occupe.

[2] L'italique est de l'auteur.

[3] Le projet de recherche PRIMAS (2010-2013), a été financé par l'Union Européenne, 7ème Programme Cadre (FP7/2007-2013) sous le Grant Agreement n°244380.

III. ANALYSE DE LA PLACE DE LA DI DANS LE CADRE DE L'IB

1. Le niveau de la société

L'institution IB trouve son origine dans un mouvement d'après-guerre qui a vu la création de nombreuses écoles internationales. Ce qui amena *Ecolint*, le nom familier de l'Ecole international de Genève créée en 1924 « the oldest of modern international schools » (Peterson, 2003, p. 15) à fonder et héberger l'*International Schools Association* (ISA) en 1951. De là, jusqu'à la fin des années soixante,, avec des apports de nombreuses écoles et universités de plusieurs pays qui étaient très souvent à la pointe des innovations, va se créer une structure *International baccalaureate office* (IBO), dont le premier directeur, Alec Peterson, était le président du département d'éducation d'Oxford. Le problème principal que cette structure a dû surmonter a été de créer un curriculum adaptable à une diversité de contextes culturels et susceptible de fournir un examen sanctionnant la fin des études secondaires acceptable dans toutes les universités du monde. Outre Oxford et Ecolint, le projet reçut très tôt des soutiens de poids comme le Centre international des études pédagogiques de Sèvres (CIEP, France) et l'Institut Max Planck (Allemagne). Dépasser les contextes nationaux, nécessitait une grande part d'innovation. Par exemple, en 1960, Bob Leach le chef du département d'histoire à Ecolint dut faire face à un enseignement sur la deuxième guerre mondiale avec des élèves de 20 nationalités différentes. De telles conditions nécessitaient d'inventer de nouvelles pratiques « [...] one that invited critical inquiry of historical sources and statements » (Saxton & Hill, 2014, p. 43). Dans la période de fondation, les premières écoles à mettre en place l'IB vont faire l'objet d'un dispositif de recherche ponctué par des rencontres internationales (Meyer, 1968). Le premier congrès de Sèvres en février 1967, marque une étape essentielle dans la fondation de la structure et le second, en avril 1974, regroupe 64 participants de 21 nationalités, dont 30 officiels de l'IBO et le reste des experts en développement curriculaires et examens recommandés par l'UNESCO. Le but de cette conférence était non seulement de faire un bilan de la première phase, mais aussi de déterminer la viabilité et l'extension sur le long terme. Trois commissions furent ainsi créées pour étudier :

1) The general policy and administration
2) Syllabusses
3) Methods of assements

Ainsi pour ce qui concerne le niveau de la société, on peut dire que le contexte de l'IB, du fait de la diversité des contextes nationaux, ne peut définir des conditions très précises pour mettre en place les enseignements, et doit donc en contrepartie prendre en compte des dimensions générales (*policy, syllabus*) et va se concentrer sur la question de l'évaluation qui détermine sa viabilité à l'échelle internationale, puisqu'elle doit garantir l'entrée à l'université dans tous les pays.

2. Le niveau de l'école

Dès 1967 le syllabus donne la structure générale pour les deux dernières années du secondaire 2 qui conduisent au bac international. On peut le résumer en 3 points :

1) Les élèves doivent choisir 6 disciplines équitablement réparties parmi les humanités et les sciences (groupe 1 : langue première ; groupe 2 : sciences humaines – philosophie, histoire, géographie, économie ; groupe 3 : sciences expérimentales, groupe 4 : langue 2 ; groupe 5 : mathématiques, le groupe 6 est aussi varié que langue 3, langue ancienne, un deuxième choix dans les groupes 2 ou 3, maths appliquées ou art) ;

2) Les élèves doivent étudier 3 ou 4 des 6 sujets choisis à un niveau supérieur (NS) les autres le sont au niveau moyen (NM).

3) Tous les élèves suivent un cours appelé « Théorie de la connaissance », qui « demande aux élèves de mener une réflexion critique et de réfléchir sur le processus cognitif plutôt que d'apprendre un ensemble de connaissances spécifiques » (IBO, 2013b, p. 8) Ce cours doit représenter un minimum de 100 h d'enseignement.

On notera deux points importants pour notre propos, d'abord que les mathématiques sont une discipline obligatoire, et ensuite qu'une part importante du syllabus porte sur la façon d'apprendre et vise à développer une certaine ouverture d'esprit.

On retrouve ce dernier point de façon plus précise déjà dans le guide de 1967 :

a. développer les aptitudes intellectuelles de l'élève plutôt que lui imposer la mémorisation superficielle et éphémère de connaissances encyclopédiques : former plutôt qu'informer.

b. lui inculquer les méthodes de travail qui lui seront indispensables dans ses études supérieures.

c. lui donner, dans un champ bien délimité, un entraînement suffisant pour lui permettre de se spécialiser.

d. le familiariser, au moins dans les grandes lignes, avec les problèmes du monde contemporain dans une perspective internationale. (ISES, 1967, p. 8)

Enfin, dès le départ l'évaluation est un objet d'étude important conduisant à mettre en place une variété de dispositifs. En général les dossiers sont évalués à l'interne et les copies (ou des enregistrements audio pour les examens oraux) sont envoyées dans d'autres écoles ou à un jury pour être évalués. Les travaux pratiques font l'objet d'une évaluation continue et de questionnaires.

Enfin, La diversité des lieux accueillant le programme de l'IB et leur dissémination géographique rend la question de la formation initiale des enseignants forcément multiforme. En général, les enseignants ont suivi une formation initiale dans un pays et ont candidaté dans une école qui peut être basée ou non dans leur pays d'origine. Dans tous les cas, cela participe d'une démarche volontaire qui a des chances d'être un signe d'adhésion aux valeurs de l'IB. Par ailleurs les enseignants doivent suivre régulièrement des *workshops* de formation et il existe une grande quantité de matériau en ligne à disposition ainsi qu'un forum de discussion. La dimension collaborative à l'échelle internationale est également mise en avant.

3. Le niveau de la pédagogie

Le contexte de l'IB a conduit à des choix pédagogiques originaux. Dans ce sens le cours de Théorie de la connaissance est un élément singulier du dispositif, qui est le cœur du tronc commun. Il est sensé doter les élèves d'outils épistémologiques et les amener à réfléchir sur les origines et sur la fiabilité des différentes sources de connaissance. La question centrale de ce cours, comme le stipule le programme d'études, est d'examiner comment nous connaissons ce que nous affirmons connaitre. Par ailleurs, afin d'encourager le travail personnel et indépendant et de développer des compétences de recherche, les élèves doivent élaborer un mémoire comportant autour de 4000 mots sur un sujet de leur choix. Enfin, le programme Créativité, Action et Service (CAS) qui est la troisième composante du tronc commun vient parachever « l'éducation de l'homme complet » mise en avant par les promoteurs de l'IB (OBI, 1973, p. 24).

L'esprit général de l'enseignement tel que proposé par l'IB s'inspire des approches constructivistes de l'apprentissage (IB, 2015, p. 1). Ainsi, dès sa création des doutes sont émis sur l'efficacité de l'enseignement encyclopédique.

> Dans chaque discipline la masse des connaissances est telle qu'un enseignement encyclopédique est non seulement archaïque mais inopérant. Apprendre à apprendre, telle est désormais la première fonction de l'école. Pour les pédagogues, la gageure est de donner aux jeunes un enseignement suffisamment ouvert pour leur inculquer le sens de la communauté humaine et de leurs responsabilités sociales mais en même temps suffisamment détaillé pour leur permettre d'acquérir la formation (à la fois spécialisée et interdisciplinaire) qui sera l'instrument essentiel de leur promotion universitaire et professionnelle dans un monde de compétition. (OBI, 1973, p. 24)

Peterson (2003) a montré qu'il n'était pas si évident de créer un curriculum et un système d'examens qui respectent ces principes, en particulier au regard de l'évaluation car « c'est la vieille histoire de la *tête bien faite*, que nous louons sans vraiment chercher à la produire, et la *tête bien pleine* que nous déplorons mais en faisons l'objet de nos examens[4] » (Capelle in Peterson, 2003, p. 43).

En 2011, l'IB a mis en route une nouvelle initiative afin d'expliciter l'esprit général de l'enseignement en se penchant sur les manières d'apprendre et d'enseigner. La documentation mise à disposition de la communauté de l'IB en 2015, intitulée « Les approches de l'enseignement et de l'apprentissage », a pour but de guider les enseignants en soulignant les principes de l'enseignement et de l'apprentissage dans le cadre du Diplôme.

> La mise en place d'un enseignement axé sur les processus et reposant sur les compétences peut présenter des difficultés tant aux enseignants qu'aux élèves. Le rôle de l'enseignant tend davantage vers le soutien et celui de l'élève vers la recherche. De nombreux élèves, notamment ceux à l'aise avec l'enseignement basé sur la transmission ou habitués à cette méthode, auront du mal à s'adapter à une situation scolaire leur demandant de faire un apprentissage pour eux-mêmes au lieu de se contenter de suivre des consignes. Ces approches de l'enseignement et de l'apprentissage ont toutefois le potentiel nécessaire pour former des « esprits bien constitués plutôt que des esprits bien remplis » (Peterson, 2003, p. 43, traduction libre), une aspiration chère à l'IB. (IB, 2015, p. 39)

Institutionnellement, l'IB (2015) met en avant le développement de certaines compétences comme la réflexion critique ou les compétences de recherche à travers un enseignement qui reflète des principes pédagogiques basé sur la DI, la recherche ou l'enquête et axé sur la compréhension conceptuelle. Parmi les attributs décrivant le profil des apprenants de l'IB c'est celui des investigateurs ou chercheurs qui figure en première position en le caractérisant par l'effort de développer la curiosité et d'acquérir des capacités d'investigation et de recherche (IBO, 2013a).

Ainsi dans toutes les brochures du plan d'études, on trouve au début une sorte de manifeste :

> Tous les programmes de l'IB ont pour but de former des personnes sensibles à la réalité internationale, conscientes des liens qui unissent entre eux les humains, soucieuses de la responsabilité de chacun envers la planète et désireuses de contribuer à l'édification d'un monde meilleur et plus paisible.
> Les apprenants de l'IB s'efforcent d'être :
> Des investigateurs – Ils développent leur curiosité naturelle. Ils acquièrent les compétences nécessaires à la conduite d'investigations et de recherches et font preuve d'autonomie dans leur apprentissage. Ils ont vraiment envie d'apprendre et ce plaisir d'apprendre les accompagnera tout au long de leur vie. (IBO, 2013a, p. 1)

Les 9 autres qualificatifs sont : Informés et instruits - Des penseurs - Des communicateurs – Intègres- Ouverts d'esprit- Altruistes – Audacieux – Équilibrés – Réfléchis.

4. Le niveau de la discipline

Le programme d'études de l'IB propose quatre niveaux différents de cours (Etudes mathématiques niveau moyen (NM) ; Mathématiques NM, Mathématiques niveau supérieur

[4] Ma traduction

(NS), Mathématiques complémentaires NS) pour tenir compte des différents besoins, centres d'intérêt et aptitudes des élèves, pour suivre un choix de carrière et remplir les conditions d'admission à l'université. La résolution de problèmes est affirmée à tous les niveaux.

> La résolution de problèmes est au cœur de l'apprentissage des mathématiques, et cela implique l'acquisition de concepts et de compétences mathématiques dans un large éventail de situations, y compris des problèmes ouverts, dans des contextes nouveaux et tirés du monde réel. (IBO, 2012, p. 10)

De plus l'approche par investigation (voir Figure 1) est clairement définie comme un objectif prioritaire :

> Dans le profil de l'apprenant de l'IB, l'apprentissage par l'expérimentation, le questionnement et la découverte sont encouragés. Dans une classe de l'IB, les élèves apprendront généralement les mathématiques en étant des participants actifs d'activités d'apprentissage plutôt que des auditeurs passifs d'instructions. Les enseignants doivent donc fournir aux élèves des opportunités d'apprendre à travers une investigation mathématique. (IBO, 2012, p. 12)

D'ailleurs, l'approche par investigation figure parmi les objectifs de l'évaluation des mathématiques (IBO, 2012). En effet, outre une évaluation « classique » de type externe, il est prévu une évaluation interne (20% de la note finale). Cette évaluation porte sur un travail d'exploration individuelle. C'est un travail écrit impliquant une investigation dans un domaine de mathématiques » qui « doit, autant que possible, être une partie intrinsèque de l'enseignement en classe et ne doit pas être une activité séparée menée à la fin du programme d'études » (IBO, 2012, p. 49).

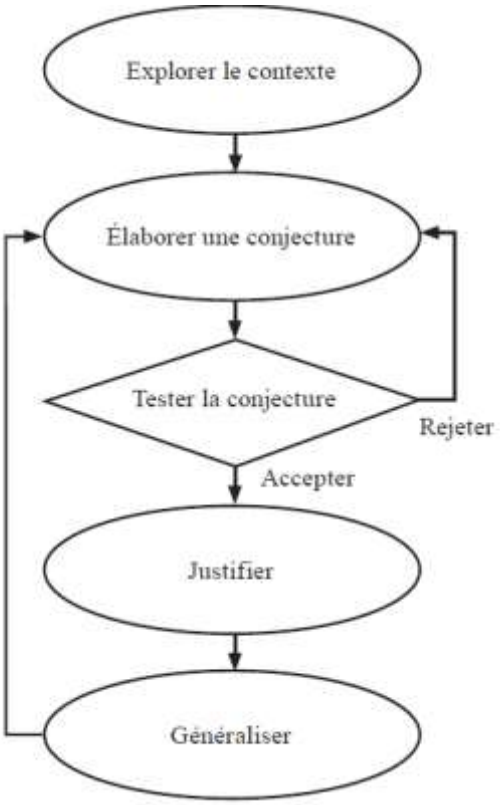


Figure 1

IV. CONCLUSION – PERSPECTIVES

L'analyse succincte qui précède et que nous développerons dans la thèse montre qu'à tous les niveaux de l'échelle de co-détermination il existe des conditions favorables à un enseignement basé sur la DI en classe de mathématiques dans les deux dernières années de l'IB. En particulier, la prise en compte de cette dimension dans 20% de la note finale de l'examen (et ce quel que soit le niveau de mathématiques choisi par l'élève) est une dimension importante du dispositif. En ce sens on a là des conditions meilleures que dans tous les dispositifs connus par ailleurs. L'objectif de notre travail va ainsi être d'analyser comment les enseignants investissent ce dispositif et comment les élèves le perçoivent et en bénéficient. Nous allons mener une enquête à large échelle par questionnaires proposés en Suisse (Genève, Vaud) et au Danemark. Nous compléterons par quelques entretiens. Nous voulons documenter le fonctionnement associé au 20% de l'évaluation de type DI et aussi essayer de mesurer le lien avec le reste de l'enseignement voué à l'évaluation classique (influence positive de la DI sur la partie classique versus impact négatif du bachotage sur les 20% dédiés à la DI). Enfin nous observerons et analyserons de façon détaillée une classe (ou deux) dans un établissement genevois (avec une méthodologie en cours d'élaboration).

REFERENCES

Artigue M., & Blomhøj M. (2013) Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM 45*(6), 797‑810.

Chevallard Y. (2007) Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. In L. Ruiz-Higueras, A. Estepa, & F. J. García (Éd.), *Sociedad, Escuela y Mathemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de la Didáctico* (p. 705‑746). Universidad de Jaén. Consulté à l'adresse http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=134

Chevallard Y. (2011) La notion d'ingénierie un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD. In C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, … F. Wozniak (Éd.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (p. 81‑108). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Coquidé M., Fortin C., & Rumelhard G. (2009) L'investigation : fondements et démarches, intérêt et limites. *Aster 49*, 51‑78.

Dorier J.-L. (2012) La démarche d'investigation en classe de mathématiques : quel renouveau pour le questionnement didactique ? In B. Calmette (Ed.), *Didactique des sciences et démarches d'investigation. Références, représentations, pratiques et formation, Pratiques en formation* (p. 59-78). Paris : L'Harmattan.

Dorier J.-L., & García F. J. (2013) Challenges and opportunities for the implementation of inquiry-based learning in day-to-day teaching. *ZDM 45*(6), 837‑849.

Dorier J.-L., & Maaß K. (2014) Inquiry-Based Mathematics Education. In S. Lerman (Éd.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (p. 300‑304). Netherlands: Springer.

International Baccalaureate (2015) *Approaches to teaching and learning in the Diploma Programme*. Cardiff: IB.

Maaß K., & Artigue M. (2013) Implementation of inquiry-based learning in day-to-day teaching: a synthesis. *ZDM 45*(6), 779‑795.

Matheron Y. (2010) Démarche d'investigation" et Parcours d'Etude et de Recherche en mathématiques : entre injonctions institutionnelles et étude raisonnée des conditions et contraintes de viabilité au sein du système éducatif. In *Actes du 17ème colloque de la CORFEM. 17-18 Juin 2010* (p. 14‑36). Caen : Université de Basse-Normandie.

Office du Baccalauréat International (1973) *Le Baccalauréat International*. Genève : OBI.

Organisation du Baccalauréat International (2012) *Programme du diplôme Guide de mathématiques NM*. Cardiff : OBI.

Organisation du Baccalauréat International (2013a) *Profile de l'apprenant de l'IB*. Cardiff : OBI.

Organisation du Baccalauréat International (2013b) *Programme du diplôme: Guide de théorie de la connaissance*. Cardiff : OBI.

Peterson A. D. C. (2003. *Schools Across Frontiers: The Story of the International Baccalaureate and the United World Colleges*. Open Court Publishing.

Rocard M., Csermely P., Jorde D., Lenzen D., Walberg-Henriksson H., & Hemmo V. (2007) *L'enseignement scientifique aujourd'hui : une pédagogie renouvelée pour l'avenir de l'Europe*. Bruxelles : Commission européenne. Consulté à l'adresse http://ec.europa.eu.

Saxton S. E. & Hill I. (2014) The International Baccalaureate (IB) programme: An international gateway to higher education and beyond. *Higher Learning Research Communications 4*(3), 42‑52.

Service d'examens des écoles internationales (1967) *Le Baccalauréat International*. Genève : I.S.E.S.

DEI ET EDUCATION MATHEMATIQUE : NECESSITE ET VIABILITE DANS LES PRATIQUES DE CLASSE ORDINAIRES

LAI Sebastiana[**] - POLO Maria[*]

Résumé – Ce travail contribue à la discussion sur la conception d'une épistémologie pour les DEI en mathématiques. Dans cette perspective, nous présentons et analysons les choix de natures épistémologique et didactique sous-jacents à notre travail théorique sur la *Démarche expérimentale*. Un exemple concernant mathématiques et astronomie est présenté et discuté par rapport aux résultats des expériences menées ces dix dernières années au niveau du primaire et du collège.

Mots-clefs : Démarche expérimentale, pratiques ordinaires, mathématiques, enseignant, élève.

Abstract – This paper aims to discuss some epistemology's bases of the IBE in mathematics. With this purpose, we present and analyze the choices of an epistemological and didactic nature underlying our theoretical work on the Experimental Approach. An example concerning mathematics and astronomy is presented and discussed in relation to the results of the experiments carried out for the last ten years at the level of the primary and the college.

Keywords: experimental approach, traditional practices, mathematics, teacher, student.

I. INTRODUCTION

Cette contribution développe l'intervention du GT9 de EMF 2012 où nous avions présenté le cadre théorique de la *Démarche expérimentale* issu du travail de thèse de Lai (2009). Nous avions montré certaines caractéristiques de rupture avec les pratiques habituelles, au niveau primaire et collège, dans deux activités (une en Astronomie et une en Mathématiques), ayant certaines caractéristiques d'une démarche d'investigation. A cette occasion, nous n'avions pas traité le lien entre les DEI (Démarches d'Enquêtes et d'Investigations) et le modèle théorique de la *Démarche expérimentale*. Le thème spécifique et les questions posées dans ce GT10 nous ont menées à reprendre notre modèle théorique[1] pour développer l'analyse et interroger ainsi le processus de transposition didactique, où les DEI, en tant qu'innovations, trouvent leur origine. De notre point de vue, les DEI sont la réponse institutionnelle des systèmes scolaires de nombreux pays à des contraintes et des exigences de nature différente : *épistémologique*, en particulier relativement à la pertinence des mathématiques[2] et des savoirs scientifiques à enseigner et enseignés ; *cognitive*, en ce qui concerne le rôle, plus important que dans le passé, attribué aux composantes sociales et émotionnelles dans l'apprentissage ; *sociopolitiques et culturels* en ce qui concerne l'accroissement de l'autonomie et des compétences transversales nécessaires à l'individu aujourd'hui. En fait, la démarche d'investigation[3] est l'une des recommandations majeures dans l'enseignement des disciplines scientifiques dans plusieurs pays depuis les années 2000, mais la diffusion de cette pratique dans les systèmes scolaires n'a aucune systématicité, au moins pour les cas de la France et de l'Italie et notamment dans la classe de Mathématiques.

[**] Osservatorio Astronomico – INAF di Cagliari – Italie – tania@oa-cagliari.inaf.it
[*] Dipartimento di Matematica e Informatica – Italie – mpolo@unica.it

[1] Le terme *modèle* est ici utilisé en tant que *schéma/prototype* par lequel on peut représenter (expliquer, prévoir,…) une classe entière des phénomènes didactiques/épistémologiques concernant différents contextes disciplinaires.

[2] Dans le but de "rapprocher" les mathématiques des chercheurs aux mathématiques "scolaires".

[3] Le terme *démarche d'investigation* devient *Inquiry-based science education*, dans la terminologie anglaise et "*didattica laboratoriale*" selon l'un des locutions les plus diffusées en Italie.

Sans la prétention d'exhaustivité ni de comparaison avec l'ampleur du travail de Maass, Artigue et al. (2013), nous essayons de placer la *Démarche expérimentale* en tant que modèle théorique des pratiques de DEI. Nous nous appuyions sur les expériences menées ces dix dernières années sur l'innovation du curriculum des mathématiques de l'école primaire et du collège. L'interaction des mathématiques avec l'astronomie, et d'autres disciplines scientifiques, dépasse, dans ce travail, les aspects propres à l'interdisciplinarité pour étudier ceux spécifiques aux choix de nature épistémologique et d'organisation didactique sous-jacents à notre travail théorique sur la *Démarche expérimentale*.

Une prémisse de nature culturelle et théorique s'impose, par rapport à la recherche dans le domaine de la didactique des disciplines scientifiques. Il est nécessaire d'éclaircir l'analyse de différentes finalités de la communication et de la diffusion des savoirs mathématiques et scientifiques. En effet, aujourd'hui, on assiste à un renforcement médiatique global de la vulgarisation de ces savoirs (par exemple, avec l'astrophysique, la génétique, etc.…). Il s'agit souvent d'une divulgation menée selon la *logique* d'une communication *charmeuse* de la science, l'objectif étant de *faire connaître* ce qu'on *fait* dans la science, en superposant au sens de *connaître* celui *d'être informé*. Transformer en spectacle la science n'est selon nous pas suffisant pour s'opposer aux obstacles que les sciences rencontrent à se placer en position symétriquement *central* aux sciences humaines. Au contraire, faire *spectacle* de la science favorise l'idée que les sciences sont « fascinantes » et « faciles », alors que les échecs scolaires montrent une difficulté réelle[4] à faire apprendre les mathématiques et les sciences aux élèves en Italie, et pas seulement. Le système scolaire risque aussi de céder le pas à la divulgation, car de plus en plus d'agences et d'institutions de formation « proche » de l'Ecole (musées, sites de divulgation, etc.…) proposent des expositions et des parcours d'innovation de ce type. Ce phénomène pose une question cruciale de viabilité à l'Ecole relativement à des savoirs ou des connaissances[5] proches de questions vivantes de la recherche dans tout domaine scientifique, y compris les mathématiques. Comprendre pour maîtriser et prévoir les retombées de ce phénomène sur l'apprentissage, sur les mathématiques enseignées et sur l'épistémologie des enseignants est une question d'actualité. Une étude didactique des processus de *transposition quand la finalité est didactique plutôt que divulgatrice* est nécessaire si l'on veut répondre à la question de l'enseignabilité des savoirs c'est à dire : quelles mathématiques pour l'enseignement à l'Ecole ?

Notre travail, concernant l'étude de processus de *transposition à finalité didactique*, part de l'hypothèse que l'Ecole et l'apprentissage scolaire qui se réalise dans cette institution, est une nécessité des sociétés. Cet apprentissage est soumis à des contraintes de fonctionnement notamment celles des pratiques, institutionnellement exigées, d'évaluation des apprentissages. De plus, l'hypothèse à la base de l'existence même de la Didactique Disciplinaire en tant que domaine de recherche est : des régularités existent dans le fonctionnement de l'apprentissage, et certaines sont spécifiques à l'apprentissage scolaire, donc on peut les étudier. Il faut pour cela une approche de nature systémique des relations réciproques d'au moins quatre éléments : savoir, élève, enseignant, milieu. Nous utiliserons dorénavant le sigle DEI, selon l'acception donnée dans ce GT10, en référence à toute pratique basée sur une activité/démarche scientifique avec une classe. Le paragraphe II est consacré au cadre théorique de notre travail. Les paragraphes III et IV précisent les caractères généraux du modèle de la *Démarche expérimentale* et les détails d'une utilisation dans une expérience sur l'Orientation menée au niveau du collège. La discussion des résultats et quelques questions ouvertes sont données en conclusion.

[4] Voir les résultats statistiques de l'enquête OCSE-PISA de ces trois dernières années.
[5] La distinction connaissance et savoir est utilisé selon Brousseau 1998.

II. PARADIGMES ET CADRE THEORIQUE

Plusieurs questions se posent, pour la plupart encore ouvertes : sur une épistémologie pour les DEI, sur le fonctionnement du système didactique (dévolution, institutionnalisation, évaluation – temps didactique) dans la mise en place de telles démarches et sur les contraintes de viabilité des DEI dans les pratiques habituelles. Comme souligné dans Mercier (2012), dans Calmette B., Matheron Y., (coord. 2015) et dans le compte-rendu du GT de 2012, la construction ou l'analyse de pratiques de DEI pose en premier plan les questions sur *les ingénieries didactiques et les substrats théoriques sur lesquels les DEI sont bâties* et celles *sur le rôle de l'enseignant* dans ces activités. Nous nous plaçons selon les paradigmes de la TSD et de la TAD postulant que l'élève apprend par adaptation en interaction avec un milieu et, dans une perspective Vygotskienne, en ce qui concerne le rôle fondamental attribué au langage et à l'interaction sociale dans tout processus d'apprentissage. Plus généralement, dans la communication enseignant-élève, avec Watzlawick (1971), nous considérons l'importance de l'aspect pragmatique de la communication (Lai, 2003), dans tout processus de transposition à finalité didactique. Ce processus nécessite une fiction didactique tant par rapport aux transformations des savoirs que d'une ou plus séquentialisations possibles visant la chronogène d'un savoir[6]. Cette fiction est constitutive de la genèse du système didactique concernant ce même savoir. Or, suivant la TAD, on considère un système didactique S (*X; Y; Q*) formé autour *d'une question Q* par une classe *X* et le professeur *Y* = {*y*} qui en dirige l'étude. Il y a là une première distinction à faire pour la recherche d'une épistémologie ou d'un cadre théorique pour les DEI : le savoir S, autour duquel se noue un système didactique est remplacé par une question Q. Encore, avec Chevallard (2008 et 2011), dans le paradigme de la TAD l'enseignant joue le rôle de médiateur et

> (…), le milieu n'est pas donné ou produit par le professeur, sa production fait partie du *processus de l'étude*. Cela signifie que le *topos* de l'élève s'agrandit individuellement et collectivement, tandis que le professeur doit assumer une position de directeur de l'étude qui « *décidera en dernier ressort, non sans en expliciter les attendus, si la classe verra ou non son milieu d'étude être augmenté de telle ou telle œuvre* ». (Chevallard, 2011, p. 94).

Dans la TAD, l'évolution d'un système didactique S(*X* ; *Y* ; *Q*) est résumé par le schéma herbartien : $[S(X; Y; Q) \rightarrow \{R_1, R_2, R_n, O_{n+1}, O_m\}] \rightarrow R\heartsuit$ où une réponse de la classe $R\heartsuit$ se construit à partir du milieu M = $\{R_1, R_2, \ldots, R_n, O_{n+1}, \ldots, O_m\}$ produit par le système didactique comme le bilan de la dynamique née de la mise en œuvre de la dialectique des médias et des milieux. En termes de structuration des milieux (Margolinas, 2002), dans Artigue et al. 2002, l'hypothèse suivante avait été avancée : *par rapport aux différents savoirs en acte dans la pratique, une analyse de la contingence nécessite l'identification de l'évolution de différents systèmes didactiques (les différents projets et trajets de l'enseignant et de l'élève) par rapport à différents savoirs*. De plus, nous avions montré (Lai-Polo, 2002) comment un écart peut se produire entre le projet de l'enseignant par rapport au savoir et le projet de l'élève ou de la classe. Cet écart peut se formaliser en termes de *différents niveaux de milieu apparaissant en contemporanéité* : par exemple, l'enseignant est en position P_1 par rapport à un savoir s_i, l'élève est en position E_0 ou E_{-1} par rapport à un autre savoir s_j (étant, dans certains cas, i=j).

Par rapport à une question donné Q enjeu d'étude, pour expliquer (comprendre, prévoir, ...) la dialectique des médias et des milieux produisant une réponse à la question Q, il est donc nécessaire, à notre avis, de considérer la coexistence de différents savoirs avec des statuts

[6] Pour la mise en place d'un processus de transposition en situation scolaire, ce savoir doit être séquentialisable, doit circuler masqué, et son apprentissage doit être « mesurable ».

différents. Un système didactique S[7] est pour nous tissé autour d'une question Q et de plusieurs savoirs s_i ; à la fin du processus de l'étude, la réponse *R*♥ est liée à plusieurs s_j :

$$[\,[S(X;\ Y;\ Q,\ s_i) \rightarrow \{R1, R2, Rn, O_{n+1}, O_m\}] \rightarrow R\heartsuit] \rightarrow s_j \qquad (i \neq j \text{ ou } i=j)$$

Dans notre cadre théorique, nous avons croisé la TAD avec la structuration des milieux, pour préciser les liens entre les procèdes évolutifs de la topogenèse, mésogenèse et chrongenèse et leurs interactions avec les différents niveaux des situations S_i. **La topogenèse relativement à un savoir**, caractérisée par un fonctionnement non linéaire, peut être prévue *a priori* au niveau S_1, ou identifiée en acte dans une activité, au niveau de la situation S_0 et S_{-1} ou S_{-2}. **La mésogenèse** peut être analysée en acte ou *ex post* au niveau S_0, ou conçue *a priori* au niveau S_1 ; différents milieux existent par rapport aux savoirs en jeu aux niveaux S_0, S_{-1} et S_{-2}. **La chronogène** au niveau S_2 est linéaire et il y a au niveau S_1 une première genèse non linéaire qui garde en acte ce caractère aux niveaux S_0, S_{-1} et S_{-2}. L'avancement de la topogènese, de la mésogenèse et de la chrogenèse est caractérisé par la dialectique préconstruit-construit, avec une toujours nécessaire fiction didactique d'isolabilité et de (ré)construction de savoirs. Ces savoirs, selon les processus de transposition didactique, sont ceux accrédités dans la communauté de chercheurs dans les différents domaines scientifiques, y compris les mathématiciens. Les DEI, comme tout autre mouvement d'innovation, permettent l'entrée d'autres savoirs, en tant qu'enjeu didactique, non prévus à certains niveaux scolaires (tels que les savoirs relatifs à l'astronomie, au moins en Italie). La DEI insiste sur la nécessité que l'élève (individuellement ou en collaboration avec les autres en classe) soit le seul à diriger l' « enquête » sur l'objet d'étude posé en classe. Mais, *qui identifie les nœuds épistémologiques et méthodologiques caractéristiques de la question Q à étudier* ? Et c*omment fonctionnent les DEI ?* Le modèle de la *Démarche expérimentale*, objet du paragraphe III est notre réponse à ces questions.

III. UNE EPISTEMOLOGIE POUR LES DEI

Ce paragraphe essaye de montrer notre hypothèse : le modèle théorique *de la Démarche expérimentale* est l'une des épistémologies possibles d'interprétation/analyse/construction des pratiques de DEI. En particulier, dans nos recherches, il s'avère pertinent pour expliquer des DEI où l'enjeu de l'apprentissage est un savoir scientifique. Lai (2009) a montré la nécessité de la dialectique expérience/théorie/expérience pour la mise en place du **processus de modélisation de phénomènes du réel** et la place des mathématiques dans ce processus. En effet, pour caractériser le processus de modélisation il faut préciser la signification de ***modèle mathématique*** en tant que *représentation* d'un phénomène. Ce modèle n'est pas descriptif, discursif, mais formel, c'est-à-dire exprimé dans le langage mathématique. En d'autres termes, le phénomène spécifique étudié ne détermine pas "sa" représentation mathématique ; ce que l'on fait est de traduire en formules des *idées* et des *connaissances* relatives au phénomène. Un flux circulaire relie les nœuds du processus de modélisation d'un **phénomène du réel** (enjeu d'apprentissage ou enjeu d'étude pour une classe) : la proposition du problème et la reconnaissance de l'expérience, sa prise en compte en tant qu'objet d'étude dans la classe (*contextualisation*) ; la pratique de la mesure par l'emploi d'une théorie mathématique, ce qui permet la *décontextualisation* de l'expérience ; l'*algorithmisation* (situation de résolution des problèmes posés en théorie, retour vers une pratique), la *vérification ou validation efficace* du

[7] Notations : Si = Systèmes didactiques ; s_i savoirs enjeu d'apprentissage ; $\overline{s_i}$ savoir préconstruit ; $\overline{\overline{s_i}}$ savoir construit disponible.

modèle (usage routinier du modèle). La complexité du passage expérience/modèle/expérience est montrée dans le schéma suivant (Lai, 2009).

Problématique	**Mathématisation**	**Reproblématisation**	**Typologie de Situations**
Contextualisation Expérience Validation pratique	Théorisation	**Décontextualisation** de l'expérience par une Théorie Preuve formelle	**Situation de formulation production de représentations**
Non contextuelle Théorie Validation formelle	Déthéorisation	Recontextualisation **Algorithmisation** Vérification pratique	**Situation de validation résolution de problèmes**
Algorithmisée Routine **Validation efficace**	Décontextualisation	Expérience Epreuves d'efficacité	**Situation routinière production d'expérience**

Tableau 1 – Modèle théorique de la *Démarche expérimentale*

Dans le schéma, la première colonne est explicative d'une démarche théorique spécifique des disciplines scientifiques ; la deuxième concerne le processus de mathématisation ; la troisième rend compte d'une dialectique théorie-expérience, et la dernière colonne est explicative de la différente nature des activités, en termes de typologie des situations.

Ici, nous avons choisi de développer seulement deux points liés à ce schéma : la *Problématique,* caractérisée par la dialectique Enseignant/Élèves dans la phase de *Contextualisation* (proposition du problème, émergence des hypothèses des élèves, et leur autonomie dans l'observation et l'organisation des données), et l'*Algorithmisation* où l'autonomie des élèves prévaut dans la recherche de la réponse à la question ou au problème posé. Dans Lai-Polo (2017), nous avons expliqué les raisons épistémologiques impliquées dans la *Démarche expérimentale*, qui représente et permet une modélisation du réel phénomènique, et aussi la construction de savoirs fondés sur l'*observation*. Dans cette perspective, il faut penser la construction du curriculum d'astronomie, finalisé à la modélisation du réel, en lien avec le curriculum des mathématiques ; sans l'apport des mathématiques, il ne peut pas y avoir une construction du *modèle* expliquant les phénomènes. Le *modèle* étant autant *l'enjeu* que *l'outil* de la pratique de la *démarche expérimentale*[8]. Sur cette base, au niveau S_3, S_2 et S_1 nous avons conçu différents parcours. Parmi ceux expérimentées avec des enseignants du niveau de l'Ecole Primaire et du Collège, nous analysons ici une partie du parcours d'étude et de recherche (PER) initié à partir de la question de l'Orientation. L'étude des ombres pour arriver à l'orientation et la détermination du Méridien local sur la Terre est ici schématisée dans les trois étapes principales de la chonogenèse réalisée : 1. L'étude des ombres : récits et expériences. La nature physique et géométrique des ombres, considérées par trois aspects : causale, matériaux et perceptifs. 2. Les ombres en Astronomie : l'horizon astronomique, la ligne méridienne, l'orientation. L'observateur local. La ligne fixe et les points cardinaux. Le rapport ontologique le moi/et le monde. 3. De l'horizon astronomique à la Terre sphérique. La mappemonde parallèle : simulation et réalité. Un modèle homothétique, entre la géométrie et l'expérience concrète. Le méridien local.

Selon la *Démarche expérimentale*, dans la construction du Méridien local, on peut envisager plusieurs phases. Le passage de l'observation de l'ombre à la mesure et à l'action d'introduire les données de la mesure dans le *modèle Terre, nécessite* une *règle de correspondance* entre entité théorique et objet concret. Notamment, il faut réaliser le passage

[8] Dans Lai-Polo 2012, sont analysées deux activités ayant le caractère d'une DEI réalisées aux niveaux équivalents à la troisième et à la seconde.

de l'expérience concrète de mesure à l'horizon astronomique à la sphère (simulation avec une orange) sur laquelle on doit reproduire ce qui a été fait dans le monde réel.

Puisque l'objectif de ce travail est de montrer la mise en place de l'autonomie des élèves dans une DEI, nous analysons seulement les passages plus significatifs de la *Démarche expérimentale* : la Problématique ou *Problématisation* et l'*Algorithmisation*. La *Problématique* est caractérisée par la dialectique Enseignant/Élèves dans la phase de *Contextualisation* (proposition du problème, émergence des hypothèses des élèves, et autonomie dans l'observation et l'organisation des données. Dans la *Problématique,* se concentre l'activité d' « appropriation » d'un objet d'étude (phénomène /problème/question) de la part de l'élève. Mais, le problème et le phénomène, lorsqu'ils sont introduits dans l'ordre inverse que produit l'apprêt didactique, ne sont pas liés de manière évidente : en effet, mesurer l'ombre du gnomon à midi n'a pas grand-chose à voir, au premier abord, avec la détermination du Méridien local. La reconnaissance de l'expérience et la nécessité de mesurer, pour les élèves, ne vont donc pas de soi. Dans cette phase, on doit donc engager la *dévolution*, ce qui permet qu'une question scientifique devienne une donnée didactique. Comment stimuler la fioriture des hypothèses personnelles sur des problèmes « obscurs » (parce qu'ils sont *nouveaux*), dont le lien avec le phénomène à observer est lui-même obscur, et ne fait pas partie d'un modèle disponible parmi les connaissances déjà acquises ? Par ailleurs, la Problématisation se pose avant des actions comme *expérimenter* (Grenier, 2012) ou *regarder et observer* (Chevallard, 2008 ; Wozniak, 2015), puisque le système didactique rapporté au milieu à ce moment-là doit encore s'établir. Pour cela, une phase de familiarisation[9]/problématisation est nécessaire. L'enseignant et l'élève sont liés par la dialectique entre la relation didactique, liée aux savoirs, et la relation pédagogique. Mettre en place *le processus de familiarisation est une attribution de l'enseignant*, qui dissémine le terrain *pédagogique* et *didactique*[10], par les paroles disponibles dans le langage partagé en classe, les mémoires et les vécus des élèves, qui légitiment les observations systématiques à faire. Les questions posées par les élèves dans la familiarisation étant souvent du niveau pédagogique, l'enseignant doit gérer le deux. Une activation de la créativité en classe peut provenir de questions et réponses de natures différentes. Par exemple, dans notre expérience, nous avons utilisé parfois la narration du mythe qui apporte l'existence de *formes symboliques* provenant du passé. Dans le tableau présenté en Annexe, nous avons synthétisé les séquences des activités visant la construction de *la ligne méridienne* et du *Méridien local*. De plus, nous avons mis en évidence la *position* Professeur /Élèves et leurs relations mutuelles, le *rebondir* en classe avec les différentes idées et hypothèses dans la réalisation des ces activités. Dans ce tableau sont signalés aussi les passages spécifiques de la *Démarche expérimentale* par rapport aux savoirs en jeu. En particulier, dans l'activité sur les ombres, cruciale pour la *familiarisation/problématisation,* la *Théorisation,* se réalise par la mobilisation de savoirs mathématiques, pour décrire et nommer la pratique de l'identification de la *ligne méridienne* et de la *perpendiculaire* à cette ligne d'où se produisent les autres points cardinaux. Dans l'*Algorithmisation* où l'autonomie des élèves prévaut dans la recherche de la réponse à la question ou au problème posé, les mathématiques permettent une *validation formelle* non contextuelle, c'est-à-dire non plus assujettie au contexte de la précédente expérience de l'observation du phénomène réel pour résoudre la question de l'orientation.

[9] Cette phase est fondamentale pour ce qui suit, parce que le milieu doit se modifier pour mettre en place les savoirs construit et pre-construit. Sa durée est variable ; dans les parcours que nous avons expérimenté en sixième, dans l'année scolaire 2016/17, elle a occupé 3 heures sur 8 heures de travail prévues (Lai-Polo, 2017).

[10] La DE ne modélise ni les dynamiques de l'ordre de la relation pédagogique ni la dialectique entre les deux relations.

IV. LA QUESTION DE L'ORIENTATION : ARTICULATION DES MILIEUX POUR L'APPRENTISSAGE DU MERIDIEN LOCAL

Nous analysons ici les phases de *Problématisation et* d'*Algorithmisation* par le schéma herbatien pour expliciter le statut des savoirs en termes d'interaction des milieux. **La question Q à étudier est l'Orientation** ; par rapport aux savoirs s_i concernés dans l'expérience réalisée, nous décrivons le choix *a priori* au niveau S_2 et S_1 des variables potentiellement dédiées au maintien de la dévolution par rapport au savoir s_1 : **le méridien local**. Il est évident qu'à partir de la même question, l'orientation, au niveau S_1, la dévolution par rapport à d'autres savoirs pouvait être prévue et donc une différente gestion de la phase de *familiarisation/Problématisation*. Le schéma herbatien modélisant nos choix *a priori* pour cette phase est le suivant :

[[$S(X; Y; Q, s_i$ = le méridien local) $\rightarrow$ {$R1, R2, Rn, O_{n+1}, O_m$}] $\rightarrow R\heartsuit$] $\rightarrow s_j$ = la ligne méridienne

s_i = {la connaissance de la montre, les angles, le méridien locale, la rotation, le champ magnétique,….}; R_i = {l'ombre du soleil, le bussole, le GPS,…..}; $R\heartsuit$ = la direction de l'ombre la plus courte (N/S) et sa perpendiculaire dans l'horizon local.

Dans la phase d'*Algorithmisation*, l'organisation didactique cherche à garantir l'autonomie des élèves et leur socialisation dans la recherche de la solution du problème posé : tracer le Méridien local sur la surface de la Terre à partir de la ligne méridienne observée et déterminée dans la réalité. Il faut ici une mathématisation faisant appel à d'autres savoirs. Le schéma herbatien modélisant nos choix *a priori* est le suivant :

[[$S(X; Y; Q, s_i$ = le méridien local) $\rightarrow$ {$R1, R2, Rn, O_{n+1}, O_m$}] $\rightarrow R\heartsuit$] $\rightarrow s_i$ = le méridien local]

s_i = {la ligne méridienne, N/E/W/O, la forme de la Terre, sphère, plan, droite perpendiculaire,..} ; R_i = {position sur l'orange du lieu d'observation, le plan de l'horizon,…}; $R\heartsuit$ = la ligne qui relie les points Nord/Sud et le pied de la verticale du lieu d'observation.

Dans notre expérience, le plan de l'horizon, la forme de la terre, la sphère et son intersection par un plan, sont restés préconstruits. Les nombres décimaux, le mesurage étaient des savoirs construits, disponibles aux élèves. Aucun savoir mathématique n'était au niveau S2 et S1 enjeu d'apprentissage[11]. En effet, par rapport aux différents savoirs en jeu, on peut prévoir ou analyser, aux niveaux S_0 et S_{-1} et S_{-2}, différents milieux par rapport au statut de construit ou préconstruit de ces savoirs dans les différentes classes.

$$[\,[S_{k^*}(X; Y; Q, s_i = s^*) \rightarrow \{R1, R2, Rn, O_{n+1}, O_m\}] \rightarrow R\heartsuit] \rightarrow s_j\text{, où } \quad k^* = s^*, \ \overline{s_i} \text{ ou } \overline{\overline{s_i}}$$

Ce schéma herbatien représente l'évolution de différents système didactiques S_k concernant les trois statuts d'un même savoir, d'où la complexité de l'analyse de toute activité où nécessairement plusieurs systèmes didactiques sont, en acte, en même temps.

V. DISCUSSION DES RESULTATS ET CONCLUSION

Les DEI sont une nécessité des pratiques de classe, non parce qu'institutionnellement exigées, mais surtout pour l'importance qu'elles assignent aux pratiques expérimentales et à

[11] Une analyse des travaux des élèves à ce propos, ainsi que l'interprétation en termes de représentation épistémologique, selon la *Théorie générale de la représentation* de Wittgenstein, a été donnée dans (Lai-Polo, 2017).

l'autonomie aux élèves. Cela fait des DEI une modalité de travail (potentiellement) pertinente pour l'apprentissage d'un phénomène et plus généralement d'une connaissance ou d'un savoir scientifique. Cet apprentissage est constitué par la construction/formulation d'un modèle explicatif et prédictif du réel phénomènique, où les mathématiques jouent un rôle de nature épistémologique crucial ; condition *sine qua none* pour aboutir à un changement stable de l'enseignement tant des mathématiques que des savoirs scientifiques. Le modèle théorique de la *Démarche expérimentale*, que fournit une représentation du processus de modélisation du réel phénomènique, est une des possibles épistémologies pour les DEI. Nous avons expérimenté plusieurs parcours ayant les caractéristiques d'une DEI. Les savoirs mathématiques en jeu ont eu le statut de préconstruit ou construit selon les différentes classes concernées. Certains aspects des phénomènes d'astronomie ont eu, par contre, le rôle d'enjeu d'apprentissage et donc des milieux a-didactiques par rapport à ces savoirs étaient potentiellement aménagés dans ce but. L'enjeu de l'enseignement, notamment par la mise en place des méthodologies des DEI, est modifié aujourd'hui avec l'exigence institutionnelle d'enseigner des compétences transversales. Nous avançons l'hypothèse qu'on ne peut pas enseigner des compétences sans savoirs. Par exemple, les DEI font émerger, en acte, dans la pratique, des compétences de travail en groupe. La compréhension du processus d'enseignement et d'apprentissage de ces compétences nécessite une analyse d'ordre pédagogique, épistémologique et une vigilance didactique complexe dans le choix des tâches à concevoir pour les élèves. Notre recherche montre aussi comment l'innovation des pratiques, par les DEI, est viable pour les savoirs mathématiques en tant qu'outils de modélisation de phénomènes astronomiques ou d'autres disciplines scientifiques (chimie, géographie, physique,…)[12]. Elle confirme, en particulier, l'hypothèse de viabilité et de nécessité, au niveau de la scolarité obligatoire, de l'enseignement des savoirs de l'astronomie classique, ainsi que leur pertinence pour donner du sens à certains savoirs du curriculum des mathématiques officiel. Reste posée et ouverte la question du manque de connaissances en astronomie des enseignants. La carence de formation initiale des enseignants se révèle cruciale, aussi dans la question de l'enseignabilité des savoirs scientifiques les plus proches à la recherche en acte, par exemple dans le cas de l'astrophysique. En d'autres termes, compte-tenu du contexte technologique et théorique des problèmes astrophysiques, à quel niveau est-il possible, pour l'enseignant, de prévoir, et pour l'élève, de reconnaître le type de tâches et les organisations mathématiques utiles pour mener à bien la résolution des problèmes ? La demande d'innovation vient avec force de l'école aussi, mais la réponse ne peut pas se limiter à l'introduction d'experts qui n'interviennent que sur les savoirs hors curriculum. La viabilité d'un enseignement avec une composante expérimentale est prouvée par notre expérience. Il reste cependant à étudier la question des modalités et des contenus d'une formation[13] de l'enseignant, des mathématiques ou d'autres disciplines, favorisant une pratique scolaire habituelle de DEI centrées sur la modélisation des phénomènes scientifiques.

REFERENCES

Artigue M., Lai S., Polo M., Veillard L. (2002) Le Milieu : groupe d'étude avancé di cours. In *Actes de la XIème Ecole d'Eté De Didactique de Mathématique*, Corps, 21 – 30 Août 2001 (pp.157-166). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Brousseau G. (1998) *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

[12] L'exemple d'un projet italien ayant le but de diffuser l'Inquiry Based Science Education – IBSE en Italie avec la collaboration du programme *La main à la pâte*, sera développée pendant les travaux du GT.

[13] Un point de vue sur les connaissances de l'enseignant, didactiques, pédagogiques et sur les savoirs, est analysé dans Polo, 2017.

Calmette B., Matheron Y. (Eds) (2015) Les démarches d'investigation et leurs déclinaisons en mathématiques, physique, sciences de la vie et de la Terre. *Recherches en Éducation 21*.

Chevallard Y. (2008) Un concept en émergence : la dialectique des médias et des milieux. In G. Gueudet, G. & Y. Matheron (Eds), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2007* (pp. 344-366). Paris : IREM de Paris 7 et ARDM.

Chevallard Y. (2011) La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD. In C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vandebrouck, F. Wozniak. (Éds), *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp. 81-108). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Grenier D. (2012) La démarche d'investigation dans les situations de recherche pour la classe (SiRC). In J.-L. Dorier & S. Coutat (Eds.), *Enseignement des mathématiques et contrat social: enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT10, pp. 1354–1364). Université de Genève.

Lai S. (2003) Phénomènes didactiques et dynamiques relationnelles : une intégration possible. L'étude d'un cas d'observation de classes ordinaires. In Actes de la *XIIème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, Corps, 20 – 29 Août 2003.

Lai S. (2009). *La construction d'un curriculum d'Astronomie et Astrophysique, étude de son écologie mathématique dans le système scolaire italien.* Thèse, Université Aix-Marseille I-Université de Provence.

Lai S. & Polo M. (2002) Un outil théorique d'analyse de la contingence : le concept de milieu à l'épreuve. In *CD annexe aux actes de la XIéme Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, Corps, 21 – 30 Août 2001. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Lai S. & Polo M. (2012) Construction d'une culture scientifique pour tous : engagement de l'enseignant et de l'élève dans la rupture de pratiques habituelles. In J.-L Dorier. & S. Coutat (Eds.), *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT9, pp. 1213–1226). Université de Genève.

Lai S. & Polo M. (sous presse, 2017) *Démarche expérimentale et curriculum des mathématiques dans la transition primaire collège*. Communication présentée à l'école d'été de didactique des mathématiques, Paris 2017.

Maass K., Artigue M., Doorman L.M., Krainer K., Ruthven K. (Eds) (2013) Implementation of Inquiry-Based Learning in Day-to-Day Teaching. *ZDM The International Journal on Mathematics Education 45*(6), 779-795.

Margolinas C. (2002) Situations, milieux, connaissances : analyse de l'activité du professeur. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M.Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Ed.), *Actes de la 11ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Mercier A. (2012) Suivre une démarche d'investigation pour enseigner les relatifs, au collège : une proposition pragmatique et une expérimentation, en France. In J.-L. Dorier & S. Coutat (Eds), *Enseignement des mathématiques et contrat social: enjeux et défis pour le 21e siècle, Actes du colloque EMF2012* (GT10, pp. 1423–1431). Université de Genève.

Polo M. (2017) The Professional Development of Mathematics Teachers: Generality and Specificity. In G. Aldon, F. Hitt, L. Bazzinni, U. Gellert (Eds.), *Mathematics and Technology*. Advances in Mathematics Education, Springer International Publishing.

Vygotsky L. S. (1990/1934) *Pensiero e linguaggio: ricerche psicologiche* (ed. L. Mecacci), Bari: Laterza.

Watzlawick (1971). *Pragmatica della comunicazione umana*, Astrolabio, Roma.

Wozniak F. (2015) La démarche d'investigation depuis la théorie anthropologique du didactique : les parcours d'étude et de recherche. *Recherches en Éducation 21*, 152-166.

ANNEXE : Tableau Interactions - Problématisation

Activité	Position Professeur (**P**)	Position Élève (**É.**)	Le « rebondir » Professeur/Élèves
La mémoire de la classe activée par un questionnement sur des connaissances supposées connues : les points cardinaux et les ombres. **Familiarisation : lancement des questions**	**P.** Enonce le problème à étudier : déterminer les points cardinaux à l'extérieur. Pose la question : « comment nous nous orientons dans une île déserte sans la montre ni la boussole » ? **P.** Recueille les suggestions des Élèves sur les ombres	E. Donnent des réponses « scolastiques » sur les points cardinaux. Chaque élève s'interroge et élabore sa propre expérience par un récit imaginaire avec le titre : « Raconte la fois où tu as perdu ton ombre ». **É.** dessinent l'ombre.	Discussion sur les différents moyens de s'orienter et les points cardinaux. **Co-construction de l'idée** des ombres du Soleil comme une piste pour arriver à la réponse à la question d'orientation.
Les Ombres. Travail sur le mythe de la Caverne (Platon) Expériences scientifiques sur les ombres : aspect épistémologique du savoir en jeu. **Familiarisation : Lancement des questions**	**P.** Lit le mythe de la Caverne adapté à la classe. P. gère le retour sur les ombres **P** : relance la question « Pourquoi étudier les ombres pour l'orientation ? Á quoi sert la boussole qui permet de nous orienter ? »	**É**. racontent leurs récits, leurs suggestions sur le mythe de la caverne et posent des questions ; observent, dessinent et rédigent les rapports sur les résultats des expériences scientifiques, relatifs à la relation : position de la source de la lumière /longueur ombres.	L'interaction des hypothèses de la classe conduit à une nouvelle question : « Que sont les ombres ? » **Co-construction de l'idée** de l'ombre en tant que phénomène du réel
Observations et mesurage à l'extérieur : la pratique Définition de l'horizon astronomique. Mesure des ombres avec le gnomon. **Contextualisation**	**P.** Organise les expériences scientifiques et les observations de l'ombre du soleil à midi. Questionnement sur l'horizon sensible et astronomique, le gnomon, le mesurage, etc.	**É.** Dans la cour et pendant une période autour du midi solaire, par équipe avec des taches explicitées, ils recueillent les données : traces ombres/ mesures/tables/ dessins/photo.	On discute des résultats scientifiques des expériences d'où vient l'hypothèse d'enquête : s'orienter par les ombres du Soleil. **Co-construction de l'idée** des ombres produites par le soleil en tant que phénomène observable
Observations et mesurage à l'extérieur : la pratique Détermination de la ligne méridienne dans l'horizon astronomique. ***Mathématisation* de l'expérience**	**P.** Contrôle le travail des élèves, dans la cour pour les mesures des ombres. Pour l'identification de l'ombre, *la plus courte, et ensuite les points cardinaux*. Cette action est à la genèse du rapport ontologique le moi/et le monde.	E. notent l'ombre la plus courte qui ***identifie la ligne méridienne et le Soleil en méridien.*** Toute la classe participe à l'activité en autonomie et coopération.	**Co-construction de la ligne méridienne,** fixe dans l'espace, qui identifie le Nord, Sud et de la perpendiculaire pour les autres points cardinaux Est, Ouest.

Tableau Interactions – Algorithmisation

Simulation de l'horizon astronomique sur la Terre (parallèle à la cour) et orientation sur la « sphère ». (avec une orange et des cure-dents) **Lancement des questions et activité pratique.**	**P.** par une orange/Terre pose les questions suivantes : «*Avec deux cure-dents orienter la sphère selon le Nord/Sud. Où sommes-nous (lieu d'observation) sur la surface de la Terre ? Marquez-les avec un point*». **P.** guide les tentatives des élèves.	E. ont dans la main une orange et des cure-dents. Ils essayent en autonomie de marquer le Nord et le Sud, par rapport à l'orientation déjà établie à la cour et de placer l'observateur sur la Terre. Ils discutent et argumentent leurs choix.	Dans la discussion, on réalise une interaction P/É qui permet un aller et retour avec l'expérience d'observation vécue et conduit à la réponse recherchée. **Co-construction de la** position de l'observateur **dans le point le plus en haut dans la sphère (parallèle à la cour).**
Tracer la ligne méridienne Identifier le Méridien local. Passage de l'expérience concrète (mesure dans l'horizon astronomique) à la sphère.	**P.** demande de re*construire la ligne méridienne* locale sur l'orange/Terre pour représenter ce que l'on a fait sur l'horizon astronomique, à midi solaire. Après questionnement et prévisions : « **Quels sont les points sur la Terre ayant le *"midi" au même instant ?"***	E. Positionnent le triangle : gnomon ligne méridienne, direction des rayons du soleil sur l'orange/Terre Les élèves ont dans la main une orange et des cure-dents. Ils essayent en autonomie de marquer les points. Au départ ils tracent ces points au hasard. Mais quelques-uns tracent le bon point, discutent et argumentent leurs choix.	Par l'interaction P/É, on revient sur l'expérience d'observation vécue, qui permet de dépasser les tâtonnements des élèves, jusqu'à la bonne réponse.
Modélisation : mobilisation par l'élève des concepts mathématiques et référence à l'expérience concrète. **Recontextualisation**	**P.** Guide les tentatives des élèves, qui tour à tour essaient de marquer ces positions, se rapportant au signifié du midi solaire. Tous ceux qui observent le Soleil en méridien ***"au même instant*** ont la ***même*** position espace-temporel ».	E. identifient le Méridien local et tracent la ligne qui relie les pôles Nord/Sud et le pied de la verticale. Ils dessinent la Terre avec le Méridien local.	**Co-construction** et Institutionnalisation du Méridien local ligne section de la sphère/Terre avec le plan qui relie les pôles Nord/Sud et la verticale du lieu.

INVITATION À LA PLURALITÉ DU « FAIRE MATHÉMATIQUE »

MAHEUX[*] Jean-Francois

Résumé – Mettre l'accent sur l'activité mathématique pourrait conduire à penser aux DEI comme moyens de mettre en valeur la pluralité de ce que « faire des mathématiques » peut signifier. Une réflexion en ce sens m'est l'occasion de présenter brièvement une approche, en cours de développement, qui semble pouvoir se rapprocher des DEI tout en présentant des nuances importantes par rapport aux travaux en cours. Ses modalités peuvent soulever des questions intéressantes du point de vue des DEI en général.

Mots-clefs : activité, enseignement, apprentissage, épistémologie, paradigme

Abstract – Thinking in terms of mathematical activity might open to a way of looking at DEI (investigation and inquiry-based methods) as occasions to value the diversity of ways in which one can "do mathematics". Grounded in such reflection, I briefly introduce a new approach that seems related with DEI but also differs from known methods. Its specific can rise interesting questions for DEI.

Keywords: activity, teaching, learning, epistemology, paradigm

I. QUESTIONNEMENT D'ORIGINE

Peut-on enquêter ou investiguer sans apprendre ? L'école comme activité sociétale semble dans l'obligation d'organiser les apprentissages (administrativement) (Holzkamp, 2013). Une tendance rattachée par certains, tels Postman (1992), à une forme de technologisation de la société en général, et de l'apprentissage en particulier. On sait pourtant les contradictions évidentes que cela pose, par exemple en termes de curriculum, ou de planification (e.g. Roth et Maheux, 2015) : l'impossibilité fondamentale de rigoureusement mettre en œuvre un plan, une intention, des savoirs/compréhensions (prédéterminés) font de que les démarches d'enseignement-apprentissage sont perpétuellement « à risque ». Cela explique en partie le développement d'alternatives qui viennent questionner ce que j'appelle le paradigme de l'instruction.

En effet, nombreuses sont les propositions d'une éducation « centrée sur l'enfant » où les rôles « d'enseignant » et « d'élève » se diluent quand ils concernent plus l'instruction (la communication d'information) de l'un (ignorant) par l'autre (connaisseur). Papert (1981) par exemple propose essentiellement d'offrir aux enfants des environnements riches (en idées, manières de faire, etc.). De la même manière qu'être poète signifie faire de la poésie, c'est pour lui (simplement) par l'exercice de l'activité mathématique que l'on devrait éduquer l'élève à cette discipline. On pourrait aussi penser par exemple au travail de Voigt (e.g. 1985), ou celui de Cobb et ses collaborateurs (e.g. Cobb, Perlwitz et Underwood 1994), qui reformulent complètement l'idée d'apprentissage en termes de régularités d'interactions. Ces auteurs en viennent donc aussi à regarder l'éducation mathématique comme une chose que les enfants *font* avec l'adulte (plutôt que quelque chose qu'ils apprendraient de lui ou elle).

À la lumière de tels travaux, Proulx et moi-même avons proposé, ces dernières années, de marquer clairement le changement de paradigme dans lequel ceci nous engage. Nous avons entre autres proposé de mettre de côté les termes « savoir », « connaissance » (Maheux et Proulx 2014), puis « enseignement » et « apprentissage » (Maheux et Proulx 2017) pour parler simplement « d'activité mathématique ». Or, définir l'activité mathématique n'est pas simple. Certains y voient la « science des patterns » (e.g. Schoenfeld, 1994, qui insiste sur l'aspect inquisitoire) ou mettent l'accent sur la résolution de problème au sens large (e.g. Soifer, 2009) : des regards bien différente de ceux de Duval ou de Douady par exemple (voir

[*] Laboratoire épistémologie et activité mathématique – UQAM – Canada – jfmaheux@mail.com

Duval, 2002), qui parlent plutôt en termes de « jeux de cadres » ou de « changements de représentations ». Si la question de savoir ce qu'est l'activité mathématique se pose dans le cadre de la recherche, on peut aussi « entrer en classe » avec elle, et tenter d'y répondre de manière empirique et située. C'est un peu ce qui anime l'approche en cours de création dont je discute ici : voir l'éducation mathématique comme une démarche d'investigation où l'on cherche à « faire (des) mathématiques » sans avoir une idée nette et restrictive de ce que cela peut signifier. Une approche prenant appui sur le côté vague, ambigu, polysémique de l'expression pour demander quels sont les actions, les contextes, les orientations qui, visiblement, permettent de dire (de croire, de penser) que ce que l'on fait est « mathématique ». Et dans laquelle on parle non pas d'enseignement et d'apprentissage, mais de « faire ensemble » des mathématiques conduisant naturellement à « développer une familiarité » avec des idées et des manières de faire, de penser (au contact de celles-ci). Une telle conceptualisation touche des questions sensibles : je propose au lecteur d'aborder la posture mise de l'avant ici non pas comme « la » réponse à ces questions, mais comme une série de propositions (voire même de provocations) ayant pour but de nous aider à préciser nos postures respectives, à les expliciter et à les examiner ensemble en nous demandant comment cette diversité pourrait respectée, voire même valorisée. J'y reviendrai plus bas.

En fait, le développement toujours en cours de l'approche que je présente ici est devenu l'occasion d'une réflexion sur l'existence et la valeur de différentes formes d'expériences mathématiques. Je vois dans la mise en lien cette nouvelle approche avec les DEI l'opportunité de pousser cette réflexion, et même de promouvoir une vision pluraliste de l'activité mathématique : une invitation à nourrir des réponses multiples. Mon but ici est donc d'amorcer une réflexion en ce sens tout en présentant le travail, encore embryonnaire, de développement d'une approche qui y prend racine. L'approche en question me semble avoir beaucoup en commun avec les DEI, mais présente aussi des nuances importantes. J'y reviens dans la dernière section du texte.

II. EN FAVEUR D'UNE VISION PLURALISTE DE L'ACTIVITÉ MATHÉMATIQUE

Historiquement les contenus et frontières des mathématiques et de l'activité mathématique ont bougé (en lien, par exemple, avec le mystique), et c'est aussi le cas de leurs visées, méthodes, fondements, formes, et ainsi de suite. Les questions et débats que soulève la place des ethnomathématiques ou de l'algorithmique montrent que ceci est encore bien vivant. Les études ethnométhodologiques de Livingston (e.g. 1986) en révèlent un autre aspect : c'est aussi au quotidien, dans la lecture et l'écriture de textes mathématiques, que se (re)définie constamment la discipline telle que pratiquée dans le milieu des « mathématiciens professionnels ». Les mathématiques, de ce point de vue, sont littéralement ce qu'on (en) fait : the pudding is in the eating. Mais on sait par ailleurs que la notion même de « discipline », invention relativement récente, est à questionner (Chervel, 1988). Ceci invite à vouloir reconnaître et nuancer le travail mathématique réalisé dans différents contextes[1], y compris celui de la « classe ordinaire », et à réfléchir en termes des différentes expériences mathématiques proposées aux élèves. N'aurions-nous pas raison de vouloir diversifier ces expériences ? Peut-on penser à faire place en classe ou autour de la classe, de manière ponctuelle par exemple, a des approches permettant aux élèves de vivre les mathématiques de manière varies ?

Du point de vue des DEI, ceci suggère un travail recensement des approches (le modèle

[1] C'est une question assez vibrante dans les travaux en cours au Laboratoire. Voir par exemple le texte signé Maheux et al. (2019) sur la manière dont différents contextes d'activité mathématiques peuvent servir de « référent » pour ce qui se passe en classe.

sous forme de « potentiels » développé par Jean-Philippe Georget (2009) semble particulièrement intéressant ici), mais aussi une recherche sur les épistémologies qui animent différentes démarches, une réflexion sur la nature des mathématiques et de l'activité que l'on souhaiterait promouvoir ou qui se met en œuvre dans ces approches. Évidemment, « l'enquête » et « l'investigation » vont dans une direction particulière, assez différente de celle choisie par les promoteurs d'une « instruction directe » par exemple. Mais on sait aussi des nuances importantes entre différents dispositifs. Dans les ateliers *Tous chercheurs* de Ray (2015), l'objectif est « l'acquisition de méthodes, la découverte d'une activité de recherche [et] la construction de processus métacognitifs » (p. 900) afin de « faire découvrir la pratique actuelle des sciences » (p. 892). Ceci passe par le fait que « aucun savoir [n'est] visé a priori » : une approche qui offre donc une nuance importante avec celle des *Math à modeler* (Coffin et al., 2006) dont les situations-recherche ont pour objectif de « permettre à l'enfant de découvrir des concepts mathématiques liés à la preuve et plus généralement la démarche scientifique » (p. 7). On pourrait aussi, par exemple, penser aux *Ateliers ludiques mathématiques* de Pelay (2009) qui d'un côté cherche à offrir des situations de jeu où « les mathématiques sont a priori absentes » mais qui « débouch[ent] au cours de l'activité sur la mobilisation d'outils mathématiques imprévisibles pour les joueurs » (p.5). On sent bien sur des affinités, mais la diversité qui apparaît à travers les nuances et qui s'exprime aussi dans les façons dont l'activité mathématique est mise en œuvre (par le jeu, la réalisation de projets, la recherche d'hypothèse et de preuve, le débat…) n'a pas moins de valeur.

Regarder ces différences sous l'angle des expériences mathématiques offertes aux élèves plutôt qu'en regard de questions d'enseignement-apprentissage ouvre peut-être à une vision plus pluraliste de l'éducation mathématique. Il serait bon, me semble-t-il, de conceptualiser cette diversité de manière à la mettre en valeur, d'en faire la promotion. Évitant de chercher à présenter les DEI de manière monolithique, un intérêt se dessine pour les nuances et les variations permettant de nourrir cette diversité tout en travaillant sur les façons de « vivre ensemble » de différentes démarches. Mieux apprécier la texture, les visées, les modes de chacune est certes une piste à explorer, mais elle présente encore un danger de réification dont une réflexion sur le pluralisme de Nancy (1993) nous prévient. Suivant Nancy, il ne s'agit pas de « purifier » les approches, mais d'en célébrer les possibilités, les ambiguïtés, la capacité à se « mélanger » en prenant et en donnant à d'autres approches, etc. Un pluralisme qui nous met également sur la voie d'une acceptation encore plus large de différentes formes d'activités mathématiques, y compris les approches dites plus directes ou traditionnelles. Les DEI ne seraient-elles pas alors en meilleure posture par rapport aux pratiques dominantes ? Il me semble en effet que les DEI ne doivent pas se présenter comme des alternatives à toute épreuve qui cherchent à remplacer ce qui est en place, mais comme des approches permettant d'enrichir les expériences mathématiques qui sont offertes.

Dans la section suivante, je présente brièvement une approche en cours d'élaboration qui se développe autour de l'idée d'offrir aux élèves un type particulier d'expérience mathématique dans laquelle l'investigation joue un rôle important. La nature et la texture exactes de ce type d'expérience sont encore à préciser, mais une idée centrale est celle de « s'intéresser » à certains phénomènes mathématiques curieux. Dans cette perspective, l'enjeu est, on le verra, est d'amener les élèves à *contribuer* à l'activité mathématique du groupe de sorte que se dessine peu à peu ce que peut signifier « faire des mathématiques ». Je vois de nombreux liens entre cette approche et les DEI. En discuter les différences et les similarités, et dégager les questions que le travail actuel soulève me paraît une bonne manière de nourrir des discussions nous permettant d'avancer sur la question du pluralisme. Ce qui suit ne rapporte donc pas les résultats d'une étude achevée, mais montre premières étapes d'élaboration d'une approche que l'on pourrait (ou non !) considérer de la famille des DEI.

III. UNE APPROCHE EN DÉVELOPPEMENT

Au départ du développement de cette approche (pour laquelle je n'ai pas encore de désignation satisfaisante !), on trouve une réflexion épistémologique en lien avec le changement de paradigme mentionné plus haut. Dans nos travaux théoriques autour du faire|mathématique (Maheux et Proulx 2014, 2015), nous en sommes venus à adopter une perspective selon laquelle il n'y a pas de mathématiques en dehors de l'activité de ceux qui en/les *font*. Pour nous, la nature mathématique de ce « faire » est produite et reproduite dans l'activité même où les mathématiques se font. Une contradiction au sens dialectique du terme, et dont la résultante est la réalisation de traces de divers ordres qui vont nourrir cette activité, lui permettre de se poursuivre (ici ou ailleurs, maintenant ou plus tard). Ce que Kieren (1995) appelle « produire [bring forth] un monde de signifiance mathématique [mathematical significance] avec autrui dans une sphère de possibilités d'action [within a sphere of behavioural possibilities] » (p. 7). Partant de là, donc, à quoi pourrait ressembler une approche suivant laquelle on cherche simplement à « faire des mathématiques » avec des enfants ?

J'ai toujours été fasciné à la pensée de mettre les enfants en contact avec des idées mathématiques qui pourraient venir questionner l'image populaire (et souvent rapportée comme néfaste) des mathématiques comme discipline bien ordonnée, cohérente, certaine, utile, raisonnable, etc. J'ai débuté la conception et l'expérimentation d'une approche visant à faire avec des enfants des mathématiques autour de « curiosités » mathématiques comme le paradoxe de Banach-Tarski ou les nombres p-adiques. Le paradigme de l'instruction est remplacé par une conceptualisation « contributive » de l'activité mathématique dans laquelle les questions d'enseignement et d'apprentissage « classiques » n'ont pas de pertinence. Le choix du mot « contribution » marque une distinction par rapport aux approches dites « participatives » dont l'étymologie rend bien compte : alors que participer c'est « prendre [une] part » (*part* + *capere*), contribuer c'est « mettre ensemble » (*con* + *tribuere*). L'enjeu constitue à « faire ensemble » en cherchant à concourir à l'activité qui se met en place. On peut alors évidemment détailler différents types de contributions et certains rôles. Comprendre de ce point de vue l'activité mathématique qui se développe dans cette approche est au cœur du projet de recherche auquel je travaille actuellement.

Concrètement, les séances débutent par la présentation, par l'animateur, d'une idée mathématique (un peu surprenante) suivie d'une question ouverte du genre « qu'en pensez-vous ? ». S'en suit une série d'échanges avec les participants, à qui l'animateur peut suggérer des « tâches » permettant un travail individuel ou en sous-groupe et des mises en commun. La préparation des séances se fait par une analyse du potentiel des sujets choisis, et la préparation de questions, d'exemples ou d'outils pouvant intervenir. Il s'agit plus d'une *préparation* de l'animateur (je reviens sur ceci à la section suivante) que d'une « planification » (Maheux, 2017). Il est donc tout à fait envisageable de s'écarter fortement de ce qui a été anticipé, l'essentiel étant de « faire mathématique » autour (à partir) de certaines idées.

Ainsi, lors d'une expérimentation récente avec une classe du secondaire (enfant de 13-14 ans), nous avons débuté en discutant (environ 20 minutes) une série d'images de fractales avec comme point de départ la question « Que voyez-vous dans ces images ? ». Très rapidement, une foule d'idées mathématiques ont été évoquées : présence de figures géométriques, de répétitions, d'isométries, d'homothéties, etc. Mais en même temps, les élèves (à qui l'on présentait des fractales pour la première fois) ont aussi fait de nombreux liens avec des objets du quotidien (un flocon de neige, une antenne télé, des pylônes, etc.). Tout en acceptant avec enthousiasme ces observations, l'animateur s'efforce alors de garder la conversation sur le terrain mathématique, que ce soit en demandant directement aux élèves de faire des commentaires en ce sens, ou en leur posant des questions plus précises à propos

des images (e.g. « Pouvez-vous identifier le motif de base ici ? » ou « Qui peut nous dire comment faire pour produire ce dessin ? »). À travers cette discussion un langage s'est peu à peu installé pour parler de la disposition des motifs, de l'idée de dénombrement et d'infini : « Je vois un modèle qui se répète », « c'est régulier 1,2,3… fois… à l'infini », « le motif devient de plus en plus petit », « l'image se répète de plus en plus : 1 carré, ensuite 2, ensuite 4, 8… », « dans celui-là [ensemble de Julia] il n'y a pas de symétrie ».

La conversation devient ici l'occasion de faire des nuances et d'apporter des précisions concernant différents types d'objets fractals[2]. L'animateur reformule certains propos des enfants pour présenter le concept d'autosimilarité (« ici on retrouve l'objet a différentes échelles, il conserve toujours sa forme … est-ce qu'on le voit ici ? »). L'animateur décide ensuite de mettre les élèves en action individuellement ou en duo, donnant ainsi à chacun l'occasion de mettre la main à la pâte. Il prend avantage de la contribution d'un des enfants, qui tentait de donner des caractéristiques de la figure « suivante » dans une série, pour leur proposer d'essayer de tracer l'itération suivante de quelques fractales (courbes de Koch), puis de tenter de créer leur propre fractale. Une bonne partie de la séance s'est ensuite organisée autour de ces dessins, alors que nous aidions, confirmions, relancions les participants. Ceux pour qui le travail fut vite terminé ont été invités à aider leurs collègues. Profitant de ce que ce groupe fait partie d'un projet dans lequel ils font de la programmation (avec le logiciel Scratch), nous avons poursuivi le travail sur le terrain de la construction algorithmique de fractales (« On pourrait certainement les dessiner dans Scratch, non ? On ferait comment ? »). Des élèves ont alors amené l'idée de boucles itératives explorées précédemment. L'animateur leur a alors fait une démonstration de la manière dont on peut produire un motif de base et le traiter ensuite comme un module auquel on passe une variable (ici : la dimension des segments) : une nouveauté pour la majorité des enfants. Le groupe s'est alors remis au travail, avec une grande diversité dans les projets, mais aussi dans les rythmes de production et le niveau de sophistication. Certains se sont limités à « manuellement » créer les premières itérations d'un motif, d'autres l'on fait en utilisant des boucles, et d'autres encore ont exploité l'idée des modules. Cette fois encore, les enfants ayant terminé rapidement ont été invités à aider leurs pairs, ou à explorer davantage (par exemple en modifiant leur programme : changer le motif de base, l'orientation de certaines parties, leur nombre, etc.).

En guise de conclusion, un bref retour en groupe sur l'activité est l'occasion d'une mise en commun de productions, observations et réflexions. L'animateur repère des contributions à mettre en scène. Il s'agit de souligner différents aspects du travail mathématique accompli, par exemple ou niveau de la créativité, de la persévérance, de l'ingéniosité, de la sophistication, de l'efficacité, etc. Une certaine validation des productions pourrait alors se faire (par l'animateur ou par le groupe), mais l'esprit est plutôt à l'exposition des participants aux modes des possibles de l'activité.

Cette approche, on le voit bien, ressemble à plusieurs égards à des DEI avec lesquels nous sommes familiers, mais s'en distingue également de manière importante. Comme dans le cas des ateliers *Tous chercheurs* de Ray (2015) aucun savoir n'est visé a priori, mais l'objectif ici ne concerne pas non plus l'acquisition de méthodes, et ne vise pas à faire découvrir ce qui serait « la pratique » mathématique en faisant référence au travail des mathématiciens professionnels. On retrouve aussi quelque chose de semblable à l'étude d'idées mathématiques « nouvelles » que cherchent à permettre Charlot et son équipe (2015), mais sans se restreindre à la formule du débat, et sans sentir le besoin de faire une

[2] On voit que d'autres pistes auraient pu être empruntées, comme l'exploration de suites numériques. Ceci est d'ailleurs devenu l'objet de la séance suivante, initiée par un retour sur certaines observations « mises de côté » lors de la séance autour des fractales.

institutionnalisation de ces idées. La mise en route de pratiques liées à l'argumentation, par exemple, n'occupe pas non plus une position centrale, même si les observations à cet égard sont évidemment pertinentes. De même, on reconnaît l'idée d'un enrichissement du milieu décrit par Lagrange et ses collaborateurs (2015), et l'aspect collaboratif qu'ils mettent de l'avant trouve aussi très bien sa place ici (e.g. en formant à l'occasion des sous-groupes s'intéressant à des aspects particuliers, et partageant ensuite leurs observations). Mais la mesure dans laquelle tous les participants en retirent la même chose ou apprécient pleinement le phénomène ainsi éclairé nous importe peu.

On peut difficilement parler ici de « résolution de problèmes » ou de « problèmes ouverts » dans la mesure où il n'y a pas vraiment de « problème » a priori. Une foule de questions émergent et certaines peuvent, en effet, devenir des « problèmes » (ouverts ou fermés) sur lesquels on se penche. On est donc dans un modèle bien différent de celui des *Math à modeler* (Coffin et al. 2006) où « l'objectif [des] situations-recherche sera de permettre à l'enfant de découvrir des concepts mathématiques liés à la preuve et plus généralement la démarche scientifique. » (p. 7). De même, on ne pourrait soutenir que l'enjeu est, comme dans la *Démarche d'investigation et explication* de Morselli, Panucci et Testera (2015), de faire formuler et justifier des conjectures, produire, présenter, défendre, et examiner des solutions, etc. Alors que pour eux « l'apprentissage visé est à un double niveau : le niveau contenu (des objets mathématiques) et aussi le niveau méta (apprendre à expliquer et justifier) » (p. 139), nous ne « visons » pas l'apprentissage, mais l'activité mathématique elle-même. En même temps, on notera aussi que dans notre cas les mathématiques sont très explicitement présentes, au contraire de ce que propose Pelay (2009) avec ses *Ateliers ludiques* dans lesquels les mathématiques doivent sembler a priori absentes. On pourrait évidemment continuer les comparaisons avec des approches comme *Dream, Maths en jeans, Hippocampe*, les *Ateliers de recherche en mathématiques*, les *Problèmes sans mots*, et ainsi de suite.

Soulignons aussi les questions qui se posent concernant cette approche et ce qui serait la « classe ordinaire ». La facture très ouverte de l'approche pose un défi par rapport aux contextes où des contenus précis, ou des approches données, voudraient être mises de l'avant. Il me semble possible, sur la base de nos expérimentations, de faire place à certains éléments pré-décidés (par exemple : en amorce), mais l'approche incite généralement à en départir, plutôt qu'à y converger. D'autre part, le rôle de l'animateur, encore bien mal défini mais qu'on sent crucial et complexe, contraste aussi avec ce qu'on a l'habitude d'envisager pour la classe. Rappelons cela dit que l'idée ici n'est pas de proposer une « pédagogie » ou de remplacer ce qui se fait en classe ordinaire. On est peut-être plus proche des contextes de travail « parascolaires ». Ainsi, la thèse de Pelay (2011) ou le travail plus général sur la médiation (l'article de Paul Rasse (2000), par exemple, qui discute le travail de mise en relation du champ de la « culture » et du « public ») deviennent particulièrement pertinents, mais nous éloignent un peu des problématiques généralement liés aux DEI.

IV. REGARD DIDACTIQUE…

On s'interrogera, bien entendu, sur la place de la didactique dans cette approche. Son rôle et ses modalités soulèvent des questions au cœur de nos préoccupations actuelles. Sans entrer maintenant dans une analyse de ceci, prenons un moment pour aborder la délicate question du le rôle de l'animateur. Je préfère d'abord ce terme à celui « d'enseignant » en raison du changement de paradigme discuté à la section I, mais aussi parce que son rôle, comme le mot l'indique, est de « rendre vivante » l'activité mathématique. En effet, le rôle de l'animateur ici n'est pas de « guider » les participants vers certaines conceptualisations, ou certaines manières de faire. La formulation d'hypothèses, l'argumentation, la démonstration, de même

que l'expérimentation, la représentation ou la modélisation par exemple, sont toutes des manières de faire des mathématiques qui peuvent intervenir lors du travail autour de certaines idées. Mais il ne s'agit pas de les mettre en œuvre de façon spécifique. On les voit plutôt comme des ressources, des moyens de contribuer à l'activité en cours : un parallèle intéressant avec ce que présente Pelay (2009), qui pense aux idées mathématiques comme « un moyen pour jouer » (p. 6). Elles sont pour ici un moyen de… faire des mathématiques !

Pelay remplace aussi le terme enseignant par celui d'animateur, qu'il présente comme « la personne qui organise le jeu […] et dont le rôle est] de faire vivre le jeu, de le réguler, d'arbitrer si nécessaire, de calmer les enfants, etc. » (p. 7). Par contre, cette position très « en retrait » de l'activité mathématique des élèves ne nous convient pas. Le retrait est possible pour Pelay en faisant le pari que le jeu lui-même sera porteur sur le plan mathématique. Nous souhaitons plutôt que la présence d'idées mathématiques émerge de l'activité conjointe, des contributions de tous les participants, incluant l'animateur. Certaines idées sont proposées soutenues, voire même valorisées par l'animateur (et d'autres participants). Nous voyons ainsi l'animateur « au milieu », avec les enfants, à s'intéresser avec eux à certaines idées, comme l'explique si bien Kieren (1995). C'est aussi une des raisons pour lesquels nous ne considérons pas les ces activités comme des problèmes, ou des situations de recherche.

Du point de vue éducatif, l'enjeu n'est pas d'en faire de « bons chercheurs », d'espérer qu'ils développent une certaine autonomie par rapport à l'activité mathématique, ou qu'ils adoptent des habitus liés à la formulation et la validation d'hypothèses, par exemple. Il ne s'agit pas non plus de mettre en place de manière stricte des conditions visant à faire fonctionner certaines idées, ou de conduire à certaines conceptualisations. On envisage plutôt les mathématiques comme une *activité* (sociale, culturelle, historique autant qu'individuelle) à laquelle les enfants sont appelés à prendre part, un « jeu » auquel on les invite à jouer de différentes manières. L'animateur a pour tâche « faire vivre » certaines de ces possibilités dans le groupe en faisant en sorte que les enfants contribuent à l'activité mathématique en cours. Ces possibilités sont conçues dans l'idée que le groupe *s'intéresse* à certains choses. La dimension d'enquête/investigation est partagée entre l'animateur et le groupe : les séances sont conçues autour d'un thème et plusieurs pistes de discussions, plusieurs activités sont envisagées sur la base d'une analyse préalable dont l'objectif principal est d'identifier des relances possibles de l'activité : concepts liés, applications possibles, ambiguïtés, similarités et différences avec d'autres sujets (mathématiques ou autres), développement historique, différences culturelles… et ainsi de suite. Il n'y a alors rien d'embêtant à ce que l'animateur fasse à l'occasion un bref « exposé », le but étant de nourrir l'activité et non de « transmettre » un savoir aux élèves.

La grande flexibilité permise par l'approche est un peu le pendant situationnel du phénomène de dévolution : c'est pour ainsi dire la situation qui doit s'approprier les contributions des participants, et trouver moyen de les faire fonctionner. Mais il faut aussi réaliser que par « situation » on parle évidemment de l'animateur de la séance et des participants eux-mêmes. Dans le cas de la séance fractale, la richesse et le potentiel sur le plan mathématique des idées mises de l'avant lors de la discussion initiale ont été fascinants et surprenants quand on pense au parcours mathématique « typique » des enfants qui y ont participé. Ceci implique par contre que plusieurs des pistes envisagées soient abandonnées. Nous avions par exemple pensé faire écrire des définitions par les participants, ou aborder la notion de dimension d'où les fractales tirent leur nom. Dans les faits, c'est surtout une question de « timing » reposant, encore une fois, sur l'ensemble du groupe : il faudra mieux réfléchir aux défis particuliers que cela pose, par exemple du point de vue de ce que Gandit, Morselli et Sokona (2015) ont rapporté sur les rôles de chacun au sein des DEI. Enfin, on pourrait discuter à fond la conclusion des séances, où ce qui serait l'institutionnalisation est

ici, à nouveau, plutôt lié à *l'exposition* des participants au travail mathématique qu'à la formalisation. Lors d'une autre des séances réalisée autour des irrationnels, l'animateur a ainsi conclu en présentant rapidement une preuve de l'irrationalité de $\sqrt{2}$. Le but était d'exposer les participants a une idée nouvelle qui résonne en partie avec ce a été fait, et qui ouvre de nouvelles pistes, de nouvelles possibilités (pouvant être le sujet d'une prochaine séance).

Bref, cette approche se donne pour but de faire vivre des expériences mathématiques aux participants à partir de ce qu'ils contribuent, « faire vivre » au sens de faire expérimenter quelque chose, mais aussi au sens de « donner vie ». L'animateur a un rôle clé, mais changeant. Il est indispensable, mais aucune de ses interventions n'est essentielle, et aucune ne lui est réservée non plus, car avec le temps d'autres participants pourraient tout à fait les prendre en charge.

V. CONCLUSION : LES DEI COMME DIFFÉRENT TYPES D'EXPÉRIENCES MATHÉMATIQUES

Du point de vue de ce que j'ai présenté ici, les démarches d'enquête et d'investigation offrent certains types d'expériences mathématiques dont il serait intéressant de travailler les nuances, et les variations possibles. J'ai par ailleurs souhaité illustrer le potentiel de cette perspective en présentant le cas d'une approche en développement qui origine d'un (désire de) détachement du paradigme de l'instruction. Peut-être serait-il pertinent, dans le cadre de ce groupe de travail, de réfléchir à une manière de présenter succinctement les éléments qui caractérisent chacune des approches : points de départ, modalités, durée, contextes, visée, etc. On pourra peut-être ainsi mieux apprécier ces différents types d'expériences, et discuter activité de classe et l'animation scientifique (dont l'approche présentée ici semble se rapprocher). Ceci pourrait fournir un terreau fertile pour réfléchir à la manière dont différentes formes d'activité mathématique en contexte éducatif s'accompagnent (probablement ?) de diverses manières d'intervenir didactiquement. Et concevoir, peut-être, qu'il s'agit là d'une diversité à nourrir.

VI. POST-MORTEM : DEI, ACTIVITE MATHEMATIQUE ET APPRENTISSAGE

Au cours des dix dernières années, Jérôme Proulx et moi-même avons peu à peu développé une certaine manière d'approcher l'activité mathématique en contexte éducatif (voir aussi le texte de Proulx, ici dans les actes du colloque). En lien avec cette perspective, nous avons créé des approches nous permettant (peut-être seulement de manière occasionnelle : là n'est pas la question pour nous) de faire des mathématiques en classe et qui, s'ils sont inspirés par nos travaux, se veulent aussi inspirant pour eux. Ainsi, il s'agit pour nous d'avancer sur des questions de recherche qui ne sont pas nécessairement reliées à l'application (immédiate, générale, réaliste, etc.) en classe. Dans nos travaux, nous ne nous étions pas intéressés jusqu'ici de manière particulière aux DEI, mais nous avons récemment réalisé la présence de certains parallèles. Dans quelle mesure nos entrées sur l'investigation et l'exploration mathématiques sont-elles éclairées par et/ou éclairante pour les DEI ? Je retiens de nos échanges dans ce groupe de travail que l'approche que je développe peut difficilement s'intégrer aux travaux actuels autour des DEI en raison, principalement, des questions et des défis qui, de part et d'autre, nous animent. Nos manières de nous intéresser à l'investigation et l'exploration mathématiques ne sont pas incompatibles : elles appartiennent à des mondes différents. Il faut donc, je crois, regarder ce qui proposé de part et d'autre avec une certaine distance, une certaine prudence, pour éviter les simplifications rapides.

Ainsi, certains thèmes en lien avec ce que je discute dans ce texte ont fait l'objet de d'échanges plutôt vigoureux. Il y a par exemple la question de l'enseignant/animateur et de l'apprentissage. J'ouvre ce texte en demandant « peut-on enquêter sans apprendre ? » et je mentionne plus loin avoir adopté une posture dans laquelle on ne *parle* pas d'apprentissage, mais de « développer une familiarité » avec des idées et des manières de faire en « faisant ensemble » des mathématiques. Réfléchir à la différence entre « apprendre » et « devenir familier » est fondamental pour moi[3] : c'est une question du type de celles qui motivent le travail de recherche dont l'approche présentée ici découle. Mais c'est aussi une question qui peut sembler assez peu pertinente par rapport à ce qui anime la plupart des travaux autour des DEI. De même, si le contexte scolaire et ses contraintes posent des questions fondamentales pour plusieurs, elles sont pour moi plutôt secondaires : pas inintéressantes, mais pas cruciales.

Post mortem, ce sont des évidences. Mais des évidences qui, en tant que telles, comme l'écrivais Flaubert, aveuglent quand elles ne crèvent pas les yeux. Je crois fermement qu'il s'y cache une diversité qui, du point de vue d'une invitation à la pluralité, réserve encore bien des défis.

RÉFÉRENCES

Charlot G., Lecorre T., Legrand M., Leroux A., Di Martino H. (2015) Le débat scientifique en classe : une démarche d'investigation collective pour une culture scientifique commune. In Theis L. (Ed.), *Actes du colloque EMF2015* (pp.847-860). Alger : Université d'Alger.

Chervel A. (1988) L'histoire des disciplines scolaires. *Histoire de l'éducation 38*(1), 59-119.

Cobb P., Perlwit, M., & Underwood D. (1994) Construction individuelle, acculturation mathématique et communauté scolaire. *Revue des sciences de l'éducation 20*(1), 41-61.

Coffin F., Dupraz M., Gravier S., Manin S. et Payan C. (2006) « Math à modeler ». *Actes du colloque EMF2006.* http://emf.unige.ch/files/5914/5390/4232/EMF2006_GT7_Coffin.pdf

Duval R. (2002) Comment décrire et analyser l'activité mathématique ? *Actes de la journée en hommage à Régine Douady*, 7, 83-105.

Gandit M., Morselli F., & Sokona Bekaye S. (2015) Rôles et responsabilités des professeurs et des élèves dans les démarches d'investigation et dans la résolution de problèmes. In Theis L. (Ed.), *Actes du colloque EMF2015* (pp. 829-836). Alger : Université d'Alger.

Georget J.P. (2009) *Activités de recherche et de preuve entre pairs à l'école élémentaire : perspectives ouvertes par les communautés de pratique d'enseignants*. Thèse. En ligne : https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00426603

Holzkamp K. (2013) The fiction of learning as administratively plannable. In E. Schraube & U. Osterkamp (Eds.), *Psychology from the standpoint of the subject* (pp. 115–132). Palgrave Macmillan.

Kieren T. (1995) Teaching in the middle: Enactivist view on teaching and learning mathematics. *Présentation au Queens/Gage Canadian National Mathematics Leadership Conference*, Queens University.

Lagrange J.B., et al. (2015) Investigation, communication et synthèse dans un travail mathématique : un dispositif en lycée. In Theis L. (Ed.), *Actes du colloque EMF2015*, pp. 881-890. Alger : Université d'Alger.

Livingston E. (1986) *The ethnomethodological foundations of mathematics*. Routledge.

Maheux J.F., & Proulx J. (2014) Vers le faire mathématique. *Annales de didactique et de sciences cognitives 19*, 17-52.

Maheux J.F., & Proulx J. (2015) Doing|mathematics: Analysing data with/in an enactivist-inspired approach. *ZDM 47*(2), 211-221.

[3] Par exemple : se familiariser c'est se mettre en relation et faire passer dans l'ordinaire, le commun.

Maheux J.F., & Proulx J. (2017) Mathematics Education (Research) Liberated from Teaching and Learning. *The Mathematics Enthusiast 14*(1-2), 78-99.

Maheux J.F. (2017) Planning vs Preparing: Toward an anticipative approach to mathematics education. *Présentation au congrès Anticipation*. Londres.

Maheux J.F., Proulx J., L'Italien-Bruneau R.A. & Lavallée-Lamarche M.L. (2019) Referring and proffering: an unusual take on what school mathematics is about. *Actes du colloque CERME2019*, Utrecht.

Morselli F., Panucci E., Testera M. (2015) Démarche d'investigation et explication au collège. *Recherches en éducation 21*, 138-151.

Nancy J.-L. (1993) Éloge de la mêlée. *Transeuropéennes 1*, 8-18.

Papert S. (1981) *Jaillissement de l'esprit : ordinateurs et apprentissage*. Flammarion.

Pelay N. (2009) L'activité mathématique ludique. *Actes du colloque EMF2009*. http://fastef.ucad.sn/EMF2009

Pelay N. (2011) J*eu et apprentissages mathématiques : élaboration du concept de contrat didactique et ludique en contexte d'animation scientifique.* Thèse. En ligne : https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00665076

Postman N. (1992) *Technopoly: The surrender of culture to technology*. Knopf.

Rasse P. (2000) La médiation, entre idéal théorique et application pratique. *Recherches en communication 13*(13), 61-75.

Ray B. (2015) Quelle place pour une démarche d'investigation en mathématiques dans le cadre d'un atelier de recherche interdisciplinaire ? In Theis L. (Ed.), *Actes du colloque EMF2015* (pp. 891-902). Alger : Université d'Alger.

Roth W. M., & Maheux J. F. (2015) Risk: A Fundamental Condition of Doing Mathematics. *The Mathematics Enthusiast 12*(1), 203-225.

Schoenfeld A. H. (1994) Reflection on Doing and Teaching Mathematics. In A. H. Schoenfeld & A.H. Sloane (Eds), *Mathematical thinking and problem solving*. Routledge.

Soifer A. (2009) *Mathematics as problem solving*. Springer.

Voigt J. (1985) Patterns and routines in classroom interaction. *Recherches en didactique des mathématiques 6*, 69-118.

CO-CONSTRUIRE DES CONNAISSANCES MATHEMATIQUES ENTRE L'ENSEIGNANT ET LES ELEVES : COMMENT PILOTER L'APPROCHE PAR UNE DEMARCHE D'ENQUETE ET D'INVESTIGATION ?

MANUEL[*] Dominic –SAVARD Annie

Résumé – Ce texte vise à apporter des précisions théoriques quant aux moyens de piloter la démarche d'enquête et d'investigation dans les cours de mathématiques. En utilisant les quatre phases du modèle de Marshall et al. (2009), nous avons analysé 10 leçons dans des classes de 7e et 8e années. Les résultats révèlent que les quatre manières de piloter la DEI (structurée, guidée, semi-ouverte, et ouverte) peuvent être déployées dans trois types d'activité : une tâche mathématique, une résolution de problème, et l'investigation d'une situation réelle.

Mots-clefs : démarche d'enquête et d'investigation, tâche mathématique, résolution de problème, investigation de situations réelles

Abstract—This text aims to bring theoretical clarification on ways to implement Inquiry-based Learning (IBL) in mathematics classrooms. Using Marshall's (2009) four phases, we analyzed 10 lessons in grades 7 and 8 classrooms. Results show that the four ways of implementing IBL (structured, guided, semi-opened and opened) can be used in three types of activities: a mathematical task, problem-solving, or a real-life investigation.

Keywords: inquiry-based learning, mathematical task, problem solving, real life investigations.

I. INTRODUCTION

Depuis plusieurs décennies, un des champs d'intérêt en didactique des mathématiques est la création de situations d'enseignement et d'apprentissage innovantes dans lesquelles les élèves seraient en mesure d'apprendre tout en expérimentant l'activité du mathématicien à travers la résolution de problèmes et l'investigation (Sierpinska & Lerman, 1996). Il convient de souligner que l'enseignement par la démarche d'enquête et d'investigation (DEI) est une des actualisations de ce champ d'intérêt (Mass & Artigue, 2013). La DEI se veut ainsi une approche d'enseignement et d'apprentissage durant laquelle les élèves jouent un rôle plus actif dans l'apprentissage des contenus (Aulls & Shore, 2008). Effectivement, ce paradigme d'enseignement et d'apprentissage s'éloigne de l'approche traditionnelle dans laquelle l'enseignant explique les concepts, présente des exemples et donne des exercices. Il s'oriente plutôt vers un processus de collaboration entre les élèves et l'enseignant (Dorier & Maass, 2014).

La DEI est suggérée comme une approche d'enseignement et d'apprentissage à privilégier afin que les élèves puissent développer les compétences nécessaires pour s'adapter dans la société du 21e siècle (Rocard et al., 2007). Ceci a pour effet d'augmenter les attentes envers les enseignants, car ces derniers doivent créer des conditions d'apprentissage spécifiques qui ne sont pas connues par la plupart de ceux-ci (Kazemi & Stipek, 2001). D'ailleurs, dans leur synthèse sur l'utilisation de la DEI à grande échelle en mathématiques et en sciences, Maass et Artigue (2013) ont confirmé que l'approche demeure toujours peu utilisée en salle de classe. Ces auteurs ont énoncé deux hypothèses qui peuvent expliquer cette constatation, soient : peu d'attention est attribuée au processus d'implantation et de dissémination de la DEI en salle de classe, et les liens entre les théories et la mise en œuvre de la DEI ne sont pas clairement établis.

[*] Université McGill – Canada

Les études sur l'utilisation de la DEI en classes ont principalement été menées dans les cours de sciences et des sciences sociales en second lieu (Aulls & Shore, 2008). Les études qui s'inscrivent explicitement de la DEI en classe de mathématiques sont récentes[1]. À cet effet, nous avons repéré dans les écrits quelques points à soulever. Premièrement, la plupart des recherches que nous trouvons touchent à la fois les sciences et les mathématiques. Nous suggérons que cet aspect pose un défi, car bien que les deux disciplines soient assez similaires, les épistémologies des mathématiques diffèrent de celles des sciences (Cariou, 2015). Deuxièmement, nous avons remarqué qu'il ne semble pas y avoir de définition de la DEI propre à la didactique des mathématiques. Une définition existe dans l'Encyclopédie de la didactique des mathématiques (Dorier & Maass, 2014), mais celle-ci fait référence à la fois aux mathématiques et aux sciences. Tout comme les fondements, les définitions sont aussi empruntées aux sciences (Cariou, 2015). Finalement, il semblerait que les visions quant à la DEI diffèrent entre les cultures langagières. En fait, les anglophones mettent l'accent sur la résolution de problèmes, tandis que les francophones mettent l'accent sur l'investigation d'une situation-problème (Cariou, 2015). D'importantes assises théoriques semblent être absentes, ce qui peut expliquer pourquoi les enseignants de mathématiques utilisent rarement la DEI. Les différentes interprétations des définitions et visions de la DEI peuvent contribuer au fait que les enseignants sont confus et ne savent pas comment piloter cette approche en classe (Chichekian, Savard, et Shore, 2012).

Dans le cadre de ce texte, nous tentons d'apporter des précisions théoriques sur la DEI en nous intéressant aux moyens de piloter cette approche de sorte qu'elle favorise la co-construction des connaissances entre l'enseignant et les élèves. En nous inspirant de définitions proposées par Chichekian, Savard, et Shore (2012) et Dorier et Maass (2014) ainsi que les éléments communs dans les définitions de la DEI de Cariou (2015), nous proposons une définition de travail de la DEI propre aux mathématiques. Nous la présentons dans la prochaine section. Nous avons analysé des leçons de mathématiques enseignées par des enseignants francophones et anglophones de 7^{e} et 8^{e} année dans deux provinces canadiennes afin d'étudier les différents moyens de piloter la DEI en mathématiques. Nous présentons les résultats préliminaires de cette analyse dans ce texte.

II. CADRE CONCEPTUEL

Il existe plusieurs définitions et interprétations de la DEI. Aulls et Shore (2008) ont analysé plus de 1500 définitions de la DEI et ont noté que celles-ci pouvaient être classées en trois catégories : la DEI y est décrite soit comme une approche d'enseignement, soit comme un processus, ou soit comme un objet d'apprentissage (la découverte de quelque chose). Cariou (2015) a analysé dix définitions qu'il a identifiées comme étant les plus utilisées en sciences et en mathématiques et a conclu que quatre critères étaient présents dans presque toutes les définitions. Ces critères sont : une invitation de l'investigation par une interrogation ; une part de responsabilité conceptuelle laissée aux élèves ; l'existence de débats, de partages d'idées argumentées ; et l'existence de productions et de réalisations par les élèves. Afin d'apporter davantage la précision quant aux différentes visions et interprétations de la DEI, Chichekian et al. (2012) ont proposé un lexique contenant des définitions des termes fréquemment utilisés. Nous nous sommes inspirés de leur

[1] La conférence EMF est la seule conférence que nous connaissons qui contient un groupe de travail sur la DEI en mathématiques, et ce depuis 2012 (Gandit, Morselli, & Sokona Bekaye, 2015 ; Matheron, Morselli, René de Cotret, & Schneider, 2012).

définition de la DEI ainsi que des éléments soulignés par Cariou pour proposer la définition suivante de la DEI en mathématiques :

> Approche d'enseignement et d'apprentissage dans laquelle les élèves, individuellement ou en petits groupes, guidés par l'enseignant, co-construisent des idées conceptuelles et des processus (stratégies, habiletés) propres aux mathématiques. Cette approche comprend une démarche qui consiste en : l'investigation réfléchie de questions authentiques proposées par les élèves ou l'enseignant et provenant d'une tâche ouverte et complexe qui peut prendre plusieurs formes telles qu'un problème, l'observation de situations de la vie réelle ou mathématique, etc. ; la production de solutions réfléchies et créatives qui peut être faite en consultant diverses sources ; les dialogues entre l'enseignant et les élèves des productions produites des élèves ; et la mise en commun des idées, des processus mathématiques ressortis lors de l'investigation et des liens tissés entre différentes idées mathématiques, entre les idées mathématiques et le contexte à l'étude, et entre les mathématiques et d'autres contextes.

Selon cette définition, nous considérons toute d'approche d'enseignement (p. ex., approche par problème, par projet, etc.) comme une DEI. Ces approches n'incluent pas les deux extrêmes : l'approche traditionnelle durant laquelle l'enseignant transmet les connaissances aux élèves, et l'apprentissage par découverte durant laquelle l'élève effectue ses propres investigations sans l'aide de l'enseignant, car il n'y a pas de co-construction entre l'enseignant et l'élève. La figure 1 représente un continumm des différentes formes de la DEI.

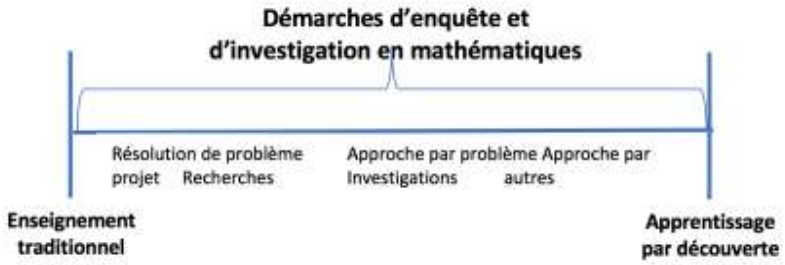


Figure 1 *– La DEI en mathématiques*

Kremer et Schluter (2006, cité dans Bruder & Prescott (2013)) ont décrit trois manières de piloter la DEI en mathématiques : structurée, guidée ou ouverte. Ces manières varient en fonction des rôles de l'enseignant et des élèves à poser la question ou le problème et à chercher des solutions. À la manière de la DEI structurée, l'enseignant propose la question ou le problème ainsi que la stratégie à utiliser par les élèves. À la manière de la DEI guidée, l'enseignant propose aux élèves la question ou le problème, mais les élèves doivent mobiliser des stratégies de leurs choix pour trouver et même évaluer des solutions. À la manière de la DEI ouverte, les élèves déterminent leurs propres questions et stratégies pour trouver les solutions.

Le modèle 4E x 2 de Marshall, Horton, et Smart (2009) a été conçu pour représenter un processus d'implantation de la DEI pour les mathématiques et les sciences en salle de classe. Ce modèle, qui a été validé, comprend trois principales composantes : l'évaluation formative, la réflexion métacognitive, et l'enseignement par la DEI qui comprend quatre phases. Dans la première phase nommée *engager*, l'enseignant sollicite les connaissances antérieures des élèves, les motive et les intéresse au problème et cherche à leur faire développer un questionnement scientifique. Dans la deuxième phase nommée explorer, les élèves font des prédictions, planifient et mettent en place des stratégies, et collectent des informations et des arguments. Dans la troisième phase nommée *expliquer*, les élèves interprètent, communiquent et justifient leurs résultats. Dans la dernière phase nommée *étendre*, l'enseignant tisse des liens et généralise les

résultats, et propose des défis additionnels afin de voir si les élèves peuvent mobiliser les nouvelles connaissances dans d'autres contextes. Ces auteurs ont spécifié que le modèle respecte la DEI, car la phase explorer vient avant la phase expliquer. Le cas inverse (expliquer avant explorer) serait une approche traditionnelle d'enseignement. Nous utilisons ce modèle (figure 2) pour identifier les leçons qui respectent l'approche par une DEI.

Marshall et al. (2009) avaient pour but de créer un modèle inspiré des recherches antérieures sur la DEI afin de : 1) outiller les enseignants afin qu'ils puissent créer des DEI riches menant à des apprentissages profonds; 2) faciliter une pratique enseignante mettant l'accent sur l'évaluation formative plutôt que la performance sommative; 3) fournir un aide diagnostic aux enseignants afin qu'ils puissent évaluer les endroits à améliorer dans leurs pratiques enseignantes; et 4) fournir une méthode pragmatique pour renforcir les faiblesses dans l'enseignement. Bien que leur modèle résultant, le 4E x 2, fut mesuré dans certaines recherches et que la taille de l'effet soit grande, il parait que la plupart de ces dernières sont en sciences ou sur un concept mathématique, soit l'algèbre (Marshall et al., 2009). Dans notre étude, nous prévoyons utiliser ce modèle afin d'explorer son utilité pour divers concepts mathématiques. Cette exploration nous permettra de déterminer davantage si le modèle peut s'appliquer dans l'enseignement de tout concept mathématique.

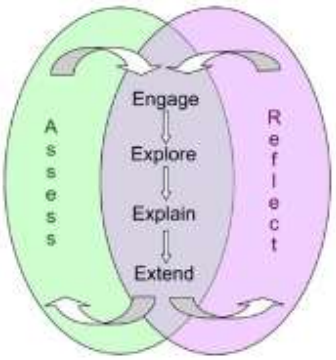


Figure 2 *– Modèle 4E x 2(Marshall, et al., 2009)*

III. METHODOLOGIE

Cette étude est issue d'une recherche doctorale du premier auteur qui jette un regard croisé sur le processus de co-construction des connaissances mathématiques entre l'enseignant et les élèves. Elle fait partie aussi d'un projet pancanadien (Reid et al., 2015) qui a pour but d'étudier les différentes pédagogies utilisées dans les provinces canadiennes et de lier ces différences à la réussite des élèves en mathématiques. Dans ce projet, chaque enseignant participant (7^e ou 8^e année) a filmé trois leçons de mathématiques : une leçon qu'il considérait comme typique dans sa classe, une qu'il considérait comme exemplaire dans sa classe, et une leçon d'introduction sur un concept relié aux fractions. Nous n'avons rien demandé quant aux approches à utiliser dans les leçons. Nous avons utilisé les leçons des trois groupes d'enseignants, ceux dont nous étions responsables dans le cadre du projet pancanadien : quatre enseignants francophones et trois enseignants anglophones du Québec, et quatre enseignants francophones du Nouveau-Brunswick.

Nous avons obtenu le consentement de huit enseignants pour utiliser leurs leçons aux fins de la présente étude.

Nous avons effectué un premier visionnement des leçons. Durant ce visionnement, nous avons noté le nombre d'activités dans chaque leçon. Selon nous, une activité représente un processus d'enseignement et d'apprentissage qui respecte les phases proposées dans le modèle de Marshall et al. (2009). Nous avons donc observé si les quatre phases du modèle étaient présentes. Nous avons éliminé les activités durant lesquelles la phase expliquer était réalisée avant la phase explorer, ce qui va à l'encontre de la définition d'une DEI selon Marshall et al. (2009). 12 activités dans 10 leçons respectaient ces critères. Pour chaque activité sélectionnée durant le premier visionnement, nous avons pris en note si l'enseignant ou l'élève proposait le problème ou la question à explorer. Nous notions aussi si l'enseignant proposait les étapes ou les stratégies à utiliser, ou si les élèves étaient libres à utiliser leurs propres démarches. Cette étape nous a permis de voir s'il était possible de classer les activités selon les manières de piloter la DEI selon Bruder et Prescott (2013).

Nous avons effectué un deuxième visionnement des activités sélectionnées. Cette fois, nous avons tenté de catégoriser les activités en fonction du type d'activité proposé par l'enseignant, et ce pour chaque manière de piloter la DEI. De plus, nous avons observé le déroulement des activités selon les phases du modèle de Marshall et al. (2009). Nous avons observé des éléments particuliers pour définir chacune des phases. Pour la phase Engager, nous avons observé comment la tâche était lancée. En d'autres mots, cette phase débutait par les instants où l'enseignant préparait les élèves vers une tâche quelconque et se terminait généralement lorsqu'une interrogation (question ou un problème) était posée. La phase Explorer consistait principalement aux sessions durant lesquelles les élèves tentaient de répondre à l'interrogation posée. Nous observions les actions des élèves et de l'enseignant durant cette phase. La phase Expliquer commençait lorsque l'enseignant engageait les élèves vers des dialogues par rapport à la tâche proposée et se terminait lorsqu'une conclusion était réalisé par rapport au problème. La phase étendre débutait lorsque l'enseignant synthétisait les contenus mathématiques imbriqués dans la tâche ou engageait les élèves à mettre en pratique les concepts mathématiques dans d'autres contextes.

Nous avons représenté schématiquement le déroulement de l'activité en fonction des quatre phases du modèle de Marshall et al. (2009). Pour ce faire, nous avons noté le temps total de chaque activité ainsi que le temps consacré pour chaque phase. Étant donné que les activités étaient de différentes durées, nous avons converti les temps en pourcentage afin d'avoir une meilleure comparaison des temps consacrés pour chaque phase. Notre schéma final de l'activité représente horizontalement le temps consacré pour chaque phase en noir (exemple, figure 3). Ceci nous a permis d'examiner les similitudes et les différences de chaque figure pour les mêmes types d'activités et pour les moyens de piloter la DEI.

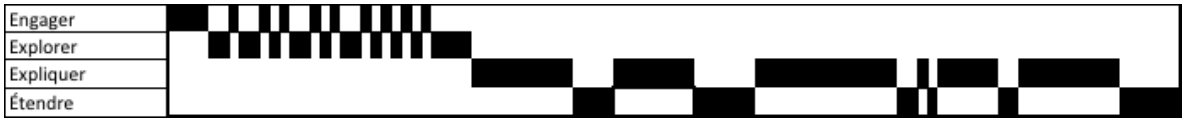


Figure 3 *– Déroulement d'une DEI guidée avec une tâche purement mathématique*

IV. QUELQUES RESULTATS PRELIMINAIRES

Parmi les 12 activités, trois étaient pilotés de manière structurée, sept de manière guidée et deux de manière ouverte. Pour chaque manière, nous avons pu observer jusqu'à trois types d'activités différentes. Un premier type était une tâche ou une question purement mathématique. Dans ce type de tâche, l'enseignant pouvait proposer une question, par exemple de comparer deux fractions ou de déterminer différentes stratégies pour effectuer un calcul mental. Le deuxième type de tâche était une résolution de problème. Dans ce type de tâche, l'enseignant proposait un problème aux élèves. Les mathématiques étaient imbriquées dans un contexte et le problème pouvait être résolu en quelques étapes (principalement une ou deux). Le troisième type d'activité était une investigation d'une situation de vie réelle. Dans ce type d'activité, l'enseignant proposait un jeu ou une situation à étudier faisant partie de la vie des jeunes, par exemple la répartition des couleurs de bonbons dans un sachet. Nous présentons le déroulement des activités en fonctions des phases pour chaque manière de piloter la DEI dans les prochaines sous-sections.

1. La DEI structurée

Parmi les trois activités pilotées de façon structurée, deux d'entre elles étaient pilotées à l'aide de tâches purement mathématiques. Les concepts à l'étude étaient la comparaison de fractions et la somme des mesures des angles de polygones à n côtés. La troisième activité était une situation de vie réelle : la détermination de la répartition des couleurs de bonbons dans un sachet. Le concept à l'étude dans cette activité était le diagramme circulaire. Ces trois activités ont été classées comme une DEI structurée, car les enseignants proposaient la question et la stratégie.

Nous avons observé des régularités différentes dans les deux activités ayant un contexte purement mathématique. Dans celle touchant la somme des mesures des angles intérieurs de polygones, le déroulement de l'activité était plutôt linéaire, c'est-à-dire que les phases étaient suivies dans l'ordre proposé par Marshall et al. (2009). Toutefois, nous avons remarqué quelques va-et-vient entre les phases expliquer et étendre. L'enseignant tirait des conclusions mathématiques lors des discours avec les élèves et par la suite sollicitait des explications d'autres idées mathématiques. Cependant dans l'autre activité, nous avons observé des va-et-vient entre chaque phase de la DEI. En fait, l'enseignant engageait les élèves à différents cas où l'on peut comparer des fractions (p. ex., lorsque les fractions ont le même numérateur, le même dénominateur, etc.) et proposait généralement une stratégie. La figure 4 représente le déroulement de l'activité en fonction des phases. Un élément intéressant observé est que l'enseignant, au lieu de donner le temps aux élèves de résoudre le problème, lançait une discussion sur un moyen possible de résoudre le problème. Dans ce cas, les phases explorer et expliquer étaient réalisées en même temps. Vers le milieu de l'activité et à la fin, l'enseignant a proposé des problèmes aux élèves. Puisque l'enseignant ne proposait pas de stratégie, nous pourrions considérer ces deux cas (parties encadrées de la figure 4) comme une DEI guidée. Bien que la phase expliquer occupait une importante partie de l'activité pour ces deux activités, la phase étendre n'était pas toujours présente.



Figure 4 *— Déroulement d'une DEI structurée avec une tâche purement mathématique*

Pour l'activité avec la situation de vie réelle, le déroulement était de façon linéaire. Cependant, nous avons remarqué des va-et-vient entre les phases expliquer et étendre. Quoique les phases étaient réparties assez équitablement en termes de temps, la phase expliquer était plus longue.

2. La DEI guidée

Parmi les sept activités pilotées par une DEI guidée, trois étaient réalisées à l'aide de contextes purement mathématiques, deux étaient pilotées à l'aide d'une résolution de problèmes et deux avec une situation de vie réelle.

La plupart des DEI guidées par des tâches mathématiques étaient des exercices de calcul mental sur diverses notions en arithmétique dans lequel les enseignants laissaient les élèves utiliser leurs propres stratégies pour calculer mentalement et par la suite discutaient avec les élèves des stratégies utilisées ainsi que l'efficacité des stratégies. Nous avons observé que le déroulement de ce genre d'activité se faisait par des va-et-vient entre les phases engager et explorer et entre les phases expliquer et étendre. Ces va-et-vient dans les deux premières phases étaient du fait que les enseignants proposaient plusieurs problèmes aux élèves. Nous avons aussi observé des va-et-vient entre les deux dernières phases aussi. Il est donc intéressant de voir que les enseignants ne concluent pas une activité à la toute fin seulement, mais tirent des conclusions mathématiques à la fin de certains problèmes de l'activité. La figure 3 présente le déroulement d'une activité.

Dans le dernier cas des tâches purement mathématique, l'enseignant a proposé un jeu durant lequel les élèves devaient comparer 25 paires de fractions et indiquer la plus grande. Pour ce cas, le déroulement était linéaire, c'est-à-dire que les phases étaient réalisées en ordre. Toutefois, les phases expliquer et étendre avaient pris la plus grande part de l'activité.

Pour les activités autour de résolutions de problème sur la comparaison de fractions, le pilotage s'est généralement fait de façon linéaire. Toutefois, nous avons observé un va-et-vient entre les phases explorer et expliquer. Dans ce cas, plusieurs élèves ne comprenaient pas la tâche. L'enseignant a donc commencé une discussion, donc une phase expliquer, pour guider les élèves. Après un bout de temps, l'enseignant a laissé les élèves continuer la résolution du problème.

Pour les activités avec une tâche ayant un contexte de vie réelle, celle sur les probabilités suivait un déroulement linéaire, mais il n'y avait pas de phase étendre, car l'enseignant allait poursuivre la discussion au prochain cours. La phase explorer était très longue pour cette activité, car les élèves devaient explorer quatre différentes expériences. Pour la seconde sur les nombres entiers, le déroulement se faisait par des va-et-vient entre les phases engager, explorer et expliquer. Ceci était dû au fait que l'enseignant engageait les élèves vers d'autres questions durant l'activité. Une courte conclusion a été réalisée par l'enseignant durant le discours. Cependant, l'enseignant n'a pas eu le temps de terminer l'activité. La figure 5 présente le déroulement de cette dernière activité.

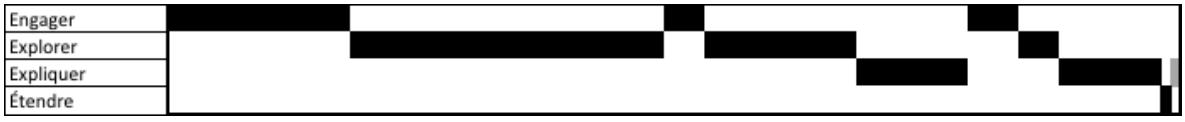


Figure 5 *– Déroulement d'une DEI guidée avec une tâche de vie réelle (gris = leçon non terminée)*

3. La DEI ouverte

Nous avons classé deux activités comme une DEI ouverte, car les élèves proposaient ou créaient leur propre problème. Dans la première, la tâche de l'activité sur la conversation de fractions impropres et nombres fractionnaires était mathématique, tandis que la seconde était l'investigation d'un contexte de vie réelle sur le concept de l'aire de figures complexes. Cependant, les élèves n'étaient pas libres d'utiliser leurs propres stratégies pour résoudre le problème, ce qui va à l'encontre de la définition d'une DEI ouverte, car l'enseignant proposait une stratégie ou les étapes. Pour l'activité sur les fractions, le déroulement se faisait de façon linéaire, mais puisque l'enseignant et les élèves discutaient de la question proposée par un élève, les phases explorer et expliquer se déroulaient en même temps.

Dans l'activité sur l'aire des figures complexes, le déroulement s'est fait de façon linéaire. Cependant, puisque l'enseignant proposait les étapes durant l'activité, les phases engager et explorer se réalisaient en même temps. Une autre exception est l'absence de la phase expliquer. Puisque chaque élève avait créé son propre problème en fonction des étapes de l'enseignant, ce dernier a suggéré d'échanger le travail afin que chaque élève valide la solution d'un autre. La figure 6 présente le déroulement de cette activité.



Figure 6 *– Déroulement d'une DEI ouverte avec une tâche de vie réelle*

V. CONCLUSION

Les résultats préliminaires ont démontré que les trois moyens de piloter la DEI pouvaient être appliqués dans le cas des mathématiques en classe. Toutefois, nous avons remarqué que la DEI ouverte pouvait être structurée, car même si l'élève proposait le problème, l'enseignant guidait l'activité avec la proposition d'une démarche ou d'une stratégie. Nous proposons d'ajouter la *DEI semi-ouverte* à la liste afin de décrire ce genre d'activité. Les résultats ont aussi démontré que ces manières de piloter la DEI pouvaient être faites avec des tâches purement mathématiques, la résolution de problème et l'investigation d'une situation de vie réelle. La plupart des activités semblent suivre un déroulement linéaire quant aux phases de la DEI. Toutefois, nous avons observé des va-et-vient entre les différentes phases et même, à certains moments, la réalisation de deux phases en même temps. Ces différences dans le déroulement démontrent que l'enseignement des mathématiques est un processus dynamique, mais laisse aussi certaines pistes de réflexion. Premièrement, le fait que les phases explorer et expliquer se font en même temps dans une DEI peut mettre en valeur la co-construction des connaissances mathématiques. Cependant, ce processus permet-il aux élèves de réfléchir profondément à la question ou au problème posé ? Deuxièmement, nous nous questionnons sur le classement de nos types d'activités. Certaines des activités purement mathématiques étaient aussi des tâches routinières dans la classe, donc nous nous questionnons sur le déroulement d'activité routinières diffèrent de celles des tâches mathématiques. Nous n'observons pas de différences présentement. Dans la prochaine étape de la recherche, nous examinerons comment le processus de co-construction des

connaissances se réalise dans ces différentes manières de piloter la DEI. Ceci précisera possiblement ce classement.

REMERCIEMENT

Cette étude fut possible grâce à l'appui de l'équipe de recherche Observing Teachers : Teaching Mathematics Pedagogies in Regions of Canada (http://www.acadiau.ca/~dreid/OT/).

REFERENCES

Aulls M. W. & Shore B. M. (2008) *Inquiry in education (Vol. I): The conceptual foundations for research as a curricular imperative*. New-York, NY: Erlbaum.

Bruder R., & Prescott A. (2013) Research evidence on the benefits of IBL. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education 45*(6), 811-822.

Cariou J.-Y. (2015) Quels critères pour quelles démarches d'investigation? Articuler esprit créatif et esprit de contrôle. *Recherches en éducation 21*, 12-33.

Chichekian T., Savard A., & Shore B. M. (2012) Les troncs communs et les trajectoires divergentes dans les langues françaises et anglaises de l'approche par démarche d'investigation. *Grand N 90*, 33-48.

Dorier J.-L. & K. Maass (2014) Inquiry based mathematics education. In S. Lerman (Ed), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 300-304). Springer Netherlands.

Gandit M., Morselli F. & Sokona Bekaye S. (2015) Rôles et responsabilités des professeurs et des élèves dans les démarches d'investigation et dans la résolution de problèmes - compte-rendu du groupe de travail no 10. In L. Theis (Ed.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques: enjeux et perspectives pour les enseignement et leur apprentissage - Acte de du colloque EMF 2015* (pp. 829-836). Alger : Université d'Alger.

Kazemi E. & Stipek D. (2001) Promoting conceptual thinking in four upper-elementary mathematics classrooms. *The elementary School Journal 102*(1), 59-80.

Maass K. & Artigue M. (2013) Implementation of inquiry-based learning in day-to-day teaching: A synthesis. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education 45*(6), 779-795.

Marshall J. C., Horton R., Igo B. L. & Switzer D. M. (2009) K-12 science and mathematics teachers' beliefs about and use of inquiry in the classroom. *International Journal of Science and Mathematics Education 7*(3), 575-596.

Matheron Y., Morselli F., René de Cotret S. & Schneider M. (2012) La démarche d'investigation dans la classe de mathématiques, fondements et méthodes - Compte-rendu du Groupe de travail 10. In J.-L. Dorier & S. Coutat (Eds.), *Enseignement des mathématiques et contrat social: enjeux et défis pour le 21e siècle - Actes du colloque EMF 2012* (pp. 1259-1281). Université de Genève.

Reid D. A., Simmt E., Savard A., Suurtamm C., Manuel D., Lin T. W. J., . . . Knipping C. (2015) Observing Teachers: Using video to prompt and record reflections on teachers' pedagogies in regions of Canada. *Research in Comparative and International Education 10*(3), 367-382.

Rocard M., Csermely P., Jorde D., Lenzen D., Walberg-Henriksson H., & Hemmo V. (2007) *Science education now: A renewed pedagogy for the future of Europe*. Belgium: European Communities.

Sierpinska A. & Lerman S. (1996) Epistemologies of mathematics and of mathematics education. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International*

handbook of mathematics education (Vol. 4, pp. 827-876). Dordrecht, The Netherlands: Springer Netherlands.

VERS UNE EPISTEMOLOGIE COMMUNE POUR L'ETUDE DIDACTIQUE DES DEMARCHES D'ENQUETE ET D'INVESTIGATION EN MATHEMATIQUES ET EN PHYSIQUE ?

OUVRIER-BUFFET[*] Cécile

Résumé – Cet article interroge les fondements épistémologiques des pratiques des chercheurs et leurs transpositions à la classe. Une modélisation de pratiques déclarées de chercheurs contemporains en mathématiques et en physique est proposée. Une analyse d'entretiens permet d'envisager des enrichissements des démarches d'enquête et d'investigation pour la classe.

Mots-clefs : démarches d'investigation, épistémologie contemporaine, conceptions, mathématiques, physique

Abstract – This paper tries to explore the underlying epistemological backgrounds of contemporary researchers in the fields of mathematics and physics. A modelling of the conceptions of some researchers is developed on the basis of interviews with mathematicians and physicians. New perspectives for the teaching of inquiry in the classroom are proposed.

Keywords: inquiry-based education, contemporary epistemology, conceptions, mathematics, physics.

I. CONTEXTE, QUESTIONNEMENT ET POSTURE EPISTEMOLOGIQUE

Les démarches d'investigation existent depuis longtemps au niveau international : objets d'étude pour la recherche en didactique, mais aussi pratiques de classe, nous pouvons et devons (ré)interroger leur épistémologie. Nous utiliserons le sigle générique DEI (Démarches d'Enquêtes et d'Investigations) afin d'englober toute pratique basée sur une activité/démarche scientifique en classe, et ainsi éviter la forte connotation curriculaire véhiculée par l'expression « démarches d'investigations ». L'évolution de la science qui se pratique peut nécessiter un changement de posture épistémologique pour les chercheurs en didactique, et c'est là notre hypothèse de travail. Les relations entre les sciences sont à décrire et se diversifient, voire se complexifient, au fil du temps. En effet, de nouveaux domaines scientifiques apparaissent, générant non seulement des nouveaux types de problèmes, et de nouveaux concepts, mais aussi de nouveaux modes de raisonnements ou de modélisations. L'intégration de ces nouvelles connaissances à l'enseignement pose de multiples questions en lien avec la transposition didactique. Ainsi, dans le cas des DEI, dont les fondements épistémologiques utilisés par les didacticiens sont du siècle dernier (notamment via les textes de Bachelard, Poincaré, Dewey par exemple), une question d'actualité se pose : Comment faire évoluer l'épistémologie des didacticiens ? (en faisant l'hypothèse que nous devons le faire !). Par ailleurs, dans une visée comparatiste, comment comparer les DEI de différents champs scientifiques ? Quelle diffusion de cette évolution de la science dans les classes (quelle nécessité, quelles modalités, avec quels fondements épistémologiques) ?

Pour traiter ces questions, nous faisons le choix de nous placer au sein de l'épistémologie contemporaine pour analyser le savoir scientifique d'aujourd'hui, savoir « en construction ». L'adjectif contemporain renvoie ici à la référence particulière que nous souhaitons donner de notre étude, à savoir la pratique des chercheurs *in statu nascendi*. Pour des raisons méthodologiques, nous ne conduirons pas une étude de chercheurs en train de chercher (ce qu'a fait par exemple Gardes (2013) dans sa thèse auprès d'un chercheur « en action » et d'un autre chercheur à partir de ses publications), mais réaliserons des entretiens avec des mathématiciens et physiciens sur leurs pratiques déclarées. Nous nous inscrivons dans un

[*] LDAR – France – cecile.ouvrier-buffet@u-pec.fr

mouvement récent au niveau international en didactique des mathématiques, prenant appui sur des entretiens avec des chercheurs en mathématiques pour enrichir l'épistémologie mobilisée dans les travaux en didactique[1]. A titre d'exemple, citons Rasmussen et al. (2005) sur l'*advancing mathematical activity* , Weber & Mejia-Ramos (2011) et Alcock (2010) qui mettent l'accent sur l'intérêt d'études de pratiques expertes à la fois pour produire de nouvelles situations d'apprentissage mais aussi pour identifier les spécificités de compétences transversales mobilisées dans ce qui relève du *problem-solving* et plus particulièrement la preuve. Cela va de pair avec l'idée d'un enseignement proche de pratiques expertes.

Nous réduisons notre étude expérimentale et prospective aux mathématiques et à la physique. Ce choix disciplinaire pourra être élargi ultérieurement à d'autres sciences (Sciences de la Vie et de la Terre, Chimie, Informatique ...). Nous reviendrons tout d'abord sur l'épistémologie sous-jacente présente dans les publications en didactiques sur les DEI et recenserons ensuite les points de convergence entre mathématiques et sciences sur les DEI. Nous retiendrons les mathématiques et la physique pour accéder à des éléments caractéristiques de l'épistémologie de chercheurs contemporains grâce à des entretiens. L'outil théorique retenu dans une visée de comparaison des démarches en mathématiques et en physique sera présenté, ainsi que des résultats de cette expérimentation. Des perspectives didactiques en découleront.

II. QUID D'UNE EPISTEMOLOGIE INTIALE ?

1. Aspects dominants dans les travaux en didactique sur les DEI

Pour recenser les aspects dominants communs qui ressortent des travaux portant sur les DEI au sens large en didactique des mathématiques et en didactique des sciences, nous prenons comme référence première les publications issus des projets européens PRIMAS et Fibonacci, les numéros spéciaux de revues en éducation sur la question des DEI (*ZDM – The International Journal on Mathematics Education* (2013) et *Recherches en Éducation* (2015)), et autres articles de synthèse tel que Maschietto (2010). Nous n'allons ici que les citer :

- Travailler « comme les scientifiques » (Fibonacci, PRIMAS).
- Initier la recherche par une question à traiter ou un problème à résoudre (Fabre (2009)).
- Définir différents moments d'une démarche de recherche (PRIMAS, Ouvrier-Buffet, de Hosson & Bosdeveix, 2016).
- Donner une place (trop ?) prépondérante à l'expérimentation (de Hosson et al., 2010).
- Valider et prouver – la question de la vérité ? (Selden & Selden, 1999).
- Structurer le temps ; utiliser un langage adapté ; écrire et communiquer des résultats ; promouvoir le travail collaboratif (e.g. Maschietto, 2010).
- Expliciter des objectifs et les savoirs visés – mais ne pas oublier l'institutionnalisation de savoirs transversaux (Ouvrier-Buffet, 2013).
- Caractériser l'activité des étudiants et des enseignants.

Mais alors, quelles différences entre mathématiques et sciences ? Dans le projet Fibonacci, les conclusions soulignent une reconnaissance de similarités entre l'IBME et l'IBSE au niveau des processus et des valeurs. Mais des différences sont également pointées entre sciences et mathématiques : les sources possibles de questions, à la fois externes et internes ; les processus eux-mêmes, et l'impossibilité de définir une forme standardisée d'investigation en

[1] "It is well established that understanding how experts in a given domain think and learn can provide important insights for educational practice (Bransford, Brown & Cocking, 1999)."

mathématiques (pas de schéma comme en sciences); les formes diverses que prend l'expérimentation et ses fonctions ; le caractère fortement connecté et cumulatif de la discipline ; les formes de validation (en distinguant validité interne et externe). Cela étant, « As far as language is concerned, similarities between mathematics and other sciences seem more striking than the differences. » (Sfard, 2001, p. 3).

2. Une posture épistémologique permettant d'engager une comparaison maths-physique

De la littérature sur les DEI transparaissent des éléments de nature épistémologiques provenant de Dewey, Bachelard, Popper, Kuhn, surtout, mais aussi Polya, Fleck, Hacking, ou encore Lakatos. Des convergences apparaissent clairement dans les travaux des didacticiens des mathématiques et des sciences au niveau de la prise en compte des heuristiques des DEI et de l'importance de la problématisation. Comme le soulignent Calmettes et Matheron (2015, p. 5), des recherches ont été conduites pour étudier « les différences et les écarts entre les démarches en classe et les démarches de recherche en sciences, en technologie ou en mathématiques » avec une recherche de « minimalisation de ces écarts par la définition de critères épistémologiques ». Cela étant, la question de l'explicitation de l'épistémologie demeure, tout comme celle de la transposition (non nécessairement unique) des pratiques de chercheurs dans l'enseignement. Les développements précédents nous conduisent donc à réactualiser les connaissances épistémologiques sur les démarches de recherche, et d'interroger les chercheurs contemporains afin d'évaluer ce qui reste stable et ce qui évolue en termes de pratiques de recherche dans les disciplines scientifiques. Nous engageons donc un changement de posture épistémologique et nous nous situons ainsi dans le cadre de l'épistémologie contemporaine. Nous conservons à l'esprit, dans la continuité des travaux précédents en didactique, l'importance des problèmes dans l'activité de recherche en physique et en mathématiques et de la problématisation, ainsi que l'étude de la place et du rôle de l'expérience dans ces deux disciplines, et les modes de validation possibles.

3. Nature du recueil de données

Nous avons procédé par entretiens semi-directifs pour accéder aux « pratiques » déclarées de chercheurs en mathématiques et en physique. Pour la présentation des résultats, nous retenons ici les entretiens conduits avec 7 physiciens (trois dans le champ de la physique théorique ; quatre dans des domaines alliant modélisation et/ou expérimentation (modélisation des matériaux de structure ; spectroscopie)) et 5 mathématiciens (deux dans le champ des mathématiques appliquées et de la modélisation et trois travaillant en mathématiques discrètes (théorie des nombres et théorie des graphes)). Nous faisons l'hypothèse que ces choix nous assurent de trouver, au sein de chaque discipline, mathématiques et physique, des convergences suffisantes. L'entretien était structuré en deux parties, l'une sur la recherche et l'autre sur l'enseignement, et durait entre 55 et 80 minutes. Toutes les questions étaient qualitatives et ouvertes, et portaient essentiellement sur : les problèmes, les hypothèses, la preuve, la place et le rôle des écrits, les démarches de recherche elles-mêmes, la nature et le rôle des interactions entre pairs et la/les référence(s) épistémologique(s) des chercheurs.

III. UN CADRE THEORIQUE A POTENTIALITES TRANSDISCIPLINAIRES ?

1. Un modèle de conceptions

Nous cherchons à modéliser des conceptions de référence sur la démarche de recherche de chercheurs contemporains. Nous nous situons ainsi à un certain niveau du savoir (celui des μ-conceptions, Balacheff & Margolinas, 2005), difficile d'accès. Nous retenons le modèle de

conceptions de Balacheff (1995) de par ses potentialités du côté épistémologique, mais aussi du côté didactique et cognitif (ce modèle trouve ses origines notamment chez Vergnaud). Sa construction en fait un outil théorique transdisciplinaire et transdidactique. Balacheff (1995) (voir aussi Balacheff & Margolinas, 2005) développe trois principaux apports aux modélisations antérieures des conceptions : il reprend le triplet de Vergnaud (1991) et ajoute une structure de contrôle (notée ∑) qui s'est révélée nécessaire lors de l'exploration de conceptions dans des EIAH ; il introduit la notion de μ-conception pour accéder à un savoir de référence ; il démontre l'accessibilité à la caractérisation de savoirs et connaissances via la détermination de conceptions. Une conception est définie comme une « modélisation cognitive rendant compte des régularités des conduites d'un sujet relativement à un cadre. » (Balacheff, 1995, p. 228). Deux niveaux d'invariants opératoires interviennent : les opérateurs (R) qui permettent d'agir sur la situation et les structures de contrôle (∑) qui justifient et valident l'utilisation des opérateurs. Une dialectique forte existe entre opérateurs et contrôles (il n'est pas toujours facile de différencier les deux). Une conception est alors décrite par un quadruplet :

- P est un ensemble de problèmes sur lesquels la conception est opératoire (Vergnaud rappelle qu'en mathématiques, les problèmes sont sources et critères du savoir) ; P décrit le domaine de validité de la conception. P est du côté de la sphère de pratique.

- R est un ensemble d'opérateurs. Ceux-ci permettent la transformation des problèmes. Ils sont attestés par des productions et des comportements du sujet.

- L est un système de représentation qui permet d'exprimer les éléments de P et de R. À l'image du modèle proposé par Vergnaud, les éléments de L sont langagiers ou non.

- ∑ est une structure de contrôle qui donne et organise les fonctions de décision, de choix, de jugement de validité et d'adéquation de l'action. La structure de contrôle assure la non contradiction de la conception. Les contrôles sont des outils de décision sur la légitimité de l'usage d'un opérateur et sur l'état du problème (résolu ou non).

L'utilisation d'un tel cadre théorique nécessite de caractériser les problèmes. Au niveau des chercheurs, cela implique d'étudier précisément leur activité de recherche *in situ*, ce qui relève d'une recherche conséquente. Nous faisons le choix pragmatique de réaliser des entretiens avec des chercheurs (mathématiciens et physiciens) afin de faire une première étude prospective de leurs pratiques déclarées, de mettre à l'épreuve le modèle retenu (pour décrire une démarche de recherche et pour comparer deux disciplines scientifiques), et d'en tirer des implications pour l'implémentation de DEI dans l'enseignement. Ce choix implique de faire un focus sur les invariants opératoires. Nous faisons le choix d'un niveau de description plutôt macro, et ainsi, nous ne caractériserons pas les problèmes disciplinaires, mais des moments de l'activité de recherche, communs en mathématiques et en physique.

2. Différents moments de l'activité de recherche

Nous avons choisi d'identifier différents moments de l'activité scientifique, à l'image du travail de Ouvrier-Buffet (2013) qui modélise l'activité de définition en mathématiques. La définition de ces moments doit rester cohérente au niveau épistémologique, commune aux mathématiques et à la physique, et compatible avec les contextes institutionnel et didactique dans lesquels nous utiliserons les résultats de notre étude. Nous choisissons donc de nous inscrire dans une vision classique de la méthode scientifique dite traditionnelle et de nous inspirer de la description faite dans des projets européens alliant mathématiques et sciences tel que PRIMAS (2011). Six étapes sont proposées : « Observation and description ; Questioning ; Hypothesis formulation ; Predicting ; Experimenting ; Conclusion » (PRIMAS, 2011, p. 9).

Mais d'autres étapes y sont également présentées sous forme de remarques telles que : procéder par essai/erreur, construire des modèles, faire des tests, se documenter. Insistons sur le fait que le travail sur le problème initial qui génère la démarche est là absent, et pourtant, il est fondamental. Ainsi, si un consensus se dégage de ces travaux sur une démarche scientifique « commune » aux mathématiques et aux sciences en cinq ou six étapes, il est toujours possible d'en ajouter. Prenant en compte la spécificité du modèle théorique cK¢ et de précédents travaux de nature épistémologique et didactique interdisciplinaires (Ouvrier-Buffet, de Hosson, Bosdeveix, 2016), nous retenons six moments de la démarche de recherche, communs aux mathématiques et à la physique : Définir un problème ; Interpréter / analyser un problème ; Explorer / Expérimenter ; Formaliser ; Théoriser ; Publier / Diffuser. Soulignons que ces moments sont compatibles avec le canevas de 2005 et les programmes actuels en mathématiques, en sciences, dans le primaire et le secondaire.

IV. QUELS TYPES DE RESULTATS PEUT-ON OBTENIR ?

1. Opérateurs et structures de contrôle du moment « Explorer / Expérimenter »

La modélisation par le modèle de conceptions de Balacheff (1995), en séparant les moments de l'activité de recherche, permet effectivement de comparer les démarches de recherche en mathématiques et en physique (Ouvrier-Buffet & El Hage, 2018). Dans cet article, nous ne pouvons présenter l'ensemble de la comparaison, mais nous allons donner quelques exemples. Pour cela, nous retenons le moment « Explorer / Expérimenter ».

<table>
<tr><th>Chercheurs en physique</th><th>Chercheurs en mathématiques</th></tr>
<tr><td>Opérateurs (R)
1) Définir la faisabilité de l'expérience (manipulation) [1/7]
2) Inventer une démarche ou de nouvelles techniques [3/7]
3) Définir la nature des résultats attendus [2/7]
4) Conduire des tests préliminaires [3/7]
5) Conduire des premières analyses de premières expérimentations [3/7]
6) Faire des tests où les propriétés locales ne sont pas forcément vérifiées [1/7]</td><td>Opérateurs (R)
1) Créer la manipulation [2/5]
2) Expérimenter dans un environnement numérique (exploration du problème et émission de conjectures) [3/5]
3) Identifier des phénomènes [5/5]</td></tr>
<tr><td>Structures de contrôle (Σ)
• Refaire des tests et manipulation [3/7]
• Contrôler la consistance et la faisabilité de l'expérimentation [1/7]
• Vérifier la conformité aux modèles prédictifs et modèles théoriques [2/7]
• Tester des hypothèses [1/7]</td><td>Structures de contrôle (Σ)
• Résistance aux tests (vérifications dans des environnements numériques) [2/5]
• Recherche de domaines de validité des résultats [3/5]
• Preuves [5/5]</td></tr>
<tr><td colspan="2">Structure de contrôle commune (Σ)
La confrontation à des résultats connus (dans des domaines connexes et/ou via un travail bibliographique) pour les physiciens [2/7] et la confrontation à des problèmes dont on connaît certains résultats pour les mathématiciens [2/5].</td></tr>
</table>

Tableau 1 – Opérateurs et structures de contrôles déclarés par 5 mathématiciens et 7 physiciens

Une comparaison entre les opérateurs mobilisés par les chercheurs de chaque discipline montre une convergence sur deux opérateurs, au vu des entretiens complets :

- « Inventer une démarche » en physique peut se rapprocher de « Créer la manipulation » en mathématiques. Ce physicien explique que : « *Inventer une démarche en lien avec nos*

compétences, en fait il faut qu'on invente à chaque fois une démarche qui soit appropriée justement à nos objectifs (...) *Cette démarche change en fonction de nos partenaires* (...). » et ce mathématicien précise que : « *Il y a donc une démarche expérimentale de la même façon qu'un physicien expérimentateur sauf que la manip c'est nous qui la créons puisqu'on écrit un programme de calcul et ensuite on essaie d'en produire des propriétés. Je regarde, je regarde, j'essaie d'analyser des résultats et des sorties et j'en déduis ce qui m'intéresse*. »

- « Conduire des premières analyses de premières expérimentations » correspond en fait à « Expérimenter dans un environnement numérique ». Bien que l'outil utilisé n'est pas le même entre les chercheurs des deux disciplines il s'agit du même opérateur.

Remarquons qu'au niveau épistémologique, les opérateurs mobilisés en physique pourraient l'être également en mathématiques et réciproquement. Cette proximité des opérateurs n'est visible que partiellement dans les entretiens, nous ne pouvons donc ici que formuler une hypothèse de recherche.

Dans ce moment « Explorer / expérimenter », des structures de contrôle apparaissent qui ne sont pas nécessairement présentes dans les autres moments de l'activité de recherche, dont certaines sont proches dans les deux disciplines. Nous pourrions, en effet, rapprocher « Refaire des tests et manipulations » en physique de la « Résistance aux tests (vérifications dans des environnements numériques) » en mathématiques ; et « Confronter à des résultats connus (domaines connexes) et bibliographique » en physique de « Confrontation à des problèmes dont on connaît des résultats » en mathématiques. De plus, « Vérifier la conformité aux modèles prédictifs et modèles théoriques » est clairement une spécificité en physique.

Par ailleurs, la structure de contrôle « Recherche de domaine de validité de résultats » en mathématiques pourrait également être considérée comme un opérateur. Pour le moment étudié ici, nous sommes bien davantage du côté du contrôle. Cela étant, la perméabilité opérateur- contrôle est un avantage du modèle cK¢ car elle permet de rendre compte de différents points de vue sur un objet ou un processus. Pour cette structure de contrôle, « Recherche de domaine de validité de résultats », nous trouvons un analogue en physique dans un moment plus théorique de la démarche de recherche (dans le moment que nous avons appelé « Théoriser »). Les structures de contrôle « Tester des hypothèses » et « Faire des preuves » ont des interprétations spécifiques suivant la discipline sur lesquelles nous ne reviendrons pas ici tout comme sur les différents niveaux d'interprétation que les termes « manipulation », « expérimentation », « hypothèses », « preuve », « démonstration » peuvent revêtir. Il serait fondamental de les définir dans une étude plus poussée sur la démarche expérimentale en physique et en mathématiques (qui n'est pas notre propos dans cet article).

2. Validation et processus de preuve en mathématiques et implications pour la physique

En mathématiques, la preuve apparaît comme un processus alliant contrôle et validité. Selden et Selden (1999) soulignent la nécessité de conduire des études spécifiques de la validation de preuves mathématiques. Pour eux, le processus de validation est en partie un processus mental permettant notamment aux mathématiciens d'analyser un texte mathématique (une preuve en l'occurrence) et de le « valider » en faisant des inférences, en posant des questions intermédiaires et en y apportant des réponses, en important des connaissances externes, en construisant des images et représentations, en développant des sous-preuves etc. Nous retrouvons dans les entretiens conduits avec les mathématiciens (dans cette étude et dans Ouvrier-Buffet, 2013) ces aspects, la preuve étant guidée par deux opérateurs principaux et essentiels : le *design* d'une structure globale de la preuve ; et la preuve de « conjectures de travail » qui sont en fait des conjectures locales dans la structure globale de la preuve. Dans l'étude présentée ici, les structures de contrôle relèvent d'une

validation logique de la preuve et de « méta-contrôles » (voir ci-dessus). Si maintenant nous tentons de faire des liens avec la physique, nous retenons les entretiens conduits avec des mathématiciens plutôt orientés vers les expérimentations, qui utilisent peu le terme de « preuve » et préfèrent argumenter sur la différence entre « validation » et « validation numérique d'une conjecture ». Ces mathématiciens mobilisent deux types d'opérateurs : « utiliser une simulation numérique » et « utiliser des tests pour valider une méthode ». Leurs structures de contrôle peuvent être résumées ainsi : « comparer à des résultats connus », « évaluer l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée », et « vérifier la conformité de l'approximation avec le modèle physique ». Cela nous ramène à la question de la place et du rôle des expérimentations dans un processus de recherche, et ici, nous nous rapprochons des opérateurs et structures de contrôle utilisés par les physiciens lorsque le terme de « preuve » est interprété comme une « validation expérimentale » (comme le souligne ce physicien : « *C'est la guerre entre les preuves numériques et les preuves mathématiques* »). Ainsi, en faisant un focus sur des moments puis sous-moments, la caractérisation d'opérateurs et de structures de contrôle devient de plus en plus précise et des points de convergence entre mathématiciens et physiciens apparaissent.

V. QUELS IMPACTS POUR L'ENSEIGNEMENT ?

Le travail présenté très partiellement ici a pour principal objectif d'actualiser les connaissances épistémologiques en termes de DEI pour de futures recherches en didactique, et de faire de nouvelles propositions pour l'enseignement. Les entretiens réalisés avec des chercheurs ont montré une grande richesse et complexité quant à la comparaison entre mathématiques et physique, mais aussi au sein d'une même discipline scientifique. Nous pouvons, grâce à l'analyse *via* les opérateurs et les structures de contrôle, pointer des compétences majeures communes, pouvant être renforcés dans la formation des enseignants et lors d'implémentations de DEI en classe. Certaines de ces compétences apparaissent déjà dans des publications en didactique, mais la présente étude les met en avant et souligne leur dynamique, en tant qu'opérateur ou structure de contrôle. Cette caractérisation par invariants opératoires permet également d'apporter des leviers à l'enseignant pour la conception et la gestion de DEI en classe.

- La « Recherche bibliographique » est un opérateur jouant aussi le rôle de contrôle.
- L'opérateur « Écrire et communiquer des résultats de recherche » joue également le rôle d'un contrôle par les pairs.
- « Expliciter une théorie locale » est un opérateur en mathématiques qui trouve son équivalent en physique « Étudier le domaine de validité d'un modèle ».
- Un opérateur en mathématiques « Étudier l'impact de résultats (par exemple à des domaines connexes) », formulé en physique sous la forme « Étudier la reproductibilité d'une méthode ». Cet opérateur peut lui aussi devenir une structure de contrôle. Il est en lien possible avec la structure de contrôle « Recherche bibliographique » (où agissent des opérateurs tels que « Comparer à des résultats connus de domaines connexes », « Comparer à des problèmes dont on connait les solutions »).
- Plusieurs opérateurs et structures de contrôle traduisant la « validation » et la « preuve » (voir la discussion ci-dessus §IV-2).
- Il existe également une structure de contrôle d'un autre ordre, « méta », comportant de nombreux implicites et difficile à caractériser. Nous renvoyons pour cela le lecteur à Robert et Robinet (1996). Nous comprenons le terme « méta » par ce qui a trait à une réflexion sur l'activité scientifique, et qui peut référer à des compétences méthodologiques, des connaissances épistémologiques voire métacognitives. Cette réflexion « méta » sur l'activité comprend également toute analyse réflexive sur la construction de concepts, de preuves,

d'expérimentations, sur ce que l'on manipule, comment on réorganise ses connaissances, etc. Cela dépend ainsi de l'individu et de sa connaissance plus ou moins diffuse, plus ou moins explicitée comme telle, de ses propres processus de production de savoirs et de méthodes scientifiques, et donc de ses propres processus de contrôle. C'est ce que l'on retrouve dans cette phrase de ce physicien : « Savoir utiliser en fait ce qu'on sait ou ce qu'on devrait savoir », ou de ce mathématicien : « Par exemple, le truc qui peut arriver, c'est que tu as un problème et tu vois une stratégie pour le démontrer (...) tu as encapsulé des propriétés, des sous-propriétés (...) tu découpes en morceaux, tu transformes ton problème (...) c'est la méta-preuve. »

VI. PERSPECTIVES

Ce travail d'exploration et de modélisation des démarches de recherche met en avant un outil théorique fonctionnel et transdisciplinaire. Il présente cependant certaines limites. En effet, nous n'avons pas travaillé sur la caractérisation des problèmes des chercheurs ni sur leur évolution au fil de la démarche de recherche. La seule donnée des entretiens ne le permet pas. Cependant, nous pouvons tout de même noter des origines de problèmes semblables entre les mathématiques et la physique, ainsi qu'un travail sur le problème initial (moments Définir un problème et Interpréter/Analyser un problème) similaire (par exemple quand il s'agit de « réduire un problème »). La dépendance au champ scientifique et l'aspect local et ponctuel des entretiens nous amènent à relativiser les analyses. Cela étant, ce travail ouvre de nouvelles perspectives, tant au niveau de la recherche en didactique à un niveau épistémologique, que pour de nouvelles propositions d'enseignement. L'épistémologie de chercheurs contemporains pourrait être explorée à une autre échelle, *in situ*, à l'image du travail de Gardes (2013). La modélisation engagée dans cet article sous forme de conceptions constitue une première étape pour rendre compte de processus de recherche. Une telle modélisation a également un avantage de nature didactique : les conceptions, de par leurs caractéristiques (Problèmes, opérateurs, structures de contrôles, systèmes de représentation), permettent le calcul de situations didactiques, et en particulier donnent des clés de compréhension et d'anticipation de processus en classe. C'est dans cette direction que nous souhaitons poursuivre l'étude des DEI et interroger les apports d'un travail en didactique fondé sur l'épistémologie contemporaine.

REFERENCES

Alcock L. (2010) Mathematicians' perspectives on the teaching and learning of proof. In Hitt F, Holton D, Thompson P (Eds), *Research in collegiate mathematics education VII* (p. 63-92). Providence (RI): American Mathematical Society.

Balacheff N. (1995) Conception, connaissance et concept. In D. Grenier (éd.) *Séminaire Didactique et Technologies cognitives en mathématiques* (p. 219-244). Grenoble : IMAG.

Balacheff N. & Margolinas C. (2005) cK¢ Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques ». In A. Mercier et C. Margolinas (Eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques* (p. 1-32). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Calmettes B. & Matheron Y. (2015) Edito – Les démarches d'investigation : utopie, mythe ou réalité ? *Recherches en Education, 21*, 3-11.

De Hosson C., Mathé S., Méheut M. (2010) La « démarche d'investigation » dans les collèges français – Démarche d'investigation et formation. In C. Loisy, J. Trgalova, R. Monod-Ansaldi (Eds), *Démarches d'investigation pour l'enseignement des sciences : Quelles ressources pour les enseignants ? Quelle place pour le travail collectif ?* (p. 19-29). INRP.

Fabre, M. (2009). *Philosophie et pédagogie du problème*. Vrin.

Gardes M.-L. (2013) *Étude de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants engagés dans la recherche d'un problème non résolu en théorie des nombres*. Thèse. Université Lyon 1.

Maschietto M. (2010) Les journées DIES : bilan et questions ouvertes. In C. Loisy, J. Trgalova, R. Monod-Ansaldi (Eds) *Démarches d'investigation pour l'enseignement des sciences : Quelles ressources pour les enseignants ? Quelle place pour le travail collectif ?* (p. 191-199). INRP.

Ouvrier-Buffet C. (2013) *Modélisation de l'activité de définition en mathématiques et de sa dialectique avec la preuve – Étude épistémologique et enjeux didactiques.* Note de synthèse HDR. Université Paris Diderot (Paris 7).

Ouvrier-Buffet C., De Hosson C., Bosdeveix R. (2016) Inquiry-based education (IBE): towards an analyzing tool to characterize and analyze inquiry processes in mathematics and natural sciences. In B.R. Hodgson, A. Kuzniak, & J.-B. Lagrange (Eds.) *The Didactics of Mathematics: Approaches and Issues. A Hommage to Michèle Artigue* (p. 191-217). New York: Springer.

Ouvrier-Buffet C. & El Hage S. (2018) Les démarches de chercheurs en physique et en mathématiques. Enjeux didactiques d'une nouvelle approche épistémologique. *Recherches en Éducation 34*, 106-126.

Rasmussen C, Zandieh M, King K, et al. (2005) Advancing mathematical activity: a practice-oriented view of advanced mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning 7*(1), 51–73.

Robert A. & Robinet J. (1996) Prise en compte du "méta" en didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques 16*(2), 145-176.

Selden A. & Selden J. (1999) *The role of logic in the validation of mathematical proofs* (Tech. Report N°1999-1). Tennessee technological university: Department of mathematics.

Sfard A. (2001) On the dual nature of mathematical conceptions : reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics 22*(1), 1-36.

The Fibonacci Project (2012) Fibonacci Project. In S. Borda Carula (Ed), *Learning through Inquiry Booklet and Inquiry in Mathematics Education booklet.* En ligne : http://www.fibonacci-project.eu

The PRIMAS Project (2011) *Promoting inquiry based learning (IBL) in mathematics and science education across Europe - PRIMAS guide for professional development providers*. En ligne : www.primas-project.eu/

Vergnaud G. (1991) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques 10*(2/3), 133-169.

Weber K. & Mejia-Ramos J.P. (2011) Why and how mathematicians read proofs: an exploratory study. *Educational Studies in Mathematics76*, 329-344.

INVESTIGATION MATHÉMATIQUE À TRAVERS UN ENSEIGNEMENT PAR RÉSOLUTION DE PROBLÈMES : PISTES INITIALES

PROULX, Jérôme[*]

Résumé – Cette communication présente une approche d'enseignement centrée sur l'enseignement des mathématiques par l'investigation et la résolution de problèmes. À partir d'un extrait de séance menée au secondaire, diverses caractéristiques sont déclinées, offrant des éléments initiaux d'analyse.

Mots-clefs : Didactique ; Mathématiques ; Enseignement par problèmes ; Explorations mathématiques

Abstract – This paper presents an approach focused on teaching mathematics through problems and inquiry. Using extracts from a session conducted in a secondary-level classroom, a number of characteristics are outlined, offering an initial layer for subsequent analyses.

Keywords: *Didactique*; Mathematics; Teaching through problems; Mathematical explorations

I. INTRODUCTION AU CONTEXTE DE LA RECHERCHE

Cette communication offre un aperçu des travaux conduits au sein du Laboratoire épistémologie et activité mathématique (www.epistemo.math.uqam.ca), centrés sur l'étude de différentes façons de travailler en contexte de résolution de problèmes (pris au sens large) dans une classe de mathématiques. Ces approches axent sur l'investigation et l'exploration mathématiques, à travers la résolution de divers problèmes, et donc sur un enseignement des mathématiques pensé à travers les résolutions, explorations et investigations de ces divers problèmes par les élèves. Ce contexte de recherche nous amène à intervenir dans plusieurs classes de différents niveaux, allant de l'élémentaire à l'université, où avec des enseignants collaborateurs nous choisissons divers types de problèmes à faire résoudre aux élèves. La nature de ces problèmes est variée, allant de problèmes simples à des problèmes plus complexes, en passant par du calcul mental. Cette variété de problèmes est pensée, par exemple, à travers la classification offerte par Borasi (1986). Cette dernière décline une diversité possible de types de problèmes en mathématiques : exercice, problème en mots, énigme, démonstration, situation-problème, situation de la vie réelle, situation ouverte (voir aussi Proulx (2019) pour une opérationnalisation de cette variété de problèmes en enseignement des mathématiques et en contexte de formation des enseignants).

L'objectif du travail de recherche est, dans un premier temps, de mettre en route cette approche d'enseignement et, dans un deuxième temps, d'étudier son apport didactique, soit la façon avec laquelle celle-ci permet de faire avancer les mathématiques de la classe. Dans le but d'offrir une description de cette approche d'enseignement, quelques assises théoriques sont présentées et un exemple du travail fait avec les élèves est détaillé. L'exemple choisi et utilisé dans cette communication est relatif à l'exploitation de tâches dites simples, tels des exercices ou des problèmes en mots (Proulx, en préparation; un exemple supplémentaire est offert dans la communication de Maheux (2018) dans ces mêmes actes de colloque) Cet ancrage et cet exemple offrent une illustration du type d'exploration et d'investigation mathématique dans lequel les élèves sont plongés, à l'intérieur de nos travaux de recherche, menant par la suite à une analyse initiale de diverses dimensions qui caractérisent l'approche.

[*] Laboratoire épistémologie et activité mathématique – Un. du Qc à Mtl – Qc., Canada – proulx.jerome@uqam.ca

II. LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES COMME PROCESSUS DYNAMIQUE

Ancrées dans la théorie cognitive de l'enaction et du *faire|mathématique* (Maheux & Proulx, 2014, 2015), qui conçoit l'activité mathématique de résolution de problèmes comme un processus non-linéaire et évolutif, nos recherches s'inspirent fortement des travaux de Borasi (1992) et de Lampert (1990 a,b) sur l'investigation en classe de mathématiques, centrés sur l'immersion des élèves en situations authentiques d'investigation et d'exploration mathématiques. Dans leurs travaux, de façon analogue au développement des mathématiques elles-mêmes comme discipline (Davis & Hersh, 1981 ; Wilder, 1984), la résolution de problèmes est conçue en tant que processus émergent qui ne suit pas un plan pré-décidé et à travers lequel de nombreuses questions et nouvelles productions jaillissent en cours de résolution ; celles-ci redirigeant parfois l'exploration en devenant le nouvel objet d'investigation (Cobb et al., 1994), ce à quoi Grenier et Payan (2002) réfèrent comme étant le critère de « non-fin » d'une situation, où la résolution « renvoie très souvent à une nouvelle question. La situation n'a pas de "fin". Il n'y a que des critères de fin locaux. » (p. 192).

Ramenés à la classe de mathématiques, soit en contexte d'enseignement, Remillard et Kaye Geist (2003) conçoivent ces investigations non-linéaires, ces événements émergents, comme offrant des « ouvertures » dans le curriculum, où des occasions d'investigation (supplémentaires) se présentent et redirigent (potentiellement) le déroulement de la séance de classe. On pense à l'idée d'attraper la balle au bond, sur-le-champ, relativement à ce qui se produit en classe : on est ici directement dans un contexte d'exploitation du problème et des solutions fournies en relançant le travail suite à ce qui est fait, en construisant sur les réponses d'élèves (Van Zoest et al., 2016). Borasi (1992) aborde ces idées en termes de flexibilité nécessaire lorsqu'un espace de travail authentique d'investigation est proposé en classe :

> The open-endedness that characterizes inquiry requires extreme flexibility in terms of curriculum content and choices. A teacher will often need to deviate from the original lesson plan in order to follow a new lead, pursue valuable questions raised by the students, or let the class fully engage in a debate stimulated by difference in opinion or different solutions (p. 202)

Ceci amène les intervenants dans les classes à travailler avec les solutions, stratégies et productions des élèves qui surviennent en cours de résolution, en les questionnant, en établissant des liens entre elles, en relançant les élèves par des interrogations diverses, etc., et en encourageant en retour les élèves à faire de même (générer d'autres stratégies, les justifier, argumenter, émettre des conjectures, les valider, etc.). Ceci implique que toute investigation est initiée par la résolution d'une tâche donnée aux élèves à résoudre et à exploiter dans l'action de la classe mais sans avoir une idée pré-fixée du déroulement mathématique qui sera suivi. Ce contexte d'exploration et d'investigation mathématiques implique de se retrouver dans une approche dite d'émergence (Proulx, 2007), où l'avancement des mathématiques suit son propre cours et n'est pas tracé d'avance ou pré-fixé. La Figure 1 rend de façon imagée cette différence.

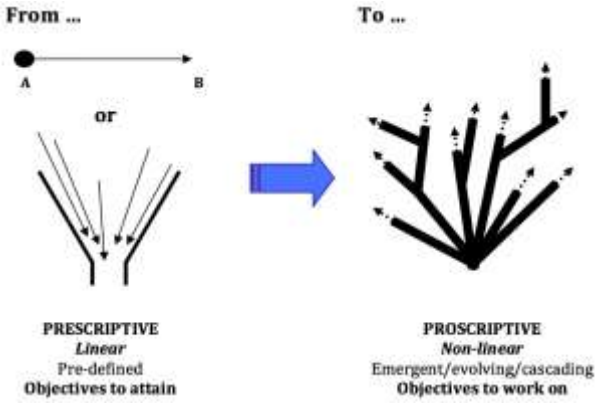


Figure 1 *– Distinctions entre une approche pré-tracée et une d'émergence (tiré de Proulx, 2007)*

Dans ce contexte, un problème se définit autant par ce qui est donné aux élèves, que par son investigation et les questions qui émergent en cours de route : le problème est une entité dynamique, qui évolue et se transforme au fil de la séance. Pour English et Gainsburg (2015), un problème *devient* un problème en fonction de ce qui est demandé à l'élève et de ce qui en découle, et non uniquement en fonction de son « énoncé ». C'est en ce sens que la classification de Borasi est intéressante, où toute tâche, quelle que soit sa nature « initiale », a le potentiel de devenir un problème ou encore d'être réduit à un exercice sans envergure : même la travail d'une preuve mathématique, lorsque mémorisé, perd son intérêt mathématique. Ce sont donc ce qui est demandé à l'élève et son activité en retour qui participent à la création du problème à investiguer, de l'investigation mathématique elle-même et de son déroulement. Les problèmes donnés aux élèves ne sont pas conçus, tel que décrits par Stanic et Kilpatrick (1988), en tant que véhicules ou transmetteur de connaissances mathématiques pré-décidées, à acquérir par la résolution dudit problème. Les problèmes ont plutôt le rôle de déclencheurs de l'activité mathématique des élèves, dans le but de faire émerger des stratégies et concepts à travers leurs exploration et investigation, que l'enseignant prend en compte et réinvestit pour son projet didactique, soit pour faire avancer les mathématiques de la classe. Ainsi, mis à part les thèmes mathématiques globaux (e.g., opérations, algèbre, estimation, géométrie, fractions, mesure), le contenu mathématique précis qui est abordé durant les séances de résolution de problème n'est pas totalement anticipé : il prendra forme à travers la résolution, l'exploration et l'investigation des problèmes, les stratégies développées, les questions posées, etc., le tout se développant dans l'action même de la classe à partir des échanges, des partages, des questionnements et des explorations diverses. C'est à travers cette perspective, axée sur l'émergence des mathématiques en cours d'investigation, que les objectifs de recherche sont abordés.

III. ENSEIGNEMENT PAR RÉSOLUTION DE PROBLÈMES : UN EXEMPLE

1. Quelques éléments du contexte de la recherche

Nous collaborons avec des enseignants qui nous invitent sur une base régulière dans leurs classes afin d'expérimenter différentes approches de résolution de problèmes et pour interagir, analyser et réfléchir avec nous sur l'enseignement qui a cours durant ces séances. Comme ils prennent place dans diverses classes, nos travaux de recherche s'insèrent dans les planifications prévues des enseignants : les tâches données aux élèves sont choisies par et avec les enseignants (provenant la plupart du temps de leur propre matériel). Les séances menées en classe suivent normalement le même format, démarrant avec une tâche présentée aux élèves, écrite au tableau ou donnée oralement selon la nature de la tâche et pour laquelle

les élèves ont un temps variable pour résoudre (seul ou en équipe). Par la suite, en plénière, les élèves sont invités à partager leurs stratégies et solutions à la classe, en s'assurant de bien expliquer et de justifier leurs raisonnements. Tel que mentionné, les élèves sont aussi invités à interagir entre eux au niveau des stratégies et solutions mathématiques offertes, à se questionner, à compléter les idées, à faire des liens entre les solutions, etc. À l'occasion, ces nombreuses interactions provoquent en retour de nouvelles investigations, où les élèves sont invités à creuser des idées et questions supplémentaires (Cobb et al., 1994), ici encore seuls ou en équipe. Les données recueillies sont centrées sur les discussions et interactions en classe, autant verbales, écrites au tableau que gestuelles, de la part des élèves et de l'enseignant, prises sous forme de notes de terrain par des assistants de recherche et/ou enregistrées sous format audiovidéo. Ces données sont complétées par des notes écrites à chaud par le chercheur, ainsi que des rencontres d'équipe (enseignants, chercheur et assistants) suivant les séances pour discuter de divers événements s'étant produits (permettant en retour de bonifier les notes de terrain).

2. Un exemple d'exploration et d'investigation mathématiques

Pour illustrer la nature du travail réalisé avec les élèves, un extrait d'une séance menée dans une classe de mathématiques de secondaire IV comptant une trentaine d'élèves (15-16 ans, période de 75 minutes) est détaillé. Cet extrait a été choisi pour sa capacité à bien illustrer la nature des investigations réalisées avec les élèves dans la majorité des séances conduites/expérimentées dans nos recherches.

L'enseignant de la classe avec qui nous avons travaillé s'intéressait précisément à nos travaux menés en contexte de calcul mental avec des tâches courtes et à résoudre sans papier-crayon, pour voir la façon avec laquelle ses élèves s'engageraient et le type de stratégies qu'ils déploieraient. Le thème retenu pour la séance d'où l'extrait est tiré est la géométrie analytique des distances dans le plan (points de croisement, de partage, distance entre deux points, etc.), pour laquelle les élèves avaient déjà abordé les formules algébriques usuelles. La tâche proposée aux élèves dans l'extrait concerne la distance entre deux points dans le plan cartésien, soit : *Trouvez la distance entre les points (0,0) et (4,3)* (avec un plan cartésien affiché au tableau contenant les deux points tracés). Parce qu'ils avaient déjà abordé les formules de distance entre deux points ($D=\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$), l'intention derrière la tâche n'était pas de faire découvrir ladite formule, mais plutôt de plonger les élèves en contexte de résolution avec un court laps de temps pour faire émerger leurs compréhensions à ce stade sur la distance entre deux points. En d'autres mots, l'idée était de voir comment les élèves s'engageraient, quelles stratégies mathématiques seraient développées, et quel type d'interactions, de questions et d'explorations seraient provoquées par cette tâche, c'est-à-dire quelles productions mathématiques seraient développées par les élèves en classe. Dans ce cas-ci, les élèves disposaient d'une quinzaine de secondes pour résoudre la tâche, sans recours au support papier-crayon ni à d'autres aides matérielles. Après le temps écoulé, ceux-ci ont été invités à partager leurs solutions (complètes ou non) et la façon dont ils y sont parvenus. Le chercheur principal du projet (J. Proulx) est celui qui gère le travail de classe avec les élèves en proposant la tâche et organisant les discussions. Cette tâche de distance représente la première donnée aux élèves durant la séance, et le travail qui en a suivi s'est étalé sur 40 minutes. Voici dans ce qui suit un déroulement synthétique et chronologique des explorations menées.

3. Les stratégies et investigations mathématiques

Une fois la tâche donnée et le temps écoulé, le chercheur invite les élèves à expliquer leurs solutions. Différentes stratégies sont alors partagées pour résoudre la tâche demandée.

Une première stratégie offerte concerne l'utilisation de la formule usuelle, donnant 5 comme mesure de la distance. Une deuxième stratégie implique de tracer un triangle dans le plan et par la suite d'utiliser la relation de Pythagore (Figure 2a), en comptant le nombre de « carrés » d'un point à l'autre pour établir la mesure des côtés de 3 et 4.

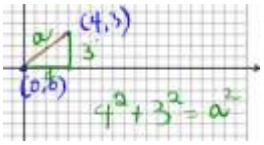


Figure 2a *– Le dessin du triangle rectangle*

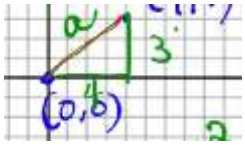


Figure 2b *– Plan rapproché du triangle rectangle*

Une élève propose une troisième stratégie, expliquant qu'il est possible de compter directement les points entre (0,0) et (4,3). Venant au tableau, elle fait un trait rouge de (0,0) à (4,3) sur l'hypoténuse du triangle (Figure 2b). Partant de (0,0), elle compte alors sur ce trait pour obtenir le nombre de « points de croisement » parcourus jusqu'à (4,3), soit les points de coordonnées entières. Elle s'arrête toutefois et affirme que puisque le trait ne passe pas directement par les « croisements » des carrés, alors le comptage est difficile à réaliser. L'enseignant trace alors sur le tableau un autre segment entre deux points fictifs, qui montre le passage d'un point à un autre à travers les diagonales des carrés. De cette façon, le nombre de points de coordonnées entières franchies par la droite, ici 4, peut être compté directement (Figure 3).

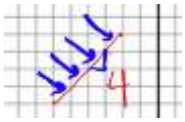


Figure 3 *– Exemple de segment de droite croisant les diagonales des carrés unités en lien avec la 3e stratégie*

L'enseignant demande alors si la mesure obtenue avec les diagonales du carré est la même que celle obtenue avec le côté de ce même carré (il dessine ◹ au tableau).

> Une élève affirme que les deux longueurs ne sont pas les mêmes, car la diagonale d'un carré n'est pas de même longueur que le côté. Un autre élève dit qu'il est certain que ces deux longueurs sont différentes, car l'hypoténuse est toujours le plus grand côté d'un triangle. Une élève explique que la diagonale est plus grande, car elle est en face de l'angle le plus grand du triangle.

L'enseignant demande alors aux élèves si cette affirmation est toujours vraie, soit que le côté le plus grand dans un triangle se retrouve en face de l'angle le plus grand (il dessine un triangle rectangle quelconque au tableau ◿).

> L'élève précédente, pointant le dessin fait, affirme que l'angle face au grand côté est justement plus grand. Une autre élève explique que, dans un triangle, plus l'angle est grand plus la longueur opposée sera grande. Pointant le dessin, elle affirme que si le côté/hypoténuse avait été plus long, il aurait en retour donné un plus grand angle. Il ajoute que puisque la somme des angles d'un triangle donne 180°, alors l'angle droit est toujours l'angle le plus grand du triangle (parce qu'il ne reste que 90° à partager entre deux angles).

Reprenant le dessin du triangle rectangle, l'enseignant fait varier l'angle droit vers un angle obtus et trace la longueur de côté associée, montrant que ce côté deviendrait plus long (dessinant ◿ au tableau). Il fait par la suite varier l'angle à nouveau vers un angle aigu,

demandant aux élèves si, avec cet angle aigu, leur « théorie » du côté opposé à l'angle est toujours valide.

> Un élève dit que tout fonctionne pour le triangle isocèle, avec deux côtés égaux face à deux angles égaux. Un autre élève souligne que c'est la même chose pour le triangle équilatéral, alors que « c'est partout pareil », mêmes angles et mêmes longueurs de côtés.

Suite aux explications des élèves que la diagonale du carré est plus grande que le côté du même carré, l'enseignant souligne que la stratégie du comptage des diagonales revient finalement à compter le nombre de diagonales franchies par le segment d'un point à l'autre. Il ajoute que ceci représente une mesure possible, qui donnerait 4 diagonales dans l'exemple de la Figure 3. Il écrit alors au tableau qu'il est possible d'exprimer la distance entre les deux points avec la valeur de 4 diagonales ou celle de 5 unités, donnant deux mesures différentes pour la même distance. Un élève ajoute que si on connait la valeur en carrés unités de la diagonale, alors on peut trouver le nombre de carrés unités pour ce segment en le multipliant par ce « facteur ».

Un élève offre une autre stratégie en voulant procéder par la loi des sinus, affirmant que l'angle du triangle est de 45^o. L'enseignant demande alors à l'élève comment ce dernier sait-il que l'angle vaut 45^o. L'élève ne pouvant pas offrir de justifications, certains élèves acceptent l'affirmation alors que d'autres ont des réticences. Face à ces divergences, l'enseignant demande aux élèves de prendre quelques minutes, seuls ou en équipe et avec leur matériel scolaire au besoin, pour explorer si l'angle du triangle est de 45^o. Après 5-6 minutes de travail, l'enseignant invite les élèves à partager leurs trouvailles avec la classe.

> Une élève explique que sur sa feuille aide-mémoire donnée pour les aider durant leurs examens, on voit un triangle rectangle isocèle qui possède des angles de 45^o. Et qu'ici, avec ce triangle de 4 et 3 pour mesures de côté, on ne peut pas affirmer directement si la valeur de l'angle est de 45^o, car ce n'est pas un triangle isocèle puisqu'il n'a pas les mêmes mesures de côté.
>
> Une autre élève s'avance au tableau et, à partir du triangle initial formé des points (0,0) et (4,3), complète un rectangle (voir Figure 4a). Elle explique que l'hypoténuse est la diagonale de ce rectangle, qui le coupe en deux et donc coupe en même temps l'angle de 90^o en deux angles égaux de 45^o.

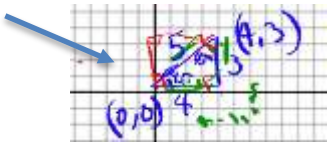


Figure 4a *– Le rectangle « complété »*

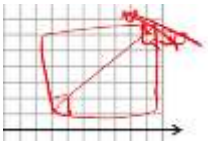


Figure 4b *– Le rectangle « contre-exemple »*

Alors que l'enseignant souligne que les deux arguments s'opposent, une élève affirme son désaccord et dessine au tableau un rectangle avec une diagonale en disant que bien qu'elle divise le rectangle en deux *rien n'assure* que l'angle soit lui aussi divisé en deux (Figure 4b). Une autre élève ajoute à cette idée que puisque les côtés du triangle ne sont pas de même mesure (soit de 3 et de 4), alors la diagonale ne coupera pas l'angle de 90^o en 2 parties égales de 45^o.

L'enseignant explique que l'élève a réutilisé l'argument précédent, accepté par tous, que le plus grand côté du triangle fait face au plus grand angle du même triangle. Donc, ici, un côté plus grand ferait face à un angle plus grand. Un contre-exemple est alors offert.

> L'élève ayant fait référence à sa feuille aide-mémoire affirme qu'il leur arrive tous dans un examen de voir des triangles rectangles qui n'ont pas des angles de 45^o, par exemple des angles de 32^o et 58^o. Elle trace alors au tableau un exemple de ce triangle rectangle, qu'elle complète pour former un rectangle (Figure 5), expliquant que la diagonale coupe en deux le rectangle mais sans que les angles obtenus soient de 45^o.

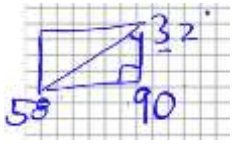


Figure 5 *– Le triangle contre-exemple avec angles de 32^o et 58^o, et le rectangle coupé de la diagonale*

Alors que l'enseignant affirme que l'élève a ici offert un contre-exemple à la proposition de 45^o, un élève propose ensuite d'utiliser la loi des sinus avec les données actuelles du triangle, soit sin90/5=sin?/4 donnant un angle de 58,1^o [corrigé par la suite à 53,1^o et 36,9^o]. Suite à toutes ces explorations, l'enseignant demande alors comment chacun se positionne sur le 45^o.

> Un élève affirme que puisque les trois côtés du triangle en question sont différents, alors leurs angles associés seront différents, reprenant de plus l'argument concernant le plus grand côté faisant face au plus grand angle et donc que des côtés différents entraînent des angles différents.

L'enseignant souligne qu'un élève a dessiné un carré pour évaluer le 45^o. À partir d'un triangle de 3, 4 et 5 de côté, il prolonge la cathète de 3 vers une de 4 pour former un carré de 4x4. En reliant ce dessin au carré unité utilisé auparavant pour comparer la mesure de la diagonale et celle du côté du carré, l'enseignant explique qu'on retrouve ce même dessin dans le carré de 4x4 (Figure 6). Comparant les deux triangles, il illustre que le triangle initial de 3 et 4 de côté a un angle différent de celui de 4 et 4 de côté, qui a un angle de 45^o. Les élèves confirment alors leur accord avec le fait que l'angle n'est pas de 45^o. L'investigation se termine à ce moment.

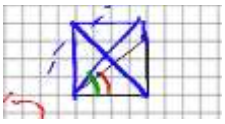


Figure 6 *– La comparaison des triangles à partir du carré ayant 4 comme mesure de côté*

IV. QUELQUES PAS SUPPLÉMENTAIRES POUR CARACTÉRISER L'APPROCHE

Dans ce qui suit, trois dimensions au cœur de l'approche sont discutées, offrant des pistes pour les analyses subséquentes à tenir sur cette approche d'enseignement des mathématiques.

1. Les tâches : des déclencheurs pour l'activité mathématique

Tout comme pour l'approche du problème ouvert (Arsac et al., 1988), qu'ils soient simples ou complexes, les énoncés offerts sont généralement assez courts, n'induisent pas directement une solution et permettent aux élèves de s'engager immédiatement dans sa résolution. Tel que le montre l'extrait, ce type de tâche exige un travail d'exploration et d'investigation mathématiques importants *dans l'action*, en fonction des réponses, stratégies et questions des élèves (celles-ci pouvant en retour provoquer de nouvelles explorations (Cobb et al., 1994), comme pour la diagonale du carré ou l'angle de 45^o). C'est en ce sens que les tâches servent de déclencheurs pour l'activité mathématique des élèves (et en retour de l'enseignant), car elles ne sont pas des véhicules des connaissances à atteindre par leur résolution et sont uniquement choisies sur la base d'un thème mathématique à explorer. Pour la tâche de distance, l'objectif *n'était pas de faire découvrir* la notion de distance entre deux points ou d'y aboutir, mais plutôt *de faire travailler* la notion de distance, de l'explorer, de lui donner un sens, de faire ressortir et relier des compréhensions et concepts mathématiques qui s'y rattachent, de près ou de loin, etc. Relativement à l'activité des élèves, des contenus différents peuvent être abordés et des mathématiques différentes peuvent être produites. Ceci influence l'orientation à adopter pour aborder l'objectif de la recherche : l'analyse de l'apport

didactique de cette approche, relatif à l'avancement des mathématiques en classe, est contingente à l'activité d'investigation se déroulant sur-le-champ ; et non en fonction de l'atteinte d'un savoir mathématique prédécidé (i.e., fixé avant la séance).

2. Le rôle de la classe : une communauté de validation mathématique

Dans cette résolution émergente, le groupe-classe agit comme une mini-communauté mathématique (Boaler, 1998 ; Borasi, 1992) qui produit et valide les stratégies, arguments et justifications mathématiques. Dans cette communauté, tel que l'explique Lampert (1990 a,b), l'enseignant représente le membre le plus expérimenté au niveau mathématique et assume le rôle de *gate-keeper* de la présence, qualité et intelligibilité des justifications et argumentations mathématiques proposées, en plus d'insister sur la négociation de sens et non l'imposition autoritaire des idées. L'autorité réside dans les mathématiques, tel que le dit Schoenfeld (1994) : elle n'est pas externe, décidée à l'avance, ni dans les personnes qui l'affirment, mais bien dans les mathématiques qui sont faites. L'enseignant sert alors de pont entre la communauté mathématique plus large et cette mini-communauté : non pas pour imposer la voix de la communauté mathématique externe, mais pour faire le lien entre les deux communautés et donner un sens aux productions mathématiques développées, voire les faire avancer et les approfondir. C'est en ce sens que l'enseignant fait partie de la mini-communauté mathématique de la classe, où il se questionne constamment sur les sens et productions mathématiques développés : lui-même explore et investigue les idées proposées et les productions mathématiques. L'analyse à conduire sur l'avancée des mathématiques en classe se centre alors sur les productions mathématiques de la communauté de classe, incluant l'enseignant.

3. Les rôles et buts de l'enseignant : le maître d'œuvre des explorations mathématiques

L'enseignant n'est pas ici perçu comme un technicien reproduisant une marche à suivre venant de l'extérieur, mais plutôt comme un acteur central du fonctionnement de la classe. Le matériau de travail de l'enseignant est en premier lieu la tâche qui sert de déclencheur et ensuite les productions des élèves (stratégies, questions, affirmations, liens établis, etc.). C'est à partir de ces propositions d'élèves que l'enseignant intervient et relance la classe sur une question, une nouvelle idée, voire une nouvelle tâche pour pousser l'exploration et l'investigation mathématiques. Il doit fréquemment clarifier ces mêmes propositions d'élèves, les répéter pour la classe, les redire/reformuler en d'autres mots plus accessibles ou mathématiquement adéquats (ce que Forman & Ansell, 2001, nomment le *revoicing*). Mais il doit surtout être alerte face aux productions mathématiques partagées pour souligner et insister sur celles qui sont importantes : le travail mathématique de la classe n'est pas laissé en plan, il est d'une certaine façon institutionnalisé, constamment rendu public et « officialisé », pour montrer l'avancement mathématique réalisé (voir Proulx, 2018, sur cette dimension de l'enseignement en contexte de résolution de problèmes). Ces avancées mathématiques ne sont toutefois pas totalement pré-décidées face à la tâche à résoudre : l'enseignant se doute bien de certaines idées centrales ou façons de faire qui seront partagées (e.g., ici concernant la distance entre deux points), ou encore de liens qui seront tissés, mais beaucoup d'autres productions mathématiques sont générées et partagées en temps réel durant l'investigation et celles-ci ont une forte légitimité mathématique. L'enseignement est alors vu comme processus dynamique, qui émerge au cœur des interactions entre élèves et enseignant. Ce dernier, tout comme l'élève ou le groupe qui résout un problème, doit déployer une expertise dans l'action, pendant l'enseignement, en réaction aux événements de la classe : il rencontre des imprévus, il doit agir sur le champ, il se questionne et gère des questions, il anticipe certaines possibilités, il fait des essais, etc. C'est en ce sens que Curcio et Artzt

(2004) affirment que l'enseignant se retrouve lui aussi, d'une certaine façon, en contexte d'investigation, en situation de résolution de problèmes. Ceci résonne avec ce que Grenier et Payan (2002) affirment concernant leurs travaux sur les de situations de recherche en classe, où « l'enseignant est en double position de chercheur et de gestionnaire de la situation » (p. 196). Bien qu'à un stade préliminaire de la recherche, il semble important de continuer à creuser cette dimension relative au rôle de l'enseignant pour l'avancée des mathématiques en classe.

V. REMARQUES FINALES ET TRAVAUX EN COURS

L'investigation et l'exploration mathématiques à travers la résolution de problèmes est centrale aux approches d'enseignement développées au sein de notre Laboratoire, mettant l'accent sur le processus de production mathématique lui-même. Les mathématiques sont ici vécues comme une activité, générée à travers les problèmes résolus et prenant racine à travers eux. Tout ce travail de recherche n'est toutefois qu'à un stade initial et se poursuit de façon régulière dans diverses classes. En ce sens, diverses dimensions sont étudiés par les membres de l'équipe du Laboratoire, relatif à ces séances de classes axées sur l'exploration et l'investigation mathématiques : la nature des idées mathématiques abordées (e.g., Proulx et al., 2018), la place des erreurs (e.g., Mégrourèche, en préparation), la nature de l'activité mathématique des élèves (e.g., L'Italien-Bruneau, en préparation; Savard, en préparation), la nature des questionnements de l'enseignant (e.g., Van Moorhem & Proulx, 2018), les pratiques d'institutionnalisation (e.g., Proulx, 2018), le rôle des tâches (e.g., Proulx, en préparation), etc. Ces études sont des occasions d'explorer plus en profondeur le potentiel didactique de cette approche d'enseignement, soit ce qu'elle implique pour l'avancement des mathématiques en classe.

REFERENCES

Arsac G., et al. (1988) *Problème ouvert et situation-problème*. IREM-Lyon : Lyon.

Boaler J. (1998) Open and closed mathematics: student experiences and understandings. *Journal for Research in Mathematics Education 29*(1), 41–62.

Borasi R. (1986) On the nature of problems. *Educational Studies in Mathematics 17*, 125-141.

Borasi R. (1992) *Teaching mathematics through inquiry*. Heineman: US.

Cobb P., Perlwitz M., & Underwood D. (1994) Construction individuelle, acculturation mathématique et communauté scolaire. *Revue des sciences de l'éducation 20*(1), 41-61.

Curcio F., & Artzt A. (2004) Reflecting on teaching mathematics through problem solving. *Teaching mathematics through problem solving* (pp. 127-141). NCTM: Reston, VA.

Davis P.J., & Hersh D. (1981) *The mathematical experience*. Boston: Birkhauser.

English L., & Gainsburg J. (2015) Problem solving in a 21st century mathematics curriculum. *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 313-35). Routledge: UK.

Forman E., & Ansell E. (2001) The multiple voices of a mathematics classroom community. *ESM 46*, 115-142.

Grenier D., & Payan C. (2002) Situation de recherche en « classe » : essai de caractérisation et proposition de modélisation. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques.* Paris VII.

Lampert M. (1990a) When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal 27*, 29-63.

Lampert M. (1990b) Connecting inventions with conventions. In L.P. Steffe & T. Wood (Eds.), *Transforming children's mathematics education* (pp. 253-265). Hillsdale: Erlbaum.

L'Italien-Bruneau R.-A. (en préparation) *Étude des liens entre l'activité des élèves en résolution de problèmes et celle du mathématicien*. Mémoire de maîtrise, Université du Québec à Montréal, Canada.

Maheux J.-F. (2018) Invitation à la pluralité du *faire|mathématique*. *Actes du colloque EMF-2018*.

Maheux J.-F., & Proulx J. (2014) Vers le *faire mathématique* : essai pour un nouveau positionnement en didactique des mathématiques. *Annales did. et sc. cognitives 19*, 17-52.

Maheux J.-F., & Proulx J. (2015) Doing|mathematics: analysing data with/in an enactivist-inspired approach. *ZDM 47*(2), 211-221.

Mégrourèche C. (en préparation) *L'erreur en classe de mathématiques : Repenser son rôle, étudier son potentiel*. Mémoire de maîtrise, Université du Québec à Montréal, Canada.

Proulx J. (2007) *(Enlarging) secondary-level mathematics teachers' mathematical knowledge*. Thèse de doctorat, Université de l'Alberta, Alberta, Canada.

Proulx J. (2018) On teaching actions in mathematical problem-solving contexts. *Proceedings of PME-NA 40* (pp. 1060-1067). Greenville, South Carolina: PME-NA.

Proulx J. (2019) Faire vivre une formation à l'enseignement des mathématiques *par* résolution de problèmes. *Canadian J. of Science, Mathematics and Technology Ed*.

Proulx J. (en préparation) *From routine tasks to non-routine problems*.

Proulx J., Champagne, K., L'Italien-Bruneau, R.-A., & Mégrourèche, C. (2018) Emergent ideational network. *Proceedings of PME-42* (vol. 1, pp. 169-175). Umea, Suède: PME.

Remillard J.T., & Kaye Geist P. (2002) Supporting teachers' professional learning by navigating openings in the curriculum. *Journal of Mathematics Teacher Education 5*, 7-34.

Savard A. (en préparation) *Interactions entre stratégies d'élèves en contexte de résolution de problèmes.* Mémoire de maîtrise, Université du Québec à Montréal, Canada.

Schoenfeld A. (1994) Reflections on doing and teaching mathematics. In A.Schoenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving* (pp. 53-70). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Stanic G., & Kilpatrick J. (1988) Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. In R. Charles & E. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (pp. 1-22). NCTM: Reston, VA.

Van Moorhem A., & Proulx J. (2018) Questionnement enseignant en contexte de résolution de problèmes par calcul mental. *Actes du colloque EMF 2018*.

Wilder, R. L. (1981) *Mathematics as a cultural system*. Pergamon Press: UK.

PROPOSITION D'UNE GRILLE D'ÉVALUATION DES PRATIQUES ENSEIGNANTES LORS DE SÉANCES FONDÉES SUR DES DÉMARCHES D'INVESTIGATION EN MATHÉMATIQUES AU PRIMAIRE

TUFFÉRY-ROCHDI[*] Chantal

Résumé – Dans cette communication, nous présentons le contenu d'une journée de stage sur la démarche d'investigation (DI) en mathématiques à destination de conseillers pédagogiques du primaire. Le choix a été fait d'aborder cette formation par le biais de l'évaluation. L'objectif était l'élaboration d'une grille d'évaluation des pratiques enseignantes lors de séances fondées sur une DI.

Mots-clefs : démarche d'investigation, évaluation formative des pratiques enseignantes.

Abstract – In this paper, we present the content of one training day for primary education counsellors which was about problem-based learning. The choice was made to approach this day through the evaluation. The aim was to develop a grid of evaluation of teaching practices when this pratices are based on investigations.

Keywords : inquiry-based teaching, formative assessment of teaching practices.

I. INTRODUCTION

Cette communication vise à présenter les résultats d'une journée de stage menée en novembre 2017 dans l'académie de La Réunion. Cette journée s'insérait dans une formation de trois jours intitulée « Maths et interdisciplinarité » à l'initiative des membres de l'Association Nationale des Conseillers Pédagogiques de cette académie. Cette formation était destinée à des conseillers pédagogiques du primaire inscrits sur la base du volontariat. Son objectif était d'outiller les conseillers pédagogiques pour qu'ils puissent être les plus efficients possibles lors des formations qu'ils dispensent aux enseignants de leur circonscription. La première journée était entièrement consacrée à la démarche d'investigation (DI) en mathématiques. C'est celle qui nous intéresse ici. Les journées suivantes portaient sur des DI menées en interdisciplinarité avec la musique et les arts.

Pour cette première journée, il a été choisi, en concertation avec les autres formateurs, d'aborder la DI en mathématiques par le biais de l'évaluation, évaluation entendue principalement comme une évaluation formative. Des recherches antérieures (Gandit et al., 2014 ; Tufféry-Rochdi, 2017) ont mis en avant l'impact positif d'une réflexion des enseignants sur l'évaluation des élèves lors de séances fondées sur des DI, impact ressenti aussi bien sur les méthodes d'enseignement que sur les apprentissages des élèves. L'hypothèse posée ici est que cet effet au niveau *n* pourrait se reproduire au niveau *n+1*. Amener les conseillers pédagogiques à réfléchir sur l'analyse des pratiques enseignantes lors de l'observation de séances fondées sur des DI pourrait leur permettre une meilleure appropriation de cette méthode d'enseignement mais également une meilleure capacité à expliciter leurs attentes auprès des enseignants qui participent à leurs formations. Cette explicitation devrait, dans un second temps, guider les professeurs des écoles formés vers la conception et la gestion de séances fondées sur des DI.

La journée a été décomposée en trois temps. Un premier temps a été consacré à la pratique d'une DI en mathématiques. Les raisons du choix de cette DI et les objectifs visés dans le cadre de cette formation sont l'objet de la partie II de la présente communication. Un deuxième temps a été dédié à une réflexion collective sur le problème professionnel suivant : « En tant que conseiller pédagogique, comment observer et analyser les pratiques

[*] LIM, Université de La Réunion – France – chantal.tuffery-rochdi@laposte.net

enseignantes lors d'une séance fondée sur une DI ? ». Les résultats de cette réflexion collective sont détaillés dans la partie III. Enfin, l'évaluation par compétences des élèves engagés dans des résolutions de problèmes a fait l'objet du troisième et dernier temps de la journée. Elle ne sera pas abordée dans ce texte. Nous conclurons cette communication par un bilan de cette journée de formation en mettant en avant les questions restées en suspens.

II. PRATIQUE D'UNE DÉMARCHE D'INVESTIGATION EN MATHÉMATIQUES, CHOIX ET OBJECTIFS

En France, un enseignement des sciences fondé sur le questionnement et l'investigation est mis en place à partir de la rentrée 2000 dans le « Plan de Rénovation des Sciences et de la Technologie à l'Ecole » (Boilevin, 2013). Ce plan s'inspire de l'expérimentation du projet « La main à la pâte » initié par Charpak à la fin des années quatre-vingt-dix. La démarche à suivre par les élèves est explicitée.

> Les élèves construisent leurs apprentissages en étant acteurs des activités scientifiques.
> - Ils observent un phénomène du monde réel et proche, au sujet duquel ils formulent leurs interrogations.
> - Ils conduisent des investigations réfléchies en mettant en œuvre des démarches concrètes d'expérimentation, complétées le cas échéant par une recherche documentaire. Il est important que les élèves pratiquent l'une et l'autre de ces deux voies complémentaires.
> - Ils échangent et argumentent au cours de l'activité, ils partagent leurs idées, confrontent leurs points de vue et formulent leurs résultats provisoires ou définitifs, oralement et par écrit. Ce faisant, ils sont conduits à s'écouter mutuellement, à considérer l'autre, à le respecter et à prendre en compte son avis. (MEN, 2000).

En 2007, le rapport Rocard qui préconise un enseignement des sciences basé sur l'investigation précise la spécificité des mathématiques et préfère alors parler d'enseignement basé sur les problèmes :

> L'enseignement basé sur les problèmes désigne un environnement d'apprentissage dans lequel les problèmes guident l'apprentissage. Autrement dit, l'apprentissage commence par un problème à résoudre et ledit problème est posé de façon à obliger les enfants à acquérir de nouvelles connaissances avant même l'étape de la résolution proprement dite. Plutôt que de rechercher une réponse correcte unique, les enfants interprètent le problème, recueillent les informations nécessaires, identifient les solutions possibles, évaluent les différentes options disponibles et formulent des conclusions. (Rocard, 2007, p.10).

Suite à des réflexions menées par l'académie des sciences en 2004 et 2005, la DI apparaît dans les programmes de collège applicables à partir de la rentrée 2006 (Boilevin, 2013). Elle est présentée dans l'introduction commune à l'ensemble des disciplines scientifiques comme une démarche qui privilégie la construction du savoir par l'élève. Elle s'appuie sur le questionnement des élèves relatif au monde réel (en sciences expérimentales et en technologie) et sur la résolution de problèmes (en mathématiques). Des spécificités liées aux objets d'études de ces différents domaines et à leurs méthodes de preuve sont précisées : formulations respectives d'hypothèses explicatives et de conjectures, validation par l'expérimentation d'un côté et par la démonstration de l'autre. Les investigations réalisées avec l'aide du professeur, l'élaboration de réponses et la recherche d'explications ou de justifications débouchent sur l'acquisition de connaissances, de compétences méthodologiques et sur la mise au point de savoir-faire techniques. Sept étapes sont proposées, à titre indicatif : le choix d'une situation-problème, l'appropriation du problème par les élèves, la formulation de conjectures et de protocoles possibles pour les éprouver, l'investigation ou la résolution du problème conduite par les élèves, l'échange argumenté autour des propositions élaborées, l'acquisition et la structuration des connaissances et enfin la mobilisation des connaissances (MEN, 2005). Ainsi donnée, la DI repose donc sur une situation-problème (Brousseau, 2004) et vise l'introduction de connaissances nouvelles par franchissement d'obstacles sociocognitifs.

Les programmes du primaire en cours au moment de la formation sont ceux de 2015 (MEN, 2015). Dans ces programmes, la résolution du problème est au centre de l'activité mathématique des élèves. Les problèmes proposés peuvent être issus d'autres enseignements, de la vie de classe ou de la vie courante et ils peuvent également être internes aux mathématiques. Les enseignants sont incités à proposer des problèmes dits « problèmes pour apprendre à chercher » :

> On veille aussi à proposer aux élèves des problèmes pour apprendre à chercher qui ne soient pas directement reliés à la notion en cours d'étude, qui ne comportent pas forcément une seule solution, qui ne se résolvent pas uniquement avec une ou plusieurs opérations mais par un raisonnement et des recherches par tâtonnements. (MEN, 2015, p. 197).

De façon générale, la résolution de problème doit contribuer au développement des six compétences « chercher », « modéliser », « représenter », « calculer », « raisonner » et « communiquer ».

Ainsi, dans la compétence « chercher » du cycle trois, on peut lire :

> S'engager dans une démarche, observer, questionner, manipuler, expérimenter, émettre des hypothèses, en mobilisant des outils ou des procédures mathématiques déjà rencontrées, en élaborant un raisonnement adapté à une situation nouvelle. Tester, essayer plusieurs pistes de résolution. (MEN, 2015, p.198)

Dans la compétence « Raisonner » on trouve : « Progresser collectivement dans une investigation en sachant prendre en compte le point de vue d'autrui. » (MEN, 2015, p.198).

On pourrait également citer la compétence « Communiquer » : « Expliquer sa démarche ou son raisonnement, comprendre les explications d'un autre et argumenter dans l'échange. » (MEN, 2015, p.199).

Ainsi, dans les programmes de mathématiques du primaire de 2015, même s'il n'est pas fait explicitement référence à la DI, on incite les enseignants à proposer des « problèmes pour apprendre à chercher » et on retrouve dans les compétences à développer des éléments propres à l'investigation. S'agissant d'une formation destinée à des conseillers pédagogiques du primaire, nous avons défini une DI comme une séance conduisant à mettre en œuvre les compétences extraites des programmes et rappelées ci-dessus. Certaines de ces séances ne visent que la démarche de recherche (compréhension de la question, autonomie, prise d'initiative, émission de conjectures, proposition de méthodes pour les éprouver, communication des résultats orale ou écrite, qualité des arguments lors des échanges…). Il est également possible que des séances se donnent également comme objectif l'acquisition ou le réinvestissement de connaissances mathématiques (concepts, définitions, propriétés…).

Après concertation entre formateurs, il nous a semblé important de faire pratiquer dans un premier temps une DI aux conseillers pédagogiques avant de rappeler le prescrit. Nous avons choisi une DI interne aux mathématiques déjà étudiée dans la recherche en didactique des mathématiques (Balacheff, 1988) et reprise plus récemment (Gandit et al., 2014). La question posée est la suivante :

Quel est le nombre de diagonales d'un polygone ? Autrement dit, donner un moyen qui permet, dès que l'on connait le nombre de sommets d'un polygone, de trouver le nombre de ses diagonales.

Le problème posé, s'il n'a jamais été rencontré, conduit à s'engager dans une recherche. Il peut être proposé à différents niveaux : en CM2/sixième (Gandit et al., 2014) ou en cinquième/quatrième (Balacheff, 1988). Il nous a semblé par ailleurs adapté aux conseillers pédagogiques inscrits pour la formation. Proposé tel qu'énoncé ci-dessus, il devrait dans un premier temps amener à l'explicitation des concepts de polygone, sommet et diagonale. Il devrait également conduire les conseillers pédagogiques à soulever des questions sur le fait de

considérer des polygones convexes et/ou concaves, croisés et/ou non croisés. Nous avons prévu de limiter la recherche à des polygones convexes et non croisés. Elle devrait débuter par le traitement de cas particuliers. Ce qui devrait conduire à l'émission de conjectures qui pourront être éprouvées par l'étude d'autres cas particuliers. La conjecture $\frac{n}{2}$ issue de l'étude des quadrilatères est ainsi attendue ; elle pourra être réfutée par l'étude d'un polygone avec un nombre impair de sommets. Parmi les solutions possibles (Balacheff, 1988), la réponse anticipée ici est : *si n est le nombre de sommets, le nombre de diagonales est* $\frac{n(n-3)}{2}$. La validation retenue sera une explicitation orale de la formule du type : *depuis chacun des n sommets, on peut tracer n-3 diagonales mais comme une diagonale joint deux sommets, elle est comptée deux fois, ce qui conduit à diviser par deux*.

Ainsi, le problème proposé, tout en mobilisant des concepts déjà connus, amène à élaborer un raisonnement adapté à la situation. Ce raisonnement est l'aboutissement de tests et de tentatives qui conduisent à émettre des conjectures et à les éprouver. L'ensemble correspond aux attentes du programme de mathématiques du cycle 3 (MEN, 2015) concernant la compétence « chercher ». Notre objectif était principalement ici la pratique d'une démarche de recherche dans un contexte interne aux mathématiques.

La recherche s'est effectuée en trois étapes. Une première étape de recherche individuelle de cinq minutes suivie d'une première mise en commun, une deuxième partie de recherche en groupe prévue sur quinze à vingt minutes et, enfin, une étape de bilan conduisant à la structuration des connaissances visées. Le tout devrait donc permettre une progression collective dans une investigation en prenant en compte le point de vue d'autrui comme demandé dans le programme de mathématiques du cycle 3 (Ibid) pour la compétence « raisonner ».

Comme la formation s'adressait à des conseillers pédagogiques, il était envisagé que certains d'entre eux connaissent déjà la formule recherchée, auquel cas ils auraient été invités à se mettre en retrait et à adopter une posture d'observateurs mais cela ne s'est pas produit. Tous les conseillers pédagogiques ont adopté la posture de l'élève. Ils ont tracé des polygones, dénombré les diagonales, émis des conjectures qu'ils ont éprouvées. Au bout de vingt minutes, dans chaque groupe, les recherches ont conduit à la formule attendue. Un seul groupe avait reçu l'indice prévu en cas de blocage, qui proposait pour des polygones tracés de dénombrer le nombre de diagonales issues d'un même sommet. Les formules erronées, d'abord envisagées, avaient été éprouvées et rejetées au sein de chaque groupe. Après tâtonnement, la formule correcte sous forme algébrique a émergé. L'explicitation orale du choix de cette formule, reconnue ici comme une validation, a été proposée par quelques conseillers pédagogiques et reformulée pour tous. De fait, les phases de bilan et de structuration des connaissances ont été rapidement menées dans ce contexte particulier.

L'objectif de cette recherche dans le cadre de la formation était multiple. Outre le fait qu'elle a permis aux conseillers pédagogiques de vivre une DI en mathématiques, elle a également conduit à des échanges sur l'objet de la formation et a ainsi permis de revenir sur le prescrit. Elle a aussi conduit à mieux identifier les besoins et les attentes des participants. Enfin, elle a favorisé la mise en action des formés et a instauré un climat d'échanges bienveillant.

Le choix fait de notre part d'imposer un temps de recherche individuelle de quelques minutes suivi d'une première mise en commun rapide avant de lancer la recherche en groupe a été discuté. Ce temps de recherche individuel vise à favoriser l'engagement de chaque élève et permet à l'enseignant de vérifier la compréhension de tous. Il ne doit cependant pas être trop long pour éviter que les élèves ne s'enferment dans leur solution et ne soient plus ouverts

aux propositions des autres lors de la recherche en groupe. La première mise en commun permet principalement de bien cerner le problème mais elle peut également faire émerger les premières idées sur lesquelles pourra s'appuyer le travail de recherche en groupe. Ainsi, dans la DI mise en œuvre, ce premier temps d'échange a permis de vérifier la compréhension par tous du vocabulaire géométrique (polygone, sommet, côté, diagonale) mais également de préciser si l'on considère uniquement les polygones convexes et/ou concaves, croisés et/ou non croisés, en réponse aux questions de certains groupes.

La pratique de cette DI nous a également permis de centrer par la suite une partie de nos réflexions sur un cas concret de recherche. Elle a ainsi contribué à faire émerger des idées mais a également pu nous détourner de réflexions plus générales.

III. RÉFLEXION SUR L'ÉVALUATION DES PRATIQUES ENSEIGNANTES LORS D'UNE SÉANCE FONDÉE SUR UNE INVESTIGATION

Suite à ce premier temps de formation, il a été demandé aux conseillers pédagogiques de réfléchir au problème professionnel suivant :

Comment observer un enseignant qui mène une séance fondée sur une DI en mathématiques ? Quels sont les éléments qui vous permettent de considérer que la séance est bien menée et que les objectifs visés sont atteints ?

La réflexion proposée portait donc sur deux points qui nous semblent essentiels : la gestion de la séance et l'organisation de la rencontre des élèves avec le contenu mathématique. La gestion d'une séance fondée sur une DI repose sur un contrat didactique (Brousseau, 2004) bien différent de celui d'un cours traditionnel. L'enseignant n'est plus en charge de dispenser le savoir. Il doit, dans un premier temps, concevoir une tâche qui favorise la rencontre des élèves avec ce savoir. Il doit ensuite guider les élèves tout au long de cette tâche, permettre la dévolution du problème au groupe classe, favoriser le travail d'équipe au sein des groupes d'élèves puis animer le bilan pour permettre une confrontation des résultats obtenus et favoriser l'argumentation. Il doit enfin réussir, à partir des résultats obtenus, à structurer et à institutionnaliser les connaissances visées. Les difficultés rencontrées par les enseignants pour mener à bien ce type de séances sont régulièrement mises en avant :

> Le partage des responsabilités mathématiques entre enseignants et élèves que sous-entend cette vision de l'apprentissage est en fait loin d'aller de soi. Il requiert des tâches et un guidage approprié des élèves, ainsi qu'un contrat didactique approprié (Brousseau, 1997). Il requiert des enseignants capables de faire face à l'imprévu et d'identifier le potentiel mathématique d'idées et de productions d'élèves non nécessairement anticipées. Il requiert des enseignants capables enfin d'aider les élèves à relier les résultats qu'ils ont obtenus dans un contexte particulier avec les connaissances visées par l'institution, à la fois dans leur contenu et dans leur forme d'expression. Les besoins en expertise enseignante vont ainsi bien au-delà de ce qui est en jeu dans les pratiques d'enseignement traditionnelles. (Artigue, 2011, p. 22).

Pour cibler la tâche proposée aux conseillers pédagogiques, la séance a été découpée en temps d'enseignement qui reprennent les temps choisis lors de la DI pratiquée en début de journée de formation. Une phase de structuration des connaissances a été ajoutée. L'objectif n'était pas l'élaboration d'une grille d'évaluation de la DI pratiquée par les stagiaires mais celle d'une grille adaptable aux observations qu'ils mènent dans les classes. Les éléments portés dans le tableau suivant sont l'aboutissement de cette réflexion conjointe : celle des formateurs impliqués ce jour-là et celle des conseillers pédagogiques qui suivaient le stage. Dans le tableau ci-dessous, P désigne « professeur des écoles » et E désigne « élève » ou « élèves ».

Ainsi, même si les deux colonnes du tableau sont liées, il semble possible de scinder en deux les observations. La première colonne est indépendante des mathématiques et pourrait

être utilisée dans d'autres disciplines alors que la seconde colonne est explicitement associée au contenu disciplinaire aussi bien concernant la démarche de recherche que les connaissances mathématiques en jeu.

Rôle du professeur en termes de gestion de séance	**Rôle du professeur concernant le contenu disciplinaire et/ou la démarche de recherche**
Présentation du problème, recherche individuelle, première mise en commun - Phase d'accroche : P sait mettre en scène le problème pour susciter l'intérêt des E. - P vérifie la compréhension des consignes (explicitation, reformulation…). - P vérifie que tous les E s'impliquent dans la recherche individuelle. - P mène rapidement et efficacement la première mise en commun.	**Présentation du problème, recherche individuelle, première mise en commun** - Le problème est pertinent, porteur, adapté au niveau des élèves. - P vérifie les prérequis nécessaires (vocabulaire, concepts…). - P fait émerger les conceptions erronées. - A l'issue de la première mise en commun, les E ont tous compris le problème posé.
Phase de recherche - P organise le travail de groupe : constitution des groupes en fonction de critères explicites, distribution des rôles au sein de chaque groupe… - P a prévu le matériel nécessaire pour la recherche et pour la communication des résultats (affiche, tablette…). - P circule équitablement de groupe en groupe. - P ne répond pas directement aux questions mais retourne la question ou oriente vers les pairs, les outils… - P a prévu des aides/indices pour étayer les élèves/groupes en difficultés. - P met en œuvre une différenciation des tâches.	**Phase de recherche** - Le matériel fourni est pertinent. - Le guidage lors de la phase de recherche est adapté. - Les aides/indices prévus sont pertinents. - P invite les E à éprouver les réponses avancées. - P prend des informations pour préparer le bilan.
Phase de bilan - P recentre l'attention des E. - P choisit les groupes invités à communiquer l'avancée de leurs recherches (tous/uniquement certains). - P organise la gestion de l'espace (tableau), en fonction du support utilisé (affiche, photo, tablette…). - P distribue la parole, s'assure des interactions entre tous les E. - P fait en sorte que les E écoutent les explications des autres groupes.	**Phase de bilan** - P met en commun toutes les réponses et pas uniquement celles qui sont correctes (statut et gestion de l'erreur). - P fait passer les groupes dans un ordre didactiquement porteur. - P fait verbaliser les réponses et les stratégies des E. - P favorise les interactions, la confrontation et l'argumentation. - P met en avant les méthodes de recherche et pas uniquement les connaissances.
Phase de structuration des connaissances - P parvient à maintenir l'attention des E. - P fait en sorte que les E gardent des traces des résultats obtenus.	**Phase de structuration des connaissances** - P parvient à faire reformuler les connaissances visées et à généraliser en vue d'une trace écrite. - P parvient à faire expliciter et à structurer les méthodes de recherche mises en œuvre. - Qualité et précision du vocabulaire utilisé. - P met en perspective la suite des

Bonne gestion du temps à chaque étape	apprentissages.

Tableau 1 *- évaluation des enseignants*

La mise en scène du problème lors de la phase d'accroche, suivie de demande de reformulation par des élèves, devrait être un processus habituel pour les enseignants du primaire selon les conseillers pédagogiques. Les échanges entre l'enseignant et les élèves devraient ensuite conduire à la vérification des prérequis et à l'émergence des conceptions erronées propres au contenu disciplinaire.

La gestion de la phase de recherche est liée à la gestion du travail de groupe aussi bien concernant la constitution des groupes et la distribution des rôles au sein de chaque groupe que concernant la capacité de l'enseignant à circuler équitablement entre les groupes et à guider le travail sans répondre directement aux questions posées. Une réflexion en amont sur le matériel et les indices pouvant être donnés pourrait favoriser ce guidage.

Lors de la phase de bilan, l'enseignant doit d'abord recentrer l'attention des élèves parfois peu enclins à interrompre le travail de recherche et à se montrer attentifs aux résultats avancés par les autres groupes. La gestion matérielle de cette phase est importante : gestion de l'espace, du tableau, des supports utilisés pour permettre l'exposition des travaux de chacun… Si l'enseignant doit favoriser les interactions de tous, il lui revient de décider s'il doit faire passer tous les groupes ou seulement certains. Néanmoins, toutes les réponses doivent être mises en commun et pas seulement les réponses correctes et les méthodes expertes. L'ordre de passage des groupes doit être didactiquement porteur et pour cela il doit être anticipé par le professeur à partir d'informations prises en circulant lors de la phase de recherche. Enfin, l'enseignant doit amener les élèves se trouvant au tableau à expliciter à la fois les procédures mises en œuvre et les résultats obtenus afin de favoriser les interactions, la confrontation et l'argumentation.

La phase de structuration des connaissances intervient en fin de séance après un long temps de recherche en groupe et d'échange lors du bilan. Il est alors souvent compliqué pour l'enseignant de reprendre la main et de maintenir de la part des élèves un niveau d'attention suffisant. Il est néanmoins important que ceux-ci gardent des traces du travail effectué. Le rôle de l'enseignant est alors de faire reformuler dans un vocabulaire précis les résultats obtenus aussi bien concernant les méthodes de recherche mises en œuvre que les connaissances mathématiques.

Enfin, la gestion du temps par le professeur lors de chacune de ces étapes est un élément d'observation essentiel qui conduit à des questions plus générales sur le temps. Une séance de ce type doit-elle se faire obligatoirement en continu et comment l'envisager sur 45 minutes (temps habituellement consacré à une séance en primaire) ? Est-il possible de déborder, voire de scinder la recherche sur plusieurs séances ? Mais alors à quel moment couper la recherche ? Deux solutions ont été envisagées : une coupure avant la phase de bilan ou après la phase de bilan. Dans les deux cas, il est alors nécessaire de garder des traces (tableau, affiches, photos…) qui permettent une reprise du travail le lendemain.

IV. PREMIÈRES CONCLUSIONS ET QUESTIONS SOULEVÉES PAR CETTE JOURNÉE DE FORMATION

La journée de formation a été riche. Les conseillers pédagogiques se sont totalement investis dans les tâches proposées et ont été sources de propositions, d'idées, de confrontation de points de vue…

Le premier temps qui visait à faire pratiquer une DI aux conseillers pédagogiques avait plusieurs objectifs comme favoriser la mise en action des formés et instaurer dès le départ un climat d'échanges bienveillant. La résolution du problème proposé ne visait pas ici l'acquisition de nouvelles connaissances mais la possibilité pour les conseillers pédagogiques de pratiquer une démarche de recherche dans un contexte interne aux mathématiques puis de faire un pas de côté pour bien expliciter l'objet de la formation en s'appuyant sur les programmes. Ce temps a permis également de recueillir les attentes et les questions des formés. Par la suite, il a favorisé l'émergence d'idées lorsqu'il s'agissait de compléter la grille.

Le deuxième temps a permis de bien mettre en avant le rôle de l'enseignant lors d'une séance fondée sur une DI. La première colonne du tableau est indépendante des mathématiques et pourrait être proposée dans d'autres disciplines. La seconde colonne est en lien direct avec les objectifs visés par la séance : le développement de compétences en termes de démarche de recherche parfois associé au réinvestissement ou à l'acquisition de connaissances mathématiques.

Les échanges ont aussi conduit à de nombreux questionnements sur la constitution des groupes et sur la gestion du travail de groupe par l'enseignant. Une autre source de questionnement de la part des conseillers pédagogiques concerne la différenciation. Les indices préparés en amont par le professeur, prévus pour être distribués à partir des besoins repérés par l'enseignant lorsqu'il circule de groupe en groupe, peuvent être une première réponse apportée à ce souci de différenciation.

Enfin, pour conclure, les résultats obtenus étant l'aboutissement d'une seule journée de stage très récente et d'un seul groupe de stagiaires, il convient de les considérer comme un point de départ pour penser l'évaluation des enseignants lors de séances fondées sur des DI.

REFERENCES

MEN, BO n°23 du 15 juin 2000.

MEN, BO hors-série n°5 du 25 août 2005.

MEN, BO spécial n°10 du 19 novembre 2015.

Artigue M. (2011) *Les défis de l'enseignement des mathématiques dans l'éducation de base.* Rapport pour l'UNESCO.
En ligne : http://unesdoc.unesco.org/images/0019/001917/ 191776f.pdf

Balacheff N. (1988) *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège.* Thèse de doctorat. Université Joseph-Fourier - Grenoble I.

Boilevin J.M. (2013) La place des démarches d'investigation dans l'enseignement des sciences. In M. Grangeat (Ed), *Les enseignants de sciences face aux démarches d'investigation. Des formations et des pratiques de classe* (pp. 23-44). Grenoble : Presses Universitaires de Grenoble.

Brousseau G. (1997) *Theory of Didactical Situations.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Brousseau G. (2004) *Théorie des situations didactiques (Didactique des mathématiques 1970-1990)*. Textes rassemblés et préparés par N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, V. Warfield. Grenoble : La Pensée Sauvage (deuxième édition).

Gandit M. et al. (2014) Evaluation formative et démarches d'investigation en mathématiques, dans le cadre du LéA EvaCoDICE
En ligne : file:///C:/Users/chant/Downloads/Documents/Acte_EvaCoDICE_2014.pdf

Rocard M., Csermely P., Hemmo V., Jorde D., Lenzen D. & Wallberg-Henriksson H. (2007) *L'enseignement scientifique aujourd'hui : une pédagogie renouvelée pour l'avenir de*

l'Europe. Rapport pour la Commission européenne. En ligne : http://ec.europa.eu/research/science-society/document_library/pdf_06/report rocard-on-science-education_fr.pdf

Tufféry-Rochdi C. (sous presse) Comment évaluer les élèves engagés dans l'enseignement d'exploration Méthodes et Pratiques Scientifiques en seconde ? *Actes de l'Ecole d'été de didactiques des Mathématiques* – Paris 2017.

Groupe de travail 11 (GT11) Enseignement auprès de publics spécifiques ou dans des contextes particuliers

BILAN DU GROUPE DE TRAVAIL N°11

Responsables

MILLON-FAURE[*] Karine – DIAS[**] Thierry – KOUAME KOFFI[***] Pierre

Correspondant - CS

THEIS[****] Laurent

Les communications et les discussions au sein de notre groupe ont permis d'aborder de nombreuses thématiques et questions de recherche. Nous avons d'une part approfondi les problématiques en lien avec les axes initialement choisis, mais nous avons également étendu notre réflexion à d'autres sujets concernant l'enseignement des mathématiques auprès de public spécifiques ou dans des contextes particuliers.

I. LES DISPOSITIFS POUR LA SCOLARISATION DES PUBLICS SPECIFIQUES

Dans la lignée de certaines recherches antérieures (voir par exemple Tambone, 2014), les communications de cet atelier permettent l'étude et le questionnement de divers dispositifs institutionnels proposés aux élèves à besoins éducatifs particuliers. La richesse de cette étude est ancrée dans la pluralité des dispositifs et des pays d'origine des différents intervenants du groupe de travail (France, Suisse).

Serment nous présente une classe de « développement primaire » du Canton de Vaud destinée à l'accueil d'élèves qui, sans relever des institutions spécialisées, ne peuvent suivre les cours dispensés dans le cursus ordinaire. Athias et Le Borgne analysent le travail d'un collectif de chercheurs et de professeurs en classe de SEGPA[1] autour de l'enseignement de la géométrie. Houdement et Petitfour étudient les interactions d'une élève et de son enseignante lors d'une séance en IME[2] pour déficients intellectuels. Reydy et Urruty s'intéressent aux pratiques évaluatives des enseignants en ULIS[3]-école, ULIS-collège, IME ou ITEP[4].

De son côté, Vendeira compare la mise en œuvre d'une situation, préalablement éprouvée dans des classes ordinaires, dans une institution avec des élèves aux troubles du comportement et une fondation avec des élèves ayant des troubles du spectre autistique. Les communications de Vulliemin et Bellanger et celle de Twardoch portent toutes deux sur l'observation de cours d'appui intensifs proposés une semaine par an à des élèves ayant des difficultés en mathématiques. Millon-Fauré et Mendonça-Dias cherchent à comprendre la nature des obstacles aux apprentissages mathématiques qui attendent les élèves allophones

[*] Université d'Aix-Marseille - France – karine.millon-faure@univ-amu.fr
[**] Haute École Pédagogique de Vaud - Suisse – thierry.dias@hepl.ch
[***] Laboratoire de recherche en Didactique, École Normale Supérieure Abidjan - Côte d'Ivoire – koffipierrekouame@yahoo.fr

[****] Université de Sherbrooke - Canada – laurent.theis@usherbrooke.ca

[1] Sections d'Enseignement Général et Professionnel Adapté
[2] Institut Médico-Educatif
[3] Unité Localisée pour l'Inclusion Scolaire
[4] Institut Thérapeutique, Éducatif et Pédagogique

scolarisés en UPE2A[5]. Kouame observe l'enseignement proposé aux élèves aveugles au sein de l'INPPA[6]. Enfin Assude et al. étudient des séances de mathématiques proposées à des élèves sourds scolarisés dans une ULIS-collège.

Par ailleurs, certaines présentations ont également attiré notre attention sur d'autres types de dispositifs. Ainsi, Morin et al. analysent un dispositif d'aide expérimenté dans des classes ordinaires pour des élèves en grande difficulté en mathématiques. Denervaud et Dias regardent les postures d'aide d'enseignants spécialisés en formation initiale lors de séances dédiées à la résolution de problèmes. Peteers, quant à elle, décortique certains tests utilisés dans le diagnostic des cas de dyscalculie.

II. LES ENJEUX DE LA FORMATION A L'ENSEIGNEMENT SPECIALISE

Les spécificités de l'enseignement dans des contextes d'adaptation scolaire ayant été établies par diverses recherches (Dias et al., 2012 ; Giroux, 2015), nous avons réfléchi à quelques pistes concernant les dispositifs de formation pour ces enseignants.

Ainsi Houdement et Petitfour étudient lors de l'analyse d'un épisode de classe, les diverses positions occupées par un élève et son enseignante. Elles montrent comment l'enseignante a, à son insu, empêché la mise en œuvre par l'élève d'une stratégie pertinente par rapport à la tâche proposée. L'étude de tels évènements pourrait, selon elles, amener les enseignants débutants à s'interroger sur les effets de leur propre posture dans la classe.

Dénervaud et Dias proposent également d'amener les étudiants à analyser des séances de classe filmées afin de les aider à adopter une posture réflexive. À partir d'une grille d'observation construite par ces deux chercheurs, les étudiants sont alors invités à repérer certains indicateurs permettant de catégoriser les différents types d'étayage observés. Cette étude et les débats qu'elle suscite peuvent permettre à ces futurs enseignants de diversifier leur propre pratique.

Reydy et Urruty se sont eux engagés dans un projet de formation-recherche afin d'aider les enseignants à surmonter les difficultés rencontrées dans l'exercice de leur métier. En collaboration avec les praticiens et en réponse à leurs demandes, ces chercheurs ont conçu un dispositif d'évaluation en situation pour des élèves présentant des troubles importants des fonctions cognitives. La formation pour la prise en main de ce dispositif devrait ensuite permettre aux enseignants d'améliorer leurs pratiques concernant cet aspect délicat de leur fonction.

III. LES ENJEUX DU PLURIGINGUISME DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

Plusieurs contributions ont montré les difficultés rencontrées parfois par les enseignants et les élèves pour s'entendre sur une langue commune. Or, dans le cas des élèves allophones, Millon-Fauré (2013) avait montré la nécessité de maîtriser certaines compétences langagières spécifiques à l'activité mathématique pour réussir dans cette disipline. Ceci a été confirmé, dans notre atelier, par la présentation de Millon-Fauré et Mendonça-Dias : l'analyse quantitative et qualitative d'une évaluation proposée à une cohorte d'élèves d'UPE2A a en effet permis d'étudier les principaux obstacles qui attendaient les élèves allophones lors de leur scolarisation en France. Si divers paramètres semblent jouer un rôle comme notamment

[5] Unité Pédagogique pour Élèves Allophones Arrivants

[6] Institut national pour la promotion des aveugles de Côte d'Ivoire

une maîtrise souvent insuffisante des savoirs mathématiques attendus dans les écoles françaises, l'étude met en évidence de graves lacunes dans la connaissance du lexique propre aux mathématiques et la nécessité de recourir à un enseignement spécifique pour y remédier.

En outre, les problèmes de communication entre enseignants et élèves peuvent apparaître dans des contexte radicalement différents. Ainsi Kouame évoque les difficultés rencontrées pour la scolarisation des élèves aveugles de Côte d'Ivoire. En effet, les enseignants qui interviennent dans ces dispositifs n'ont pas reçu de formation spécifique pour encadrer ce type de public : beaucoup, notamment, ne maîtrisent pas le braille.

Enfin, Assude et al. observent l'intégration dans des classes ordianaires d'élèves sourds non oralisants. L'intervention, incontournable, d'un interprète au sein de la classe, soulève de nouvelles questions : comment la communication s'organise-t-elle entre les élèves sourds, leur interprète et le reste de la classe ? Les traductions d'une langue à l'autre (français écrit, français oral et langue des signes) ne causent-elles pas des distorsions des propos échangés et des perturbations dans l'activité mathématique des élèves ?

IV. REFLEXIONS SUR LES RESSOURCES

La question des ressources utilisées dans des contextes d'adaptation scolaire s'est révélée être une question récurrente dans notre atelier : peut-on reprendre celles conçues pour l'enseignement ordinaire (en envisageant éventuellement certains aménagements des tâches proposées) ? Salin (2007) avait déjà pointé la difficulté qu'il pouvait y avoir pour mettre en œuvre, dans des classes spécialisées des situations adidactiques comparables à celles préconisées dans les cours habituels.

Vendeira aboutit à un constat similaire lorsqu'elle propose des tâches permettant de travailler sur la visualisation iconique et non iconique des figures à partir de formes en bois. L'analyse des mises en œuvre dans des dispositifs d'enseignement spécialisé fait en effet apparaître des différences par rapport aux observations faites dans les classes ordinaires, notamment au niveau du processus de dévolution. Ces premiers résultats laissent penser que des adaptations de ces situations sur le plan didactique s'avèrent incontournables.

De même Athias et Le Borgne cherchent à améliorer l'enseignement de la géométrie en SEGPA. Pour cela, ils envisagent d'utiliser un logiciel de géométrie dynamique, permettant d'appréhender certaines propriétés mathématiques sous un angle différent de l'environnement « papier-crayon ». Ils s'interrogent toutefois sur les obstacles que peut constituer l'acquisition des connaissances instrumentales nécessaires à la manipulation de ce logiciel pour des élèves ayant des difficultés d'apprentissage.

D'autres chercheurs se sont plutôt tournés vers la recherche de ressources spécifiques pour l'enseignement spécialisé. Ainsi Kouame cherche à savoir si les enseignants accueillant les élèves aveugles de Côte d'Ivoire disposent du matériel adapté aux difficultés de leur public. À partir de l'analyse des réponses à un questionnaire, il relève que les praticiens interrogés se plaignent d'une insuffisance des ressources à leur disposition, ce qui paraît avoir un impact négatif sur la qualité de leur enseignement.

Serment, quant à lui, propose pour une classe accueillant des élèves en grande difficulté scolaire une situation originale : il s'agit de travailler la notion d'angles à partir des angles dièdres de solides de Platon de très grande taille. Il observe que les manipulations que cette activité suscite ainsi que la taille particulière de ces solides ont permis aux élèves de mieux appréhender cette notion délicate comme l'attestent les évaluations mises en place en fin d'expérimentation.

V. ANALYSE DES GESTES DAIDE

Plusieurs chercheurs se sont intéressés à l'analyse des gestes d'aide proposés par les enseignants dans des contextes d'adaptation scolaire et ont interrogé leur pertinence. L'épisode étudié par Houdement et Petitfour, par exemple, illustre les répercussions négatives que peuvent occasionner certains étayages. L'enseignante observée cherche en effet à imposer la stratégie attendue à l'une de ses élèves afin d'éviter que celle-ci ne se trouve en situation d'échec. Mais ce faisant, elle l'empêche de poursuivre la mise en œuvre d'une technique personnelle qui s'avérait pourtant judicieuse.

Vulliemin et Bellanger ont comparé les gestes d'étayage, de tissage et de co-construction de l'atmosphère mis en œuvre par un même enseignant dans plusieurs contextes. Ils montrent que ceux-ci varient en fonction de l'élève et de la situation considérée, ce qui traduit une certaine adaptabilité professionnelle de l'enseignant observé.

Dénervaud et Dias ont également cherché à catégoriser les différents types d'étayage qui apparaissaient lors des séances de classe portant sur la résolution de problèmes. A partir des travaux de Wood et al. (1976) et d'Anghileri (2006), ils ont conçu une grille d'analyse et ont choisi huit indicateurs permettant de distinguer diverses catégories rassemblées en deux grandes familles : les étayages centrés sur l'élève (implication) et ceux centrés sur la tâche (résolution).

Par ailleurs, la recherche de dispositifs d'aide pertinents pour les élèves à besoins éducatifs particuliers nous a amenés à nous interroger sur la dialectique entre individualisation et appui sur le groupe classe. Dans ce contexte, il y a en effet nécessité d'une part d'adapter l'enseignement aux difficultés et potentialités propres à chaque individu et d'autre part de favoriser les interactions entre élèves afin de faciliter la co-construction des connaissances. Ceci aboutit à une tension entre ces deux pôles qui présentent chacun un intérêt propre. Ainsi Twardoch montre, à travers des études de cas, que les séances d'aide individualisée permettent un meilleur dépistage de l'anxiété mathématique. Elle souligne qu'elles facilitent aussi, à condition que le dispositif puisse s'étendre sur une période suffisamment longue, la prise en charge de ce trouble et qu'elles permettent aux élèves concernés de mieux réguler leurs émotions.

Morin et al. étudient eux des dispositifs d'aide proposés à un petit groupe d'élèves en grande difficulté. Cette organisation permet d'une part aux enseignantes observées d'intervenir avec chaque élève de manière individuelle et de donner à chacun la possibilité de poser les questions qu'il n'aurait pas osé évoquer en grand groupe. D'autre part elle facilite les interactions entre élèves et la confrontation de leurs conceptions avec celles de leurs camarades.

VI. QUESTIONNEMENTS SUR LES DIFFERENTES TEMPORALITES

L'évocation des différentes temporalités qui se côtoient au sein de la classe est apparue à diverses reprises dans nos discussions. Comment définir l'avancée du temps didactique lors des études micro de certains évènements des séances de classe ? Comment articuler les notions de temps didactique, temps praxéologique (Assude et al., 2016) et de temps personnel de l'élève ? Lorsqu'une personne extérieure (par exemple un AESH[7]) vient aider certains élèves durant un cours, les systèmes didactiques auxiliaires (Chevallard, 1995) formés par les élèves concernés et l'intervenant restent-ils forcément en phase avec le reste de la classe ?

[7] Accompagnant des Élèves en Situation de Handicap

À ce propos, Assude et al. observent que le système didactique auxiliaire constitué par les élèves sourds et leur interprète n'est pas toujours synchronisé avec le reste de la classe. Des apartés (ou « bulles de compréhension ») résultant de la coexistence des diverses langues dans la classe (français oral / français écrit / langue des signes) apparaissent en effet régulièrement et les chercheurs s'interrogent sur les obstacles éventuels que cela pourrait créer pour l'activité mathématique et les apprentissages des élèves.

Morin et al. présentent deux mises en œuvre d'un autre type de système didactique auxiliaire. Il s'agit cette fois de proposer à un groupe d'élèves en difficulté un temps de travail supplémentaire avant et après une séance de classe ciblée. Même s'ils n'observent pas d'avancée du temps didactique lors de ces séances, les auteurs insistent sur l'intérêt de la fonction chronogénétique de ces dispositifs qui permettent notamment aux élèves concernés de disposer de plus de temps que leurs camarades pour appréhender certaines notions mathématiques.

VII. APPUI SUR DES CHAMPS DISCIPLINAIRES AUTRES QUE LA DIDACTIQUE

Certains auteurs ont éprouvé le besoin d'utiliser certains outils émanant d'autres champs disciplinaires. Ces apports nous paraissent intéressants, dans la mesure où nous les articulons avec les principes propres aux théories de la didactique des mathématiques.

Pour étudier l'anxiété mathématique, Twardoch propose de s'appuyer sur certains résultats obtenus en neurosciences notamment grâce aux apports de la neuro-imagerie. En observant d'une part les zones du cerveau sollicitées lors des activités mathématiques et d'autre part les processus permettant la régulation de l'état émotionnel, une explication des mécanismes mis en jeu dans ce trouble peut être avancée. À partir de ces travaux, Twardoch parvient à mettre en évidence certaines caractéristiques de l'anxiété mathématique chez une élève en grande difficulté.

Peteers utilise des outils et des cadres théoriques issus de la didactique des mathématiques, mais également de la psychologie et des sciences cognitives pour analyser des tests proposés lors du dépistage de la dyscalculie. Ceci lui permet de mieux cerner les objectifs de ce genre d'évaluations et surtout les biais éventuels du dispositif : Peteers montre ainsi que certains types de tâches ne sont pas (ou pas correctement) évalués.

VIII. ETUDE DES MODALITES D'EVALUATION

Le problème de l'évaluation se révèle être un sujet particulièrement sensible dans le contexte de l'adaptation scolaire. Ainsi Reydy et Urruty précisent qu'il s'agit là d'une des principales préoccupations des enseignants qu'ils ont rencontrés et ce d'autant plus qu'il existe très peu de ressources réellement adaptées à cette finalité. À partir de l'analyse des pratiques déclarées de douze enseignants, Reydy et Urruty cernent les difficultés des praticiens et conçoivent un dispositif d'évaluation en situation, offrant des possibilités d'auto-évaluation par les élèves.

Millon-Fauré et Mendonça-Dias pointent également le défi que peut constituer l'évaluation d'élèves allophones. En effet, il convient de s'assurer que leurs éventuelles difficultés dans la maîtrise du français ne viennent pas interférer dans leur activité mathématique. Or, même après un an de scolarisation dans un dispositif d'UPE2A destiné à accélérer l'apprentissage de la langue de scolarisation, plus d'un tiers des élèves interrogés par ces chercheuses ne parvenaient pas à réaliser certaines tâches lorsque la consigne était en français alors qu'ils disposaient des connaissances mathématiques nécessaires.

Enfin, Peteers montre comment une analyse didactique fine des types de tâches rencontrées à l'école pour une notion donnée peut permettre de repérer les lacunes des tests préconisés pour dépister les cas de dyscalculie. Ces considérations l'amènent à vouloir améliorer les évaluations existantes et à chercher à concevoir un test plus adapté aux compétences effectivement attendues durant les cours de mathématiques.

Toutes les discussions qui se sont développées dans notre atelier se sont révélées particulièrement enrichissantes. Elles ont permis à chacun de progresser dans sa connaissance de l'enseignement des mathématiques auprès de publics spécifiques. Ceci souligne l'intérêt et la nécessité, pour enrichir le champ des travaux dans ce domaine, de rencontres et confrontations entre chercheurs d'institutions différentes, voire de pays différents. Nous espérons bien poursuivre dans la prochaine conférence EMF.

REFERENCES

Anghileri, J. (2006). Scaffolding practices that enhance mathematics learning. *Journal of Mathematics Teacher Education, 9*(1), 33–52.

Assude, T., Millon-Fauré, K, Koudogbo, J, Morin, M-P, Tambone, J. et Theis, L. (2016). Du rapport entre temps didactique et temps praxéologique dans des dispositifs d'aide associés à une classe. Recherches en didactique des mathématiques, 36.2, 197-230.

Chevallard, Y. (1995). La fonction professorale : esquisse d'un modèle didactique. In R. Noirfalise et M.-J. Perrin (dir.), Actes de la VIIe école d'été de didactique des mathématiques (p. 83-122). Clermont-Ferrand : IREM.

Dias, T., & Tièche Christinat, C. (2012). Spécificités des situations didactiques dans l'enseignement spécialisé. Dans J.-L. Dorier et S. Coutat (coord.), Actes du colloque Espace Mathématique Francophone, Enseignement des mathématiques et contrat social (p.1067-1075). Genève, Suisse : Université de Genève.

Giroux, J. (2015). Difficultés des élèves en mathématiques au primaire : les apports de la didactique. *Math-Ecole, 224,* 3-7

Millon-Fauré K. (2013). Enseigner les compétences langagières indispensables à l'activité mathématique. *Repère Irem, 90,* 49-64.

Salin, M.-H. (2007). À la recherche de milieux adaptés à l'enseignement des mathématiques pour des élèves en grande difficulté scolaire, In J. Giroux et al. (éds.), *Difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques* (pp. 195-218). Montréal : Bande didactique.

Tambone, J. (2014). Enseigner dans un dispositif auxiliaire : le cas du regroupement d'adaptation et de sa relation avec la classe d'origine de l'élève. *Les Sciences de l'éducation - Pour l'Ère nouvelle, 47*(2), 51-71.

Wood, D., Bruner, J. S. and Ross, G. (1976), The role of tutoring in problem solving. Journal of Child Psychology and Psychiatry, 17, 89-10

ANNEXE

LISTE DES TEXTES DU GT 11 PAR ORDRE ALPHABETIQUE DU PREMIER AUTEUR

ASSUDE, T., MILLON-FAURE, K. & TAMBONE, J.
Problèmes de synchronisation dans l'enseignement des mathématiques auprès d'élèves sourds

ATHIAS, F. & LE BORGNE, P.
Recherche coopérative sur l'introduction de la géométrie dynamique en Segpa

BELLANGER, P. &VULLIEMIN, M.
Recherche autour des gestes professionnels observés en pédagogie de soutien individuel

DENERVAUD, S. & DIAS, T.
Un outil d'analyse de la pratique au service de la démarche problem solving avec des élèves en difficulté

HOUDEMENT, C. & PETITFOUR, E.
Jeu de pouvoir dans l'enseignement spécialisé

MILLON-FAURE, K. & MENDONCA-DIAS, C.
Étude de l'impact des difficultés langagières des élèves allophones sur leur activité mathématique

MORIN, M.-P., THEIS, L., ASSUDE, T., MILLON-FAURE, K., TAMBONE, J. & KOUDOGBO, J., HAMEL, V. & MARCHAND, P.
Étude d'un dispositif d'aide à l' intention d'élèves en difficulté dans la résolution d'une situation-problème mathématique

PETEERS, F.
Analyse didactique de tests visant à évaluer les compétences mathématiques de base dans le cadre scolaire ou de diagnostic de la dyscalculie

REYDY, C. & URRUTY, P.
Accompagner les enseignants spécialisés dans l'évaluation des compétences mathématiques de leurs élèves

SERMENT, J.
Dispositif pour aborder la notion d'angle avec des élèves de 10-12 ans dans une classe d'enseignement spécialisé dans le canton de Vaud (Suisse)

TWARDOCH, C., DIAS, T. & DERUAZ, M.
Appuis individuels pour le repérage de l'anxiété mathématique chez une élève du gymnase

VENDEIRA, C.
Processus de dévolution d'une même série de tâches dans plusieurs contextes

AFFICHES

KOUAME, P.
L'enseignement des mathématiques pour une école inclusive en côte d'Ivoire : Cas des élèves handicapés visuels de l'Institut National pour la promotion des aveugles (INPPA) d'Abidjan

QUESTIONNEMENTS AUTOUR DE LA SYNCHRONISATION DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES A DES ELEVES SOURDS

ASSUDE[*] Teresa – MILLON-FAURE[**] Karine – TAMBONE[***] Jeannette

Résumé – Dans cette communication, nous étudions un dispositif mis en place afin de scolariser des élèves sourds et nous analysons plus particulièrement plusieurs séances de mathématiques auxquelles ont participé ces élèves. Nous montrons notamment que si tous les élèves semblent globalement en phase, des cycles de désynchronisations/resynchronisations se succèdent grâce notamment à l'apparition de bulles de compréhension.

Mots-clefs : élèves sourds, mathématiques, synchronisation, système didactique principal et auxiliaire.

Abstract – In this communication we study a device set up to school deaf pupils. We analyze some sessions of mathematics classroom in which participated these pupils. We show in particular that if all the pupils seem globally in phase, cycles of desynchronizations / resynchronizations follow one another due to the appearance of « bubbles of understanding ».

Keywords: deaf pupils – mathematics – synchronization – main and auxiliary didactical system

I. INTRODUCTION

En France, la loi n°2005-102 du 11 février 2005 *pour l'égalité des droits et des chances, la participation et la citoyenneté des personnes handicapées* dispose que les élèves en situation de handicap doivent être prioritairement scolarisés dans le milieu scolaire ordinaire. Cette volonté a été confirmée dans la loi n°2013-595 du 8 juillet *d'orientation et de programmation pour la refondation de l'école de la République*. Dans ce sens, des ULIS (Unité localisée d'inclusion scolaire) sont des dispositifs de scolarisation des élèves en situation de handicap en tant qu'une des modalités de l'accessibilité pédagogique : « Les élèves orientés en ULIS sont ceux qui, en plus des aménagements et adaptations pédagogiques et des mesures de compensation mis en œuvre par les équipes éducatives, nécessitent un enseignement adapté dans le cadre de regroupements ». La circulaire n°2015-129 du 21 août 2015 précise les modalités et l'organisation de ces dispositifs : « Les ULIS constituent un dispositif qui offre aux élèves qui en bénéficient une organisation pédagogique adaptée à leurs besoins ainsi que des enseignements adaptés dans le cadre de regroupements et permet la mise en œuvre de leurs projets personnalisés de scolarisation ».

A la rentrée de septembre 2016, une ULIS-Collège destinée à des élèves sourds et malentendants a ouvert dans un collège de Marseille. Le parcours qui est proposé aux élèves de cette ULIS est un parcours bilingue, français écrit et langue des signes française (LSF). La loi du 11 février 2005 fait de la LSF une langue à part entière et garantit aux parents de jeunes sourds une liberté de choix entre une communication bilingue - LSF et langue française - et une communication en langue française (avec ou sans langage parlé codé). La création des PASS (Pôles d'Accompagnement à la Scolarisation des élèves sourds) permet de scolariser des élèves sourds et malentendants en milieu ordinaire, quel que soit le mode de communication choisi par la famille. Ce choix s'exprime lors de l'élaboration par les parents du projet de vie de l'enfant et consécutivement à la demande déposée auprès de la Maison départementale des personnes handicapées (MDPH). Dans le cadre du PASS, la scolarisation des élèves sourds sur l'Académie d'Aix-Marseille, se faisait jusqu'à présent essentiellement

[*] Aix-Marseille Université – France – teresa.dos-reis-assude@univ-amu.fr
[**] Aix-Marseille Université – France – karine.millon-faure@univ-amu.fr
[***] Aix-Marseille Université – France – jane.tambone@wanadoo.fr

dans le cadre d'un parcours « oralisant » - français oral et écrit - dans des structures d'accueil allant de la maternelle au collège. Concernant la scolarisation des élèves sourds dans le cadre d'un parcours bilingue - français écrit et LSF -, il n'existait pas de structures d'accueil en collège. Des structures étaient présentes dans des écoles maternelle et primaire (intégrations individuelles en classes ordinaires) et dans un lycée professionnel accueillant autant des élèves sourds oralisants que des élèves sourds bilingues. Les élèves bilingues étaient accueillis principalement dans un IRS (Institut Régional des enfants sourds). Depuis plusieurs années l'APES (Association des Parents des Enfants sourds) réclamait au niveau de l'Académie d'Aix-Marseille, l'ouverture de classes bilingues pour que leurs enfants et adolescents soient accueillis dans les écoles et les collèges. C'est dans ce contexte que s'est ouverte l'ULIS-Collège à Marseille.

La création de ce nouveau dispositif, le fait qu'il propose un parcours bilingue, a été pour nous une occasion de nous intéresser aux conditions de création et aux contraintes de la mise en place et du fonctionnement d'une nouvelle ULIS dans un collège.

Dans cette communication, nous nous intéressons à deux questions que nous formulons, dans un premier temps, de la manière suivante : Quels sont les obstacles que les élèves sourds rencontrent dans les apprentissages (notamment mathématiques) et sur quels leviers s'appuyer pour dépasser ces obstacles ? Nous allons aborder ces questions à partir d'un point de vue particulier qui est celui de la synchronisation du travail des élèves sourds avec celui des autres élèves. Pour cela, nous présenterons d'abord notre problématique et notre cadre théorique, ensuite nous préciserons la méthodologie avant de présenter quelques résultats.

II. PROBLEMATIQUE ET CADRE THEORIQUE

La question des obstacles et des leviers pour les apprentissages d'élèves sourds a été abordée dans plusieurs travaux, notamment celui de Françoise Duquesne-Belfais (2007) sur lequel nous allons nous appuyer. Dans ce travail, l'un des obstacles mentionné est celui de la difficulté de conceptualisation des élèves sourds. Or Courtin (2002) considère que ces difficultés de conceptualisation ou d'abstraction ne sont pas dues à la surdité mais dérivent de l'insuffisance de situations expérimentées (notamment des situations sociales de communication et d'expression). Selon cet auteur, les élèves sourds ne sont pas suffisamment en contact avec une multiplicité de situations qui leur permette d'identifier des invariants pour pouvoir dégager des classes de situations propres au processus de conceptualisation. Par ailleurs, dans ce processus l'appui sur une langue semble essentielle, et la maîtrise de la LSF par des élèves sourds n'est pas toujours présente étant donné les différents choix des familles et le statut non reconnu à cette langue jusqu'à très récemment dans l'institution scolaire en France. Le choix d'une langue première comme la LSF (à l'instar d'autres langues) semble déterminant pour les élèves sourds comme moyen pour construire une représentation des situations, pour organiser, planifier une activité de résolution d'un problème, pour contrôler et réfléchir sur ses actions. Par contre, étant donné que la LSF ne possède pas un système d'écriture associé, les élèves apprennent le français écrit qui permet de mémoriser des résultats mais aussi d'organiser des raisonnements et de traiter des informations. Or des difficultés peuvent apparaître liés aux fonctionnements différents de la LSF en tant que langue gestuelle et visuelle, essentiellement iconique, et de la langue française écrite qui est une langue alphabétique, et linéaire. Les élèves sourds peuvent avoir des difficultés d'expression, une insuffisance de vocabulaire et une mauvaise maîtrise grammaticale (Duquesne-Belfais 2005, 2007).

L'un des leviers de l'enseignement des mathématiques dans un parcours bilingue est bien celui de s'appuyer sur la LSF, et de voir toutes les potentialités de cette langue dans la dialectique contextualisation/décontextualisation nécessaire au processus de conceptualisation. L'appui sur des situations contextualisées en nombre suffisant est important mais la décontextualisation est faite en utilisant des systèmes langagiers et non langagiers (Vergnaud 1990). La LSF peut être l'un de ces systèmes.

Selon Cuxac (2003), la LSF est une langue d'une iconicité importante : « Les séquences langagières sont en relation iconique très forte avec le point de départ extralinguistique de l'expérience réelle ou imaginaire à transmettre ». Cet auteur considère deux manières de dire dans cette langue : dire en donnant à voir, et dire sans montrer. La première a une visée d'illustration qui n'existe pas dans la deuxième. L'une des conditions est bien la présence des interlocuteurs pour pouvoir communiquer.

La scolarisation des élèves sourds dans des classes ordinaires avec l'aide d'un dispositif ULIS pose le problème de la communication entre les élèves sourds, le professeur et les autres élèves. Une insécurité des élèves sourds est celle de ne pas comprendre ce qui se passe autour d'eux et souvent les autres acteurs négligent l'importance d'expliquer ce qui se passe et pourquoi cela se passe (Duquesne-Belfais, Bertin 2005). A l'opposé, « l'enseignant dont les élèves sont sourds a souvent peur de l'implicite et de l'insécurité que porte en elle, par définition, une situation de recherche. Il peut alors être tenté, en LSF comme en français, de fournir trop d'explications qui ne laisseraient pas suffisamment à l'élève l'opportunité de faire des hypothèses et de mettre en œuvre un raisonnement par lui-même. » (Duquesne-Belfais, 2005, p.122). Comment faire en sorte que la communication puisse se faire en tenant compte des besoins des élèves sourds sans en faire trop ?

Dans le cas de notre dispositif, les élèves sont intégrés dans des classes ordinaires et les enseignants ne connaissent pas la LSF. La présence d'un interprète dans la classe ou dans le dispositif ULIS[1] est essentielle mais cela pose aussi des questions, par exemple celles des relations entre ce qu'on dit dans la classe et ce qui est traduit (dans les deux sens), celles du rapport aux savoirs enseignés des interprètes. Nous voulons interroger ce qui se passe en classe de mathématiques qui puisse être en relation avec cette contrainte communicationnelle liée à l'existence de deux langues.

Nos premières notions théoriques sont celles introduites par Chevallard (2010) à propos de l'organisation de l'étude autour d'un système didactique principal (SDP) et de plusieurs systèmes didactiques auxiliaires (SDA). La classe est le système didactique principal : le professeur et tous les élèves en font partie autour des enjeux de savoir. Pour scolariser les élèves sourds, un dispositif (ULIS) a été crée pour aider ces élèves relativement aux enjeux de savoirs. Le dispositif ULIS est un système didactique auxiliaire car il n'a pas d'enjeu de savoir propre et dépend de celui de la classe. C'est un dispositif didactique auxiliaire externe à la classe. Par contre, un autre système didactique auxiliaire existe à l'intérieur de la classe : celui constitué par les élèves sourds et l'interprète. Ce SDA interne à la classe est aussi dépendant du SDP et n'a pas d'enjeu de savoir propre.

Dans chaque système didactique (principal et auxiliaires), il existe diverses temporalités qui peuvent être propres ou communes à plusieurs systèmes. Le temps didactique (Chevallard et Mercier, 1987), défini comme le découpage d'un savoir dans une durée, est la norme de l'avancement des savoirs. Ce temps didactique pilote non seulement le travail dans la classe mais constitue une référence pour les systèmes didactiques auxiliaires. Plusieurs travaux ont

[1] Les élèves suivent les enseignements dans leur classe avec les élèves entendants et ils disposent d'heures de regroupement dans le dispositif ULIS avec un enseignant spécialisé.

montré qu'il n'y a pas d'avancement du temps didactique dans ces systèmes auxiliaires. D'autres temporalités existent dans ces systèmes (principal et auxiliaires), comme les temps d'apprentissage pour les élèves ou encore le temps praxéologique pour l'enseignement (Assude et alii, 2016). Le temps praxéologique est le temps qui correspond à l'avancement d'au moins l'une des composantes d'une praxéologie (Chevallard 1999), en se référant au quadruplet : « type de tâches, technique, technologie, théorie ».

A partir de ces éléments théoriques, nous pouvons préciser notre question : quelles sont les relations entre les différents systèmes didactiques (principal et auxiliaires) du point de vue des temporalités ? Plus précisément, dans le cadre de la classe, quelles relations entre le SDP et le SDA interne à la classe ? Ou formulée autrement, comment sont synchronisés ces deux systèmes didactiques (SDP et SDA interne) ? Avant de donner des éléments de réponse à cette question, nous allons préciser notre cadre méthodologique ainsi que la situation proposée aux élèves en classe.

III. ÉLEMENTS METHODOLOGIQUES RELATIFS A L'OBSERVATION

Pour étudier les relations entre le SDP et le SDA interne, nous avons observé une classe de mathématiques en 4ème qui accueille deux élèves sourds : Julien et Martin. Ces élèves sont sourds profonds ; ils suivent un parcours bilingue (LSF et français écrit), et bénéficient du dispositif ULIS avec quatre autres élèves sourds qui sont en sixième. Ces deux élèves ont quelques difficultés par rapport au français écrit, comme d'autres élèves sourds. Les moments de regroupement dans l'ULIS sont consacrés aux différentes disciplines, à la reprise ou finition de contrôles ou à l'aide aux devoirs.

Ces élèves suivent toutes les disciplines scolaires de 4ème sauf la deuxième langue vivante et la musique. La présence d'un interprète est constante dans toutes les disciplines et dans les moments de regroupement ULIS. Les quatre personnes qui assurent ces traductions n'ont pas toutes le même statut. Pour ce qui nous intéresse, l'interprète présent pour traduire dans la classe de mathématiques observée est le coordonnateur ULIS qui est un ancien professeur de mathématiques et qui connaît aussi la LSF.

Nous avons observé la classe de mathématiques de 4ème qui comporte 22 élèves pendant trois séances qui ont été filmées avec trois caméras : une caméra fixe qui filmait les deux élèves sourds, une caméra fixe qui filmait le tableau et une caméra mobile qui filmait le traducteur, ou l'enseignant lorsqu'il se déplaçait ou d'autres élèves. Nous avons aussi un entretien avec l'enseignant de mathématiques et un entretien avec l'interprète qui est aussi le coordonnateur ULIS[2].

Nous allons nous intéresser essentiellement à la première séance où les élèves devaient résoudre un problème de modélisation. La situation qui a été proposée à la classe est la suivante : *Combien de tours de pédale fait-on lorsqu'on parcourt une distance de 5km avec un vélo ?* Cette situation a été posée à l'oral, et trois phases ont été prévues par le professeur. La première phase est celle de la compréhension de l'énoncé et des contraintes du problème. La deuxième phase est celle d'un travail en groupe pour résoudre le problème. La troisième phase est celle de la mise en commun et de la correction du problème.

[2] L'action du coordonnateur s'organise autour de 3 axes : l'enseignement aux élèves lors des temps de regroupement au sein de l'ULIS ; la coordination de l'ULIS et les relations avec les partenaires extérieurs ; le conseil à la communauté éducative en qualité de personne ressource. (Circulaire n° 2015-129 du 21-8-2015, BO n°31 du 27 août 2015)

Ce problème pose quelques difficultés liées au processus de modélisation, notamment à la compréhension du fonctionnement d'un vélo. En voilà quelques-unes :

- Comprendre l'énoncé
- Dégager des variables importantes à partir de la situation réelle (relation entre tour de roue et périmètre du cercle, relation entre tour de pédale et tour de roue, vélo à 26 pouces, conversion pouce et mètres)
- Vocabulaire (Plateau/pignon/pédalier/vitesse)

L'enseignant a apporté un vélo en classe pour parler de tous ces éléments. Etant donné la difficulté de compréhension des énoncés des problèmes montrée dans d'autres travaux (Bonnet, Mangeret et Nowak, 2010), nous pouvons anticiper que les deux élèves sourds peuvent aussi se retrouver en difficulté pour entrer dans le milieu de la situation, même si c'est une situation contextualisée.

IV. DESCRIPTION ET ANALYSE DE FAITS

Nous allons présenter des faits observés et des analyses du travail de la classe (SDP) en lien avec le SDA interne du point de vue de la synchronisation entre ces deux systèmes didactiques. Les faits observés concernent la compréhension de l'énoncé, les processus de modélisation et la maîtrise du vocabulaire indiqué auparavant.

1. Une synchronisation globale…

Durant les séances que nous avons observées, les élèves sourds et entendants se trouvent engagés en même temps dans les mêmes tâches : durant la première phase, tous ont tenté de s'approprier la situation et pour cela de comprendre le fonctionnement du vélo. Durant le travail de groupe, tous les élèves se sont lancés dans un travail de recherche. Enfin, tous les élèves ont pu participer à la phase de mise en commun.

En outre, nous avons pu observer que les élèves sourds communiquaient avec le reste de la classe. Ainsi même si le passage obligé par les traductions de l'interprète ralentit légèrement les échanges entre l'enseignant et les élèves, cela ne semble pas constituer une réelle entrave pour que les élèves sourds puissent intervenir. Martin n'hésite pas à lever le doigt pour répondre et l'enseignant l'interroge régulièrement. Julien, lui, intervient beaucoup moins souvent. En outre, lorsque le professeur se déplace entre les groupes pour vérifier que chacun avance dans la résolution du problème, il intervient aussi bien auprès des élèves sourds qu'entendants. Ainsi, même si elle nécessite l'intervention d'un interprète, la communication qui s'établit entre l'enseignant et les élèves sourds paraît semblable à celle que l'on peut observer avec des élèves ordinaires.

En ce qui concerne la communication entre élèves, les deux élèves sourds ne sont pas en dehors du reste de la classe. L'interprète souligne la bienveillance de leurs camarades à leur égard et la volonté de certains d'apprendre la langue des signes. Nous avons par ailleurs observé, lors de la deuxième séance, l'intervention d'une des élèves entendantes : ayant constaté que Martin n'avait pas ouvert le bon logiciel, elle a attiré son attention, grâce à des gestes, puis lui a montré son écran afin de lui faire comprendre son erreur. Ces échanges entre élèves sourds et élèves ordinaires semblent toutefois particulièrement rares. Ainsi, lorsque l'enseignant regroupe les élèves par 4 pour un travail de recherche, tous commencent à échanger entre eux, mis à part le groupe composé de Martin, Julien et deux élèves entendants. Immédiatement deux binômes se forment : les deux élèves sourds travaillent d'un côté, les deux élèves entendants de l'autre, sans qu'aucun échange entre eux ne se produise.

L'interprète restera pourtant juste à côté d'eux durant tout le temps de la recherche, mais nul ne songera à le solliciter pour interagir avec l'autre binôme. De même il est à noter que l'échange observé en salle informatique, lors de la deuxième séance, se produit sans intervention de l'interprète, et l'on peut se demander si le fait de devoir recourir à une tierce personne pour communiquer entre eux ne constitue pas une difficulté pour les élèves. Toutefois, même s'il y a peu d'échanges entre eux, les élèves sourds et entendants semblent globalement synchrones.

2. ...mais quelques désynchronisations

Toutefois, en analysant nos séances de plus près, nous avons observé plusieurs épisodes où les élèves sourds prenaient du retard par rapport au le reste de la classe. Plusieurs causes peuvent être avancées pour expliquer ces désynchronisations.

Un premier facteur pourrait être lié au niveau de qualification en LSF de l'interprète. En effet ce dernier reconnaît qu'il n'est pas toujours à l'aise dans ses traductions et qu'il lui faut encore améliorer sa formation. Les contraintes de la traduction simultanée l'obligent à signer instantanément les expressions énoncées, ce qui lui pose parfois quelques difficultés. Ainsi, au début de la première séance, l'interprète ne sait comment traduire l'expression « tour de pédale » que l'enseignant vient d'utiliser. Il invente donc un geste qu'il espère suffisamment évocateur pour que les élèves le comprennent. Mais Martin et Julien s'imaginent qu'il vient d'utiliser le signe exprimant la marche ce qui complique la compréhension de la situation. L'éclaircissement de ce quiproquo nécessitera une mise au point entre les trois protagonistes afin de s'entendre sur la signification du geste de départ. De même un peu plus tard dans la séance, l'interprète cherche un signe pour désigner les vitesses du vélo (qu'il veut distinguer de son homophone « je roule à une vitesse de 5km/h ») mais le geste qu'il emploie n'est pas connu des élèves. Toutefois Julien comprend sa signification et en présente un autre, de sorte que les trois protagonistes parviennent tout de même à se comprendre. Certaines traductions de l'interprète se révèlent également ambiguës. Ainsi, dans la première séance, l'enseignant veut amener les élèves à trouver le nombre de tours de roue réalisés lorsqu'on fait un tour de pédale. Il explique donc qu'en un tour de pédale, « 42 dents passent dans la chaîne » à l'avant mais aussi à l'arrière, ce qui correspondra à 2 tours de pignon. Confronté à cette situation, l'interprète traduit la phrase « 42 dents passent dans la chaîne » par la phrase « il y a 42 dents à l'arrière ». Cette dernière phrase donne l'impression qu'il y a 42 dents sur le pignon alors qu'il y en a en fait que 21 (il faudra donc 2 tours de pédale pour que les 42 dents passent dans la chaîne), ce qui pourrait induire les élèves en erreur.

Une deuxième explication pourrait être liée au fait que la LSF est une langue visuelle et gestuelle : celle-ci ne peut se réaliser que si les deux interlocuteurs se voient et ont les mains libres. C'est ainsi que l'on remarque à plusieurs reprises l'interprète éprouver quelques difficultés pour attirer l'attention des élèves si ces derniers ne le regardent pas. Lors de la première phase, alors qu'il s'est approché du vélo pour leur montrer quelque chose, il doit faire de grands gestes avant d'entrer en communication avec eux. Par ailleurs, lorsque l'interprète traduit le discours de l'enseignant, les élèves sourds sont concentrés sur son visage et ses mains : ils ne peuvent donc regarder dans le même temps ce que l'enseignant de la classe est en train de tracer ou écrire au tableau. Enfin, durant les temps de copie, impossible pour les élèves sourds de profiter des éventuelles explications que l'interprète pourrait leur donner ou de lui poser des questions : ayant les yeux rivés sur le tableau ou sur leur cahier et les mains accaparées par le travail d'écriture, toute communication est impossible. Or, comme la plupart des enseignants, l'enseignant de la classe continue à parler

pendant que les élèves copient et l'interprète ne peut donc pas traduire à Martin et Julien, ses propos.

Une troisième explication pourrait être celle d'un rapport difficile des élèves sourds au français écrit, comme le montrent d'autres études. Si les élèves sourds que nous observons savent a priori lire, leur rapport à l'écrit demeure plus compliqué que pour les élèves ordinaires. On peut en effet penser que pour ces derniers, la correspondance entre les phonèmes et les graphèmes facilite le déchiffrage. Les élèves sourds doivent associer à chaque mot écrit une idée sans pouvoir s'appuyer sur leur langue première qui est la langue des signes. Ceci pourrait expliquer les difficultés qu'ils rencontrent pour comprendre les mots qu'ils déchiffrent. En conséquence, même s'il a conscience que la lecture constitue pour eux un enjeu d'apprentissage essentiel, l'interprète doit régulièrement traduire en langue des signes une partie des supports proposés par les enseignants. En effet, sans cela, certains contre-sens graves pourraient empêcher leur entrée dans la tâche proposée. Ainsi, lorsque l'interprète montre le mot « pignon » écrit au tableau par l'enseignant, et demande « vous comprenez ce qu'il y a écrit ? », Martin répond sans hésiter « oui, c'est un oiseau ». En effet, cet élève a associé les mots « pignon » et « pigeon » qui présentent une écriture assez proche. Cette difficulté posée par la compréhension du français écrit amène l'interprète à ne pas se contenter de traduire les échanges entendus dans la classe. En effet, les élèves sourds doivent apprendre non seulement le geste-signe associé à une notion donnée mais également l'écriture du mot correspondant, sans qu'aucun lien évident n'existe entre ces deux signifiants. L'interprète tente donc d'accompagner ces apprentissages en écrivant régulièrement sur une ardoise les mots correspondants aux notions nouvelles qu'il vient de signer. Il signale aussi la polysémie des mots ou l'existence d'homographes. Ainsi lorsque l'enseignant parle des dents de l'engrenage, l'interprète commence par signer cette notion, puis il fait remarquer aux élèves que ce terme s'écrit comme les dents situées à l'intérieur de la bouche.

3. Resynchronisation : des bulles de compréhension

Nous voyons donc que les éléments pouvant engendrer des retards du SDA par rapport au SDP sont nombreux. Toutefois, comme la classe avance, le SDA interne doit aussi avancer et réussir à se resynchroniser par différents moyens. Nous avons ainsi pu constater dans les séances observées que l'interprète ne traduisait pas toujours l'intégralité des propos qui s'échangeaient dans la classe : il lui est arrivé de ne sélectionner que les informations les plus importantes pour la résolution du problème posé en occultant le reste.

Un autre dispositif peut permettre de resynchroniser les élèves sourds avec le reste de la classe. En effet, durant la séance, à plusieurs reprises, des discussions, entre les deux élèves sourds, ou entre les élèves sourds et leur interprète, s'instaurent indépendamment des échanges qui se produisent dans le reste de la classe. Ce sont des temps où l'interprète va pouvoir s'assurer de la compréhension de certaines notions évoquées et enrichir les explications données par l'enseignant. Martin et Julien discuteront également de leurs interprétations respectives de la situation proposée. Ainsi, pendant que le reste de la classe échange sur le fonctionnement du vélo dans la première séance, Martin et Julien parlent de la conversion cm/pouces puis du calcul du périmètre. On a alors l'impression que Martin, Julien et l'interprète sont comme coupés du reste de la classe dans une sorte de sas isolé leur permettant d'éclaircir certains points incontournables pour accéder à l'activité mathématique attendue. C'est pourquoi nous parlerons de *bulles de compréhension*. Toutefois, durant ces apartés, le déroulement de la séance se poursuit et certains échanges entre les élèves ordinaires et l'enseignant ne seront pas traduits. L'interprète se doit donc d'estimer l'intérêt de ces deux sources d'informations afin de décider si à un moment donné, l'isolement des

élèves sourds constitue un appui susceptible de favoriser leur compréhension et de permettre de les resynchroniser avec le reste de la classe ou au contraire un handicap en raison des informations perdues.

V. CONCLUSION

Les séances que nous avons observées se composent d'une succession de moments de synchronisation et de désynchronisation : à certains moments les élèves sourds sont parfaitement en phase avec le reste de la classe, à d'autres ils sont en décalage, soit à cause de ralentissements dus à la langue des signes ou à leur rapport à l'écrit, soit grâce à l'apparition de bulles de compréhension qui peuvent permettre de resynchroniser ces élèves avec les autres. Ces cycles dé-resynchronisations n'empêchent pas les élèves sourds d'être engagés dans la résolution du problème, de vouloir comprendre de quoi il s'agit, d'essayer de trouver des techniques qui permettent de trouver la réponse au problème. On peut donc se demander si ces désynchronisations constituent de réels obstacles pour les apprentissages des élèves sourds : finalement, a-t-on besoin d'être toujours synchrone ?

Notre travail montre plutôt des réponses nuancées à ces questions. Certes tout dépend du moment où ces désynchronisations ont lieu, et à propos de quoi. Dans notre cas, la première phase qui permet de comprendre les contraintes du problème notamment celles concernant le fonctionnement du vélo est essentielle pour la dévolution du problème aux élèves. Le temps didactique avance car il y a des objets nouveaux qui sont essentiels pour s'engager dans la recherche d'une technique. Les resynchronisations sont alors nécessaires, et le rôle de l'interprète est important pour condenser une discussion, pour l'apport d'une information. Nous avons ainsi observé que l'interprète revenait sur les éléments écrits au tableau et montrait certaines parties du vrai vélo pour que les élèves puissent comprendre la relation entre tour de pédale et tour de roue. Le temps praxéologique a avancé puisque les élèves sourds, tout comme les élèves entendants, ont pu s'engager dans la résolution du problème. Pendant le travail en groupe, le SDA interne d'une part et les autres élèves d'autre part ont fonctionné d'une manière autonome. Différents temps praxéologiques co-existaient dans la classe puisque les techniques des groupes se mettaient en place. A la troisième étape, la mise en commun a permis d'institutionnaliser les techniques qui permettaient d'aboutir à la solution du problème. Pendant ce temps, le SDA interne était synchronisé avec la classe. Le temps didactique a ainsi avancé pour la classe mais aussi pour le SDA interne.

Ce travail nous permet de donner une réponse aux obstacles et aux leviers sur lesquels s'appuyer pour favoriser les apprentissages des élèves sourds. La présence d'un SDA interne à la classe peut être un obstacle si les désynchronisations associées à la présence de deux langues empêchent d'avoir les informations essentielles pour s'engager dans le travail mathématique. Cela peut se faire de manières très diverses, par des bulles de compréhension, par des cycles de désynchronisation/resynchronisation plus ou moins rapides. Le fait que dans la séance observée l'interprète était auparavant un enseignant de mathématiques a sûrement facilité la sélection des informations présentées aux élèves. Par la suite, nous voulons étudier ce qui se passe si l'interprète n'est pas spécialiste de la discipline : est-ce que dans ce cas le temps didactique avance en classe et aussi dans le SDA interne ?

REFERENCES

Assude, T., Millon-Fauré, K, Koudogbo, J, Morin, M-P, Tambone, J. et Theis, L. (2016). Du rapport entre temps didactique et temps praxéologique dans des dispositifs d'aide associés à une classe. *Recherches en didactique des mathématiques*, 36.2, 197-230.

Bonnet, M., Mangeret, T. et Nowak, M. (coord.)(2010). *Mathématiques et Surdité. L'accueil des enfants sourds et malentendants en classe ordinaire ou spécialisée*. Lyon : co-édition IREM-CRDP de Lyon, collection ASH.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques en théories anthropologique du didactique. *Recherches en didactiques des mathématiques, 19(2),* 221-266.

Chevallard, Y. (2010). *Le sujet apprenant entre espace et dispositif. Commentaires depuis la théorie anthropologique du didactique.* Communication présentée aux journées du Lisec Gérardmer.
http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Commentaires_depuis_la_TAD_YC_.pdf

Chevallard Y., Mercier A. (1987). *Sur la formation historique du temps didactique*. Marseille : IREM.

Courtin C (2002). Le développement de la conceptualisation chez l'enfant sourd, *Nouvelle Revue de l'AIS, 17*, 181-195.

Cuxac C. (2003). Une langue moins marquée comme analyseur langagier : l'exemple de la LSF. *La Nouvelle Revue de l'AIS*, 23, 19-31.

Duquesne-Belfais F. (2005). Les apprentissages mathématiques dans une éducation bilingue, LSF et français. *La Nouvelle Revue de l'AIS*, Hors Série, 119-128.

Duquesne-Belfais F., Bertin F. (2005). Être et accueillir un adolescent sourd au Collège. *La Nouvelle Revue de l'AIS, 29, 99-113.*

Duquesne-Belfais F. (2007). *Activités et langages dans la conceptualisation mathématique. Des apprentissages des élèves sourds à la formation de leurs enseignants*. Thèse de l'université de Lille 1 : Lille.

Vergnaud G. (1990). La théorie des champs conceptuels *Recherches en didactiques des mathématiques*, 10-2/3,133-170.

RECHERCHE COOPERATIVE SUR L'INTRODUCTION DE LA GEOMETRIE DYNAMIQUE EN SEGPA

ATHIAS[1*] Francine – LE BORGNE[2**] Philippe

Résumé – Notre recherche s'intéresse à l'enseignement de la géométrie en SEGPA. Elle est organisée au sein d'un collectif de professeurs et de chercheurs. Ce collectif cherche à élaborer, à tester en classe puis à améliorer dans un processus itératif, des situations mobilisant à la fois des instruments usuels et la géométrie dynamique. Pour rendre compte des échanges dans le collectif et dans les classes, nous nous appuyons sur des éléments issus de de la théorie de l'action conjointe en didactique.

Mots-clefs : géométrie, géométrie dynamique, processus itératif, difficultés d'apprentissage, didactique.

Abstract – The research process gathers teachers and researchers through a common project. We try to elaborate geometrical situations using instruments for geometry (compass, ruler…) and dynamic geometry for students with learning difficulties (SEGPA's students). We try to show how this joint action enables to build and rebuild in an iterative way some interesting situations to teach geometry.

Keywords: geometry, dynamic geometry, iterative way, learning difficulties, didactic.

I. INTRODUCTION

1. Géométrie

Nous avions envisagé l'usage de la géométrie dynamique au cycle 3, comme moyen d'explicitation des propriétés de géométrie (Athias, 2014.b, Athias et Le Borgne, 2017). Les résultats de ces recherches portent sur les pratiques des professeurs, qui intègrent un logiciel de géométrie dynamique. Une description et une analyse de cette intégration mettent ainsi au jour des liens entre l'environnement papier-crayon et l'environnement dynamique. Dans les tâches de description et de reproduction, les professeurs conduisent les élèves à travailler avec une figure matérielle (Celi et Perrin-Glorian, 2014), c'est-à-dire un dessin géométrique que l'on peut décrire ou reproduire en utilisant les instruments de géométrie de manière à mettre en évidence ses caractéristiques géométriques. Par ailleurs, certains élèves ayant des difficultés en géométrie se sont révélés être très intéressés par la géométrie dynamique.

2. Contexte de la recherche

En nous appuyant sur ces résultats antérieurs, nous proposons d'introduire en lien avec l'environnement papier-crayon un logiciel de géométrie dynamique, dans des classes de SEGPA[3]. Au collège, ces classes accueillent des élèves présentant des difficultés scolaires graves et persistantes auxquelles n'ont pu remédier les actions de prévention, d'aide et de soutien. Les instructions officielles concernant ces élèves recommandent de créer un climat de confiance ainsi qu'un contexte pédagogique stimulant. Du point de vue des apprentissages, l'objectif est de permettre à tous les élèves d'acquérir, à l'issue de leur scolarité, la maîtrise d'éléments du socle commun de connaissances, de compétences et de culture du cycle 3. L'adaptation des situations doit porter sur l'organisation des situations et sur la présence du professeur.

---

1 * CREAD– France– francine.athias@espe-bretagne.fr

2 * LmB– France – philippe.leborgne@univ-fcomte.fr

3 SEGPA : Section d'Enseignement Général et Professionnel Adapté

Les deux professeures ont déjà entendu parler de logiciels de géométrie dynamique. Elles voudraient bien « se lancer » mais seules, elles n'ont pas envie de commencer. C'est que, comme tout logiciel mathématique, le logiciel de géométrie dynamique GeoGebra laisse au professeur une marge de manœuvre considérable pour interpréter comment il peut servir de ressource pédagogique (Ruthven, 2017). C'est dans ce contexte que nous leur avons proposé de monter cette ingénierie coopérative.

3. Ingénierie coopérative

Nos recherches ont montré des intérêts et des limites dans l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique. Par exemple, les professeurs ont organisé des orchestrations intéressantes (Trouche, 2005), que les chercheurs n'avaient pas envisagées. Dans le même temps, ils n'utilisent pas toutes les potentialités de la géométrie dynamique (Athias, 2014.a). Nous avons organisé un collectif de deux professeures de SEGPA et de deux chercheurs à la manière d'une ingénierie coopérative (Sensevy, 2015). Une ingénierie coopérative peut se caractériser comme une activité conjointe entre professeurs et chercheurs autour d'un projet commun de conception et d'analyse de séquences d'enseignement et d'apprentissage. Cette enquête commune se centre à la fois sur des savoirs géométriques que l'on veut enseigner et sur la production de dispositifs et de gestes d'enseignement. Les séances sont alors produites par le collectif et sont mises en œuvre par les professeurs. Elles sont ensuite analysées et retravaillées pour être de nouveau réimplantées en classe. Nous postulons ainsi la nécessité de travailler conjointement pour améliorer le curriculum (Sensevy et al., 2013) et pour augmenter la compréhension par les chercheurs et les professeurs des conditions et des contraintes permettant les apprentissages. Cette compréhension est importante dans notre étude avec des élèves de SEGPA, puisqu'il s'agit d'élèves ayant des difficultés persistantes d'apprentissage. Décrire et comprendre ce qui se passe en classe lorsque la géométrie dynamique est introduite dans des séquences de géométrie.

Nous voulons étudier comment le professeur et les élèves prennent en compte la figure matérielle et souhaitons analyser comment cette question est prise en compte par le collectif. Dans le cadre de cette communication, nous faisons le choix de nous focaliser sur les échanges dans le collectif et dans la classe autour de la figure matérielle, dans l'environnement papier-crayon. En effet, le collectif a décidé de faire d'abord travailler les élèves dans cet environnement. Les interrogations autour de la figure matérielle et les éléments géométriques qui la constituent seront retravaillées dans l'environnement dynamique, mais cette étude ne sera pas proposée ici. Il est important de noter que cet arrière-plan de la géométrie dynamique est présent du côté des chercheurs, mais pas encore du côté des professeurs. L'objet de cette ingénierie coopérative à terme est de développer cet arrière-plan commun.

II. ÉLEMENTS THEORIQUES ET METHODOLOGIQUES

1. Théorie de l'action conjointe

Pour l'analyse, nous nous appuyons sur les concepts de la théorie de l'action conjointe en didactique (TACD, Sensevy, 2011). Cette théorie a été conçue pour l'analyse du système constitué du professeur, de l'élève et du savoir. Nous postulons qu'au sein de l'ingénierie coopérative s'actualisent des processus didactiques, au sens où à certains moments les professeurs enseignent aux chercheurs et à d'autres moments, c'est le contraire. Dans les analyses que nous menons, nous avons deux familles de situations didactiques pour lesquelles nous utilisons le modèle du jeu (Sensevy, 2012).

Une première famille de situations didactiques est classiquement celles qui sont vécues par le professeur, les élèves autour d'un savoir. Le jeu consiste à modéliser l'action du professeur et des élèves en classe, où le professeur est soumis à un paradoxe (Brousseau, 1998) : il sait mais il doit laisser les élèves agir et faire ainsi l'expérience de la puissance d'agir. La notion de jeu d'apprentissage permet de rendre compte de l'action effective du professeur sur l'élève et réciproquement, dans une dialectique contrat-milieu, par rapport à un certain enjeu de savoir. Le contrat didactique (Sensevy, 2011) est entendu comme système d'habitudes ou d'attentes du professeur et des élèves (le déjà-là, le déjà-su, …). Le milieu didactique (Sensevy, 2011) est défini en prenant appui sur la proposition de Brousseau (2010, p.3) : « Tout ce qui agit sur l'élève et/ou sur quoi l'élève agit ». Il rend compte des possibles et des nécessaires qui constituent l'environnement matériel et symbolique de l'action didactique.

Une seconde famille de situations, que nous qualifions également de situations didactiques est celles qui sont vécues dans le collectif professeurs et chercheurs. Le jeu consiste à modéliser l'action des professeurs et des chercheurs, au sein de l'ingénierie coopérative. C'est un jeu particulier dans la mesure où aucun des actants ne connaît la réponse au problème posé. Les chercheurs et les professeurs ont à développer une expertise commune : les chercheurs se rendront progressivement capables d'utiliser certains éléments du langage des professeurs, les professeurs devront se rendre capables de parler certains éléments du langage des chercheurs. Le problème que le collectif a à résoudre est de créer des situations pour des élèves ayant des difficultés d'apprentissage. Tous les échanges dans le collectif des professeurs et des chercheurs ont comme background ce qui pourrait se passer en classe (la première famille de situations).

Nous nous interrogeons sur les deux familles de situations : comment les échanges au sein du collectif de professeurs et de chercheurs conduisent à produire un langage commun sur l'enseignement de la géométrie ? Comment ce langage commun oriente les actions du professeur dans la classe ?

2. Éléments méthodologiques

Les séances de travail coopératif et les séances de classe sont enregistrées. Nous nous appuyons sur le film d'étude. Les séances construites collectivement sont discutées ensemble et sont en ligne pour pouvoir les annoter au fur et à mesure de l'avancée dans le temps. Les données sont réduites sous forme de synopsis pour donner à voir l'ensemble de la recherche, à une échelle macro. Les transcriptions permettent ensuite l'analyse à une échelle méso voire micro.

III. EXPERIMENTATIONS

1. Les séances de travail coopératif

La recherche a débuté réellement en septembre 2017. Nous avons au moment de l'écriture de cette communication trois réunions collectives (R1, R2, R3) et une séquence de classe (S1).

Juin 2017 R1	Sept 2017 R2	Nov 2017 S1	Déc 2017 R3	...
Préparation du travail professeures-chercheurs	Travail professeures-chercheurs	Mise en œuvre en classe	Travail professeures-chercheurs	

Figure 1 *– Tableau des séances*

2. La première séance de classe, telle qu'elle est prévue

Nous allons présenter la première séance de classe (de la séquence S1). Le scénario est construit collectivement et repose sur la figure ci-dessous. Les professeures proposent aux élèves «d'identifier et de repérer les différents éléments de géométrie qui la composent » (cf. figure 2).

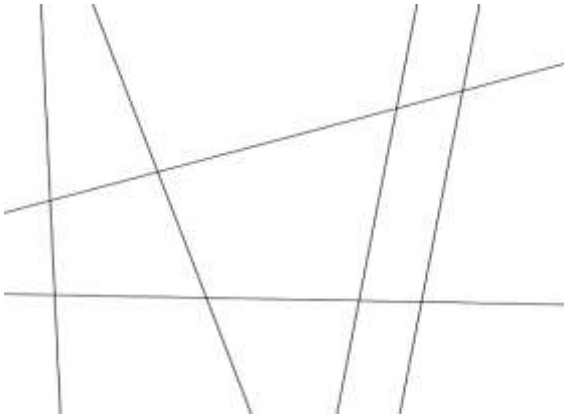


Figure 2 *– la figure proposée aux élèves*

Pour analyser la séance prévue, nous (les chercheurs) avons procédé de la manière suivante. Nous présentons une analyse a *priori* (Assude et Mercier, 2007). Elle se décline en trois temps : un premier temps, une analyse descendante qui décrit les savoirs mathématiques en jeu, un deuxième temps, une analyse ascendante qui envisage les techniques d'élèves et un troisième temps qui envisage les difficultés didactiques que le professeur pourrait rencontrer. Nous avons fait le choix de ne pas partager cette analyse avec les professeures.

Analyse des savoirs mathématiques en jeu

Dans la figure envisagée, six droites sont tracées ; certaines sont deux à deux parallèles ou perpendiculaires. L'intersection de deux droites met en évidence des points. Ainsi, la figure permet d'investir les connaissances liées à la position relative de droites et le vocabulaire associé (sécantes, parallèles ou perpendiculaires). En cinquième de SEGPA, ces connaissances géométriques ont déjà été travaillées en sixième et à l'école primaire.

Analyse des techniques possibles des élèves

Pour la figure proposée, une première technique consiste à voir et à reconnaître perceptivement les droites perpendiculaires ou parallèles, les points à l'intersection de deux droites. Une deuxième technique consiste à voir perceptivement puis reconnaître et vérifier en utilisant les instruments usuels de géométrie, si les droites sont parallèles ou perpendiculaires. Aucune technique instrumentale ne permet à l'élève de placer des points.

Difficultés didactiques possibles pour le professeur

Ce troisième temps de l'analyse a été largement discuté dans le collectif professeurs-chercheurs. Ce sont les professeures qui ont proposé cette figure pour leur classe. Le collectif a tenté de répondre aux modalités de mise en œuvre en lien avec les connaissances géométriques visées. L'environnement papier-crayon ou l'environnement dynamique ont été envisagés. Le point de vue des chercheurs sur les apports d'une figure dynamique a été présenté. Le point de vue des professeures a mis en évidence des conditions de mise en œuvre. C'est ainsi que le topos des chercheurs ou des professeures était plus ou moins élevé en fonction des contraintes de chacun. Finalement, les professeures ont choisi l'environnement papier-crayon. Le deuxième choix qui a été discuté concernait la présence de lettres et de codage sur la figure. Les professeures souhaitent rendre nécessaires les noms des points en établissant des situations de communication. Cette dimension semble importante en classe de SEGPA. De la même manière, les professeures préfèrent que le codage intervienne plus tard, lorsque les élèves ont utilisé les instruments de géométrie pour attester des propriétés (égalité de longueurs, angle droit...). Les chercheurs ont interrogé les professeures sur le déroulé de cette mise en œuvre. Cet aspect sera donc spécifiquement étudié lors de la réalisation de la classe *in situ.*

3. La séance de classe mise en œuvre

La séance de classe organisée autour de la figure travaillée par le collectif s'est déroulée finalement en trois séances. Au cours de la première séance, les deux professeures ont choisi de demander aux élèves de se souvenir des mots du champ sémantique de la géométrie (non filmée). Au cours de la deuxième séance (filmée), elles ont décidé de projeter la figure au tableau, sans utiliser le logiciel de géométrie dynamique. Au cours de la troisième séance, elles ont résumé ce qu'ils avaient vus sur la figure.

4. Les premiers éléments de description et d'analyse de la séance filmée

La séance envisagée par le collectif autour de la figure de géométrie a finalement pris beaucoup plus de temps que prévu. Cette différence de temps mérite d'être interrogée.

L'action en classe est modélisée sous la forme d'un jeu d'apprentissage. Pour gagner à ce jeu, il faut dans un premier temps repérer puis nommer les objets géométriques pour pouvoir expliquer où ils sont dans la figure. Autrement dit, à ce stade, l'enjeu est de repérer puis de nommer les points et les droites. Pour pouvoir jouer à ce jeu, la professeure et les élèves s'appuient sur le « déjà-là », ce « déjà-là » est modélisé sous la notion de contrat didactique, avec une part transactionnelle et une part épistémique. D'une part, les habitudes de classe règlent les manières d'interagir. Par exemple, lorsque la professeure pose une question, l'élève répond. Ou lorsque la professeure explique que les explications sont difficiles à donner, l'élève sait que la question posée n'a peut-être pas de réponse. D'autre part, la professeure et les élèves savent que des éléments géométriques ont déjà été rencontrés. Les élèves savent reconnaître des droites, des droites parallèles, des angles droits.

Les deux professeures ont défini le jeu. Dans la classe de P1, la professeure demande de faire la restitution de la recherche opérée dans chaque groupe. Dans la classe de P2, la professeure demande d'identifier les éléments géométriques (sans recherche en groupe). Dans les deux classes, la consigne est de ne pas se lever.

Cette consigne est habituelle (elle fait partie des habitudes en géométrie). Elle est claire et les élèves acceptent cette règle du jeu.

Ce qui nourrit le jeu, c'est la figure affichée au tableau, les questions de la professeure, les réponses des élèves. Ce jeu est complexifié par l'impossibilité de se déplacer. Ces éléments sont modélisés par la notion de milieu, en tant que milieu qui pose problème. Lorsque le problème sera résolu, alors les élèves sauront que pour communiquer les éléments géométriques (que l'on a repérés), il est nécessaire de les nommer (dans le cadre de cet exposé, nous focalisons notre analyse sur ce point).

Dans la classe 1, un élève explique que les droites sont là-bas, puis à droite. Le jeu se déroule donc sur un « dessin », pris au sens d'une image (on est dans le paradigme 1 de Houdement & Kuzniak, 1999). Les élèves s'appuient sur leurs habitudes de l'espace, en utilisant le vocabulaire de la vie quotidienne. Le milieu n'offre aucune résistance. La professeure choisit à ce moment-là de montrer au tableau. Elle laisse de côté momentanément l'enjeu. Elle y revient, un peu plus tard en demandant aux élèves de nommer un segment, toujours sans le montrer. Un élève répond en s'appuyant sur les habitudes de classe de géométrie, soulignant ainsi l'importance de ces habitudes. Le segment est nommé [AB], sans qu'à aucun moment la notion de point soit évoquée.

Dans la classe 2, un élève parle des droites qui « sont là, là et là ». Il voudrait se lever pour aller les montrer. La professeure l'en empêche. À ce moment-là, il s'appuie sur ses habitudes en géométrie mais cette fois s'interroge sur l'absence de notation. Ici, le milieu résistant (ne pas pouvoir communiquer) active le contrat (les habitudes de nommer en géométrie).

IV. CONCLUSION-DISCUSSION

1. De la nécessité de travailler avec les professeurs

Notre questionnement porte sur les deux niveaux de jeu.

Comment les échanges au sein du collectif de professeurs et de chercheurs conduisent à produire un langage commun sur l'enseignement de la géométrie ? Comment ce langage commun oriente les actions du professeur dans la classe ?

Le problème posé aux élèves, à savoir nommer les éléments géométriques, se superpose au problème de décrire les éléments géométriques. La nouvelle règle du jeu qui empêche le déplacement des élèves, ne garantit pas de mettre en évidence la nécessité de repérer les objets géométriques et des relations entre eux (parallélisme ou perpendicularité), ni de nommer ces objets. Dans les deux classes, cette question du nom des objets apparaît, mais assez tardivement (15 min dans la classe 1 qui en comptent 18; 17min dans la classe 2 qui en comptent 42). Les seuls objets nommés sont les droites, par exemple la droite (a) ou les segments, par exemple le segment [AB], sans préciser ce que représentent A et B.

La séance a été élaborée par le collectif et a fait l'objet d'échanges, avant sa mise en œuvre. La figure proposée aux élèves ne comporte aucun nom. Le problème proposé aux élèves consiste à analyser la figure (P1 : « si les gamins analysent. Il y a deux droites parallèles »), et à exprimer la nécessité de nommer les objets géométriques (P1 : « Il faut qu'on sache de quelles droites on parle »). La question de la reconnaissance de points est également évoquée dans le groupe (C : « Pour faire émerger les points », confirmé par les deux professeures). Comme nous l'avons vu, l'analyse de la figure conduit les élèves à nommer les droites. Dans une classe, la dénomination des droites est à l'initiative d'un élève, dans l'autre classe, elle est à l'initiative de la professeure. Les points ne sont pas du tout évoqués. Ainsi, le collectif a évoqué la question des points dans une figure avant la séance de classe. Pourtant, lorsque les élèves n'évoquent pas les points de la figure, les professeures n'éprouvent pas la nécessité de le faire. Après l'analyse de la séance de classe au sein du

collectif, elles expliquent qu'elles n'avaient pas pensé que le repérage des points dans une figure posait problème à leurs élèves. La suite des séances a montré que ce n'était pas le fait de nommer les points qui était difficile, mais plutôt de les repérer. Cette nouvelle connaissance pour les professeures et les chercheurs devrait donc permettre d'aborder la géométrie dynamique. Par ailleurs, la séance autour de la figure va être retravaillée dans le collectif, prenant ainsi en compte les résultats de cette première année.

L'hypothèse initiale concernant l'introduction de la géométrie dynamique (cette intégration permettra aux élèves d'expliciter les propriétés géométriques) nous apparaît finalement trop large. Elle porte maintenant sur la mise en évidence d'objets invisibles aux élèves. Voir le point d'intersection de deux droites sécantes n'est pas immédiat pour les élèves dans notre étude. Nous nous interrogeons de savoir si c'est une spécificité de ces élèves ou si elle concerne d'autres élèves. Ce que nous pouvons avancer, c'est que le logiciel peut rendre visible ce point (la croix et le nom). Il reste donc à créer une situation rendant nécessaire ce point d'intersection. C'est l'objet de la suite de notre travail, en appui sur l'environnement dynamique.

2. La poursuite de l'expérience

Cette première année de recherche n'est que le premier pas, dont les attendus portent sur une meilleure compréhension de l'enseignement de la géométrie en SEGPA, pour les chercheurs et les professeures. Cette meilleure compréhension a pour finalité de rendre accessibles des connaissances géométriques aux élèves, et en particulier aux élèves ayant des difficultés d'apprentissage. Nous faisons l'hypothèse que la géométrie dynamique peut aider à la conceptualisation des notions géométriques, en appui sur le déplacement. Les élèves vont découvrir le logiciel de géométrie dynamique avec leurs professeures. Ils vont être confrontés à de nouveaux problèmes. Les connaissances instrumentales sont-elles des freins à l'apprentissage pour des élèves ayant des difficultés d'apprentissage ? Au contraire, peuvent-elles permettre de rendre compte de propriétés mathématiques, devenues invisibles dans l'environnement papier-crayon ? Pour tenter d'y réfléchir, il est nécessaire, d'une part de mener de nouvelles enquêtes dans le collectif de professeures et de chercheurs et d'autre part, de mettre en œuvre des séances, pour lesquelles les enjeux de savoir et les moments-clés de l'apprentissage ont été partagés. Collectivement, nous nous interrogeons sur l'élaboration de situations permettant à ces élèves ayant des difficultés d'apprentissage de travailler sur les figures matérielles, qu'elles soient dans l'environnement papier-crayon (avec les instruments usuels) ou dans l'environnement dynamique (avec les connaissances instrumentales).

REFERENCES

Assude T., Mercier A. (2007) L'action conjointe professeur-élève dans un système didactique orienté vers le mathématiques. In G. Sensevy & A. Mercier (Éd.). *Agir ensemble. L'action didactique conjointe du professeur et des élèves* (pp. 153-185). Rennes : Presses Universitaires.

Athias F. (2014.a) *La géométrie dynamique comme moyen de changement curriculaire*. Thèse de doctorat, Marseille.

Athias F. (2014.b) La géométrie dynamique pour éclairer l'usage du compas. *Éducation et didactique* 9 (3), 109-125.

Athias F., Le Borgne P. (2017) Comparer deux séances de géométrie en cycle 3. *Colloque InterIREM*, Poitiers.

Brousseau G. (1998) *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La pensée sauvage.

Brousseau G. (2010) *Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques*. Disponible sur Internet à l'adresse : http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf (consulté le 02 janvier 2019).

Celi V., Perrin-Glorian M-J. (2014) Articulation entre le langage et traitement des figures dans la résolution d'un problème de construction géométrique. *Spirale* 54, 151-174.

Houdement C., Kuzniak A. (1999) Un exemple de cadre conceptuel pour l'étude de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. *Educational Studies in Mathematic* 40, 283-312.

Ruthven K. (2017) Constructing dynamic Geometry: insights from a study of teaching practices in English schools, In G. Kaiser et al. (Éds.), *Invited Lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education*, ICME-13 Monographs, 521-539.

Sensevy G. (2011) *Le sens du savoir. Éléments pour une théorie de l'action conjointe en didactique*. De Boeck.

Sensevy G., Forest D., Quilio S. & Morales G. (2013) Cooperative engineering as a specific design-based research. *ZDM, The International Journal on Mathematics Education* 45(7), 1031-1043.

Sensevy G. (2012) Le jeu comme modèle de l'activité humaine et comme modèle en théorie de l'action conjointe en didactique. Quelques remarques. *NPPS* 7(2), 105-132.

Sensevy G. (2015) Le collectif en didactique : quelques remarques. In Y. Matheron, G. Gueudet, V. Celi, C. Derouet, D. Forest, M. Krysinska, S. Quilio, M. Rogalski, T. Angels Sierra, L. Trouche, C. Winslow & S. Besnier (Éds.), *Enjeux et débats en didactique des mathématiques, XVIII école d'été de didactique des mathématiques* (pp.223-253). Brest.

Trouche L. (2005) Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques : nécessité des orchestrations. *Recherches en Didactique des mathématiques* 25(1), 91-138.

RECHERCHE AUTOUR DE GESTES PROFESSIONNELS OBSERVES EN PEDAGOGIE DE SOUTIEN INDIVIDUEL

BELLANGER[*] Pierre- VULLIEMIN[**] Magaëlle

Résumé – Notre recherche est partie de phrases énoncées par un enseignant de mathématiques durant des séances d'appui individuel au secondaire 2. Ces locutions nous ont permis d'identifier les gestes professionnels employés par cet enseignant selon une grille d'analyse qui les répertorie en trois catégories : étayage, tissage et co-construction de l'atmosphère. Cela nous a amené à questionner le jeu de l'enseignant, la nature de ces gestes et leurs fondements. Nous les avons mis en lien parfois avec la didactique ou la linguistique et d'autres fois avec l'idée de relation d'aide.

Mots-clefs : didactique des mathématiques, gestes professionnels, étayage, tissage, atmosphère

Abstract – Our research is based on statements enunciated by a Maths Teacher during individual learning sessions in the Post-compulsory secondary education. These statements let us identify the professionnal actions employed by this teacher according to an analysis grid which classifies them in 3 categories: scaffolding postures, linking postures and coconstruction of the work environment. This lead us to enquire about the role of the teacher, the nature of teacher's actions and their pedagogical basis. We linked them either to the didactics, to the linguistic or to the « support relationship » concept.

Keywords: Maths didactics, professionnal actions, scaffolding postures, linking postures, work environment

I. INTRODUCTION

Alors que nous sommes habitués à côtoyer des élèves en difficulté dans le système scolaire primaire et secondaire, se rendre compte que même au secondaire 2[1], des élèves[2] se retrouvent également dans ces conditions est plus questionnant. La recherche effectuée par Bellanger et Vulliemin (2017), sur la base de données issues d'une recherche de Deruaz et Dias (2016), flirte donc avec une des questions vives de l'enseignement des mathématiques, puisqu'elle se penche sur l'étude d'un dispositif d'aide individualisée à un niveau d'études supérieures. Depuis plusieurs années, la pédagogie inclusive est un réel sujet de préoccupation en Europe (Doudin, 2011). Il est donc nécessaire de se pencher sur les moyens apportés aux élèves tout en tenant compte de leurs particularités, ceci afin que leur rapport aux objets mathématiques puisse s'ancrer d'une manière constructive sur le long terme.

Suite à la prise de connaissance des théories de Bucheton et Soulé (2009) sur le multi-agenda et le jeu des postures existant entre enseignants et élèves dans des situations d'enseignement en classe ou en groupe de travail, nous avons fait l'hypothèse que ces différentes dimensions mobilisées dans ces situations d'apprentissages pouvaient également se manifester lors de la mise en place de dispositifs d'appui individualisé. Ce jeu de postures, issu des « multi-préoccupations » de l'enseignant[3] – et conjointement à ce que l'élève imagine, anticipe, perçoit ou comprend des attentes de son interlocuteur – se manifeste par des adaptations constantes et réciproques basées sur l'anticipation et la postulation d'attentes des deux parties en présence. Cela permet à l'enseignant de s'adapter à la singularité des différentes situations d'enseignement.

[*]HEP-L, Suisse, pier.re2@hotmail.fr
[**]HEP-L, Suisse, magaelle.vulliemin@vd.educanet2
[1]Suite de l'école obligatoire préparant l'accès aux voies académiques (université,...).
[2]Généralement âgés de 15 à 20 ans.
[3]Tant pour parler des enseignants que des élèves, la forme masculine est utilisée par soucis de simplification.

Nous avons choisi d'observer ces postures à travers les gestes de l'enseignant. Ce sont des actes langagiers qui traduisent les intentions portées à l'élève. Ils peuvent généralement avoir deux vocations : soit faire avancer l'élève dans la tâche, soit entretenir un bon climat de travail – les deux étant parfois étroitement liés, voire confondus. Ils sont le fruit d'adaptations langagières de l'enseignant par rapport à ce qu'il perçoit et comprend de l'élève évoluant en situation (Bucheton et Soulé, 2009). Bucheton et al. (2005) expliquent que ce qu'il se passe autour du langage doit renvoyer à la formation de l'élève. L'enseignant prend donc le rôle de médiateur entre les élèves et leurs apprentissages (Houssaye, 2014).

II. GESTES PROFESSIONNELS

Les outils d'observation que nous avons choisis d'utiliser ont été pensés dans un premier temps par les chercheurs pour observer des situations d'apprentissage à destination de plusieurs élèves. Nous avons sélectionné parmi un ensemble de gestes (redéfinis plusieurs fois par les mêmes auteurs) ceux qui étaient récurrents et qui semblaient pertinents à notre contexte d'étude. Les gestes retenus sont l'étayage (gestes centrés sur la tâche), le tissage (gestes centrés sur l'élève et mis en lien avec la tâche) et l'atmosphère (gestes centrés sur l'élève).

Gestes d'étayage	Gestes de tissage	Gestes d'atmosphère
Ce sont des gestes par lesquels l'enseignant apporte l'aide de l'adulte pour réaliser une tâche que l'élève ne peut réaliser seul (Bucheton, 2014). Ces moyens viennent compléter le concept de Zone Proximale de Développement (Z.P.D.) de Vygotski (1985). C'est donc l'ensemble des choses que l'enfant peut apprendre uniquement avec de l'aide. Son accession à un concept peut se faire grâce à la mise en mots d'une personne plus experte.	Selon Bucheton (2014), « les gestes de tissage visent à amener les élèves à faire des liens entre les tâches, à faire des liens avec l'avant et l'après de la leçon, entre le dedans et le dehors de la classe » (p. 15).	Nous préférons les appeler « gestes de co-construction de l'atmosphère » en référence à l'ensemble des auteurs (Bucheton et Soulé, 2009, Rogers, 2005) qui expliquent qu'il s'agit de perpétuels réajustements de l'enseignant, par rapport à ce qu'il s'attelle à construire certes, mais également en lien avec l'attitude des élèves. Ils contribuent à réguler les relations et à maintenir un climat d'apprentissage (Bucheton, 2014). C'est une rencontre entre deux sujets qui porte sur les niveaux relationnel, intellectuel, affectif et social. Ces niveaux vont s'exprimer autour d'enjeux communs. Cela va définir, entre autres, le niveau d'engagement attendu de l'élève dans une activité (Bucheton et al., 2005) et un climat propice ou non aux apprentissages.

Certains auteurs (Bucheton et Soulé, 2009) sont d'avis que l'étayage est un concept hiérarchiquement supérieur aux autres. Cèbe (citée par Martinet, 2016) écrit :

> « Les élèves déclarés en difficulté présentent une caractéristique commune, celle de ne pas tirer spontanément profit de leurs expériences et de leurs interactions avec leur environnement physique et social pour apprendre (Paour et al., 2010). Aussi ont-ils, plus que les autres, besoin d'un enseignement explicite [...] qui allie progressivité et complémentarité des tâches de découverte, de résolution de problème, de conceptualisation et d'exercices et ce quels que soient les savoirs que l'outil vise à faire construire » (p. 6).

D'après cette définition, si pallier aux difficultés de l'élève consiste à organiser différemment des situations d'apprentissage, en vue d'aider à construire des liens avec l'environnement, le tissage et

l'étayage devraient suffire à obtenir des améliorations. Or, d'après ce que nous savons sur la relation d'aide (Rogers, 2005), les gestes d'atmosphère concourent également à la progression des élèves. En effet, il est pour « … que l'enseignant concentre ses efforts sur le développement d'une relation, d'un climat conduisant à une connaissance autonome, personnelle et authentique » (p. 200).

III. PROTOCOLE ET SUPPORT EXPÉRIMENTAUX

Les élèves des gymnases du canton de Vaud se voient proposer une semaine d'activités spéciales, durant laquelle ils ont la possibilité de partir en camp, de faire de la sophrologie, des danses de salon, ou encore de suivre des appuis intensifs de mathématiques. L'établissement a repéré les élèves dont les notes étaient insuffisantes et leur a proposé de suivre ces « cours particuliers ». Ce dispositif vise donc à maintenir et soutenir des élèves dans un cursus « ordinaire » par une action particulière et exceptionnelle ciblée sur certaines de leurs lacunes en mathématiques.

À travers ce dispositif d'appuis très précis, nous avons cherché à observer comment l'enseignant pouvait mobiliser son répertoire de gestes professionnels et l'adapter à son contexte (élève + situation didactique). La variable « élève en présence » constitue une dimension déterminante pour observer la capacité d'adaptabilité de l'enseignant et ce qu'il met en jeu pour répondre aux besoins spécifiques de chacun. Ainsi, les gestes de l'enseignant pourront nous montrer si ce dernier s'adapte ou non aux différents éléments du contexte. Les élèves concernés par notre étude ont bénéficié chacun de 4 séances d'appui. Nous avons choisi d'analyser les séances 2 et 3, afin de supprimer les biais éventuels que peuvent constituer le démarrage et la clôture d'une appui individualisé (faire connaissance avec l'élève, conclure le suivi, ...). Ces séances ont été retranscrites à l'écrit, ce qui nous a donné l'accès à un corpus de plus de mille gestes que nous avons classés dans les trois catégories annoncées en amont. Nous avons ensuite cherché à les analyser à l'aide de différents outils pour tenter d'en comprendre le sens.

Quelques rares gestes comme : « *Alors, dites-moi tout* » nous ont posé un problème de catégorisation. Ces gestes « discutables » représentent une quantité négligeable de l'ordre de 3/1000. La situation d'enseignement nous a souvent aidés à choisir où catégoriser ces gestes. Nos sensibilités nous ont certainement aussi influencées pour choisir certaines lignes directrices, de même que l'atmosphère qui régnait à travers les vidéos que nous avons visionnées. Ainsi, alors que nous avons décelé de l'humour dans certaines locutions, d'autres observateurs n'auraient peut-être pas relevé cela. Cependant, malgré une volonté de supprimer les biais de subjectivité, nous pouvons tout de même nous demander si nous arriverions à objectiver tous les paramètres des situations d'enseignement ?

1. Recherche

Nous avons suivi deux élèves, A et B, chacun dans deux situations d'appui (séance 2 et 3). Nous constatons, dans un premier temps, que la quantité de gestes de tissage est différente d'un élève à l'autre (voir *Tableau 1, p. 4*). Pour l'élève A, le pourcentage de ces gestes oscille entre 6% et 7%, ce qui correspond sensiblement aux 7 % observés dans l'enseignement académique (Bucheton et Soulé, 2009), alors que pour l'élève B, le pourcentage se trouve entre 10% et 12%. On observe donc une récurrence dans l'utilisation de ces gestes pour un même élève. Dans ce cas de figure, nous pouvons déduire que l'enseignant s'adapte à la singularité de l'élève. Concernant les gestes d'atmosphère, nous observons qu'ils sont plus nombreux que ceux du tissage, mais moins que ceux de l'étayage. Dans le cas de l'élève A, ils sont utilisés de même manière d'une séance à l'autre.

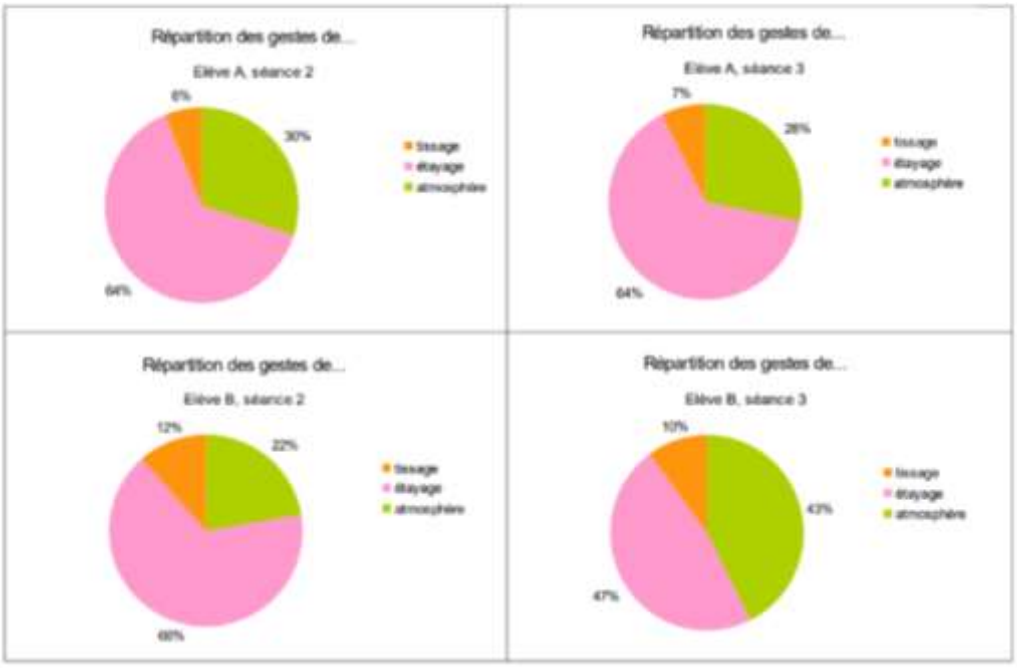


Tableau 1*- Répartition des gestes professionnels*

Leur quantité se situe entre 28% et 30%, tandis que pour l'élève B, leur utilisation oscille entre 22% et 43% et passe donc du simple au double. Dans ce dernier cas de figure, l'enseignant questionne l'élève sur son rapport aux mathématiques, son histoire et son parcours scolaire. Par analogie au monde médical, nous pourrions ici parler d'une anamnèse. On voit, à travers ces gestes, non seulement que l'enseignant s'adapte au profil de l'élève (l'un nous a semblé très timide, tandis que l'autre semblait bien plus loquace), mais aussi à la singularité de la situation d'enseignement. Pour les gestes d'étayage, leur quantité est équivalente pour les deux séances de l'élève A, à savoir 64 %, alors que pour l'élève B, ils sont fonction de la situation – d'une part 66% et d'autre part 43%. Dans ce dernier cas de figure, ils occupent une place aussi importante que celle des gestes d'atmosphère.

Aussi un surcroît d'étayage sera constaté lorsque l'enseignant doit revenir sur des prérequis trop fragiles chez l'élève. Nos conclusions concernant les gestes d'étayage concordent donc avec les constats établis précédemment ; l'enseignant s'adapte à un élève, mais aussi à l'environnement particulier d'une situation d'apprentissage.

Nous avons également voulu étudier plus à même chaque type de geste pour en faire ressortir l'essence en les « disséquant » à l'aide d'outils linguistiques.

2. « Nos » gestes d'étayage

Ils sont adressés directement à l'élève et servent à renvoyer au moment présent, à la tâche en cours. Un quart de ces gestes sont des phrases non verbales, brèves. Elles sont utiles pour rythmer la progression et servent aussi à centrer l'élève sur son action présente. Les compléments d'objets relatifs à la préoccupation mathématique du moment sont omniprésents puisque nous dénombrons 768 manifestations de cette nature pour notre corpus de 627 gestes d'étayage[4]. L'enseignant utilise 233 fois la forme interrogative pour cet ensemble de gestes. L'ensemble des informations

[4]Il peut y avoir plusieurs manifestations par corpus.

transmises par l'enseignant constitue un balisage très précis de la tâche pour assurer à l'élève un cheminement cognitif ciblé et adéquat. Nous avons observé que l'enseignant pouvait densifier ses étayages lorsqu'il détectait une lacune au niveau d'un prérequis à l'objet étudié.

3. « Nos » gestes de tissage

Ils sont également adressés directement à l'élève. Beaucoup font un lien avec le passé et l'avenir de l'objet d'enseignement dans la progression de l'élève. Les marqueurs temporels sont aussi beaucoup utilisés. Des marqueurs spatiaux sont présents dans ce type de geste, à moindre fréquence. Ils font référence à un environnement proche et connu de l'élève. Ces indices viennent donner du sens à la tâche. Les gestes de tissage sont d'avantage présents en début et en fin de séance et servent à l'enseignant à faire des liens d'ordre pratique pour aider l'élève à se situer dans sa progression.

4. « Nos » gestes d'atmosphère

À certains endroits, nous avons pu en observer une utilisation accrue. Dans ces moments, l'enseignant densifie son questionnement à l'élève pour comprendre son rapport aux mathématiques, son histoire et son parcours. On reconnaît un réel intérêt de comprendre quel est le profil de l'élève. L'humour apparaît également comme une volonté de soigner l'atmosphère. Il apporte un ton de légèreté. Nous observons un déséquilibre de ces intentions d'un élève à l'autre. Plusieurs hypothèses s'offrent à nous : l'enseignant ressent-il une réceptivité différente chez ses élèves ou juge-t-il certains moments comme suffisamment « détendus » pour ne pas avoir recours à l'humour ? L'enseignant traite de problèmes mathématiques autant que de problèmes de dé-sécurisation.

5. Résultats annexes

Nos préoccupations ayant tout autant porté sur les jeux d'adaptations réciproques, nous avons aussi cherché à obtenir des informations sur les différents échanges ayant eu lieu entre cet enseignant et ses élèves. Pour cela, nous avons dénombré les prises de parole et les quantités de mots utilisés par les deux parties. Pour l'élève A, l'enseignant compte en moyenne 50% des prises de parole, soit la moitié ; et en moyenne 68% des mots utilisés dans les échanges, soient les deux tiers. Pour l'élève B, l'enseignant compte en moyenne 50% des prises de parole, soit aussi la moitié ; et en moyenne 64% des mots utilisés dans les échanges, soient également environ les deux tiers. Ces résultats nous éclairent sur la nature du dispositif mis en place. Ils nous indiquent que les élèves ont autant la parole que l'enseignant. Cette manière de concevoir l'aide individualisée nous montre que l'enseignant semble sensible à ce que peut apporter l'élève. Il ne fait pas un cours magistral, mais il dialogue.

Nous observons cependant constamment un rapport 2/3 - 1/3 par rapport à la densité de la parole. Concrètement, l'enseignant utilise deux fois plus de mots que l'élève. Ce constat peut être rattaché aux théories interactionnistes du développement de l'enfant de Vygotski (1985). Raynal et Rieuner (2014) rappellent que « le développement de la pensée, du langage et de toutes les fonctions psychiques (pour l'apprenant) est le fruit d'une interaction permanente avec le monde des adultes, monde qui maîtrise les systèmes de signes que sont le langage et les codes sociaux » (p. 503). La progression de l'élève dépend alors d'une médiation de l'enseignant pour permettre un accès à des formes de représentations plus élaborées. Bruner (1983) complète cette conception en précisant que, pour élaborer des systèmes conceptuels performants et pour accéder aux modes de représentations symboliques, l'apprenant se trouve sous l'influence directe du langage, facteur structurant de la pensée.

IV. ETUDE D'UN CAS

Nous avons choisi de présenter un extrait de séance, en lien avec un objet mathématique particulier ; la mise en équations de problèmes à travers des systèmes d'équations.

Au cours du moment sur lequel nous avons choisi de nous appuyer, l'élève et l'enseignant abordent la correction d'un exercice que l'élève n'a pas réussi à faire correctement ultérieurement. Il s'agit d'un problème dans lequel on doit déterminer 3 âges les uns par rapport aux autres. À la suite de ce moment d'introduction, l'enseignant prend la parole et dit : *« Vous avez vu ma stratégie, / on sait que ça va être quelque chose moins quinze égale l'autre / par contre c'est pas évident de trouver lequel / on en met un je vais dire presque au hasard puis après on remplace par des nombres pour voir si c'est plausible ou pas ».*

Nous avons découpé cette première locution en 4 gestes. Nous avons classés « *Vous avez vu ma stratégie, »* et *« par contre c'est pas évident de trouver lequel »* comme gestes d'atmosphère. Ils n'ont pas de liens directs avec l'objet de la tâche (étayage), ou avec l'environnement de l'élève par rapport à la tâche (tissage). Dans la première proposition, l'enseignant renvoie l'élève à son exemple. Pendant ce moment de correction, il a cheminé avec les réponses de l'élève, confirmé à haute voix, et y a ajouté des éléments de son raisonnement. À travers cette proposition, la tâche – ou l'objet de la tâche – n'est pas directement nommée. Par contre, l'enseignant qui s'est directement impliqué prend un rôle de « coéquipier ». Il soutient la progression et confirme l'avancée de l'élève.

Au moment où l'enseignant dit : *« par contre c'est pas évident de trouver lequel »*, il ne renvoie pas l'élève à l'objet de la tâche, mais lui fait part de son propre jugement par rapport à la difficulté de la tâche. En cela, il met son individualité en jeu et entre en relation avec l'élève par un biais personnel. Nous y voyons aussi de l'empathie, puisque pour lui, enseignant de mathématiques, il est au contraire davantage facile de *« trouver lequel »*...

La proposition *« on sait que ça va être quelque chose moins quinze égale l'autre »* renvoie par contre directement à la tâche (étayage). L'équation dont il est ici question *(y – 15 = z)* fait partie du système à poser pour résoudre le problème. En énonçant cette proposition, l'enseignant rappelle à l'élève une des contraintes données par l'exercice en cours et cherche à orienter l'écriture de l'équation attendue. Nous sommes donc au cœur de la résolution de l'exercice. L'enseignant prend ici à sa charge une composante cognitive pour « soulager » l'élève et lui faciliter le cheminement .

La dernière proposition, « *on en met un je vais dire presque au hasard puis après on remplace par des nombres pour voir si c'est plausible ou pas »* nous apparaît comme du tissage. L'enseignant apporte à l'élève un élément d'auto-correction général à ce type de problème. Pour vérifier si la mise en équation est juste, il lui propose de remplacer l'inconnue par différentes valeurs, puis d'exécuter les calculs relatifs à ces nouvelles données, pour pouvoir constater que l'égalité se vérifie. L'enseignant donne à l'élève un outil pour vérifier sa mise en équation qu'il pourra mobiliser dans toutes les situations de même nature. Il fait un lien entre la spécificité de l'exercice en cours et l'ensemble des tâches de même type. Il fait donc appel, de ce fait, à un environnement mathématique élargi – une technique de calcul qui permet de vérifier la justesse des équations posées – mais aussi à l'avenir de l'élève, en postulant une confrontation future à cet objet mathématique.

Après cette première locution, l'élève acquiesce : « *ok* ». L'enseignant le questionne avec des gestes d'étayage : « *Alors vous avez combien d'équations* ? », « *Combien d'inconnues* ? ». L'élève répond « *trois* » à chaque question, ce qui lui permet d'observer le bon déroulement de sa tâche. Pour valider les réponses de l'élève, et très probablement l'encourager, l'enseignant utilise un geste d'atmosphère : « *c'est bon signe* ». Ce geste peut contribuer à entretenir un climat de confiance.

Ensuite, l'enseignant tisse : « *Alors je vous ai dit hier que pour les systèmes de trois équations à*

trois inconnues c'était rarement la substitution qui était la bonne méthode » et étaye : « *Mais là c'est le cas* ». Cet enchaînement fait référence à une méthode de résolution précédemment abordée avec cet élève, mais l'enseignant le dispense cette fois de cette recherche et facilite sa progression en lui donnant un indice pour éviter une perte de temps inutile. L'objectif ici n'est pas la recherche d'une méthode de résolution de calcul, mais bien la mise en équation.

Arrive ensuite la phase de calcul. L'enseignant verbalise ce qu'écrit l'élève pendant qu'il utilise la substitution aux différents « étages » de son système : « *vous avez substitué Y à l'aide de Y = 2 X* », « M*aintenant* », « *Laquelle ?* ». À ce moment-là, il n'oriente plus l'élève. Il se contente de valider « par écho » ce que l'élève produit. Par ses étayages, l'enseignant ne fait que confirmer la bonne progression de l'exercice.

L'élève, probablement confiant à ce moment de la tâche, mobilise aussi d'autres compétences : « *La deuxième je la mets dans la troisième et je pourrai enlever le Z vu qu'il y a deux fois Z* ». Cette organisation en vue d'une simplification est validée par l'enseignant avec un geste de co-construction de l'atmosphère : « *c'est peut-être une bonne idée* ». L'enseignant valide la proposition de l'élève avec une réponse qui n'en est pas vraiment une puisqu'il émet l'idée d'une possibilité. Il utilise l'expression familière *« bonne idée »*. L'élève écrit alors « 2X – 15 = Z ». Directement derrière cette locution, l'enseignant utilise un geste de tissage « *Maintenant est-ce qu'on a l'habitude de les mettre dans cet ordre les équations des systèmes ? Est-ce qu'on met pas plutôt tout ce qui est lettre d'un côté ?* » pour permettre à l'élève d'organiser différemment l'écriture de son système et lui en faciliter la réalisation. L'élève écrit alors : « *3X + Z = 85, 2X – Z = 15 et 5X = 90* ». Ce conseil sera généralisable à d'autres systèmes.

Après cette nouvelle écriture, l'enseignant réutilise à nouveau un geste de co-construction de l'atmosphère : « *Oh alors là vous allez avoir un problème* ». Cette remarque, sur un ton familier, est utile à l'élève pour revenir sur sa réponse et la corriger. Il remplace 90 par 100 dans son système, sans autres remarques. Le ton employé, ainsi que la « familiarité » de l'expression, génère selon nous une ambiance davantage détendue. S'ensuit un ensemble de huit gestes d'étayage ciblés sur la résolution du calcul. Sans donner de réponses à l'élève, l'enseignant lui fournit des rétroactions qui lui permettent de se diriger vers la bonne réponse : « *Si X vaut vingt Y il vaut combien* ? » Un objectif de cette séance est la mise en équation de systèmes et non pas nécessairement son calcul en lui-même. L'élève aboutit au bon résultat.

L'enseignant conclut par un geste de co-construction de l'atmosphère : « *vous voyez que vous y arrivez* ». À ce moment-là, il valide l'exercice de l'élève. Le ton reste cependant familier et nous semble un peu « taquin ».

V. CONCLUSION

En plus d'avoir constaté une adaptation de l'enseignant à son élève, nous ajoutons que nous avons également observé un contexte d'enseignement. Ainsi, lorsqu'il y avait besoin de soigner la relation, l'enseignant a déployé plus de gestes d'atmosphère. Lorsque l'élève avait besoin de combler des lacunes sur un objet particulier, l'enseignant a déployé plus d'étayages ciblés et lorsque l'élève avait besoin de faire des liens, l'enseignant « tissait ».

Nos observations ont porté sur le nombre de gestes, soit la « quantité » d'intentions de l'enseignant. Toutefois, les chiffres ne font pas ressortir la pondération des gestes d'atmosphère. Le nombre de gestes d'étayage reste donc supérieur aux autres. En ayant analysé plus largement les prises de paroles et leur densité, nous avons constaté que l'étayage était plus fréquemment utilisé, mais s'apparentait le plus souvent à des phrases courtes, tandis que les gestes d'atmosphère l'étaient quantitativement moins, mais donnaient lieu à des prises de paroles plus longues et plus denses.

Aussi, si nous avions orienté notre étude différemment, nous estimons que nous aurions très probablement fait le constat d'une tendance à l'équilibre.

Au final, cette recherche s'inscrit dans un dispositif très particulier – une semaine spéciale. Elle tend donc à démontrer le besoin de renforcer le travail de l'élève en difficulté sur une période donnée, ici une semaine, et le besoin de multiplier ce genre de dispositifs dans le parcours de ceux qui pourraient en bénéficier. Cette recherche tente de montrer que l'aide individualisée devrait être étendue à un plus large public que celui de l'enseignement spécialisé, en l'occurrence, ici, au domaine des études supérieures. De plus, le profit d'un tel dispositif, comme le montrent nos résultats, est une réponse personnalisée aux besoins d'un élève en difficulté. Celui-ci reçoit en effet une réplique adaptée à ses propres manques qu'il ne pourrait pas obtenir de façon si optimisée au sein d'un groupe d'élèves.

REFERENCES

Bellanger P., Vulliemin M. (2017), Réflexions autour de gestes professionnels observés en pégagogie de soutien individuelle (mémoire professionnel en enseignement spécialisé, non publié). Haute Ecole Pédagogique, Lausanne, Suisse.

Bruner J. (1983). Le développement de l'enfant : savoir-faire, savoir-dire. Paris : PUF.

Bucheton D. (2014). Refonder l'enseignement de l'écriture. Paris, France : Editions Retz.

Bucheton D., Bronner A., Broussal D., Jorro A., Larguier M. (2005). Les pratiques langagières des enseignants : des savoirs professionnels inédits en formation. Repères : Recherche en didatiques du français langue maternelle, ENS Lyon. Consulté le 27.11.2016 sur : http://hal.ird.fr/halshs-00112373/document

Bucheton D., & Soulé Y. (2009). Les gestes professionnels et le jeu des postures de l'enseignant dans la classe : un multi-agenda de préoccupations enchâssées. Education et didactique, 3(3), 29-48.

Cifali M. (2002). « Bienheureuse indignation » ou les dilemmes d'une enseignante clinicienne. Revue internationale de psychosociologie 8(2), 33-44.

Deruaz M., & Dias T. (2016). Elèves en difficultés ? Dyscalculiques ? Petit X, 101, 7-35.

Doudin P.-A. (2011). Vers une école inclusive : un projet européen d'envergure. *Revue suisse de pédagogie spécialisée, 2/2011*. 14-19.

Freud S. (1905). Le mot d'esprit et ses rapports avec l'inconscient. Edition électronique du 16.03.2007, consulté le 27.05.2017 sur : http://classiques.uqac.ca/classiques/freud_sigmund/le_mot_d_esprit/freud_le_mot_d_esprit.pdf

Houssaye J. (2014). Le triangle pédagogique. Les différentes facettes de la pédagogie. France : ESF éditeur.

Martinet C. (2016). MAES203.1 - L'apprentissage de la lecture : quelles compétences ? Quelles connaissances ? Quelles difficultés ? Quelles pratiques adaptées ? HEP Lausanne.

Raynal F., & Rieunier A. (2014). Pédagogie, dictionnaire des concepts clés : Apprentissage, formation, psychologie cognitive. France : ESF éditeur.

Rogers C. R. (2005). Le développement de la personne, Paris, France : Dunod et Interéditions.

Vygotski L. (1985). Pensée et langage. Paris, France : Editions sociales.

UN OUTIL D'ANALYSE DE LA PRATIQUE AU SERVICE DE L'ÉTAYAGE DANS LA DÉMARCHE *PROBLEM SOLVING* AVEC DES ÉLÈVES EN DIFFICULTÉ

DENERVAUD Stéphanie[1*] – DIAS Thierry [2**]

Résumé - La démarche de résolution de problème dans l'enseignement des mathématiques en enseignement spécialisé s'appuie sur une posture d'aide spécifique des professeurs. Ce processus de soutien didactique peut faire l'objet d'une analyse permettant de catégoriser les fonctions de cet étayage. En créant puis en utilisant un outil d'analyse de la pratique professionnelle dédié, nous souhaitons montrer que l'étude de ces fonctions d'étayage est un levier de formation opérationnel.

Mots-clefs : étayage, mathématiques, résolution de problèmes, difficultés d'apprentissage, analyse de pratique

Abstract - The problem-solving approach in the teaching of mathematics in special needs education is based on a posture of specific help for teachers. This didactic assistance process can be analyzed to categorize the scaffolding functions. By creating and then using a dedicated professional practice analysis tool, we want to show that studying these scaffolding functions is an operational training lever.

Keywords: scaffolding, mathematics, problem solving, special needs, practice analysis

I. INTRODUCTION

La mise en œuvre de la démarche *problem solving*[3] (Schoenfeld, 2014) auprès d'élèves ayant des difficultés d'apprentissages se heurte à de nombreux obstacles, comme nous l'avons recensé dans une revue de littérature récente (Dias, Sermier Dessemontet & Dénervaud, 2016). Ceux-ci peuvent amener les enseignants spécialisés à sous-estimer la résolution de problèmes au profit de démarches visant davantage la maîtrise des faits mathématiques de base comme la mémorisation des répertoires additifs et multiplicatifs (Anderson & Pellicer, 1990). Il faut souligner que l'apprentissage par la résolution de problèmes suscite des habiletés cognitives de haut niveau en mobilisant principalement les processus de raisonnement qui sont souvent défectueux chez les élèves présentant des difficultés d'apprentissage en mathématiques. Pourtant, c'est bien en s'appuyant sur de véritables situations d'apprentissage dont les enjeux de signification sont importants que le raisonnement peut se développer, comme nous avons pu le montrer à plusieurs reprises (Dias, 2008 ; 2011 ; 2015).

Avec ces élèves, les éléments de déstabilisation cognitive propres aux activités de résolution de problèmes mathématiques doivent être compensés par l'apport de ressources nécessaires au processus d'apprentissage. Les échanges langagiers permettant l'accès aux savoirs mathématiques des élèves les plus en difficulté doivent notamment être suffisamment étayés (Wood, Bruner, & Ross, 1976). Or, fournir un étayage pertinent et calibré aux besoins des élèves dans un contexte de groupe, même restreint, se révèle particulièrement complexe pour les enseignants (Stone, 1998 ; Vannier, 2006 ; Bakker, Smit, & Wegerif, 2015).

Les études s'intéressant spécifiquement à l'étayage fourni aux élèves ayant des difficultés d'apprentissage dans ce domaine sont assez rares, mais nous pouvons citer ici Anghileri (2006), Vannier (2006) et Dias et Tièche Christinat (2012). Or, comme le souligne Stone (1998), il est essentiel pour aboutir à une meilleure compréhension de l'étayage dans le contexte de l'enseignement spécialisé de tenir compte de l'impact des caractéristiques

[1*] HEP Vaud – Suisse – stephanie.denervaud@hepl.ch

[2**] HEP Vaud – Suisse – thierry.dias@hepl.ch

[3] Nous utilisons la terminologie *problem solving* en nous démarquant volontairement de celle de résolution de problème qui est plus utilisée dans les travaux francophones. Cette dernière nous paraît en effet trop spécifiquement habilitée à décrire l'activité de l'élève, alors que celle de *problem solving* est plus adaptée à décrire le processus didactique dans son ensemble, en tenant compte des pratiques des enseignants.

cognitives et linguistiques des élèves sur la dynamique d'étayage, notamment sur le plan communicationnel.

Partant de la notion d'étayage[4] développée à l'origine par Wood et al. (1976), élargie par Puntambekar & Hübscher (2005) et Stone (1998), nous avons analysé les interactions langagières entre des enseignants spécialisés et leurs élèves durant la résolution de problèmes mathématiques. Ce travail a permis d'établir un modèle d'analyse (Dias, Sermier Dessemontet & Dénervaud, 2016) favorable à une meilleure compréhension des phénomènes didactiques en jeu au travers des catégories d'étayage. Cet article présente le lancement d'une nouvelle recherche empirique, consacrée à l'analyse et au perfectionnement de la pratique professionnelle d'enseignants spécialisés en formation grâce à l'utilisation de l'outil précédemment construit.

II. ELABORATION D'UN OUTIL D'ANALYSE

Dans le cadre de la méthodologie de traitement des données que nous avons choisi pour cette recherche, nous avons donc élaboré un outil d'analyse des étayages produits par l'enseignant dans les situations de résolution de problèmes mathématiques. La construction de cet outil a duré plusieurs années, elle a nécessité un certain nombre d'étapes chronologiques d'élaboration et de régulation que nous présentons brièvement ici.

1. La notion d'étayage

Lors d'une première phase, nous avons souhaité faire une tentative de codage des interactions langagières avec les six fonctions de tutelle définies par Wood et al. (1976) puis reprises par Bruner (1983) : enrôlement, réduction des degrés de liberté, maintien de l'orientation, signalisation des caractéristiques déterminantes, contrôle de la frustration, démonstration. Il s'agissait dans cette phase de la recherche d'observer la pertinence de l'utilisation de l'outil méthodologique bâti dans un contexte psychologique relatif à la relation mère enfant, dans un environnement plus spécifiquement scolaire. Quelques premiers résultats (Dias & Tièche-Christinat, 2012) ont montré la limite de l'utilisation des six fonctions de tutelle. Nous citerons ici les trois plus significatives :

- Les interactions langagières dans l'environnement scolaire comportent des enjeux sémiotiques et non verbaux très importants qui dépassent la seule communication orale. Ces enjeux n'étaient pas analysés par notre outil méthodologique.
- De nombreux actes de langage (speech acts) échappent à l'analyse conduite avec les fonctions de tutelle : il s'agit des actes illocutoires et perlocutoires (Austin, 1962) qui sont pourtant relativement abondants dans les échanges verbaux. Comme ils participent pleinement aux processus étayants, leur analyse est donc indispensable.
- La résolution de problème dans un contexte scolaire s'appuyant sur un dispositif social de travail en groupe ne suit pas le même temps didactique que celle de la résolution individuelle d'une tâche du type de celle proposée par Bruner dans ses études.

2. Les actes de langage

Lors de cette deuxième phase, nous avons soutenu une nouvelle hypothèse concernant la possibilité de prise en compte des actes de langage (Austin, 1962 ; Searle, 1976). Nous pensons en effet que la richesse des interactions orales entre l'enseignant et ses élèves doit comporter une analyse se basant sur le langage en action tel qu'il est défini en pragmatique

[4] Nous souhaitons signaler ici que le terme utilisé en version originale est celui de scaffolding (échaffaudage) dont la traduction par étayage ne nous semble pas la meilleure.

notamment du fait du nombre assez important de propos non explicites dans la conduite d'une démarche de résolution de problème. Les analyses effectuées ont montré un recours assez important aux actes perlocutoires dans les volontés d'étayage de l'enseignant qui semble vouloir "aider sans trop l'assumer" (Dias & Tièche-Christinat, 2013). Ces résultats ont également attiré notre attention sur une utilisation privilégiée des étayages centrés sur l'investissement des élèves dans la tâche plutôt que sur le processus de résolution du problème (*ibid*).

3. Premier regroupement des fonctions de tutelle

Nous avons alors décidé de faire une première tentative de regroupement des fonctions de tutelle de Wood et al. (1976) en deux groupes : trois fonctions de tutelles à orientation plutôt didactique (*recruitment, direction maintenance, frustration control*) ; et trois fonctions de tutelle à orientation pédagogique (*reduction in degrees of freedom, marking critical features, demonstration*)[5].

À ce stade d'élaboration de notre outil méthodologique d'analyse, nous avons également souhaité conserver l'étude spécifique des actes de langage. L'hypothèse principale de cette phase étant que les enseignants font essentiellement appel à des étayages de type pédagogique pour compenser leurs connaissances didactiques parfois insuffisantes dans l'accompagnement à la résolution de problème.

4. Nouvelle formulation des types d'étayage

Les frontières entre les orientations didactiques et pédagogiques fondant la séparation des étayages dans notre nouveau modèle se sont *in fine* avérées difficiles à objectiver en utilisant les seules entrées des fonctions de tutelle de Wood et al (1976). En effet, dans nos pratiques de codage des interactions, un certain nombre d'interventions de l'enseignant échappaient à une telle typologie, ce qui rend relativement caduque le traitement des données dépendant de ces deux entrées principales. Nous avons donc décidé du remplacement des axes "didactique" et "pédagogique" par de nouvelles formulations plus adaptées au contexte de la recherche. Nous avons choisi de repérer et de distinguer principalement deux types d'étayage :

- les étayages centrés sur l'élève et son investissement dans la tâche,
- et les étayages centrés sur le problème et son processus de résolution.

Afin de compléter l'outil d'analyse et pour prendre en compte toutes les interactions langagières, nous avons dû ajouter une troisième rubrique nous permettant de distinguer les énoncés non étayants. Il est en effet courant que des interventions du professeur ne soient pas porteuses d'un soutien efficace dans l'activité de l'élève concerné par l'interaction.

5. Un outil stabilisé en huit catégories

Cette cinquième et dernière étape d'élaboration de notre outil d'analyse a été consacrée à la construction des catégories d'étayages ainsi qu'aux premiers repérages de leurs indicateurs. Quatre catégories ont été élaborées pour chacun des deux types d'étayage que nous venons de citer plus haut :

- capter, maintenir l'attention, apaiser la relation et relâcher pour les étayages centrés sur l'élève et son investissement dans la tâche ;
- structurer, aider à la représentation, transmettre et activer la métacognition pour les étayages centrés sur le processus de résolution du problème.

[5] Nous laissons volontairement ces termes en langue d'origine, les traductions qui en ont été faite ne nous paraissant pas suffisamment explicites.

Une version complète de notre outil d'analyse est proposée dans une récente publication (Dias, Sermier Dessemontet et Dénervaud, 2016). Il faut cependant noter que la liste des indicateurs pour chaque catégorie n'est pas encore définitive. L'un de nos objectifs de recherche actuelle consiste à améliorer et renforcer ce faisceau d'indicateurs par l'utilisation de l'outil lors de processus d'analyse de la pratique des enseignants spécialisés en formation.

III. OBJECTIFS DE LA RECHERCHE EN COURS

L'articulation étroite entre théorie et pratique est édictée comme un principe de formation dans le plan d'étude au master en enseignement spécialisé de la Haute Ecole Pédagogique du Canton de Vaud (HEP Vaud). L'article 3.1.2 précise qu'il s'agit d'« une démarche intégrative [qui] permet à l'étudiant de structurer progressivement ses compétences en prenant appui sur les apports propres de chacun des pôles de formation : la pratique devient objet d'analyse, les repères théoriques permettent de relire les expériences vécues dans les classes, leur articulation devenant ainsi l'élément moteur d'une réflexion critique. » L'article 3.2. précise que « dans une formation en alternance liant théorie et pratique, il importe de développer des aptitudes réflexives qui intègrent divers outils d'analyse et de compréhension des processus mis en œuvre dans l'activité professionnelle. »

Selon Vinatier (2013), c'est l'analyse de l'activité a posteriori qui permet de conscientiser, puis de comprendre les conceptions qui sous-tendent les gestes professionnels souvent non conscients. Ceci peut conduire au réajustement des actions en fonction des intentions de l'enseignant, ou à la consolidation des gestes situés porteurs d'une efficacité reconnue.

> « Or, cette analyse, si elle ne s'inscrit pas dans un dispositif de formation et si elle ne dispose pas, pour s'effectuer, de catégories que seule la recherche peut élaborer, se condamne à demeurer hors de portée de professionnels qui peineraient à l'entreprendre » (Vinatier, 2013, p.8).

C'est dans ce contexte de formation que nous avons pensé à utiliser notre grille d'analyse présentée plus haut, afin de proposer aux étudiants un cadre fondé sur des apports théoriques qui soit suffisamment opérationnel pour permettre d'appréhender une pratique qui échappe souvent à l'étudiant ou à l'enseignant lorsqu'il se trouve en situation. A travers ce prisme, nous souhaitons circonscrire l'activité de l'enseignant en situation de résolution de problème mathématique avec ses élèves en tant que « classes de situations à analyser » (Vergnaud, 2000). « C'est l'analyse de l'activité en termes de formes d'organisation associées à des classes de situations, c'est-à-dire en termes de schèmes » (*ibid.*) qui permet « d'identifier les concepts qui orientent l'action des professionnels en situation, avec l'hypothèse que le guidage (schème) de cette action est justement de nature conceptuelle » (Vinatier, 2013, p. 9).

Dans cette nouvelle recherche, nous envisageons de poursuivre les trois objectifs suivants : objectiver, évaluer, diversifier.

1. Objectiver

Si, comme le suggère Vinatier (2013), l'analyse de l'activité professionnelle implique une analyse préalable des tâches, elle ne peut s'y résumer tant les contingences interactionnelles, par nature imprévisibles, conditionnent l'agir enseignant. L'activité située étant contrainte par une pluralité de circonstances et de représentations difficilement appréhendables de manière immédiate, l'analyse critériée d'une séance retranscrite permet non seulement une prise de distance critique, mais également une plus grande précision dans les observations. Selon Bucheton & Soulé (2009), « Les gestes d'étayage offrent une grande diversité de réalisation selon les disciplines, l'avancée de la leçon, l'hétérogénéité plus ou moins grande du public, la nature de la tâche ou des savoirs que celle-ci cherche à mettre en évidence » (p.36). Plus particulièrement ici, nous envisageons qu'une lecture ciblée sur les catégories que nous

proposons permette de décrire des gestes d'étayage spécifiques au *problem solving.* Leur fonction ne peut être déterminée sans passer par une compréhension des intentions de l'enseignant au moment où il agit. Il s'agit donc premièrement de repérer les actions qui relèvent d'un étayage centré soit sur l'investissement de l'élève dans la tâche, soit sur la résolution du problème, puis de les comprendre afin de les relier à une fonction, autrement dit afin de les opérationnaliser.

2. Evaluer

Cette conscientisation va de pair avec une évaluation de l'efficience des étayages proposés : Y a-t-il cohérence entre la compréhension de la situation « in vivo » et la situation appréhendée de manière différée ? Y a-t-il congruence entre les intentions de l'enseignant et les résultats obtenus ? L'enseignant a-t-il fait tout ce qu'il voulait en choisissant telle action étayante ? L'action d'ailleurs était-elle réellement étayante ? La dialectique compréhensive entre l'activité observable de l'enseignant, ses intentions et les déterminants qui conditionnent ses choix devrait permettre aux étudiants de situer leur propre pratique en regard de celle qui est analysée. Il s'agit pour l'étudiant de prendre conscience de ses forces et des aspects encore à développer. Cette recherche pourrait mettre en lumière des « styles » d'enseignement diversifiés dans le cadre de la résolution de problèmes mathématiques.

3. Diversifier

Au-delà de ces aspects, nous souhaitons instrumenter les étudiants avec un outil qui leur permette de diversifier leurs actions en vue d'une amélioration de leur rôle de médiateur entre élève et savoir. Nous espérons également enrichir qualitativement et quantitativement notre compréhension des gestes d'étayage par la découverte de nouveaux indicateurs.

IV. EXPERIMENTATIONS : DONNEES ET HYPOTHESES

Dans le cadre de la recherche action menée ces dernières années (2015-2017), plusieurs enseignantes spécialisées en formation ont constitué des corpus dans le cadre de leurs travaux de mémoire de Master. Ces corpus sont des transcriptions[6] de séance de résolution de problèmes conduites dans des classes de l'enseignement spécialisé. Dans la recherche actuelle, nous en avons choisis quelques-uns pour les mettre à l'étude dans un nouveau module de formation de master : le séminaire d'intégration (que nous présentons plus loin).

1. Recueil et méthode d'analyse des données

Pour cet article, nous avons choisi de nous appuyer sur les données récoltées par une enseignante exerçant dans une classe comportant des élèves en difficulté mais sans trouble spécifique avéré. Le corpus[7] que nous avons choisi d'utiliser pour cette présentation a été obtenu à partir de la résolution d'un problème arithmétique : le cerisier (annexe 1).

Après avoir filmé la séance de résolution de problème, l'enseignante en a réalisé une transcription écrite complète dans le cadre de son travail de mémoire professionnel de master. Elle a ensuite utilisé l'outil d'analyse (en huit catégories) pour coder toutes les interactions langagières en fonction des étayages correspondants. C'est donc ce document qui nous sert de corpus d'étude pour la recherche présentée ici. La séance de résolution conduite donne donc

[6] Dans ce texte, nous distinguons les termes corpus et verbatim. Nous nommons corpus les données issues de la transcription de la titulaire de la classe ; et nous désignons la transcription des échanges lors des séminaires d'intégration par le mot verbatim.

lieu à la constitution d'un tableau dans lequel sont répertoriés toutes les interactions orales ainsi que leur codage. C'est à partir de ce recueil de données (dont nous avons retiré le codage de la titulaire) que nous souhaitons vérifier progressivement nos hypothèses.

2. Hypothèses

Pour l'objectif de recherche annoncé, nous formulons trois hypothèses :

a) Nous postulons une certaine hétérogénéité dans l'utilisation des types d'étayage, soit un sous-investissement de certaines d'entre elles, soit une centration privilégiée sur certaines.
b) L'utilisation de la grille avec un objectif de formation par l'analyse de la pratique permet aux étudiants de catégoriser les étayages selon une classification définie.
c) L'outil d'analyse permet un accord inter-juges révélant son efficacité pour des utilisateurs novices.

3. Dispositif du séminaire d'intégration

Le « Séminaire d'intégration » est un dispositif de formation qui permet aux étudiants en formation au Master en enseignement spécialisé d'analyser en groupe des situations professionnelles à partir de différents supports. Les expériences professionnelles antérieures des étudiants sont variées et principalement issues de domaines voisins de l'enseignement. Leurs conditions de stage diffèrent également : certains bénéficient d'une pratique accompagnée systématique, d'autres se forment en emploi avec la supervision d'un praticien formateur de manière plus ponctuelle. Il s'agit pour les étudiants de construire progressivement une posture réflexive qui permette d'intégrer les savoirs d'expérience et les savoirs théoriques en portant des regards multiples sur les situations.

Notre échantillon est constitué de deux groupes se réunissant tous les quinze jours. Celui de fin de première année se compose de 10 étudiants, celui de fin de deuxième année en comporte onze. Les séances se sont déroulées en quatre étapes.

1. Présentation rapide de la grille de codage et des objectifs du séminaire : repérage des catégories d'étayage puis analyse de la pratique décrite dans le corpus en faisant des liens avec sa propre pratique.
2. Première lecture individuelle du problème et d'une portion du corpus (les lignes 1 à 158).
3. Codage et recherche d'un étayage emblématique pour chaque catégorie durant 20 à 25 minutes (annexe 2).
4. Mise en commun : débat et argumentation sur le choix des étayages emblématiques, puis discussion sur le potentiel de cette recherche pour analyser la pratique professionnelle.

Ces séances de séminaires ont été enregistrées (audio) puis transcrites sous forme de verbatim. Les codages écrits des étudiants ont également donné lieu à une analyse statistique descriptive en vue de tester nos hypothèses de recherche.

V - PREMIERS RESULTATS

1. Hypothèse a)

Concernant notre première hypothèse (hétérogénéité dans l'utilisation des types d'étayage), nous avons comparé les codages moyens par type d'étayage (E: centrés sur l'élève et son investissement dans la tâche, T: centrés sur le problème et son processus de résolution). Nous avons comparé le codage moyen des étudiants avec celui des experts, auteurs de cet article (voir annexe 3). Précisons aussi que le codage des experts a eu lieu en aveugle et avant celui des étudiants.

Pour les étudiants, nous observons une répartition équitable entre les types d'étayages centrés respectivement sur l'investissement de l'élève et sur la tâche. Si l'on fait référence aux catégories (figure 3), le maintien de l'attention (EM) semble par exemple souvent évoqué au détriment de l'aide à la représentation (TR). Le codage des experts montre, quant à lui, moins d'homogénéité entre les types d'étayage qui sont plus interprétés comme centrés sur la tâche notamment par l'aide à la représentation (TR) et la transmission (TT) comme nous le verrons plus loin.

2. Hypothèse b)

Pour vérifier la deuxième hypothèse (l'utilisation de la grille permet aux étudiants de catégoriser les étayages selon une classification définie), nous avons également comparé le codage moyen des étudiants avec celui des experts.

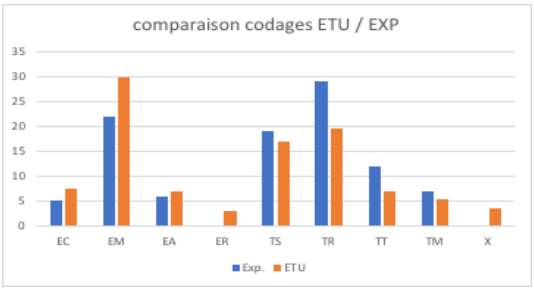


Figure 3– *Comparaison des catégories d'étayage entre étudiants et experts*

Nous observons que la proportion des catégories d'étayage est similaire entre experts et novices: EM, TS et TR sont par exemples les plus récurrents ; alors que EC, EA, TT et TM sont les moins utilisés. Quelques différences quantitatives restent cependant notables à l'intérieur de chaque catégorie. Nous voulons souligner ici les différences significatives observables entre les catégories EM et TR qui nous conduisent à l'interprétation suivante. La catégorie EM quantitativement plus importante chez les étudiants semble se faire au détriment de la catégorie TR proportionnellement moins importante par rapport aux experts. Tout se passe comme si les codages EM et TR faisaient l'objet d'une interprétation différente : plus centrés sur le type E chez les étudiants et sur le type T chez les experts. Nous faisons l'hypothèse que cette différence provient de l'analyse a priori du problème effectuée chez les experts et non chez les étudiants.

3. Hypothèse c)

Pour vérifier notre troisième hypothèse (l'outil d'analyse permet un accord inter-juges révélant son efficacité pour des utilisateurs novices), nous avons cherché les accords inter-juges supérieurs à 70% dans toutes les catégories d'étayage dans les deux groupes d'étudiants.

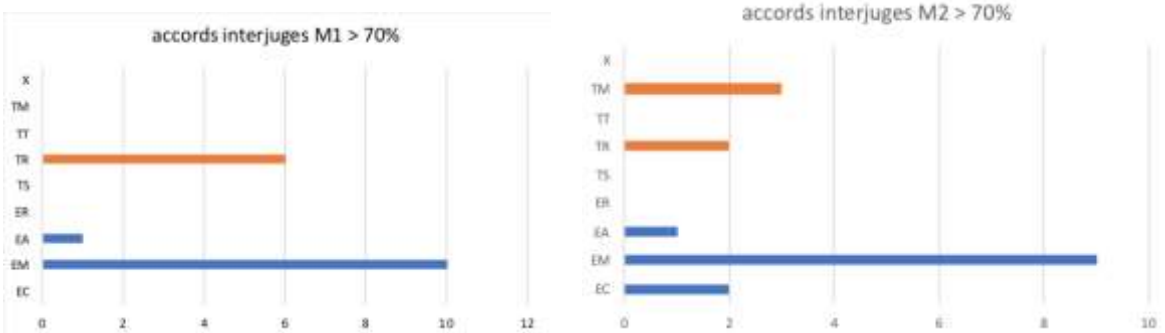


Figure 5– *Accords inter-juges par catégorie d'étayage*

Nous constatons que lors d'une première utilisation novice de la grille de codage, l'accord inter-juges n'est pas totalement assuré. Seul 21% des codages permettent en effet un accord inter-juges supérieur à 70%. Cependant, nous observons que la qualité de cet accord est bien meilleure avec les étudiants en deuxième année de master puisque ce sont 5 catégories d'étayage qui dépassent ce niveau de 70%. Nous pensons que la posture et la construction de l'identité professionnelle des étudiants de master 2 est susceptible de modifier leur capacité à analyser une pratique enseignante de manière plus cohérente avec l'utilisation de notre outil.

4. Analyse des interactions étudiants

Les échanges qui suivent le codage individuel semblent déterminants pour objectiver[8] la pratique ici analysée. La recherche d'exemples emblématiques vise plus à susciter une argumentation chez les étudiants qu'un accord en soi. Une dialectique « identifier – comprendre » se met en place au moyen d'hypothèses développées par les étudiants. Celles-ci se fondent sur quatre arguments :

1) Les fonctions de l'étayage
2) Les actes de langage (sémantique, syntaxe, implicite/explicite)
3) Les indications écrites en marge par l'enseignante
4) Les concepts qui servent d'indicateurs dans la grille (capter, reformuler, représenter, répéter valider)

Si la pertinence des étayages analysés est peu questionnée, l'évaluation consiste plutôt ici à situer sa propre pratique en regard de celle présentée dans l'extrait, notamment par la prise de conscience des éléments implicites d'un message verbal. L'objectivation et l'évaluation conduisent à une prise de conscience de la diversité des étayages possibles et à l'utilité de leur diversification dans l'accompagnement à la résolution de problème.

En définitive, nous concluons à la pertinence du dispositif en formation professionnelle. Ce qui importe au-delà de l'accord inter-juge, c'est la mise à distance, la prise de recul par rapport à une pratique enseignante. Nous comprenons ce travail de mise en perspective tout d'abord comme une dialectique d'actions : repérer et catégoriser permettent de comprendre les intentions de l'enseignant et leurs effets, émettre des hypothèses de compréhension sur ce que vise l'enseignant permet de catégoriser ses étayages. Cette phase d'objectivation permet de situer sa propre pratique en regard de celle de quelqu'un d'autre. La pratique des étudiants est d'ailleurs plus questionnée que celle du corpus. Cette évaluation de sa propre pratique permet de conscientiser ses propres besoins en termes de diversification et potentiellement d'ajuster ses gestes d'étayage.

Ce processus d'objectivation, d'évaluation et de diversification des étayages pourrait bénéficier d'une analyse préalable du problème, y compris en ce qui concerne les étayages interactionnels et contingents. C'est une hypothèse que nous envisageons d'investiguer.

[8] Objectiver : conscientiser, repérer et comprendre

RÉFÉRENCES

Anderson, L. W. & Pellicer, L. O. (1990). Synthesis of research on compensatory and remedial education. *Educational Leadership, 48*(1), 10-16.

Anghileri, J. (2006). Scaffolding practices that enhance mathematics learning. *Journal of Mathematics Teacher Education, 9*(1), 33-52.

Austin, J. L. (1990). *Quand dire, c'est faire: how to do things with words*. Paris : Seuil.

Bakker, A., Smit, J., & Wegerif, R. (2015). Scaffolding and dialogic teaching in mathematics education: Introduction and review. *ZDM, 47*(7), 1047–1065.

Bruner, J. S. (1983). *Le Développement de l'enfant: savoir faire, savoir dire*. Paris: Presses universitaires de France.

Bucheton, D., & Soulé, Y. (2009). Les gestes professionnels et le jeu des postures de l'enseignant dans la classe : un multi-agenda de préoccupations enchâssées. *Education & didactique*, *3*(3), 29-48.

Dias, T., Sermier Dessemontet, R., & Dénervaud, S. (2016). Etayer les élèves à besoins particuliers dans la résolution de problèmes : un modèle d'analyse. *Math-Ecole, 225*, 4-9.

Dias, T. (2015). Des mathématiques expérimentales pour révéler le potentiel de tous les élèves. *La nouvelle revue de l'adaptation et de la scolarisation*, (65), 151-161.

Dias, T. (2008). *L'apprentissage de la géométrie dans la scolarité obligatoire: une dialectique entre objets sensibles et objets théoriques* (thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon, Lyon, France).

Dias, T. (2011). À la recherche des polyèdres réguliers. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, *14*(1), 29‑48.

Dias, T., & Tièche Christinat, C. (2012). Spécificités des situations didactiques dans l'enseignement spécialisé. *Espace Mathématique Francophone, Enseignement des mathématiques et contrat social, Genève*.

Dias, T., & Tièche-Christinat, C. (2013). *A linguistic analysis of the didactical environment in support of the scaffolding concept.* Communication présentée à Eighth Congress of European Research in Mathematics Education (CERME 8), Manavgat.

Puntambekar, S., & Hubscher, R. (2005). Tools for Scaffolding Students in a Complex Learning Environment: What Have We Gained and What Have We Missed? *Educational Psychologist, 40*(1), 1-12.

Searle, J. R. (1976). A classification of illocutionary acts. *Language in society*, *5*(01), 1-23.

Schoenfeld, A. H. (2014). *Mathematical problem solving*. New York: Elsevier.

Stone, C. A. (1998). The Metaphor of Scaffolding: Its Utility for the Field of Learning Disabilities. *Journal of Learning Disabilities, 31*(4), 344-364.

Vannier, M-P. (2006). Fonctions critiques de la tutelle auprès d'élèves en échec scolaire. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation, 9*(2), 169-186.

Vergnaud, G. (2000). *Lev Vygotski: pédagogue et penseur de notre temps*. Hachette éducation.

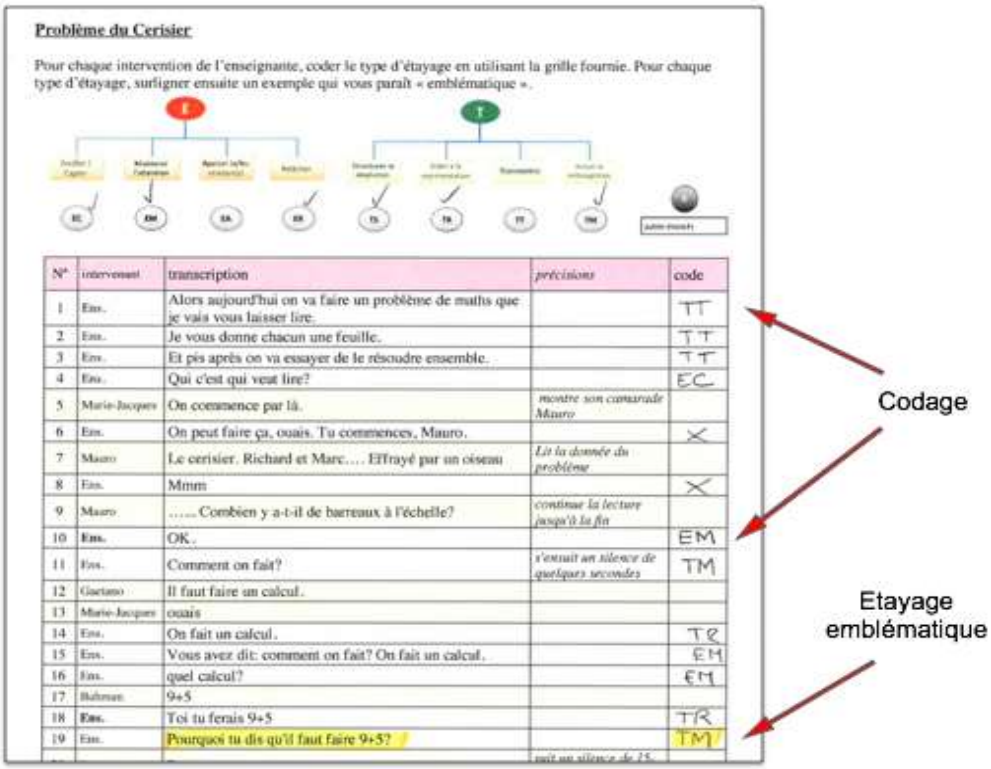
Vinatier, I. (2017). *Le travail de l'enseignant: une approche par la didactique professionnelle*. De Boeck (Pédagogie et Formation).

Wood, D., Bruner, J. S. and Ross, G. (1976), The role of tutoring in problem solving. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, *17*, 89-100.

ANNEXE 1 : Consigne du problème du cerisier

Consigne : Richard et Marc décident de cueillir les cerises du cerisier de leur jardin. Pour y parvenir, ils placent une échelle contre le tronc de l'arbre. Richard monte à l'échelle. Quand il arrive au troisième barreau au-dessus de celui qui marque le milieu de l'échelle, il est effrayé par un oiseau qui s'envole ! Alors, il redescend rapidement de 5 barreaux ! Marc, qui est resté au pied de l'échelle, lui dit alors de remonter de 9 barreaux pour être au sommet de l'échelle ... et pour pouvoir attraper toutes les cerises. Combien y a-t-il de barreaux à l'échelle ?

ANNEXE 2 : Exemple de travail d'étudiant



Problème du Cerisier

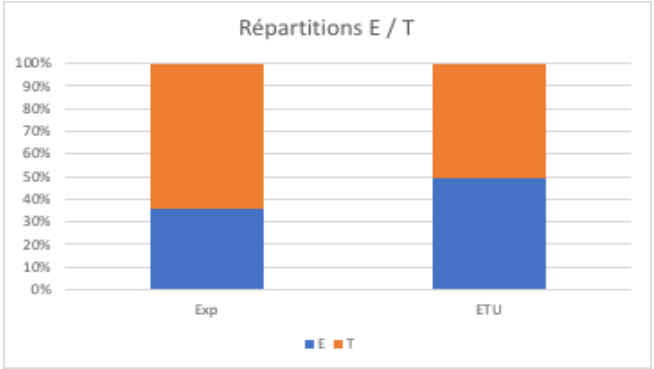
Pour chaque intervention de l'enseignante, coder le type d'étayage en utilisant la grille fournie. Pour chaque type d'étayage, surligner ensuite un exemple qui vous paraît « emblématique ».

N°	intervenant	transcription	*précisions*	code
1	Ens.	Alors aujourd'hui on va faire un problème de maths que je vais vous laisser lire.		TT
2	Ens.	Je vous donne chacun une feuille.		TT
3	Ens.	Et pis après on va essayer de le résoudre ensemble.		TT
4	Ens.	Qui c'est qui veut lire?		EC
5	Marie-Jacques	On commence par là.	*montre son camarade Mauro*	
6	Ens.	On peut faire ça, ouais. Tu commences, Mauro.		X
7	Mauro	Le cerisier. Richard et Marc.... Effrayé par un oiseau	*Lit la donnée du problème*	
8	Ens.	Mmm		X
9	Mauro	..... Combien y a-t-il de barreaux à l'échelle?	*continue la lecture jusqu'à la fin*	
10	Ens.	OK.		EM
11	Ens.	Comment on fait?	*s'ensuit un silence de quelques secondes*	TM
12	Gaetano	Il faut faire un calcul.		
13	Marie-Jacques	ouais		
14	Ens.	On fait un calcul.		TR
15	Ens.	Vous avez dit: comment on fait? On fait un calcul.		EM
16	Ens.	quel calcul?		EM
17	Baltasar	9+5		
18	Ens.	Toi tu ferais 9+5		TR
19	Ens.	Pourquoi tu dis qu'il faut faire 9+5?		TM
			suit un silence de 15	

Codage

Etayage emblématique

ANNEXE 3 : Comparaison des types d'étayage entre étudiants et experts



JEU DE POUVOIR DANS L'ENSEIGNEMENT SPECIALISE

HOUDEMENT* Catherine –PETITFOUR* Edith

Résumé – L'analyse des interactions dans une situation d'aide à un élève dans l'adaptation scolaire, grâce à des outils didactiques (TAD et TACD enrichie), permet de révéler que l'enseignant, à son insu, installe chez l'élève un empêchement à penser. Rendre visible ce type de phénomène aux enseignants est un des enjeux forts de la formation.

Mots-clefs : adaptation scolaire, différenciation, interaction duelle, topogénèse

Abstract – The article involves the analysis of interactions in a mathematical teaching situation, in which the teacher seeks to help a student with learning disabilities. Didactical tools used (TAD and enriched TDAC) allow us to identify that the teacher unwittingly prevents the student from thinking, from finding the answer. Making this phenomenon visible to teachers is one of the major challenges of teacher training.

Keywords: special needs education, differentiated pedagogy, school interactions, didactical topogenesis

Les phénomènes d'enseignement dans le contexte de l'adaptation scolaire présentent certaines spécificités que des auteurs ont développées (Roiné 2009, Dias & al. 2012, Giroux 2015) : l'attente de procédures de la part de l'élève qui, en fait, ne peuvent pas être obtenues compte tenu du problème posé ; l'adaptation de l'enseignement aux caractéristiques personnelles de l'élève, notamment aux dysfonctionnements *a priori* qu'engendrerait le handicap ; une certaine cécité didactique de la part des enseignants vue « une impossibilité de reconnaitre en quoi la situation didactique possède ou ne possède pas de propriétés spécifiques nécessaires et suffisantes à la construction de tel ou tel savoir déterminé » (Roiné 2009, p.239). Tout cela participerait d'un certain empêchement de l'élève à penser, souvent à l'insu de l'enseignant.

Notre étude se situe dans ce cadre. Elle cherche à mettre à jour, dans une perspective de formation d'enseignants à l'adaptation, de tels phénomènes pour les rendre visibles aux enseignants. Comment rendre compte de tels phénomènes ? Quels outils théoriques utiliser ?

I. LE CONTEXTE DE L'OBSERVATION

L'École Supérieure du Professorat et de l'Éducation (ESPE) est chargée de la formation des professeurs des écoles titulaires qui se préparent à passer une certification complémentaire pour exercer dans des établissements accueillant des élèves présentant des besoins éducatifs particuliers liés à une situation de handicap, une maladie ou de grandes difficultés scolaires, pour contribuer aux missions de prévention des difficultés d'apprentissage, et pour accompagner des enseignants « classiques » avec quelques élèves ayant des besoins éducatifs particuliers.

La formation au CAPA-SH[1] (Certificat d'aptitude professionnelle pour les aides spécialisées, les enseignements adaptés et la scolarisation des élèves en situation de handicap, visant un public de professeurs du premier degré), en vigueur jusqu'en février 2017, était menée en alternance à l'ESPE et sur le terrain. Cette formation permet notamment, dans notre ESPE, au « formateur de CAPA-SH » de venir observer l'enseignant en situation, pour lui permettre d'avoir un recul sur sa pratique des mathématiques, et ce afin de se préparer à l'examen : en effet l'examen comporte l'observation par le jury (quatre personnes) de deux séances de 45 min, suivies d'un entretien avec l'enseignant sur sa pratique.

* ESPE, Université Rouen-Normandie, LDAR (EA 4434), UA-UCP-UPD-UPC-URN – France – catherine.houdement@univ-rouen.fr & edith.petifour@univ-rouen.fr

[1] Le CAPA-SH est remplacé depuis février 2017 par le CAPPEI (Certification d'Aptitude Professionnelle aux Pratiques de l'Education Inclusive) qui s'adresse aux enseignants du premier et du second degré.

Dans ce cadre, nous avons proposé à une enseignante, Léna, de filmer sa séance, avec une double finalité : d'une part lui permettre de disposer d'informations objectives sur sa pratique, d'autre part recueillir des données dans le cadre d'une recherche plus large à finalité sémiotique, dont nous ne parlerons pas ici (Houdement & Petitfour, 2018).

Léna est enseignante dans la classe d'un Institut Médico-Éducatif (IME) avec sept élèves de 12-13 ans, déficients intellectuels. Léna, l'enseignante, a élaboré et mis en œuvre une situation visant la compréhension de la numération décimale de position, contextualisée par une commande fictive de craies, pour travailler la décomposition des nombres avec trois élèves. Nous avons filmé la troisième séance de la séquence, la deuxième fois que les élèves travaillent avec une fiche support sur laquelle un tableau est à remplir (figure 1). Nous avons enregistré différents échanges à propos de cette séance. L'étude concerne le moment où Léna est appelée par une élève, Angèle, qui est bloquée. Il s'agit donc d'interactions élève-professeur.

Classes	Nombre de craies commandées	Boîtes de craies livrées
Classe de 6e	101	..... boîtes de 10 et ..... craies à l'unité
Classe de 5e	146	..... boîtes de 10 et ..... craies à l'unité
Classe de 4e	246	..... boîtes de 10 et ..... craies à l'unité



Figure 1 *– Extrait de la fiche élève et matériel disponible*

Angèle travaille dans le « coin mathématique » de la classe où est disponible un bac avec plusieurs organisations de bâtons : des bâtons en vrac, des bâtons regroupés par dix par un élastique, des bâtons regroupés par cent sous forme de dix paquets de dix agrégés par un élastique. Angèle a correctement rempli les deux premières lignes du tableau (figure 1). Quand Léna la rejoint, Angèle a sorti deux paquets de cent du bac et commence à prendre des bâtons isolés. L'épisode étudié dans ce texte dure moins de trois minutes.

II. LES OUTILS THEORIQUES UTILISES POUR L'ANALYSE

De la théorie anthropologique du didactique (Chevallard 1999), nous utilisons les notions de type de tâches et de technique. Un *type de tâches* est défini comme tout type d'activité pensé comme élémentaire en ce sens que l'on pourrait l'énoncer à l'aide d'un verbe d'action et d'un complément d'objet. Une *technique* est une manière de faire déterminée permettant d'effectuer des tâches d'un certain type. Dit autrement et contextualisé par les mathématiques, *type de tâche* et *technique* sont les deux composantes du *savoir-faire* d'une *organisation mathématique ponctuelle*. L'autre composante de cette organisation est le *savoir.*

Par ailleurs, nous utilisons des outils de la théorie de l'action conjointe professeur-élèves (Sensevy 2001, Suau et Assude 2016) pour décrire les interactions entre élèves et professeur du point de vue des trois genèses, initialisées par Chevallard (1999).

La *mésogénèse* correspond à l'évolution des systèmes d'objets (matériels, symboliques, langagiers) co-construits par l'enseignant et les élèves au cours de leurs interactions, qui influencent les actions et réactions des élèves. La *chronogénèse* (ou temps didactique) correspond à l'avancée du savoir sur l'axe du temps. La *topogénèse* se centre sur les différentes places, relativement au savoir étudié, qu'occupent les acteurs de la relation enseignement-apprentissage dans une institution donnée (au sens de Chevallard 1999). Elle étudie le partage des responsabilités entre élève et enseignant dans l'avancée du savoir.

Suau & Assude (2016) ont enrichi le modèle en distinguant trois notions : topos, position et rôle. Le *topos* correspond aux places prévues institutionnellement pour les acteurs : par exemple l'enseignant est à l'école pour enseigner des disciplines à l'élève, l'élève y vient apprendre[2] ; *a priori* l'enseignant sait plus de choses que l'élève ; l'Accompagnant des Élèves en Situation de Handicap (AESH) est présent pour accompagner l'élève handicapé et faciliter son inclusion dans la classe[3].

La *position* est la façon dont l'acteur, à tout moment, investit son *topos.* Mais nous conservons ce terme pour décrire la position que l'enseignant donne à l'élève à un moment donné. Autrement dit dans ce texte, à l'instar des distinctions liées à la tâche en théorie de l'activité (Leplat & Hoc 1983), nous distinguons la *position effective,* celle qu'adopte l'élève, de la *position prescrite,* celle que lui assigne implicitement l'enseignant, par une phrase, un geste, un regard. Cela sera illustré dans la partie IV. Finalement l'étude des positions est pour nous un arrêt sur image du *topos* à un moment donné, dans le fil des interactions. Les positions relatives à l'avancée du savoir pourront être *haute, médiane* ou *basse*.

Le *rôle* (Suau & Assude 2016) rend compte des façons d'investir une position ou un positionnement. Un enseignant adopte une position basse en se plaçant dans un rôle d'observateur ; il est en position haute s'il apporte des informations (autres qu'encouragement, maintien de la motivation...) qui permettent l'avancée dans le savoir. Un élève qui prend des initiatives, assume de se lancer dans une recherche est en position haute. S'il avance en cherchant en permanence la rétroaction d'un autre (enseignant ou camarade), il est en position basse. Les positions médianes sont des positions intermédiaires notamment pour rendre compte de la variation des positions (haute vers basse et vice-versa).

Il ne s'agit pas, dans l'analyse, de repérer dans chaque interaction ce jeu de positions, mais plutôt d'éclairer l'avancée dans le savoir, la chronogénèse, par des éléments de type topogénétique. Et l'avancée dans le savoir nécessite de repérer quelles tâches et techniques sont en jeu dans l'épisode.

III. TYPE DE TACHES ET TECHNIQUES EN JEU DANS L'EPISODE

Dans l'épisode observé, le type de tâche mathématique des élèves est de décomposer un nombre en dizaines et unités. La tâche est contextualisée dans un contexte de commande de craies. Les craies sont modélisées par des bâtons, les boites de dix craies par des paquets de dix bâtons groupés avec un élastique. Cette modélisation ne semble pas poser problème aux élèves, qui n'utilisent souvent, dans leurs échanges verbaux, que des nombres (sans ajouter de nom de matériel).

Compte tenu des observations faites, nous avons repéré, en analysant les procédures de d'Angèle et Léna pour résoudre la tâche, deux techniques T1 et T2 (techniques composées) qui circulent dans l'épisode :

- T1 se décompose en : constituer d'abord une collection organisée de bâtons (deux cents, puis quarante, puis six) en appui sur l'oral ou sur l'écriture en chiffres ; ensuite dénombrer les paquets de dix de cette collection et les unités restantes ;
- T2 consiste à accumuler des paquets de dix jusqu'à atteindre 240, en appui sur un dénombrement dix par dix (grâce à la comptine orale de dix en dix) ; puis à compléter

[2] Dans le milieu spécialisé il n'est pas sûr que ces topos élève et enseignant soient si bien définis…
[3] Comprendre le topos de l'AESH n'est pas simple, ni pour l'élève, ni parfois pour l'AESH lui-même.

jusque 246 par des craies à l'unité ; enfin à dénombrer les paquets de dix et les unités restantes

La technique visée qui consiste à se libérer du contexte, repérer le nombre de dizaines dans l'écriture chiffrée et traduire en paquets de dix, n'est pas apparue dans cet épisode.

Le savoir en jeu relève de la compréhension de l'écriture usuelle en chiffres des nombres entiers, notamment des principes positionnel et décimal : *246 est 24 dizaines et 6 unités.* L'utilisation des *unités de numération* permet de mettre en mots ces aspects (Tempier 2016).

IV. L'ANALYSE DES INTERACTIONS DANS LES DEUX DIMENSIONS ANNONCEES

Au début de l'épisode, Angèle a démarré la technique T1, de façon autonome, en sortant du bac deux paquets de cent bâtons. Puis elle s'arrête, perplexe et appelle l'enseignante.

Le temps didactique est arrêté pour Angèle (*je suis bloquée*, ligne 102). Elle se place dans une position basse par rapport au savoir, elle est en attente d'une aide de la part de l'enseignante, détentrice de ce savoir.

L'enseignante Léna valorise le travail d'Angèle, elle place Angèle dans une position haute en l'engageant à poursuivre la procédure commencée (*position haute prescrite*). D'une part elle relance le temps didactique (*fais-le, vas-y,* ligne 103) et d'autre part elle met en mots ce qu'Angèle a déjà réalisé avec le matériel (*je vois qu't'as déjà pris des paquets devant toi*). Ainsi encouragée, Angèle poursuit, elle prend cette position haute en initiant l'action (*position haute effective*) : elle prend un à un quatre bâtons et déclare, avec hésitation, que cela fait quatre dizaines (ligne 105). Elle attend alors une confirmation de la part de l'enseignante, exprimée par le regard et un ton interrogatif : elle n'est pas sure d'elle (*position médiane*[4] *effective*). En effet considérer qu'un bâton représente une dizaine ne permet plus de compléter la collection avec six unités pour atteindre 246, ce qui peut expliquer le « blocage » d'Angèle. Léna ne perçoit pas immédiatement la possibilité d'une erreur de représentation commise par Angèle : un bâton pour une dizaine. Elle ramène l'attention d'Angèle sur les deux paquets de cent sortis du bac (*Enseignante position haute*). Angèle repose les quatre bâtons dans le bac. Trente-trois secondes se sont écoulées, le temps didactique n'a pas avancé. Angèle est ramenée par l'enseignante à son point de départ : deux paquets de cent sortis du bac.

Angèle reprend alors quatre bâtons isolés, prenant ainsi l'initiative de poursuivre sa technique (*position haute effective*). Elle est alors interrompue par l'enseignante qui lui montre trois paquets de dix qu'elle a pris dans le bac. Léna sollicite la mémoire de la séance précédente (*T'as des petits paquets là hein, que vous avez faits la dernière fois. C'est combien là, dans chaque paquet ?* ligne 110). Léna cherche peut-être à éviter l'erreur – ne pas prendre des bâtons isolés mais des paquets de dix – ou alors à la traiter (*position haute).* Faute d'explication, Angèle ne relève pas son erreur locale (prendre quatre bâtons isolés pour quatre dizaines), mais elle comprend que ce qu'elle a fait ne convient pas du tout : elle remet dans le bac les deux paquets de cent et les quatre bâtons (*position médiane effective*). Léna laisse Angèle renoncer à une stratégie potentiellement efficace (*Enseignante position basse*) : prendre deux paquets de cent est en effet une étape possible de la technique T1. Cela laisse supposer que Léna n'a pas vu la potentialité de la procédure d'Angèle qui démarre la technique T1. Tout en répondant à la question de l'enseignante (*c'est dix,* ligne 111), Angèle

[4] Elle a pris l'initiative d'une façon de poursuivre sa technique, mais elle attend une validation de la part de l'enseignante.

sort un paquet de dix du bac qu'elle pose à côté des trois paquets déjà posés par l'enseignante. A ce moment Angèle a donc réalisé, en décalé, deux étapes de la technique T1 : poser deux paquets de cents, poser quatre paquets de dix. Cependant devant elle il n'y a plus que quatre paquets de dix.

Angèle communique alors son désarroi à l'enseignante (*Non j'y arrive pas*, fin ligne 111) ; ce qui correspond à un *affaissement de sa position* (*position basse effective*); elle reprend alors deux paquets de dix qu'elle garde en main. Cinquante-quatre secondes se sont écoulées.

Léna répond à l'appel à l'aide d'Angèle (*Eh bien on va compter*), organise un espace libre devant Angèle, y pose deux paquets de dix (*Enseignante en position haute*) et lui demande : *Avec des paquets de dix, il faut qu'on arrive à combien ? il faut qu'on arrive à ?* en pointant le 246 de la fiche. Angèle lui répond correctement. Léna approuve et conseille à Angèle de « *reprendre comme la dernière fois* ».

Angèle, s'emparant de cet encouragement[5] (*position haute prescrite… et assumée*) déclare, au sujet de ces paquets, alors *ça fait deux cents.* Elle est immédiatement interrompue par un *Attention !* de Léna, suivi de *c'est un paquet de combien ça ?* Angélique déclare *de dix…* et comprend qu'elle ne s'engage pas sur la « bonne » voie. Mais elle se rebelle *Non, moi, j'préfère avec les cents Madame* (ligne 117), tout en remettant les deux paquets de dix dans le bac. Elle maintient sa *position haute* et le choix de la technique T1 pour résoudre la tâche. Léna ne perçoit toujours pas la potentialité de cette technique. Elle ne se place pas en position *basse* (ou *médiane*) d'observatrice aidant l'élève à affiner son raisonnement. Elle bloque plusieurs fois les tentatives d'Angèle de garder cette *position haute.* Les extraits suivants (lignes 118 à 122) montrent comment les deux acteurs luttent chacun pour imposer leur technique.

118. Léna : *Oui mais tu peux pas* // Léna pose le paquet de dix sur la table.
Regarde, Angèle // Léna pointe la boîte de craies de l'énoncé.
119. Angèle : *Ben si ça fait cent, là ça fait deux cents là*.
// Angèle ressort deux paquets de cent de la boîte et les pose sur la table.
120. Léna : *Oui mais tu n'as pas de boîte de cent, tu n'as que des boîtes de dix*.
// Léna continue à pointer la boîte de l'énoncé.
121. Angèle : *Oh c'est compliqué hein*.
// Angèle remet les paquets de cent dans le bac.
122. Léna : *Ben oui mais faut chercher.*

Dans la suite de l'épisode, Angèle accepte d'accumuler des paquets de dix devant elle et de compter les bâtons dix par dix, suite aux demandes successives et hachées de l'enseignante. Angèle garde alors durant tout ce temps une *position basse* d'exécutrice, même si l'enseignante tente par moment de lui en prescrire une autre. Léna garde de son côté une *position haute* directrice : elle découpe la technique T2 en micro-tâches dont elle organise complètement la succession, essentiellement par la demande d'un dénombrement oral continu, dix par dix, des paquets qui s'accumulent. Angèle se révèle assez malhabile dans ce décompte au-delà de cent-soixante. A la ligne 151 des échanges, soit après deux minutes et quarante secondes, Angèle arrive à produire péniblement la collection de deux cents bâtons sous forme de paquets de dix.

Angèle est donc revenue, presque trois minutes plus tard, avec l'aide de l'enseignante, et sans doute avec le sentiment de ne rien savoir faire, comme le souligne sa position basse

[5] Qu'elle interprète sans doute différemment de ce que voulait signifier Léna, qui faisait, elle, référence à la dernière séance où les élèves avaient organisé des collections par paquets de dix pour les dénombrer (information obtenue lors de l'auto-confrontation).

pendant cette phase, à la situation qu'elle avait atteinte seule : deux cent bâtons devant elle, mais cette fois-ci sous forme de paquets de dix.

Pour Angèle, le temps didactique s'est arrêté pendant trois minutes, et sa confiance dans la force de sa pensée s'est sans doute un peu émoussée.

Pour l'enseignante qui ne dispose pas de la trace enregistrée du déroulement, Angèle peut apparaitre comme ayant beaucoup de lacunes et des difficultés à rester concentrée sur un type de tâches.

Pour information les échanges durent deux minutes encore sans aboutir à une réponse, avant que l'enseignante ne décrète la fin de ce travail commun (ligne 166), en annonçant que cette même tâche sera reprise plus tard.

V. CONCLUSION

L'étude menée permet, déjà sur un épisode court, de montrer la pertinence des outils théoriques utilisés pour l'analyse, dans une visée de méthodologie de recherche. En effet l'épisode étudié montre que les jeux qui s'y jouent ne sont pas tant des jeux de connaissances que des jeux de pouvoir.

Pour en rendre compte lors de la communication lors de la conférence EMF, nous avons utilisé un outil méthodologique qui présente à la fois la multimodalité des interactions d'enseignement apprentissage, en appui sur la ligne sémiotique de Sabena (2018) et la topogenèse, que nous nommons *tableau sémiogénétique* (Annexe 1). Sur la première ligne de ce tableau, nous inscrivons des repères de temps, instants auxquels démarre chacune des interventions, ce qui donne des informations précises sur leur durée. Nous numérotons les interventions chronologiquement sur la seconde ligne et sur la troisième, nous notons le nom de leurs auteurs (en général, les locuteurs), ainsi que leur rôle dans l'interaction (à partir de nos analyses). Nous présentons ensuite les signes observés et leurs auteurs en introduisant autant de lignes que nécessaire en fonction de ce que les données nous permettent de relever. Dans l'annexe 1 (interventions 114 à 121), nous avons relevé des mots parlés (écrits en caractères droits dans le tableau) et des indications de tons, d'intensité, etc. (écrites en italique), ainsi que des formes d'expression corporelle (regard, gestes, action avec du matériel) que nous présentons par une description (écrite en italique) ou par des photos ou dessins. Nous marquons enfin les positions prises par les personnes dans l'interaction à l'aide d'un code couleur, en appui sur la métaphore des feux de circulation. Le vert pour l'enseignant correspond à une position basse (il laisse à l'élève une certaine autonomie dans l'accomplissement de la tâche) et pour l'élève à une position haute (il exécute la tâche de façon autonome). Le rouge pour l'enseignant correspond à une position haute (il exerce son autorité liée au savoir) et pour l'élève une position basse (il est exécutant ou en attente d'aide). Les jeux de pouvoir sont visibles quand les couleurs juxtaposées enseignant-élève sont différentes (rouge-vert ou vert-rouge).

Nous avons enrichi le modèle de Suau et Assude (2016) en raffinant les positions en positions prescrites et effectives à l'instar de la définition des tâches dans la théorie de l'activité (Leplat et Hoc, 1983).

Nous avons mis à jour chez l'élève Angèle des potentialités réelles en termes de connaissances qui laissent penser qu'elle aurait pu mener à terme la recherche de la réponse, moyennant des petits coups de pouce adaptés à la technique dans laquelle elle s'était engagée. Nous avons aussi remarqué qu'elle était complètement enrôlée dans la tâche et qu'elle cherchait à maintenir son orientation (Bruner 1983). Nous avons repéré ses faiblesses dans la

comptine orale, mais aussi sa conscience de ces faiblesses par son refus de passer par les paquets de dix.

Nous avons aussi montré les différentes positions qu'assumaient les acteurs de la relation, parfois à leur insu, comme nous le confiera l'enseignante Léna dans l'entretien d'auto-confrontation. Léna était persuadée d'avoir tout fait pour permettre à Angèle d'avancer seule, en évitant toutefois qu'elle se sente perdue, et réagisse de façon inadéquate. Pendant l'auto-confrontation Léna prend conscience qu'Angèle souhaitait prendre un chemin auquel elle n'avait pas pensé, la technique T1, et qu'elle a bloqué ce cheminement. Elle révèle aussi qu'elle a cherché à éviter l'échec de Léna, connaissant la propension de celle-ci à réagir violemment quand elle se sent mal à l'aise. On retrouve là le phénomène d'échec potentiel pointé par Favre (2004) : l'enseignant agit et « compense » pour éviter que l'élève ne se trouve confronté à une absence de réussite.

La conscience de l'influence des positions prises par un enseignant relativement aux réactions et productions des élèves, et *in fine* sur l'avancée d'un élève dans la construction de son autonomie de pensée, est donc un enjeu fort de formation, en particulier dans le contexte d'aide en milieu spécialisé. Étudier en formation de tels extraits avec de tels outils d'analyse permet ainsi de révéler ces phénomènes cachés et de préparer à travailler la dimension topogénétique de l'enseignement.

REFERENCES

Bruner J. (1983) *Savoir faire, savoir dire, le développement de l'enfant*. Paris : PUF.

Chevallard Y. (1999) Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19(3), 221–266.

Dias T., Tièche Christinat C. (2012) Spécificités des situations didactiques dans l'enseignement spécialisé. In J.-L. Dorier et S. Coutat (coord.), *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone, Enseignement des mathématiques et contrat social* (pp. 1067–1075). Genève, Suisse : Université de Genève.

Favre J.-M. (2004) Étude des effets de deux contraintes didactique sur l'enseignement de la multiplication dans une classe de l'enseignement spécialisé. In V. Durand-Guerrier et C. Tisseron (Éds). *Actes du séminaire ARDM 2003 de didactique des mathématiques* (pp. 109–126). Paris : IREM Paris 7.

Giroux J. (2015) Difficultés des élèves en mathématiques au primaire : les apports de la didactique. *Math-Ecole* 224, 3–7.

Houdement C., Petitfour E. (2018) L'analyse sémiotique de l'activité mathématique, une nécessité didactique dans le contexte de l'adaptation scolaire. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 23, 9–40.

Leplat J., Hoc J.M. (1983) Tâche et activité dans l'analyse psychologique des situations. *Cahiers de Psychologie Cognitive* 3(1), 49–63.

Roiné C. (2009) *Cécité didactique et discours noosphériens dans les pratiques d'enseignement en SEGPA: une contribution à la question des inégalités.* Thèse Université de Bordeaux 2.

Sensevy G. (2001) Théories de l'action et action du professeur. In J.-M. Baudoin, J. Friedrich (éd 2001). *Théories de l'action et éducation*. (pp. 203–224). Éditions De Boeck Université.

Suau G. Assude T. (2016) Pratiques inclusives en milieu ordinaire : accessibilité didactique et régulations. *Carrefours de l'éducation* 42, 155–169.

Tempier F. (2016) Composer et décomposer : un révélateur de la compréhension de la numération chez les élèves. *Grand N* 98, 67–90.

ANNEXE

Tableau sémiogénétique lignes 114-121

		0'57	1'01			1'04	1'07	
		114	115			116	117	
		Prof *Fait appel à la mémoire*	**Angèle** *se relance dans la technique T1*			**Prof** *Arrête Angèle dans sa technique T1*	**Angèle** *persiste dans la technique T1*	
MOTS	Angèle			*affirmative* Là ça fait deux cents			*à voix basse, pour elle-même :* dix	*affirmative* Non, moi, j'préfère avec les cents Madame
	Prof	Donc / Reprends comme tu faisais / la ...la dernière fois.				Attention, c'est un paquet de combien ça ?		
CORPS	Angèle	*Angèle regarde sur l'énoncé* 246 *que vient de pointer la Prof*	*Angèle prend une inspiration et pose les deux paquets de 10 qu'elle tenait dans sa main devant elle, sur le bord de table*	*Angèle pointe un paquet collé au bac, puis l'autre* 	*puis elle prend les deux paquets qui sont devant elle*	*regarde le paquet* 		*Angèle remet les trois paquets dans le bac*
	Prof	*Agrandit l'espace libre devant Angèle déplace les deux paquets de 10 plus à gauche, collés au bac*	*Prof regarde ce que fait Angèle*			*prend un des deux paquets de dix collé au bac et le montre à Angèle*		

	Prof	Elève
Position haute	Autorité	Autonome
Position médiane		
Position basse	Non autorité	Non autonome

		1'10		1'12	1'13			1'17
		118		119	120			121
		Prof *bloque la technique T1 d'Angèle*		**Angèle** *redémarre la technique T1*	**Prof** *bloque la technique T1 d'Angèle*			**Angèle** *capitule*
MOTS	Angèle			*Sûre d'elle* Ben si ça fait cent, là ça fait deux...	.. cents			Oh, c'est trop compliqué hein
	Prof	Oui mais tu peux pas !	Regarde Angèle		Oui mais tu n'as	...pas de boîte de cent, tu n'as..	..que des boîtes de dix	
CORPS	Angèle	*Angèle tend le bras vers le bac (ne regarde pas ce que pointe Prof)...*	*...et prend deux paquets de 100. (ne regarde pas ce que pointe Prof)*	*Angèle pose les deux paquets de 100 devant elle* 			*Angèle remet vivement un paquet de 100 dans le bac,*	*puis l'autre. Elle pose sur la table le bâton isolé qu'elle tenait dans sa main*
	Prof	*Prof pose le paquet de 10 sur la table et pointe « 246 »*  	*puis elle pointe la boîte de craies sur l'énoncé* 			*Prof pointe sur* Craie à l'unité Boîte de 10 craies	*puis sur la boîte de craies en photo sur l'énoncé*	

ETUDE DE L'IMPACT DES DIFFICULTES LANGAGIERES DES ELEVES ALLOPHONES SUR LEUR ACTIVITE MATHEMATIQUE

MILLON-FAURE[*] Karine – MENDONCA-DIAS[**] Catherine

Résumé – Nous nous intéressons dans cette étude aux répercussions des difficultés langagières des élèves allophones scolarisés en France sur leur activité mathématique. Nous nous appuyons pour cela sur l'analyse de tests en ligne et en présentiel menés dans le cadre du projet Evascol. Les analyses qualitatives et quantitatives qui en découlent nous amènent à réfléchir aux possibilités d'amélioration des enseignements proposés à ce public.

Mots-clefs : Élèves allophones, difficultés langagières, français langue seconde (FLS), langue spécifique aux mathématiques, dispositifs d'accueil.

Abstract – This study concerns the language difficulty's impact on multilingual newcomers regarding their mathematical abilities, in French primary and secondary schools. The results of numerical and in presence tests achieved by these students are gathered and analysed in the frame of the national multidisciplinary investigation entitled Evascol. Taking into consideration qualitative and quantitative outcomes, we target to enhance pedagogical practice for both language and mathematics teaching.

Keywords: multilingual new arrivals, language difficulties, French as an additional language (FAL), specific mathematical language skills, specific class receiving new arrivals.

En 2015, on recensait 52 500 élèves allophones récemment arrivés en France[1] et leur nombre augmente d'année en année. Parmi eux, neuf élèves sur dix sont scolarisés dans des Unité Pédagogique pour Élèves Allophones Arrivants (UPE2A) où ils suivent un enseignement intensif du français, et notamment du français en tant que langue de scolarisation (Verdelhan-Bourgade, 2002 ; Davin, 2005 ; Vigner, 2009). Certains enseignements dans des disciplines 'non linguistiques' telles que les mathématiques peuvent également compléter cette formation. Après environ un an de scolarisation dans ces dispositifs d'accueil, les élèves allophones sont généralement affectés dans des classes ordinaires où ils suivent avec leurs camarades nés en France les cours habituels dans les diverses disciplines[2].

Nous nous intéressons ici aux obstacles que peuvent rencontrer ces élèves durant les cours de mathématiques en France et nous nous interrogeons sur l'impact de leurs éventuelles difficultés dans la maîtrise de la langue, sur leurs apprentissages. Pour approfondir cette problématique, nous nous appuyons sur la recherche pluridisciplinaire Evascol[3] "*Étudier, voir et analyser la scolarisation des enfants migrants et itinérants*" qui se focalise sur la scolarisation des élèves allophones et s'articule autour de plusieurs axes. L'axe deux centré sur l'évaluation des apprentissages scolaires, que ce soit en français ou en mathématiques, a conduit à la mise en place de divers questionnaires proposés dans trois académies. L'analyse des résultats obtenus, éclairés par le cadre théorique, conduit à une réflexion sur la nature des enseignements proposés aux élèves allophones.

[*] Université Aix-Marseille – FRANCE – *karine.millon-faure@univ-amu.fr*
[**] Université Paris 3 – FRANCE – *catherine.mendonca.dias@gmail.com*

[1] Robin J. & Touahir M. (2015). *Évaluations et statistiques*. http://www.education.gouv.fr/cid58968/annee-scolaire-2014-2015-52-500-eleves-allophones-scolarises-dont-15-300-l-etaient-deja-l-annee-precedente.html

[2] Circulaire n° 2012-141 du 2-10-2012, *Organisation de la scolarité des élèves allophones nouvellement arrivés*. Bulletin Officiel n° 37 du 11-10-2012.

[3] evascol.hypotheses.org

I. CADRE THEORIQUE

1. Le Français langue seconde

On utilise l'expression « français langue seconde » (Cuq, 1991) lorsqu'une personne ayant une autre langue maternelle vit dans un pays francophone. Le français devient alors pour un élève dans cette situation non seulement langue de communication mais également langue de scolarisation. Se distinguant ainsi à la fois de l'enseignement du « français langue maternelle » et de celui du « français langue étrangère », l'enseignement du français langue seconde s'est peu à peu doté d'une didactique propre (Vigner, 1987 & 1992 ; Cuq, 1991 & 1992).

Or cet enseignement constitue l'objectif essentiel des dispositifs d'accueil pour les élèves allophones. Il s'agit notamment de leur donner très rapidement les compétences langagières nécessaires pour accéder aux apprentissages dispensés dans les établissements scolaires français. Mais ce résultat n'est pas si simple à atteindre : l'étude de ces dispositifs d'accueil a permis de relever de nombreuses difficultés auxquelles élèves et enseignants sont confrontés que ce soit en ce qui concerne les disciplines linguistiques (Davin, 2005 et 2006 ; Mendonça-Dias, 2013 a. et b.) ou non linguistiques comme les mathématiques (Mendonça Dias, 2014).

2. Langue usuelle et langue spécifique aux mathématiques

De nombreuses recherches (Campbell, Adams & David, 2007 ; Ni Riordain, 2011, Schaftel & al., 2006) ont étudié les obstacles rencontrés par les élèves allophones lors de la résolution de problèmes mathématiques. Elles ont souligné l'impact des difficultés langagières, notamment en ce qui concerne le lexique spécifique aux mathématiques. Cummins (1979 a. et b.) avait d'ailleurs montré dès 1979 qu'il convenait de distinguer la maîtrise de la langue usuelle et celle de la langue de scolarisation, ces deux types de compétences ne s'acquérant pas à la même vitesse. Les travaux de Millon-Fauré (2011) ont en outre souligné que, dans le cas particulier des mathématiques, les compétences langagières nécessaires aux apprentissages disciplinaires pouvaient s'acquérir plus rapidement que celles mises en jeu lors de conversations usuelles. Ces observations nous conduisent à distinguer les compétences requises lors de conversations courantes et celles nécessaires pour l'activité mathématique ce qui nous amènera à parler de langue[4] spécifique aux mathématiques.

II. METHODOLOGIE

1. Le projet Evascol

Le projet Evascol (2015-2017) qui a été commandité par le Défenseur des Droits vise à recueillir des données concernant l'accueil et la scolarisation des élèves allophones nouvellement arrivés en France (EANA) et des enfants de familles itinérantes et de voyageurs (EFIV). Avec la coordination par Maïtena Armagnague et Isabelle Rigoni, cette étude portée par l'INSHEA, réunit des chercheurs issus de diverses disciplines (sociologie, sciences du langage, anthropologie, sciences de l'éducation, ethnologie, didactique…).

En ce qui nous concerne, nous sommes responsables de l'axe deux du projet Evascol qui s'intéresse aux pratiques pédagogiques mises en œuvre dans les dispositifs d'accueil et à

[4] Même si la distinction entre langue et langage s'avère parfois difficile à opérer, nous préférons parler de « langue » spécifique aux mathématiques car nous nous intéressons à l'ensemble des 'signes' (lexique, tournures grammaticales …) nécessaires pour formuler des énoncés mathématiques.

l'évaluation des connaissances scolaires des élèves allophones. Pour cela nous avons ciblé deux disciplines, le français et les mathématiques puis nous avons mis en place des tests en ligne ainsi que des tests en présentiel.

2. Les tests en ligne

Des QCM portant sur les deux disciplines choisies étaient accessibles sur une plateforme en ligne afin de faciliter la mise en œuvre de l'épreuve dans plusieurs académies et l'analyse des données recueillies. Ces questionnaires ont été une première fois proposés en début d'année scolaire afin d'évaluer les connaissances des élèves à leur arrivée en France, puis une deuxième fois en fin d'année pour étudier leurs progrès éventuels. Le formulaire d'entrée dans les tests permettait de recueillir des informations sur les profils des élèves (date d'arrivée en France, âge, usage des langues, classes, établissement). Le partenariat avec les enseignants a permis de vérifier au fur et à mesure la fiabilité des réponses.

En ce qui concerne les mathématiques, l'objectif de la première phase était d'estimer les connaissances des élèves allophones *au regard des attentes de l'institution d'accueil* afin de déterminer s'ils possédaient ou non à leur arrivée les compétences disciplinaires nécessaires pour suivre dans la classe où ils avaient été placés. Par conséquent, les exercices proposés correspondaient aux programmes de l'École Française. En outre, afin que leurs éventuelles difficultés dans la maîtrise du français ne viennent pas handicaper leurs performances en mathématiques, nous avons eu recours aux tests produits et traduits en trente langues différentes par le Casnav d'Aix-Marseille[5]. Avec leur autorisation, nous avons numérisé ces exercices[6], ce qui a facilité le traitement de l'importante quantité de données recueillies. Le support numérique a de plus permis de conditionner l'accès aux items en fonction des réponses apportées par l'élève de sorte que ce dernier ne se trouve pas en situation d'échec : ainsi, lorsqu'un exercice était réussi, l'élève pouvait accéder à un niveau supérieur. Le Casnav d'Aix Marseille nous a également transmis les résultats obtenus lors de la passation de ces questionnaires par 600 élèves natifs ce qui nous a aidé à procéder à un étalonnage.

La seconde phase de cette expérimentation visait à nous assurer qu'au bout d'un an de scolarisation en France, les élèves allophones avaient acquis une maîtrise suffisante du français pour que celle-ci n'interfère pas dans leur activité mathématique. Par conséquent nous leur avons proposé le même test mais les consignes étaient cette fois rédigées en français.

3. Le test en présentiel (Mendonça-Dias & Millon-Fauré, à paraître)

Certains types de tâches ne pouvaient être évalués au moyen d'un test en ligne, comme notamment la qualité et la vitesse de déchiffrage d'un texte en français ou la construction de figures géométriques. Nous avons donc procédé, auprès d'un échantillon restreint, à des tests « papier-crayon » en présence d'un observateur qui a pu recueillir des informations sur les difficultés rencontrées par les élèves interrogés.

Ces entretiens se sont déroulés à la fin de la première année de scolarisation en France et cherchaient notamment à déterminer si les éventuelles difficultés langagières des élèves n'entravaient pas leur activité mathématique. Par conséquent les consignes ont été proposées en français.

[5] Disponibles sur : http://www.crdp-aix-marseille.fr/mathsenaf/
[6] Disponibles sur le site de la recherche Evascol : https://evascol.hypotheses.org/exercices-en-ligne

4. L'analyse des données

La quantité des données recueillies (que ce soit en mathématiques ou en français lors des divers tests) permet de se livrer à différents types d'analyses : des analyses quantitatives lorsque la taille de l'échantillon considéré est suffisante mais également des études qualitatives notamment pour les entretiens. De plus la confrontation, pour un même élève, des résultats obtenus lors de ces diverses expérimentations nous a conduit à réaliser certaines études de cas permettant de mieux cerner les compétences et les difficultés de chacun. Même si ce lourd travail d'analyses est encore inachevé, nous souhaitons présenter ici les premiers résultats que nous avons pu obtenir.

III. RESULTATS DES TESTS EN LIGNE

1. L'échantillon

En faisant abstraction de tous les problèmes pratiques rencontrés (erreurs de saisies lors de l'identification des élèves, absence à l'une des deux phases etc…), nous disposions de 177 élèves ayant réalisé les deux phases du test en ligne. Notre échantillon s'est révélé assez varié puisque 33 élèves étaient scolarisés dans quatre écoles primaires différentes ; 133 élèves provenaient de treize collèges différents et 11 lycéens fréquentaient deux lycées différents. Ils étaient par ailleurs originaires de 46 pays différents (l'Espagne, la Bulgarie et le Portugal étant les pays les plus souvent cités) et parlaient 51 langues. Certains avaient déjà traversé plusieurs pays avant d'arriver en France et rencontré plusieurs langues, que ce soit en tant que langue de scolarisation ou langue courante, ce qui laisse entrevoir la richesse et la complexité de l'environnement linguistique de ces élèves. Précisons que depuis leur arrivée en France, 50% de ces élèves ne parlaient pas du tout le français à la maison, d'après leur déclaration, et 44% l'utilisaient en complément d'une autre langue.

2. Les résultats

Lors de l'analyse des données recueillies pour la première phase du test en ligne, nous avons voulu comparer les résultats obtenus par les élèves allophones à ceux obtenus au même test par des élèves ordinaires, ayant effectué toute leur scolarité en France. Nous avons ainsi pu constater qu'à leur arrivée en France, les compétences en mathématiques de plus de la moitié des élèves allophones interrogés s'avéraient insuffisantes pour suivre dans la classe où ils avaient été affectés.

Par ailleurs, en comparant pour chaque élève, les résultats obtenus aux deux phases du test en ligne, nous constatons que 38% des élèves évalués ont vu leurs résultats baisser. Autrement dit plus d'un tiers des élèves n'a pas réussi à réaliser certains exercices mathématiques lorsque la consigne était en français alors qu'ils les avaient correctement effectués lorsque la consigne était rédigée dans leur langue d'origine. Nous pouvons donc considérer qu'ici le problème est dû à des difficultés de compréhension de la langue française et non à des lacunes sur le plan mathématique.

IV. RESULTATS DU TEST EN PRESENTIEL

1. L'échantillon

La nature même de cette expérimentation (entretien individuel pendant une heure avec un des chercheurs de notre équipe) nous a contraints à ne proposer ce test qu'à un nombre

beaucoup plus restreint d'élèves. Les vingt-six élèves concernés ont été choisis de manière aléatoire parmi ceux ayant suivi les deux phases du test en présentiel. Précisons que parmi eux, six étaient scolarisés en école primaire et vingt en collège.

2. Les résultats

Si l'analyse des productions obtenues lors des questionnaires mathématiques en présentiel permet de repérer certaines excellentes prestations, elle atteste surtout de nombreuses méprises concernant des termes élémentaires du lexique de géométrie. Ainsi, les productions ci-dessous, proposées comme réponses à la consigne 'Trace un cercle de centre A qui passe par B.', nous paraissent indiscutablement montrer une confusion entre la notion de cercle et, respectivement celle de segment, carré ou triangle :

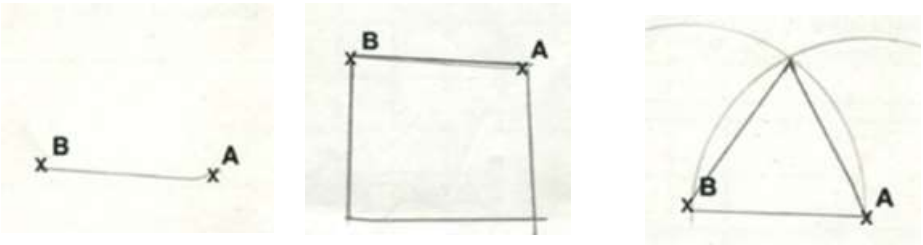


Figure 1 *– Extraits de productions d'élèves*

On notera dans la troisième production l'utilisation du compas pour construire le triangle équilatéral, ce qui pourrait laisser entendre que cet élève associe le terme « cercle » à l'instrument de géométrie habituellement utilisé pour tracer cette figure. Toutefois le terme 'cercle' en lui-même n'est pas assimilé.

Au final, si nous comptabilisons le nombre de réponses attestant de la compréhension des termes choisis, nous obtenons les résultats ci-dessous :

Niveau de compétences	Terme spécifique et notion abordée	Nombre de réponses correctes sur le nombre d'élèves ayant réalisé l'exercice
Cycle 4	Symétrie centrale	0 sur 15 réponses
Cycle 3	Parallèle	6 sur 26 réponses
	Perpendiculaire	5 sur 26 réponses
	Symétrie axiale	20 sur 25 réponses
Cycle 2	Triangle	19 sur 22 réponses
	Cercle	20 sur 26 réponses
	Carré	20 sur 26 réponses
	Mesurer	22 sur 26 réponses
	Tracer	22 sur 26 réponses

Figure 2 *– Taux de réponses attestant de la compréhension de certains termes du lexique de géométrie*

Nous constatons ici que si certains termes (notamment ceux relevant du cycle 2) sont plutôt bien appréhendés par les élèves interrogés, d'autres au contraire demeurent difficiles d'accès. Ainsi, aucun élève ne comprend réellement l'expression 'symétrie centrale' et seulement vingt pour cent environ associent le bon concept mathématique aux termes

'parallèle' ou 'perpendiculaire'. Pourtant ces deux termes sont régulièrement utilisés dans les cours de mathématiques des collèges et lycées français et l'on peut donc se demander si ces élèves allophones peuvent réellement comprendre les enseignements proposés dans les classes ordinaires.

V. ETUDE DE CAS

1. Concordance entre la maîtrise de la langue usuelle et de la connaissance du lexique mathématique

Étudions plus en détail les cas de quatre élèves de notre échantillon qui nous paraissent particulièrement instructifs. Pira, tout d'abord, scolarisée en 6e et arrivée en France quelques mois seulement avant la passation de notre questionnaire, rencontre de grandes difficultés en ce qui concerne la maîtrise de la langue usuelle. Ainsi, elle se situe au niveau A1[7] à la fois en compréhension orale et en compréhension écrite. Par ailleurs, les rares réponses qu'elle fournit à notre questionnaire de mathématiques sont généralement erronées et attestent de réelles difficultés dans la compréhension des consignes. Elle dira d'ailleurs elle-même lors de la passation du test qu'elle ne *« comprend pas »*.

À l'opposé, Delfina, également arrivée en France peu de temps avant notre expérimentation et scolarisée en CM2, présente un niveau B1 en compréhension orale et A2/B1 en compréhension écrite. Pour ce qui est des mathématiques, mis à part le tracé de son carré qui s'avère assez approximatif, les réponses qu'elle fournit à notre questionnaire sont toutes exactes. Pour ces deux élèves on assiste donc à une concordance entre la maîtrise de la langue usuelle et la maîtrise des compétences langagières nécessaires à l'activité mathématique. Tel n'est pas le cas de tous les élèves allophones.

2. Discordance entre la maîtrise de la langue usuelle et de la connaissance du lexique mathématique

Regardons par exemple le cas de Chourouk et Li, tous deux scolarisés dans la même classe de 3e et arrivés en France un peu plus d'un an avant la passation de notre test. En ce qui concerne la maîtrise de la langue usuelle, Chourouk obtient un niveau B1 en compréhension orale et A2 en compréhension écrite. Pourtant, certaines de ses réponses à notre questionnaire de mathématiques s'avèrent réellement préoccupantes pour un élève de cet âge. Voici par exemple, les réponses qu'il propose lorsqu'on lui demande de tracer une droite perpendiculaire à une droite donnée :

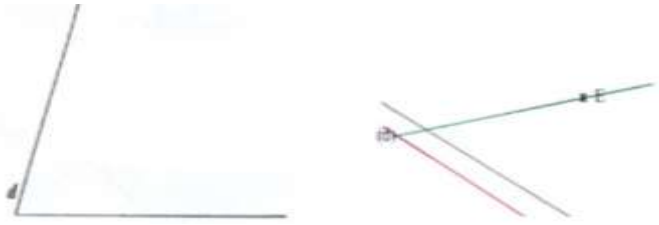


Figure 3 *–Réponses de Chrourouk à la consigne « tracer une droite perpendiculaire »*

Quant à Li, il rencontre davantage de difficultés que son camarade pour ce qui est de la maîtrise de la langue usuelle (il n'obtient qu'un niveau A2 en compréhension orale). Pourtant

[7] Le Cadre Européen de Référence pour les Langues définit 6 niveaux de compétences, depuis le niveau A1 qui désigne les apprenants débutants, tout juste capables de se faire comprendre dans des situations simples jusqu'au niveau C2 pour les utilisateurs expérimentés et quasiment bilingues.

il répond de manière irréprochable à toutes les questions de notre test de mathématiques, mis à part pour l'exercice sur la symétrie centrale dans lequel il effectue une translation.

3. L'impact du niveau en mathématiques dans la langue d'origine.

Si l'on reprend les résultats obtenus lors du premier test en ligne en mathématiques, on remarque pour ces quatre élèves une certaine correspondance entre le niveau en mathématiques en langue d'origine et les compétences mises en œuvre dans cette discipline lorsque les énoncés ont été proposés en français. Ainsi le niveau de Pira correspond à celui d'un élève de fin cycle 2 alors qu'elle entre en sixième et les résultats obtenus par Chourouk lors des tests de mathématiques en langue arabe indiquaient un niveau moyen de fin de sixième (alors qu'il entrait en troisième). Ces deux élèves présentaient donc déjà des lacunes dans cette discipline lorsque les énoncés étaient présentés en langue d'origine. A contrario, Li, attestait d'un niveau fin troisième aux tests de mathématiques en chinois alors qu'il commençait à peine cette classe et Delfina présentait à son entrée en CM2 le niveau d'une élève de sixième. Ces dernières observations pourraient indiquer que la maîtrise des compétences langagières nécessaires à l'activité mathématique dépendrait davantage des connaissances en mathématiques dans la langue d'origine que de l'aisance dans le maniement du français usuel.

VI. CONCLUSION

Ces premières analyses viennent confirmer les résultats évoqués dans les recherches précédentes : les difficultés langagières, notamment en ce qui concerne le lexique propre aux mathématiques, constituent une entrave majeure pour l'activité dans cette discipline et même s'il ne s'agit pas forcément de profils types, les études de cas précédentes viennent illustrer l'absence de corrélation entre la maîtrise de la langue usuelle et de la langue spécifique aux mathématiques. Cette étude permet en outre de mieux comprendre l'ampleur des difficultés rencontrées par les élèves allophones : après un an de scolarisation en France, de nombreux termes élémentaires du lexique mathématique ne sont toujours pas maîtrisés par la plupart d'entre eux. Un autre exercice du test de français révèle d'ailleurs que 36 sur 75 élèves concernés par le niveau écrit A1 en cours n'ont pas réussi à associer les termes de géométrie (règle, compas, équerre) aux trois bonnes images sur les six qui leur étaient proposées. Nos analyses soulignent également l'impact que peut avoir le niveau en mathématiques à l'arrivée sur l'apprentissage des compétences langagières nécessaires dans cette discipline.

Comme, par ailleurs, les élèves allophones ne bénéficient généralement des dispositifs d'aide que lors de leur première année en France, la compréhension des leçons de mathématiques ordinaires nous paraît largement compromise. Il convient par conséquent de s'interroger sur la nature des enseignements qui pourraient accélérer l'apprentissage de cette langue spécifique aux mathématiques afin de leur permettre de profiter plus rapidement des cours qui leur sont proposés. Certaines expérimentations (Millon-Fauré, 2013) ont apporté quelques améliorations mais le sujet mériterait d'être approfondi notamment en ce qui concerne les possibilités d'accompagnement de ces élèves allophones par les enseignants des classes ordinaires qui les accueillent.

REFERENCES

Campbell A. & Adams V. & Davis G. (2007). *Cognitive demands and second- language learners: a framework for analyzing mathematics instructional contexts.* Mathematical Thinking and learning – Lawrence Erlbaum Associates.

Cummins J. (1979 a.). Linguistic interdependence and the educational development of bilingual children. *Review of Educational Research*, 49, 222-251.

Cummins J. (1979 b.). Cognitive/academic language proficiency, linguistic interdependence, the optimum age question, and some other matters. *Working Papers on Bilingualism,* 19, 197-205.

Cuq J.-P. (1991). *Le Français Langue Seconde. Origines d'une notion et implications didactiques,* Paris, Hachette.

Cuq J.-P. (1992). Français langue seconde. Un point sur la question. Dans Besse H., Ngalasso M.-M. et Vigner G., (dir.), *Français langue seconde, Études de Linguistique Appliquée, 88*, 5-26.

Davin F. (2005). *Didactique du français langue seconde en France. Le cas de la discipline 'français' enseigné au collège.* Thèse de doctorat. Université de Provence, Aix-Marseille I.

Davin-Chnane F. (2006). FLE, FLM/première : quelle passerelle pour l'enseignement du FLS au collège ? *Skholê*, Hors-série 1, 35-41.

Mendonça Dias C. (2014). Enseigner les mathématiques avec des écoliers non ou peu francophones. *Quelles ressources pour enrichir les pratiques et améliorer les apprentissages mathématiques à l'école primaire ?* Actes du 41ème Colloque international des Professeurs et Formateurs de Mathématiques chargés de la Formation des Maîtres.

Mendonça Dias C. (2013 a.). Les difficultés spécifiques en production écrite des collégiens nouvellement arrivés. Dans Galligani S., Wachs S. et Weber C. (dir.), *Comment définir la difficulté scolaire en matière de langue(s),* Paris, Éditions Riveneuve.

Mendonça Dias C. (2013 b.). Les progressions linguistiques et scolaires par les collégiens nouvellement arrivés, non ou peu scolarisés antérieurement. Dans Toffoli D. et Narcy-Combes M.-F. (dir.), Apprendre les langues, autrement, *Recherches en didactique des langues et des cultures (RDLC) : les cahiers de l'ACEDLE, 10(1),* 159-175.

Mendonça Dias C. & Millon-Fauré K. (à paraître). French as an additional language for mathematics' purposes. Cambridge Scholar Publishers.

Millon-Fauré K. (2011). *Les répercussions des difficultés langagières des élèves sur l'activité mathématique en classe : le cas des élèves migrants*. Thèse, Université d'Aix-Marseille I.

Millon-Fauré K. (2013). Enseigner les compétences langagières indispensables à l'activité mathématique. *Repère Irem,* n°90, p.49-64.

Ni Riordain M. (2011). A working model for improving mathematics teaching and learning for bilingual students. CERME 7. *Mathematics and language*.

Schaftel J. & Belton-Kocher E. & Glasnapp D. & Poggio J. (2006). The impact of language characteristics in mathematics test items on the performance of English language learners and students with disabilities. *Educational Assessment*, 11(2), 105–126, Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Verdelhan-Bourgade M. (2002). *Le français de scolarisation : pour une didactique réaliste*. Paris : PUF.

Vigner G. (1987). Français langue seconde : une discipline spécifique. *Diagonales, 4,*42-45.

Vigner G. (1992). Le français langue de scolarisation. Dans Besse H., Ngalasso M.-M. et Vigner G., (dir.), *Français langue seconde, Études de Linguistique Appliquée, Paris, Didier Édition, 88, 39-53.*

Vigner G. (2009). Le français langue seconde. Comment apprendre le français aux élèves nouvellement arrivés. Paris : Hachette Éducation.

ÉTUDE D'UN DISPOSITIF D'AIDE A L'INTENTION D'ÉLÈVES EN DIFFICULTÉ DANS LA RESOLUTION D'UNE SITUATION-PROBLEME MATHÉMATIQUE

Marie-Pier MORIN[*], Laurent THEIS[*], Teresa ASSUDE[**], Karine MILLON-FAURÉ[**], Jeannette TAMBONE[**], Jeanne KOUDOGBO[*], Valérie HAMEL[*], Patricia MARCHAND[*]

Résumé – Dans cette communication, nous analysons un dispositif d'aide mis en oeuvre par des enseignantes auprès d'élèves en difficulté suite à l'expérimentation de situations-problèmes mathématiques avec l'ensemble de la classe. À partir d'une première expérimentation (Theis et al., 2016), nous montrons d'abord les fonctions d'aide de ce dispositif, notamment à travers le triplet des genèses (Sensevy et al. 2000) : chronogenèse, mésogenèse et topogenèse. Ensuite nous analysons une deuxième mise en œuvre en détaillant, à partir d'épisodes concernant des élèves qui y ont participé, comment ces fonctions s'y retrouvent, ou non.

Mots-clefs : Situation-problème, élève en difficulté, dispositif d'aide, triplet des genèses, mathématiques

Abstract – In this paper, we analyze an aid session tested by an elementary school teachers. This aid session has been set up by a teacher for some students with difficulties after the work in the whole class. We first show how this aid session can help the pupils, especially through its chrono-topo-meso-genetic functions. Then we analyze a second situation in which the aid session is implemented, looking for clues of these functions in some episodes involving students who participated in the aid session.

Keywords: Problem situation, special needs pupils, assistant device, genesis triplet, mathematics

Notre communication se situe dans le cadre du groupe 11 et concerne les dispositifs pour la scolarisation des publics spécifiques, plus précisément les dispositifs mis en oeuvre par les enseignants pour aider les élèves qu'ils jugent en difficulté. Dans cette perspective, nous étudierons un dispositif d'aide post intervention en classe mis en place par des enseignantes en portant notre attention sur les fonctions topogénétiques, chronogénétiques et mésogénétiques de ce dispositif. À cette fin, nous présenterons notre cadre théorique et problématique à partir d'une première expérimentation de ce dispositif (Theis et al., 2016) et analyserons par la suite une nouvelle expérimentation de ce dispositif auprès de quatre élèves identifiés en difficulté par leur enseignante. Enfin, nous tenterons de voir si les effets rencontrés dans le premier dispositif analysé se retrouvent dans le dispositif que nous présentons.

I. CADRE THEORIQUE ET PROBLEMATIQUE

Lors de l'implantation du renouveau pédagogique, dont les orientations sont décrites dans le Programme de formation de l'école québécoise (Gouvernement du Québec, 2001), une place importante a été réservée à la résolution de situations-problèmes. D'une part, la compétence à résoudre une situation-problème est centrale dans le programme de mathématiques, tant au primaire qu'au secondaire, et d'autre part la compétence consistant à résoudre un problème est transversale au programme. Aussi, le Ministère de l'Éducation (MEQ) considère la situation-

[*] Université de Sherbrooke – Québec – Canada – Marie-Pier.Morin@USherbrooke.ca; Laurent.Theis@USherbrooke.ca; Jeanne.Koudogbo@USherbrooke.ca; Valerie.Hamel@USherbrooke.ca; Patricia.Marchand@USherbrooke.ca.

[**] ADEF – Université d'Aix-Marseille – France – teresa.dos-reis-assude@univ-amu.fr; karine.millon-faure@univ-amu.fr; jane.tambone@wanadoo.fr.

problème comme « un outil intellectuel puissant au service du raisonnement et de l'intuition créatrice » (p. 126). Par conséquent, la résolution de situations-problèmes doit être abordée comme objet d'apprentissage et comme outil dans l'apprentissage des mathématiques. Pour les élèves qui présentent des difficultés, la résolution de situations-problèmes constitue ainsi un défi important pouvant même conduire à l'échec. C'est dans ce cadre que nous avons mené deux recherches collaboratives avec des enseignantes du primaire, lesquelles portaient sur les conditions favorables à l'engagement dans une situation-problème et l'apprentissage des concepts visés. La première a été réalisée auprès de huit enseignantes d'une école primaire de Sherbrooke et la seconde, auprès de huit enseignantes de plusieurs écoles primaires situées en périphérie de Sherbrooke. Dans le cadre de ces recherches collaboratives, nous avons accompagné les enseignantes dans l'élaboration, l'expérimentation et l'analyse de situations-problèmes mathématiques en classe. Ces situations-problèmes, construites autour des critères d'une situation-problème d'Astolfi (1993) étaient pensées de manière à permettre aux élèves de faire de nouveaux apprentissages et de surmonter des obstacles de nature épistémologique.

Dans la première phase du projet, Sylvie, une enseignante du 2e cycle du primaire[1], a mis sur pied un dispositif particulier, qui avait comme but de rencontrer les élèves qu'elle jugeait en difficulté avant la résolution de la situation-problème en classe. Ce dispositif visait à permettre à ces élèves de faire connaissance avec la situation-problème travaillée en classe sans toutefois déjà y travailler sur les objets de savoir visés. L'analyse de l'expérimentation de cette mesure (Theis et al., 2014), a fait ressortir trois fonctions potentielles de ce dispositif d'aide pour les élèves en difficulté. Par la suite, de nouvelles versions du dispositif, toutes différentes de la première, ont été expérimentées et analysées (Assude et al., 2015, 2016; Millon-Fauré et al., sous presse; Theis et al., 2016).

Nous avons modélisé les fonctions de notre dispositif d'aide autour du triplet des genèses décrit par Sensevy, Mercier et Schubauer-Leoni (2000) pour qui,

> « au sein du système didactique, le professeur doit agir (définir, réguler, dévoluer, instituer) pour : produire les lieux du professeur et de l'élève (effet de topogénèse); produire les temps de l'enseignement et de l'apprentissage (effet de chronogenèse); produire les objets des milieux des situations et l'organisation des rapports à ces objets (effet de mésogenèse) » (p. 267).

Parmi les trois fonctions identifiées, la fonction mésogénétique permet la rencontre de l'élève en difficulté avec différents éléments du milieu, avant la rencontre en classe de la situation-problème. La fonction chronogénétique permet à l'élève d'en savoir davantage sur la tâche à réaliser, avant les autres élèves. L'élève dispose également de plus de temps pour entrer dans la tâche. Toutefois, nos analyses ont révélé que le temps didactique n'avançait pas dans le dispositif, puisqu'aucune institutionnalisation ne s'y produit. Cependant, l'élève en apprend davantage sur les tâches à réaliser et sur les techniques qui y seront pertinentes, ainsi que sur les discours les justifiant. Nous avons qualifié cette progression d'avancée du temps praxéologique (Assude et al.; 2016) Finalement, la fonction topogénétique du dispositif « avant » permet à l'élève en difficulté d'assumer pleinement son rôle d'élève lors du travail en classe.

[1] Élèves âgés de 8 à 10 ans.

Toujours au cours de la première phase du projet, Manon, une enseignante du 3e cycle du primaire[2], a expérimenté ce dispositif en y intégrant un dispositif d'aide supplémentaire, postérieurement à la situation vécue en classe. Ce dispositif a également fait l'objet d'analyses (Theis et al., 2016), de façon à voir si les fonctions identifiées lors de l'expérimentation de la mesure d'aide avant la situation-problème se retrouvent également lors de l'expérimentation de la mesure d'aide suite à la situation-problème.

Dans le cadre de cette communication, à partir de l'analyse du dispositif post de Manon, nous analyserons la mise en œuvre d'un deuxième dispositif post réalisé cette fois-ci avec la classe d'Isabelle, et verrons en quoi les fonctions qui se dégagent du dispositif mis en place par Manon, se retrouvent, ou non, dans celui expérimenté par Isabelle.

Pour faire l'analyse de ce dispositif, à l'instar de Chevallard (1995), nous modéliserons ce regroupement d'élèves considérés en difficulté comme un système didactique auxiliaire (SDA) à la classe. Ce dernier considère l'espace d'étude comme un ensemble de systèmes didactiques principaux (SDP), la classe par exemple, et des SDA, qui aident à l'étude. Les SDA étant entre autres liés aux mêmes enjeux de savoirs que les SDP, ils dépendent des SDP. À l'image des SDA décrits ailleurs (Tambone, 2014), le SDA que nous étudierons a été réalisé en aval de la situation-problème vécue en classe (SDA post). Ainsi, le SDA post fait suite au SDP, qui lui-même se situe après le SDA pré. Ces dispositifs d'aide (pré et post) peuvent être illustrés par le schéma qui suit :

SDA pré → SDP → SDA post

Figure 1 *– Séquence des dispositifs d'aide*

Dans la prochaine section, à partir de l'analyse de la mise en place du SDA post de Manon, nous pourrons apprécier la façon dont ces fonctions s'actualisent.

1. Analyse du SDA post de Manon

Le SDA post de Manon, pour qui le SDP (Theis et al, 2016) portait sur le calcul de l'aire du triangle, comportait les sept étapes suivantes :

1. Justification du dispositif auprès des élèves.
2. Vérification, de manière individuelle, auprès de chaque élève s'ils seraient maintenant en mesure de calculer l'aire du triangle.
3. Travail sur l'aire du triangle isocèle utilisé dans le SDP à travers la technique « inscription dans un rectangle, puis diviser l'aire du rectangle par 2 ».
4. Travail sur un cas particulier, en utilisant la technique « trouver différents endroits où on peut placer la hauteur ».
5. Nouvelle vérification par Manon si les élèves seraient maintenant en mesure de déterminer seuls l'aire d'un triangle.
6. Retour sur le calcul de l'aire du rectangle à travers des exemples utilisés dans le SDP et lien avec l'aire du triangle.
7. Manon questionne les élèves sur la façon dont ils ont perçu l'utilité du SDA pré.

[2] Élèves âgés de 10 à 12 ans.

L'analyse de la mise en place de ces étapes à l'aide du triplet des genèses a révélé des fonctions potentielles du dispositif. Premièrement, la fonction mésogénétique s'est manifestée à travers des objets qui sont apparus dans le SDA post, mais qui étaient restés implicites avec l'ensemble du groupe dans le cadre du SDP. Par exemple, lors de la 3e étape, Manon est revenue avec une élève sur l'utilité de la formule de l'aire du triangle, élément qui n'avait pas été abordé de façon explicite avec le groupe. Aussi, l'analyse a montré que le mode de fonctionnement en groupe restreint dans le cadre du SDA a permis de clarifier des objets encore problématiques pour certains élèves. Enfin, toujours au niveau mésogénétique, la séance post a permis à Manon de revenir sur des objets plus anciens, comme la compréhension de la formule de l'aire du rectangle, nécessaire à la compréhension de la formule de l'aire du triangle.

Deuxièmement, au plan topogénétique, l'intervention en petit groupe dans le cadre du SDA post a permis à l'enseignante d'intervenir avec les élèves de façon individuelle, comme le montre l'étape 2, où Manon prend du temps avec chacun des élèves pour vérifier leur compréhension du calcul de l'aire d'un triangle. Également, nous avons pu observer que le fonctionnement en groupe restreint a permis aux élèves de poser des questions d'éclaircissement à Manon. C'était entre autres le cas de Roselyne qui se questionnait sur le besoin de diviser l'aire par 2 lorsque la hauteur est inscrite dans le triangle.

Enfin, au plan chronogénétique, l'analyse de la séance a montré que les élèves ciblés disposent de plus de temps pour l'institutionnalisation. Ce temps supplémentaire a permis à Manon de revenir sur des éléments restés implicites pour les élèves. Également, nous avons noté que, étant donné que le SDA post de Manon s'est déroulé une semaine après l'institutionnalisation en classe dans le SDP, cette séance est apparue comme une deuxième institutionnalisation – une institutionnalisation bis –, où Manon a convoqué à nouveau la technique institutionnalisée, c'est-à-dire la formule de l'aire du triangle.

II. DEROULEMENT DU SDA POST D'ISABELLE

Le dispositif principal de la situation-problème proposée par Isabelle porte sur les fractions et leur écriture. Les élèves, qui sont au 2e cycle du primaire[3], doivent partager des quantités et exprimer à l'écrit leurs réponses avec des fractions et des nombres fractionnaires[4]. Comme première tâche, à partir de cercles en carton et de ciseaux, les élèves doivent partager également 5 fromages entre 2 élèves. Comme deuxième tâche, toujours à partir de matériel concret, les élèves doivent partager également 7 tartes entre 4 enfants. La troisième tâche consiste à partager 4 carrés également entre 8 enfants. Contrairement aux deux premières tâches, celle-ci doit être réalisée entièrement sur une tablette numérique. Comme dernière tâche, à partir d'une feuille sur laquelle sont dessinés 6 rectangles, les élèves doivent partager 6 tablettes de chocolat entre 8 personnes. Pour toutes les tâches, la codification doit être faite sur une tablette numérique, de façon à pouvoir projeter les réponses au tableau blanc par la suite.

Lors du SDA post, l'enseignante propose des tâches qui, pense-t-elle, lui permettent de revisiter ce qui a été travaillé en classe. Trois tâches sont prévues : représenter d'une manière

[3] 8 à 10 ans
[4] Cette situation est inspirée des recommandations de Van de Walle et Lovin (2008).

analogique le nombre fractionnaire 2 ½ ; partager 2 barres de chocolat entre 3 personnes ; partager 3 barres de chocolat entre 5 personnes.

Pour être en mesure de mieux comprendre la séance, nous dressons la description suivante du SDA post :

1. Appel à la mémoire du groupe concernant l'activité vécue dans le cadre du SDP.
   « Ok, donc on aujourd'hui on se revoit. On a fait notre activité vendredi et aujourd'hui on est lundi. Puis moi j'aimerais savoir, comme ça, qu'est-ce que tu as retenu de cette activité-là ? »
2. Vérification de la compréhension du concept de la fraction auprès des 4 élèves ciblés.
3. Présentation d'une première tâche : représenter le nombre fractionnaire 2 ½.
   « On va y aller un petit peu à l'envers de ce qu'on a fait [Isabelle écrit sur des feuilles le nombre fractionnaire 2 ½] Es-tu capable de me l'illustrer Jules ? [Isabelle distribue au fur et à mesure les feuilles] ».
   Chacun des élèves essaie de représenter le nombre. Lors du retour collectif, Isabelle se rend compte que les élèves ont de la difficulté à représenter la partie entière.
4. Présentation de la deuxième tâche : partager 2 entiers (rectangles dessinés) en 3.
   « On va refaire un peu comme l'exercice qu'on a fait en classe [Isabelle distribue les feuilles], ok. Puis là, il va falloir que tu m'écrives qu'est-ce que ça fait. Donc, j'ai 2 barres de chocolat. Et moi, je veux les partager en 3 ».
   Chacun des élèves essaie de représenter le partage et de codifier la réponse. Tous réutilisent la technique utilisée dans le SDA pré, soit de partager chacun des entiers en 3 et de numéroter les 6 morceaux (1, 2, 3, 1, 2, 3). Alors que les élèves éprouvent des difficultés à codifier le partage, Isabelle les guide vers l'écriture fractionnaire.
5. Présentation de la troisième tâche : partager 3 entiers (rectangles dessinés) en 5.
   « J'ai 3 barres de chocolat, puis mes 3 barres de chocolat, je veux les partager en 5 personnes ».
   Chacun des élèves essaie de représenter le partage et de codifier la réponse. Isabelle réalise un retour individuel pour deux élèves et un retour collectif pour les deux autres qui ont plus de difficulté. La codification reste difficile pour les quatre élèves, particulièrement pour ceux qui ont commencé par diviser chaque rectangle en 2 pour faire ½ par personne, et qui ont ensuite divisé à nouveau la demie restante, pour faire 1/10 par personne.

III. ANALYSE DU SDA POST D'ISABELLE SELON LES FONCTIONS DECRITES

1. Fonction mésogénétique

Dans le cadre du SDA post d'Isabelle, nous avons pu retrouver des effets qui se sont manifestés dans le SDA post de Manon. En effet, au plan mésogénétique, nous avons noté que la séance post a permis aux élèves en difficulté de revenir sur le milieu et de clarifier certains objets encore sensibles comme le partage en parts égales et la codification de la fraction. Par contre, la représentation du nombre fractionnaire, qui n'a pas été approfondie dans le SDP, n'est pas allée en ce sens. En effet, dans le cadre du SDP, même si deux réponses sur quatre impliquaient un nombre fractionnaire écrit sous la forme a b/c (2 ½ et 1 ¾), l'accent a plutôt été mis sur la façon de codifier les parties fractionnaires.

Ainsi, pour débuter le SDA post, l'enseignante a demandé aux élèves d'illustrer 2 ½. L'entrevue qui a précédé la séance post permet de penser qu'Isabelle n'avait pas prévu de demander de faire illustrer un nombre fractionnaire par les élèves et que cette décision a été prise dans l'action, suite à un commentaire d'Olivier au tout début du SDA post :

> « Isabelle : Fiou ! ça été dur. Donc ça une fraction et ça c'est une fraction [Isabelle pointe les fractions ¾ et 1/3]. On sait que dans la fraction on a toujours deux parties. Les chiffres qui sont en haut et les chiffres qui sont en bas.
> Olivier : Et à côté ?
> Isabelle : Hein ?
> Olivier : Et à côté ?
> Isabelle : Des fois il y en a à côté. Qu'est-ce que tu veux dire ? C'est comme si je mettais un 2 là. Comme ça? [Isabelle écrit 2 sur la feuille] Puis la fraction tu l'écrirais comment ? À côté. Si je te dis une demie, écris-moi là à côté [Isabelle remet la feuille à Olivier].
> [L'élève a un peu de difficulté à écrire ½, mais après hésitations, il réussit]
> Isabelle : Ok, si je voulais illustrer ça : 2 et ½. Qu'est-ce que je ferais ? Est-ce que vous êtes capable de me le faire tout le monde ? »

Isabelle a toutefois introduit ce nouveau type de tâche comme étant le contraire de ce qui avait été fait auparavant :

> « On va y aller un petit peu à l'envers de ce qu'on a fait [Isabelle écrit sur des feuilles le nombre fractionnaire 2 ½]. »

Il ne s'agit pas du même type de tâche qu'elle propose aux élèves. L'enseignante fait appel à la mémoire didactique des élèves en convoquant un objet qu'elle croyait ancien. Par contre, s'il s'agissait d'un objet ancien s'inscrivant dans la continuité de la tâche pour elle, compte tenu qu'il ne s'agit pas du même type de tâche, cet objet est devenu nouveau pour les élèves.

Aussi, concernant les nombres choisis pour le SDA post, puisqu'ils impliquaient un partage en un nombre impair (3 et 5), contrairement aux partages faits lors du SDP (2, 4 et 8), nous considérons que le niveau de difficulté n'était pas le même, donc que le milieu était un peu différent. Par contre, ces nombres ont été choisis de façon éclairée par Isabelle.

> « Et je vais leur redonner un petit problème avec un rectangle qu'ils vont devoir fractionner en n'utilisant pas le 2. Justement pour voir comment ils vont se débrouiller avec le partage à ce moment-là. Où ils ne pourront pas y aller instinctivement : bien là je vais le découper en 2, puis là ça ne marche pas, je vais y aller en 4. Donc, je veux vérifier ça avec eux. Parce que ça, parce qu'ils n'ont pas été capables d'aller au-delà de ça. »

Les élèves ont donc été placés dans un milieu un peu différent de ce dont ils ont connu en SDP, mais cette modification était calculée par l'enseignante, qui souhaitait provoquer une technique de fractionnement différente lors du partage de l'entier.

2. Fonction topogénétique

Au niveau topogénétique, l'analyse permet de voir que les quatre élèves sont très engagés dans le dispositif et prennent réellement leur place d'élèves. Pour chacune des tâches, l'enseignante est revenue avec chacun des élèves, en considérant les différentes techniques présentées et en

allouant plus de temps à ceux qui en avaient plus besoin. On peut donc dire qu'au niveau conceptuel, elle laisse de l'espace et de l'ouverture aux élèves. Cela dit, lors de la deuxième tâche, comme on peut le voir dans l'extrait suivant, elle était somme toute assez près du guidage pour aider les élèves à codifier leur fraction.

Aussi, le groupe restreint a permis aux élèves de poser des questions et de faire des affirmations qu'ils n'auraient peut-être pas faites en grand groupe. Prenons comme exemple le cas d'Olivier qui, suite à une question d'Isabelle, a affirmé qu'il peut y avoir un nombre à côté de la fraction. Comme nous venons de le voir, cette affirmation a fait en sorte qu'Isabelle a fait le choix d'introduire un nouvel objet dans le milieu.

3. Fonction chronogénétique

Au plan chronogénétique, la séance post a permis aux élèves d'avoir plus de temps que les autres élèves pour approfondir leur compréhension d'objets implicites ou encore, d'objets qui étaient restés sensibles, comme la codification des fractions et le partage en parts égales. Par exemple, dans l'extrait suivant, on voit que l'enseignante prend du temps pour distinguer la fonction du numérateur et du dénominateur, sans toutefois nommer aucun des deux, tout comme ça été le cas lors du SDP.

> « Ok. Comment tu vas écrire ta réponse pour me dire combien ça faire de morceaux que chacun reçoit ? »
> « 2 »
> « 2 morceaux. Donc ça, s'il reçoit 2 morceaux ça va aller où dans ta fraction ? En haut ou en bas ? »
> « En haut. »
> « En haut. Ok, écris-le. [Olivier prend son crayon] Écris la partie en haut puis après on va regarder comment faire pour la partie bas »
> « OK »
> « Qu'est-ce qu'on va écrire en bas ? C'est quoi mon tout ? »

Par contre, contrairement au SDA post de Manon, nous ne pouvons pas affirmer qu'il y a eu institutionnalisation forte puisque l'enseignante s'est à peine détachée du contexte pour prendre une distance. Nous pouvons constater la même chose à l'aide de l'exemple suivant, qui concerne le partage en parts égales :

> « Penses-tu qu'il va y avoir un ami jaloux si tu lui donnes un gros morceau comme ça et puis les deux autres tu ne leur donnes juste une demie, un petit morceau? ».

Ainsi, Isabelle reste toujours très près du contexte des problèmes présentés, ce qui ne nous permet pas de dire qu'il y a eu une reprise de l'institutionnalisation, contrairement au SDA post de Manon.

IV. CONCLUSION

En conclusion, malgré les quelques différences observées, nous avons pu faire ressortir des éléments communs aux deux SDA post. Au plan mésogénétique on peut dire que dans les deux cas il y a eu retour sur des objets encore sensibles. Par contre, la séance post de Manon lui avait permis de revenir sur des objets restés implicites ainsi que sur des objets plus anciens, ce qui ne semble pas avoir été le cas pour Isabelle. De même, cette enseignante a introduit un nouveau type

de tâche dans le milieu, ce qui s'est avéré problématique. Au plan topogénétique, dans les deux cas, le travail en petit groupe que permet le SDA a permis aux enseignantes de donner plus de temps à leurs élèves et aussi, a fait en sorte que les élèves pouvaient poser plus de questions à leur enseignante. De plus, dans les deux SDA post, on peut dire que les élèves étaient très engagés. Les différences sont plus importantes au plan chronogénétique. En effet, dans les deux cas il y a eu plus de temps pour les apprentissages, mais dans le cas de Manon, il s'agissait d'une institutionnalisation bis, ce qui n'a pas été le cas pour Isabelle.

À la lumière de ces analyses nous pouvons affirmer que nous retrouvons des effets potentiels des trois fonctions évoquées plus haut dans l'expérimentation des deux dispositifs post. Évidemment, cela prendra d'autres analyses pour pouvoir tirer des conclusions en ce sens. Ces analyses, qui sont en cours de réalisation, seront présentées lors de notre communication.

REFERENCES

Assude T., Millon-Fauré K., Koudogbo J., Morin M.-P., Tambone J. et Theis L. (2016). Du rapport entre temps didactique et temps praxéologique dans des dispositifs d'aide associés à une classe. *Recherche en didactique des mathématiques, 36*(2), 197-230.

Assude T., Koudogbo J., Millon-Fauré K., Tambone J., Theis L. et Morin M.-P. (2015). Mise à l'épreuve d'un dispositif d'aide aux difficultés d'un système didactique. *Revue canadienne de l'enseignement des mathématiques, des sciences et des technologies, 16*(1), 64-76.

Astolfi J.-P. (1993). Placer les élèves dans une situation-problème ? *Probio-Revue, 16*(4), 311-321.

Chevallard Y. (1995). La fonction professorale : esquisse d'un modèle didactique. *In* R. Noirfalise et M.-J. Perrin (dir.), *Actes de la VII^e école d'été de didactique des mathématiques (p. 83-122). Clermont-Ferrand : IREM.*

Gouvernement du Québec (2001). *Programme de formation de l'école québécoise. Éducation primaire et préscolaire*. Québec : Ministère de l'Éducation.

Millon-Fauré K., Assude T., Koudogbo J., Morin M.-P., Tambone J. et Theis L. (sous presse). Comparaison des mises en œuvre d'un même dispositif d'aide dans des contextes différents. *Éducation et didactique*.

Sensevy G., Mercier A. et Schubauer-Leoni M.-L. (2000), Vers un modèle de l'action didactique du professeur. A propos de la course à 20. *Recherches en didactique des mathématiques,* 20.3, 263-304.

Tambone J. (2014), Enseigner dans un dispositif auxiliaire: le cas du regroupement d'adaptation et de sa relation avec la classe d'origine. *Les sciences de l'éducation - pour l'ère nouvelle, 47*(2), 51-71.

Theis L., Morin M.-P., Tambone J., Assude T., Koudogbo J. et Millon-Fauré K. (2016). Quelles fonctions de deux systèmes didactiques auxiliaires destinés à des élèves en difficulté lors de la résolution d'une situation-problème mathématique ? *Annales de didactique et de sciences cognitives, 21*, 9-38. IREM de Strasbourg.

Theis L., Assude T., Tambone J., Morin M.-P., Koudogbo J. et Marchand P. (2014). Quelles fonctions potentielles d'un dispositif d'aide pour soutenir la résolution d'une situation-problème mathématique chez des élèves en difficulté du primaire ? *Éducation et francophonie, 42*(2), 160-174.

Van de Walle J.A. et Lovin L.H. (2008). *L'enseignement des mathématiques. L'élève au centre de son apprentissage TOME 2*. Saint-Laurent : ERPI.

ANALYSE DIDACTIQUE DE TESTS VISANT A EVALUER LES COMPETENCES MATHEMATIQUES DE BASE DANS LE CADRE SCOLAIRE OU DU DIAGNOSTIC DE LA DYSCALCULIE

PETEERS* Florence

Résumé – Nous cherchons à concilier les différentes approches (didactique et cognitive) de la dyscalculie pour une meilleure compréhension du trouble et présentons une méthodologie d'analyse de tests visant à évaluer les compétences mathématiques de base dans le cadre scolaire ou d'un diagnostic médical. Cette méthode permet d'identifier ce qui est évalué et de mettre en évidence certains biais grâce aux cadres didactiques mobilisés. Nous illustrerons cela par l'analyse du Tedi-Math (test diagnostique francophone).

Mots-clefs : dyscalculie, didactique, cognition numérique, diagnostic, tests

Abstract – We seek to reconcile the different approaches (didactic and cognitive) of dyscalculia for a better understanding of the disorder and present an analysis methodology for tests which are designed to evaluate basic mathematics within the framework of school or medical diagnosis. This method enables to identify what is evaluated in each test and to highlight some biases thanks to mobilized didactics frameworks. We illustrate that by the analysis of the Tedi-math (francophone diagnostic test).

Keywords: dyscalculia, didactics, numerical cognition, diagnosis, tests

I. CONTEXTE ET OBJECTIFS DE LA RECHERCHE

Nous présenterons dans cet article une partie de nos recherches réalisées dans le cadre d'une thèse en cours co-financée par la Communauté d'Agglomération de Châlons-en-Champagne et l'Université de Reims Champagne-Ardenne. Dans cette première partie, nous décrirons quelques éléments de contexte ainsi que les objectifs de notre travail

1. La dyscalculie : définitions et approches

La frontière n'est pas évidente entre ce qui relève de difficultés d'apprentissage et ce qui constitue réellement un trouble, pouvant donc être reconnu comme un handicap[1] : c'est le cas de la dyscalculie. La recherche à ce propos (que ce soit en didactique des mathématiques, en psychologie ou en sciences cognitives) présente, à l'heure actuelle, de nombreuses lacunes et incertitudes (comme le fait remarquer Fischer, 2007). Aucune définition du « trouble » ne fait consensus parmi les chercheurs. Le terme même de dyscalculie pose question car il n'est pas employé universellement (certains parleront plutôt de *learning disabilities in mathematics* ou encore de *arithmetic disabilities*, INSERM, 2007). De plus, les critères utilisés pour établir un diagnostic (voir DSM-V[2] (*American Psychiatric Association*, 2015)) sont flous ce qui rend l'identification des enfants dyscalculiques par le corps médical extrêmement subjective.

Différentes disciplines s'intéressent à la dyscalculie et développent chacune des modèles et des hypothèses propres à leur domaine de connaissance (Giroux, 2011). On retrouve deux approches distinctes du trouble. L'une est centrée sur le fonctionnement cognitif et les caractéristiques propres à l'individu. Elle repose principalement sur les travaux issus des sciences cognitives pour lesquelles les difficultés spécifiques en mathématiques sont liées à

* LDAR – France – florence.peteers@etudiant.univ-reims.fr

[1] Selon la loi du 11 février 2005, « Constitue un handicap (…) toute limitation d'activité ou restriction de participation à la vie en société subie dans son environnement par une personne en raison d'une altération substantielle, durable ou définitive d'une ou plusieurs fonctions physiques, sensorielles, mentales, cognitives ou psychiques, d'un polyhandicap ou d'un trouble de santé invalidant ». Cette définition inclus donc les troubles des apprentissages au sens où ils résultent d'un dysfonctionnement cognitif.

[2] *Diagnostic and Statistical Manual of Mental Disorders*

un dysfonctionnement sur le plan neurologique (voir par exemple Dehaene, 2010). La seconde approche, caractéristique de la didactique des mathématiques, s'intéresse, quant à elle, aux spécificités du savoir ainsi qu'aux caractéristiques didactiques des situations d'apprentissage. Selon cette approche, les difficultés ne sont pas uniquement dues à un dysfonctionnement propre à l'individu mais il faut également chercher ce qui, dans le rapport de l'élève au savoir et aux situations didactiques, empêche ou favorise l'accès des élèves à la connaissance. Cette multiplicité et ce cloisonnement des approches n'est pas sans conséquences sur le terrain. En effet, de nombreux acteurs gravitent autour des enfants/élèves dyscalculiques et tous ne s'appuient pas sur les mêmes approches du trouble, les professionnels médicaux et paramédicaux se situant plutôt du côté des sciences cognitives et les enseignants du côté de la didactique. Le dialogue entre ces acteurs est donc parfois difficile, d'autant plus que le secret médical empêche la diffusion de certaines informations. Cela est particulièrement problématique en ce qui concerne les échanges entre enseignants et orthophonistes qui sont les intervenants majeurs auprès de l'enfant/élève dyscalculique.

2. Objectifs

Les recherches concernant les troubles d'apprentissage (et en particulier la dyscalculie) étant, à l'heure actuelle, principalement axées sur l'approche cognitiviste, nous nous posons la question de la place de la didactique dans ces recherches et de la façon de concilier les différentes approches pour une meilleure compréhension de la dyscalculie.

Nous disposons cependant de contraintes pratiques. En effet, la thèse étant cofinancée par la Communauté d'Agglomération de Châlons-en-Champagne, nous sommes tenus de produire des résultats pour/sur le terrain. Au vu de ces contraintes, nous envisageons donc la coordination des approches à travers la création d'un dispositif de repérage de difficultés en mathématiques pouvant être utilisé à la fois par les enseignants et par les orthophonistes. Ce dispositif faciliterait ainsi les échanges entre ces deux types de professionnels en proposant un inventaire commun des difficultés de l'enfant qui puisse être exploité par chacun (en vue d'un diagnostic pour l'orthophoniste et en vue d'adaptations pédagogiques pour l'enseignant).

Pour mettre au point ce dispositif, nous avons réalisé une analyse de différents tests destinés à évaluer les compétences de base en mathématiques en fin de maternelle ou à l'entrée à l'école fondamentale. Afin d'assurer la diversité des fondements théoriques, nous avons sélectionné des tests à visée diagnostique utilisés par les professionnels médicaux (tests issus majoritairement de la recherche en cognition numérique) mais également des tests permettant l'évaluation de l'enfant dans le cadre scolaire élaborés sur base d'éléments issus de la didactique des mathématiques. Nous présentons ici la méthodologie employée et nous l'illustrerons par l'analyse d'un test diagnostique francophone : le Tedi-Math (test élaboré en France par Van Nieuwenhoven, Grégoire et Noël (2001), dont la langue d'origine est le français et destiné aux professionnels médicaux tels que les orthophonistes).

II. METHODOLOGIE

Afin de définir nos critères d'analyse, nous avons effectué un état de l'art concernant la construction du nombre et les premiers apprentissages numériques en didactique ainsi qu'en cognition numérique. Nous avons ainsi mis en évidence différentes tâches relatives au nombre et les variables pouvant jouer sur la complexité de ces tâches ou sur les stratégies de résolution. Ce sont ces variables qui constituent nos critères d'analyse. Du côté de la didactique, la théorie des situations didactiques de Brousseau (1998) et certains travaux y référant (Briand, 1993 et Tempier, 2013) nous ont permis d'identifier les situations donnant

sens au nombre ainsi que leurs variables didactiques. De plus, grâce à la théorie des champs conceptuels de Vergnaud (1990), nous avons pu dégager des critères d'analyse relatifs aux problèmes additifs. Du côté de la cognition numérique, nous avons identifié les caractéristiques des représentations numériques en fonction des différents modèles de traitement du nombre (notamment le modèle du triple code de Dehaene[3], 1992, le modèle de McCloskey, 1985, et le modèle développemental de Von Aster et Shalev, 2007). Nous avons également dégagé des critères d'analyse relatifs au fonctionnement cognitif des activités mathématiques (sur base de modèles comme le modèle de choix stratégiques de Shrager et Siegler, 1998, pour le calcul, par exemple, ou le modèle de Barrouillet, Camos, Perruchet, et Seron, 2004, pour le transcodage). Enfin, nous avons étudié l'impact de certaines fonctions cognitives sous-jacentes (mémoire de travail, fonctions attentionnelles, habiletés visuo spatiales et gnosies digitales) dans les activités mathématiques.

Afin d'articuler nos critères au sein d'une grille d'analyse fonctionnelle, nous avons identifié, sur base de nos deux revues de littérature, quatre grandes catégories de tâches (tâches où le nombre est utilisé pour exprimer une quantité ou une position, tâches de résolution d'opération, tâches portant sur les codes numériques et le transcodage et tâches visant à évaluer la représentation mentale du nombre). Nous avons ensuite répertorié, dans les tests, les tâches relatives à ces quatre catégories et repris les critères identifiés dans nos revues pour les analyser. Les grilles d'analyse relatives à nos quatre catégories de tâches sont décrites dans la suite de cette section.

1. Tâches où le nombre est utilisé pour exprimer une quantité ou une position

Le nombre permet de désigner des quantités (aspect cardinal) et des positions (aspect ordinal). Nous avons donc recherché dans chacun des tests si ces deux fonctions étaient présentes. Pour ce qui est de l'utilisation du nombre pour désigner une quantité, nous avons analysé plus en détails les quatre procédures de quantification que nous avons pu identifier dans les deux revues de littérature (didactique et cognition numérique) : la correspondance terme à terme, le dénombrement, l'estimation et le *subitizing*. La figure suivante résume les différents critères retenus pour ces types de tâches (critères didactiques, cognitifs et commun aux deux champs disciplinaires) :

[3] Ce modèle postule l'existence de trois systèmes de représentation des nombres : le code oral, dans lequel les nombres sont représentés par des ensembles de mots (par exemple : « trois » prononcé \tʁwɑ\), le code arabe, dans lequel les nombres sont représentés par des chiffres arabes (par exemple : « 3 ») et le code analogique non symbolique permettant d'appréhender le sens du nombre (par exemple : o o o).

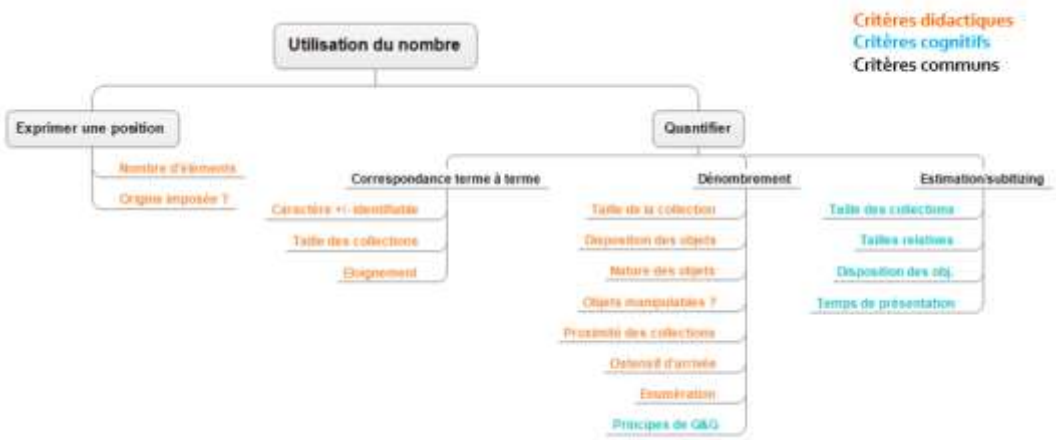


Figure 1 *– Critères d'analyse des tâches dans lesquelles le nombre est utilisé pour exprimer une position/quantifier*

2. Tâches visant à évaluer les représentations du nombre

Il existe différentes théories en cognition numérique relatives à la nature des représentations de la magnitude des nombres (Noël, 2005). Dans chaque test, nous avons donc recherché les types de représentation (décimale ou analogique) évalués et la façon dont ces représentations sont évaluées. Nous avons identifié 3 grands types de tâches permettant d'évaluer les représentations analogiques : les tâches de comparaison analogique, les tâches de comparaison faisant intervenir le code oral ou arabe ainsi que celles de placement sur une ligne numérique. En ce qui concerne l'évaluation des représentations décimales et de la compréhension de notre système de numération, nous avons considéré deux grands types de tâches : les tâches relatives aux écritures des nombres et les tâches faisant intervenir des collections matérielles. La figure suivante présente les différents critères utilisés pour l'analyse de ces différents types de tâches.

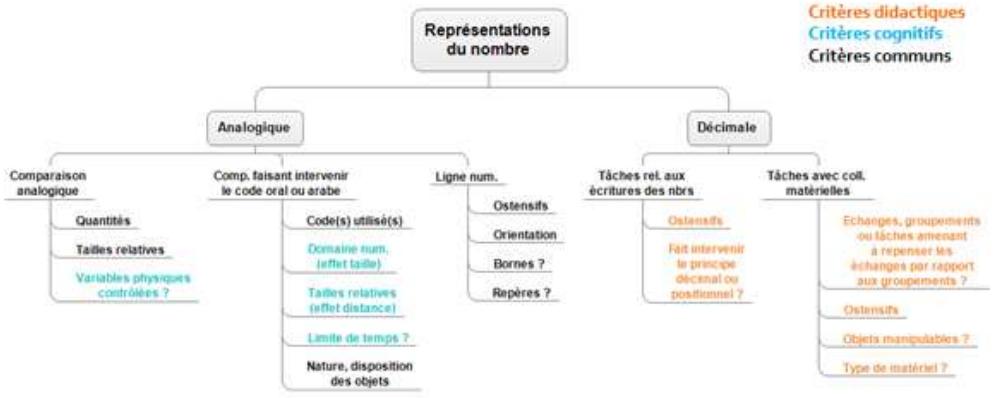


Figure 2 *– Critères d'analyse des tâches dans lesquelles interviennent différentes représentations du nombre*

3. Tâches portant sur les codes numériques et le transcodage

Nous avons également identifié dans les tests les éventuelles tâches permettant de déterminer la maîtrise du code oral (étendue de la partie stable et conventionnelle de la suite numérique verbale ainsi que son organisation selon le modèle de Fuson et al., 1982). Nous avons également recensé les autres types de tâches visant spécifiquement l'évaluation de la

maîtrise du code oral par l'enfant. Nous avons fait de même pour le code écrit. En ce qui concerne le passage d'un code à l'autre, nous avons retenu les critères suivants :



Figure 3 *– Critères d'analyse des tâches de transcodage*

4. Tâches de résolution d'opérations

Enfin, nous avons identifié parmi les tâches proposées dans les tests, trois catégories de tâches nécessitant la résolution d'une opération : les opérations analogiques faisant intervenir un support matériel (de type boîte noire, par exemple), les opérations symboliques (par exemple, « 2+3= … ») faisant intervenir le code écrit ou oral et les opérations à énoncé verbal consistant à résoudre un problème faisant intervenir une opération. Les critères utilisés pour l'analyse de ces différentes catégories de tâches sont résumés dans la figure suivante :

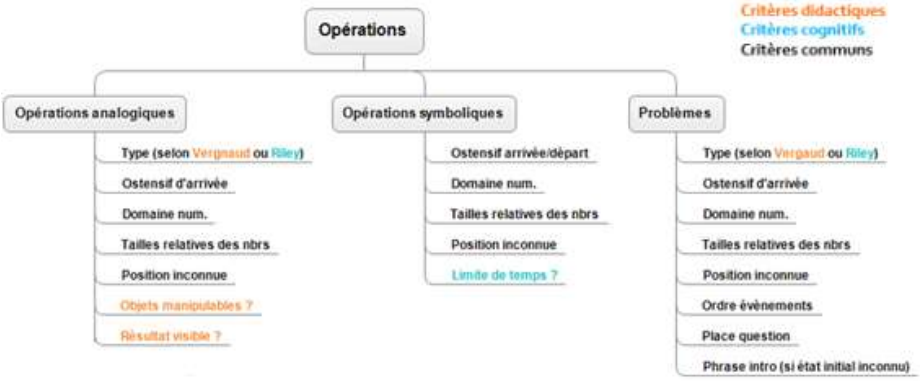


Figure 4 *– Critères d'analyse des tâches de résolution d'opérations*

III. ANALYSE DU TEDI MATH

La batterie de test Tedi-Math (Van Nieuwenhoven et al., 2001) a été mise au point en 2001 sur la base de fondements théoriques issus de la théorie piagétienne du nombre mais également de connaissances plus récentes en neuropsychologie et sciences cognitives. Il s'agit d'une batterie « papier-crayon » en français dont l'utilisation est destinée à divers professionnels médicaux (orthophonistes, psychologues, …) dans le but de diagnostiquer les composantes déficitaires des compétences numériques. Elle s'adresse à des enfants de la moyenne section maternelle au CE2 (c'est-à-dire entre 4 et 9 ans) et a été étalonnée sur 583 enfants français et belges francophones.

1. Utilisation du nombre

Le Tedi-Math ne comporte pas d'épreuves dans lesquelles le nombre est utilisé dans son aspect ordinal. Quant aux procédures de quantification, seul le dénombrement est évalué et

cela à travers différents types de tâches. Certaines évaluent la procédure en elle-même (principes de Gelman et Gallistel) : l'enfant doit dire combien d'éléments comporte une collection donnée (avec variation de la disposition et de la nature des éléments). D'autres cherchent à évaluer le recours spontané au dénombrement : l'enfant doit construire une collection équipotente à une collection donnée.

Concernant les variables utilisées dans ces tâches, deux éléments peuvent être soulignés. Tout d'abord, lors de la construction de collection équipotente, la collection modèle reste accessible, ce qui ne favorise pas l'utilisation de procédures faisant appel au dénombrement, la correspondance terme à terme restant possible. Pourtant, la tâche ne sera considérée comme réussie que si l'enfant effectue un dénombrement. Ensuite, les collections qui interviennent dans les tâches de dénombrement sont toujours composées d'objets non manipulables (illustrations sur papier). Or, l'énumération est plus compliquée pour ce type de collection (Briand, 1993). En effet, la séparation entre objets comptés et non comptés doit se faire mentalement, l'enfant ne disposant pas de quoi effectuer un marquage. Des difficultés d'énumération peuvent donc avoir des répercussions sur les tâches de dénombrement du test et celles-ci ne seront pas identifiées puisqu'aucune tâche ne permet l'évaluation de cette compétence particulière qu'est l'énumération.

2. Représentations du nombre

D'après ses auteurs (Van Nieuwenhoven et al., 2001), le Tedi-Math permet d'évaluer les représentations analogiques (comparaison de collections) ainsi que l'accès aux représentations analogiques via les codes symboliques (comparaison de nombres oraux et arabes). Il ne contient, en revanche, pas de tâche de placement sur une ligne numérique.

En ce qui concerne la représentation en base 10, on retrouve une seule tâche mettant en jeu le code arabe : l'enfant doit entourer, dans un nombre donné, le chiffre des unités ou le chiffre des dizaines. C'est donc la connaissance des conventions concernant le nom donné au chiffre suivant sa position dans le nombre qui est évaluée.

Les autres tâches consistent à dénombrer oralement une quantité (inférieure à 40) représentée par du matériel proportionnel[4] (bâtonnets et paquets de 10 bâtonnets) ou non-proportionnel (petits jetons de 1€ et grands jetons de 10€) ou inversément à produire la quantité correspondant à un nombre donné. Il est aussi demandé à l'enfant s'il est nécessaire d'ouvrir un fagot si on veut retirer un certain nombre de bâtonnets d'une collection évoquée oralement (par exemple, si on a 15 bâtonnets et qu'on en retire 7). Ce qui est évalué ici ce n'est pas la compréhension de la signification des chiffres en fonction de leur position dans l'écriture du nombre puisque le code écrit n'intervient pas mais la représentation mentale d'un nombre donné oralement (conception dizaine/unité basée sur la numération verbale).

3. Codes et transcodage

Le Tedi-Math évalue, d'après ces concepteurs (Van Nieuwenhoven et al., 2001), la reconnaissance du code oral et arabe à travers une épreuve reconnaissance de chiffres arabes parmi d'autres symboles et de nombres lus parmi d'autres mots ainsi qu'à travers une épreuve de jugement grammatical d'expressions numériques (peut-on dire : « J'ai quinze onze billes » ?). L'étendue de la chaîne numérique et son organisation sont également testées.

En ce qui concerne le transcodage, le test propose une tâche de lecture et écriture de nombres. Parmi les nombres à transcoder (limités à 3 chiffres), on retrouve des primitives

[4] Nous empruntons cette terminologie à Tempier (2013)

lexicales (les primitives lexicales étant les nombres de 1 à 16, dizaines et puissances de 10), des nombres avec zéros ainsi que des dizaines complexes (70, 80 et 90). Cette tâche rend donc possible une caractérisation précise des difficultés de transcodage.

4. Opérations

Les trois catégories de tâches (opérations analogiques, symboliques et problèmes) permettant d'évaluer la maîtrise des opérations sont présentes dans le Tedi-Math. Les opérations de type analogique testées sont de type composition de mesures avec recherche du tout et transformation de mesures négative avec recherche de l'état final[5] (selon la classification de Vergnaud, 1990). Elles sont présentées avec un support imagé et un résultat visible et peuvent donc être résolues par dénombrement. Les opérations symboliques (additions et soustractions de nombres inférieurs à 100 et multiplications de nombres inférieurs à 10) sont écrites en chiffres arabes et leur résolution n'est ni chronométrée ni limitée dans le temps, ce qui ne permet pas d'identifier les calculs automatisés ou non. Enfin, pour ce qui est des opérations à énoncé verbal et de la formulation des énoncés, l'ordre chronologique est respecté, la question se situe toujours à la fin et une phrase introduit le problème si l'état final est inconnu. Les problèmes sont uniquement de type transformations positives ou négatives de mesures avec recherche de l'état final, initial ou de la transformation.

Notons également que le Tedi-Math propose diverses tâches visant à évaluer les opérations logiques (sériation, classification, conservation, inclusion) dans des situations numériques uniquement. En revanche, aucune tâche spécifique ne permet l'évaluation de fonctions cognitives sous-jacentes telles que la mémoire de travail ou les fonctions visuo-spatiales.

5. Conclusions de l'analyse

Notre analyse nous permet d'identifier clairement ce qui est évalué par le dispositif et ce qui ne l'est pas. Ces éléments sont synthétisés dans le tableau ci-dessous.

Ce qui est évalué dans le Tedi-math	Ce qui n'est pas évalué dans le Tedi-math
Organisation et étendue de la suite numérique verbale	Aspect ordinal du nombre
Dénombrement (principes de Gelman et Gallistel)	Enumération
Coordination comptage oral/pointage	Estimation et *subitizing* pour quantifier une collection
Comparaisons analogiques	Représentation sur une ligne numérique
Représentation analogique du nombre via le code oral et le code arabe	Compréhension du système de numération décimal positionnel
Représentation en base 10 d'un nombre oral	Opérations de type comparaison de mesures, composition de transformations, transformation d'une relation et composition de relations
Reconnaissance du chiffre des unités/dizaines	Faits arithmétiques (tables d'addition et de
Reconnaissance du code oral et du code	

[5] La tâche est réalisée avec un support imagé et les énoncés sont de type « Sur cette image, il y a deux ballons rouges et trois ballons bleus. Combien y a-t-il de ballons en tout ? » (composition de mesures) ou encore « Le monsieur tient cinq balles sur son doigt. Si deux balles tombent, combien restera-t-il de balles sur son doigt ? » (transformation de mesures négative)

arabe Transcodage des nombres de 1 à 3 chiffres Résolution d'opérations analogiques (composition de mesures positive et transformation de mesures négative), verbales (transformation de mesures) et symboliques (+, - , x) Opérations logiques	multiplication) Fonctions cognitives sous-jacentes (mémoire, fonctions attentionnelles/ exécutives, visuo-spatiales et gnosies digitales)

Tableau 1 *– Eléments évalués et non évalués dans le Tedi-Math*

De plus, l'analyse didactique des variables choisies nous permet de remettre en question certaines tâches. C'est le cas notamment de la tâche consistant à construire une collection équipotente à une collection donnée dans laquelle les variables choisies ne favorisent pas les procédures attendues comme nous l'avons précisé précédemment.

IV. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Les cadres didactiques que nous avons mobilisés (théorie des situations didactiques et des champs conceptuels), en plus de nous servir d'outil d'analyse nous permettant de structurer notre grille, nous apportent également un autre regard sur les tests issus de la cognition numérique qui ne sont pas destinés au milieu scolaire. Ils fournissent ainsi un cadre d'analyse critique permettant de mettre en évidence certains biais de ces tests au regard de ce qui est enseigné et des connaissances en didactique (éléments non évalués comme l'énumération ou remise en question du choix des variables dans certaines tâches). Ces éléments confortent donc l'intérêt de la didactique des mathématiques dans la recherche concernant la dyscalculie, en particulier en ce qui concerne le diagnostic.

Par la suite, nous avons dégagé un ensemble de tâches pouvant être exploitées par les différents professionnels concernés (en particulier, par les enseignants et les orthophonistes). Les caractéristiques de ces tâches ont été déterminées en regard de notre analyse des tests et de l'ensemble de l'état de l'art réalisé (en didactique et cognition numérique). C'est sur cette base que nous avons conçu un dispositif de repérage de difficultés en mathématiques dont l'étude expérimentale est actuellement en cours.

REFERENCES

American Psychiatric Association. (2015) *Manuel diagnostique et statistique des troubles mentaux (DSM-5)*. Paris, France : Elsevier Masson.

Barrouillet P., Camos V., Perruchet P., & Seron X. (2004) ADAPT: a developmental, asemantic, and procedural model for transcoding from verbal to arabic numerals. *Psychological review* 111(2), 368-394.

Briand J. (1993) *L'énumération dans le mesurage des collections. Un dysfonctionnement dans la transposition didactique*. Thèse. Université de Bordeaux-I.

Brousseau G. (1998) *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Dehaene S. (1992) Varieties of numerical abilities. *Cognition* 44, 1–42.

Dehaene S. (2010) *La bosse des maths : Quinze ans après*. Paris : Odile Jacob.

Fischer J.-P. (2007) Combien y a-t-il d'élèves dyscalculiques ? *ANAE Approche neuropsychologique des apprentissages chez l'enfant* 93, 141-148.

Fuson K. C., Richards J., & Briars D. J. (1982) The acquisition and elaboration of the number word sequence. *Children's logical and mathematical cognition* 1, 33‑92.

Giroux J. (2011) Pour une différenciation de la dyscalculie et des difficultés d'apprentissage. In V. Freiman, A. Roy & L. Theis (Éd.) *Actes du colloque du Groupe de Didactique des Mathématiques du Québec* (pp. 148-158).

Institut National de Santé et de Recherche Médicale (2007) *Expertise collective. Dyslexie, dysorthographie, dyscalculie. Bilan des données scientifiques*. Paris : Éditions INSERM.

Ministère de la Santé et des Solidarités (2005) *Loi n° 2005-102 du 11 février 2005 pour l'égalité des droits et des chances, la participation et la citoyenneté des personnes handicapées* (JO n°36 du 12 février 2015). Repéré à https://www.legifrance.gouv.fr/affichTexte.do?cidTexte=JORFTEXT000000809647&categorieLien=id

McCloskey M., Caramazza A., & Basili A. (1985) Cognitive mechanisms in number processing and calculation : evidence from dyscalculia. *Brain Cognition* 4, 171-196.

Noël M. P. (2005) La représentation sémantique du nombre : son développement et ses troubles. In M. P. Noël (Éd.), *La dyscalculie. Trouble du développement numérique de l'enfant* (pp. 105-137). Marseille : Solal.

Shrager J., Siegler R. S. (1998) SCADS: A model of children's strategy choices and strategy discoveries. *Psychological Science* 9(5), 405‑410.

Tempier F. (2013) *La numération décimale à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource*. Thèse de doctorat. Université Paris-Diderot-Paris VII.

Van Nieuwenhoven C., Grégoire J., & Noël M.P. (2001) *Tedi-Math. Test diagnostique des compétences de base en mathématiques*. Paris : ECPA.

Vergnaud G. (1990) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 10/2-3, 133-170.

Von Aster M., Shalev R. S. (2007) Number development and developmental dyscalculia. *Developmental Medicine & Child Neurology* 49, 868–873.

ACCOMPAGNER LES ENSEIGNANTS SPÉCIALISÉS DANS L'ÉVALUATION DES COMPÉTENCES MATHÉMATIQUES DE LEURS ÉLÈVES

REYDY[*] Carine – URRUTY[**] Patrick

Résumé – Dans le cadre d'un projet de formation-recherche, nous étudions les pratiques d'évaluation en mathématiques des enseignants qui s'adressent à des élèves présentant des troubles importants des fonctions cognitives. Nous présentons deux phases de notre projet : la première concerne l'analyse des pratiques déclarées par les enseignants spécialisés confrontée à celle d'enseignants ordinaires sur ce point, la seconde présente une proposition de dispositif d'évaluation adapté.

Mots-clefs : pratiques enseignantes, évaluation, mathématiques, besoins éducatifs particuliers, handicap

Abstract –As part of a research-training project, we study the practices of teachers who work with pupils with significant cognitive in the assessment of mathematical skills. We present two phases of our project: the first one concerns the analysis of the declared practices of specialized teachers compared to those of ordinary teachers on this point, the second presents a proposal for an adapted evaluation device.

Keywords: teaching practices, evaluation, mathematics, special needs, handicap

I. L'ÉVALUATION DANS L'ENSEIGNEMENT SPÉCIALISÉ : UNE QUESTION VIVE

1. Les injonctions officielles

Nous nous intéressons aux pratiques d'évaluation en mathématiques des enseignants qui s'adressent à des élèves dont le handicap relève de troubles importants des fonctions cognitives. Ils bénéficient d'un groupe-classe à faible effectif (au plus 15 élèves en ULIS[1]), mais les élèves présentent des troubles variés allant de la grande difficulté scolaire à des troubles importants du comportement ou des formes d'autisme ou de psychoses infantiles. Le groupe est en général très hétérogène : l'âge des élèves varie de plusieurs années au sein d'un même groupe, leurs connaissances sont très inégales, leurs capacités d'attention diffèrent. L'évaluation des compétences des élèves est au cœur du métier des enseignant spécialisés. En effet, leur référentiel de compétences précise qu'ils doivent contribuer

> à l'élaboration de parcours de formation adaptés visant une bonne insertion sociale et professionnelle, en se dotant et utilisant des méthodes et outils d'évaluation adaptés, […] en adaptant les situations d'apprentissage, les supports d'enseignement et d'évaluation, en élaborant ou en contribuant à l'élaboration et la mise en œuvre de projets individualisés dans une perspective d'un parcours de réussite. (MEN, 2017a).

Bloom et al. (1971) ont défini trois types d'évaluation : diagnostique, formative et sommative. Dans les recherches récentes (Allal & Mottier-Lopez, 2007), la notion de remédiation est remplacée par celle de régulation des apprentissages : il s'agit, en combinant les dispositifs d'évaluation diagnostique, formative et sommative, de donner des informations qui permettent à l'élève de modifier ou d'ajuster son travail. En référence à ces travaux, nous entendons par évaluation tout ce que l'enseignant fait pour prendre des informations sur ce que font ou savent les élèves, la façon dont il interprète ces informations et les exploite. En ce sens, l'évaluation est indissociable du processus d'apprentissage. Cette vision nous semble particulièrement adaptée au contexte de l'enseignement spécialisé.

[*] ESPE d'Aquitaine, laboratoire Lab-E3D – France – Carine.Reydy@u-bordeaux.fr
[**] ESPE d'Aquitaine – France – Patrick.Urruty@u-bordeaux.fr
[1] Unité Localisée pour l'Inclusion Scolaire

2. Des difficultés constatées

Les enseignants spécialisés décrivent l'évaluation comme l'une des principales pierres d'achoppement de leur métier. En effet, ils disposent de très peu d'outils pour évaluer leurs élèves en mathématiques. Puisqu'il n'existe pour ainsi dire pas de ressources qui soient spécifiquement dédiées à ce public, ils les empruntent en général à l'enseignement ordinaire ou à d'autres corps de métier (orthophonistes par exemple) et les adaptent à leurs élèves. Plusieurs travaux témoignent des difficultés qu'ils rencontrent. Par exemple,

> Les enseignants d'IME sont démunis face au système d'évaluation normatif car même lorsque les élèves ont progressé, leurs compétences ne sont pas assez solides pour qu'on puisse les considérer comme acquises. Cela ne veut pas dire que ces élèves ne savent rien, bien au contraire, mais leurs acquis ne sont observables que dans un cadre prédéfini qui tient compte des difficultés d'adaptation et de l'insécurité générée par une situation nouvelle non vécue antérieurement. (Portevin-Serre, 2016, p.79)

De plus dans un précédent travail (Reydy, 2015), nous avons montré des phénomènes de distorsion entre les intentions des enseignants spécialisés et les évaluations effectivement produites et leur déroulement, phénomènes que nous avons pu imputer à différents facteurs : injonctions officielles plus fortes que pour l'école ordinaire en terme d'évaluation, manque de ressources adaptées aux spécificités des élèves, nécessité de prendre en considération des aspects psychologiques liés aux troubles des élèves, d'autres liés à leur âge et à leurs centres d'intérêt, souvent en décalage avec les notions abordées, malentendus en formation.

3. Une situation paradoxale

En France, la formation des enseignants spécialisés relève de la formation continue et non pas de la formation initiale. Ainsi, un enseignant spécialisé est au départ un enseignant du primaire qui a reçu une formation initiale généraliste. La plupart du temps, il a d'abord exercé en contexte ordinaire puis, lorsqu'il a rejoint l'enseignement spécialisé, il a dans le meilleur des cas bénéficié d'une formation d'un an qui lui a permis d'obtenir une certification. Comme nous l'avons vu précédemment, sa mission principale est d'élaborer, pour chacun de ses élèves, un parcours personnalisé et adapté qui conduit à la mise en œuvre de « projets individualisés » (MEN, 2017a). Cette injonction ajoutée à la forte hétérogénéité du groupe-classe le place naturellement dans une logique d'individualisation des apprentissages, mais paradoxalement, sa culture d'enseignant ordinaire lui a montré l'importance des interactions sociales, ce qui l'incite à rechercher une organisation collective des apprentissages. La tension qui en découle a aussi été décrite par Butlen et al. (2002) dans un autre contexte.

4. Nos objectifs de recherche

En premier lieu, nous voulons recenser et analyser les pratiques déclarées des enseignants spécialisés concernant l'évaluation des compétences mathématiques de leurs élèves afin d'en cerner la cohérence et de dégager les difficultés qu'ils rencontrent. Puis nous souhaitons concevoir et mettre en œuvre un dispositif d'évaluation adapté au public spécifique visé et qui permettrait de réguler ces difficultés. Enfin, nous projetons de réaliser un module de formation continue à l'attention des enseignants spécialisés dans le but de faire évoluer leurs pratiques concernant l'évaluation. Nous souhaitons que le dispositif proposé puisse fonctionner selon une modalité collective et n'incite pas à une individualisation excessive des apprentissages. Il doit pouvoir aider l'enseignant à envisager des pistes de régulation afin en particulier de palier les phénomènes de distorsions mis en évidence dans (Reydy, 2015). Enfin, nous voudrions qu'il étoffe le panel d'activités à disposition de l'enseignant sur une notion donnée pour permettre un enrichissement du répertoire didactique de la classe (Gibel,

2006) et qu'il soit conçu de manière suffisamment transparente pour faire apparaître clairement les variables didactiques relatives aux activités proposées.

II. MODALITÉS DE RECHERCHE

Il s'agit d'une recherche collaborative (Bernaz, 2013) qui s'inscrit dans un projet formation-recherche porté par la commission CARDIE-ESPE d'Aquitaine sur la période 2016-2019 et s'articule en trois phases. La première phase qui s'est déroulée lors de l'année 2016-2017 avait pour objectif d'analyser des pratiques déclarées d'enseignants spécialisés concernant l'évaluation des compétences mathématiques de leurs élèves. Nous avons cherché à savoir s'il existait des différences de conception de l'évaluation des compétences mathématiques des élèves chez les enseignants en fonction du public auquel ils s'adressent et si l'on pouvait identifier des gestes professionnels caractéristiques de l'enseignement spécialisé concernant l'évaluation. Pour ce faire, nous nous sommes appuyés sur les réponses à un questionnaire anonyme adressé à 12 enseignants spécialisés et à 12 enseignants exerçant en contexte ordinaire. La deuxième phase, entamée en 2016-2017 et poursuivie en 2017-2018, a été dédiée à la conception d'un dispositif d'évaluation des compétences mathématiques des élèves présentant des troubles importants des fonctions cognitives et à un pré-test auprès d'élèves d'ULIS par trois enseignantes spécialisées (une coordonnatrice d'ULIS-école et deux coordonnatrices d'ULIS-collège). Lors de réunions régulières avec les enseignantes, nous avons mis à jour les difficultés rencontrées, les éléments qui pouvaient être supprimés, améliorés, ajoutés. Le dispositif a alors été réajusté et remis à l'épreuve. Des séances d'utilisation du dispositif ont été filmées dans les trois classes. La troisième phase qui se déroule pendant l'année 2018-2019 concerne la mise en place d'un module de formation pour 21 enseignants spécialisés volontaires autour de la question de l'évaluation des compétences mathématiques des élèves qui présentent des troubles importants des fonctions cognitives et de la présentation de notre dispositif. Il est constitué de deux séances : la première, en début d'année, est dédiée à une sensibilisation aux questions posées par l'évaluation des compétences mathématiques des élèves en situation de handicap et à la présentation du jeu. La seconde, en fin d'année scolaire, permettra un bilan collectif de ses atouts et de ses limites. Nous ne présentons pas les résultats de cette phase (en cours) dans cette contribution.

III. RÉSULTATS DE LA PHASE 1

1. Méthodologie utilisée pour la phase 1

Nous prenons appui sur un questionnaire composé de 4 questions ayant pour objectif de cerner les conceptions qu'ont les enseignants de l'évaluation, d'identifier des difficultés récurrentes qu'ils rencontrent et de recenser les adaptations qu'ils envisagent. En comparant les réponses d'enseignants spécialisés à celles d'enseignants de maternelle (élèves de 3 à 6 ans) et d'élémentaire (élèves de 6 à 11 ans), nous questionnons les différences de conception et de pratique concernant l'évaluation des compétences mathématiques entre enseignement ordinaire et enseignement spécialisé. Le nombre de questions posées est volontairement réduit pour ne pas décourager les sondés et pouvoir obtenir sans trop de difficultés le nombre de réponses souhaitées, à savoir celles de 12 enseignants spécialisés exerçant dans différents types de structures et de 12 professeurs des écoles enseignant en milieu ordinaire. Le nombre de professeurs interrogés a été choisi de façon à être suffisamment grand pour nous permettre d'explorer la diversité des pratiques et des contextes, mais aussi suffisamment faible pour pouvoir en faire une analyse qualitative.

Nous analysons les réponses aux questionnaires à la lumière de la double approche

ergonomique et didactique (Robert, 2008) qui considère les pratiques enseignantes dans leur relation avec les apprentissages des élèves, mais aussi en prenant en compte le fait qu'il s'agit d'exercer un métier. Ce cadre théorique nous semble particulièrement adapté à notre étude car il permet de prendre en compte les contraintes importantes qui pèsent sur le métier d'enseignant spécialisé. Nous utilisons le découpage en cinq composantes définies par Robert et Rogalski (2002) : la *composante cognitive* traduit les choix de l'enseignant sur les contenus, les tâches, leur organisation, la *composante médiative* renseigne sur la mise en œuvre des activités, la *composante personnelle* représente tout ce qui est propre à l'enseignant, la *composante institutionnelle* considère les programmes, les circulaires officielles, les horaires, l'administration, les différentes ressources et enfin, la *composante sociale* prend en compte les élèves comme appartenant à différents groupes sociaux. Si l'analyse des pratiques enseignantes est simplifiée par ce découpage, ces composantes n'en restent pas moins artificielles et sont en réalité indissociables et interdépendantes. Pour analyser l'impact de la composante médiative sur les pratiques d'évaluation des enseignants, nous utilisons également les fonctions de l'étayage identifiées par Bruner (1983) et la typologie des gestes d'adaptation établie par Denis et al. (2016).

2. Résultats de la phase 1

En ce qui concerne la composante institutionnelle, nous constatons un impact de l'enseignement ordinaire sur l'enseignement spécialisé qui ne semble pas réciproque : les enseignants spécialisés utilisent souvent dans un premier temps des « pratiques évaluatives ordinaires », puis y renoncent en constatant leur manque d'efficacité. La nécessité pour l'enseignant spécialisé d'établir et d'actualiser régulièrement, grâce à son expertise, un projet individualisé pour l'élève le place davantage dans une logique de régulation des apprentissages que dans une logique d'évaluation sommative. On retrouve cette logique chez les enseignants de maternelle avec le carnet de suivi. Lorsque des évaluations sommatives sont proposées par des enseignants spécialisés, c'est de manière très ponctuelle et en vue de préparer leurs élèves à certains diplômes spécifiques ou de prédisposer au mieux à l'inclusion. En revanche, elles le sont systématiquement par les enseignants d'élémentaire qui veillent à ne pas les adapter aux difficultés des élèves pour qu'elles soient le reflet d'une jauge.

Pour ce qui relève de la composante sociale, les enseignants spécialisés témoignent de nombreuses difficultés pour évaluer les compétences mathématiques de leurs élèves alors que seulement deux difficultés sont citées par les enseignants ordinaires interrogés : la maîtrise de la langue orale et celle de la langue écrite. Les enseignants spécialisés attribuent systématiquement les multiples difficultés qu'ils identifient au handicap de leurs élèves, mais on peut supposer que les élèves de l'enseignement ordinaire présentent eux aussi certaines de ces caractéristiques. De plus, l'identification de ces difficultés débouche chez tous les enseignants spécialisés sondés sur une pratique évaluative en activité, par l'observation. On retrouve cette pratique dans les propos de plusieurs enseignants de maternelle.

Concernant la composante personnelle, on voit se dégager dans les propos de quasiment tous les enseignants sondés trois grands rôles de l'évaluation qui émanent certainement d'un discours entendu en formation : rôles diagnostique, formatif et sommatif. Si le terme de régulation n'apparait dans aucun témoignage, l'idée sous-jacente est néanmoins présente dans le discours de plusieurs enseignants spécialisés et d'enseignants de maternelle mais pas dans celui d'enseignants d'élémentaire.

L'impact de la composante médiative ne se mesure dans cette phase de la recherche que sur des pratiques déclarées. Plusieurs enseignants spécialisés témoignent de difficultés à établir des critères de validation des compétences évaluées. Paradoxalement, il est à noter que

si presque tous les enseignants sondés parlent d'évaluation formative dans la réponse à la première question, seul l'un d'entre eux, un enseignant spécialisé, aborde la question de l'autoévaluation. En permettant à l'élève de se situer dans les apprentissages, cette dernière est pourtant au cœur de l'évaluation formative au sens décrit par Black et William (1998). Cet enseignant explique en outre qu'il prévient les élèves lorsqu'il s'agit d'une séance d'évaluation (transparence de l'évaluation). Enfin, les fonctions de l'étayage identifiées par Bruner et les sous-catégories de Denis et al. qui décrivent les gestes d'adaptation de l'évaluation (pour le cas particulier d'élèves dyslexiques) ne nous permettent pas de décrire de manière exhaustive les points concernant la composante médiative cités dans les réponses au questionnaire. Il faudrait compléter ces typologies par une catégorie qui prendrait en compte certains facteurs psychologiques tels que le stress ou encore la motivation et l'implication des élèves. En effet, si l'on retrouve des éléments qui relèvent de cette catégorie dans les propos d'un enseignant d'élémentaire et de certains enseignants de maternelle, c'est quasiment systématique dans ceux des enseignants spécialisés. Ce constat rejoint celui fait par Dias & al. (2016) : en voulant constituer un outil d'analyse des étayages produits par l'enseignant dans les situations de résolution de problèmes mathématiques avec des élèves en difficultés d'apprentissage, les auteurs commencent par tenter d'utiliser les fonctions de l'étayage de Bruner, mais ils constatent qu'alors, un certain nombre d'interventions de l'enseignant ne sont pas prises en compte. Ils proposent donc dans leur nouvel outil de repérer non seulement des types d'étayages centrés sur le problème et son processus de résolution mais aussi des types d'étayages centrés sur l'élève et son investissement dans la tâche.

Pour finir, l'impact de la composante cognitive correspond au poids du didactique dans les propos des enseignants. Un peu plus de la moitié des enseignants (tous types confondus) ayant répondu au questionnaire restent dans un discours général qui pourrait refléter les difficultés rencontrées lors de l'évaluation des compétences de leurs élèves dans n'importe quelle discipline, aucun point d'ordre spécifiquement mathématique ou didactique n'étant évoqué. En proportion, ce sont les enseignants de maternelle qui citent le plus d'éléments didactiques ou mathématiques. Toutefois, il faut rester très prudent face à l'interprétation de ces résultats car le recueil de données que nous avons adopté donne beaucoup moins de visibilité sur ce point que ne l'aurait permis une analyse de pratique. De plus, le faible nombre de questionnaires étudiés ne permet pas de tirer de conclusions déterminantes.

En conclusion, nous voyons se dégager un style évaluatif vers lequel les enseignants spécialisés souhaiteraient tendre sans réellement y parvenir : il s'appuie sur l'idée d'évaluation en situation et en continu que l'on retrouve aussi dans les propos des enseignants de maternelle et qui semble assez proche de la notion de régulation des apprentissages. Il est induit par des difficultés ressenties en situation d'évaluation de type « papier-crayon » et qu'ils attribuent à des caractéristiques liées au handicap de leurs élèves. Pourtant on peut soupçonner que certaines de ces caractéristiques sont aussi présentes chez les élèves de l'ordinaire. Enfin, on ne trouve presque pas de référence à l'autoévaluation ; le dispositif doit envisager cet aspect pour permettre aux enseignants d'engager une réflexion sur ce point.

IV. RÉSULTATS DE LA PHASE 2

À l'issue de l'analyse précédente, nous avons cherché à concevoir un dispositif d'évaluation en situation des élèves en mathématiques ciblant le domaine « Numération et calcul » pour un niveau correspondant aux attendus de fin de cycle 2[2], ce qui nous semblait correspondre à une majorité des élèves concernés par la phase 2.

[2] Le cycle 2 correspond aux trois années de scolarisation d'élèves de 6 à 9 ans dans l'enseignement français

Le support est constitué de cartes dotées d'un système de classement et d'un livret d'évaluation de chaque élève. Les cartes contiennent au recto des questions mathématiques du même type et au verso les réponses correspondantes. Le domaine (numération ou calcul) est indiqué en haut du recto. D'autre part, plusieurs indications renseignent l'enseignant sur la tâche proposée. Un sablier indique qu'il s'agit d'une tâche nécessitant un certain temps de réflexion alors qu'un éclair signifie que la réponse doit être rapide car on vise davantage une automatisation. Un code comprenant des chiffres et des lettres renvoie au cycle visé et à une sous-compétence d'une compétence tirée des programmes français (MEN, 2015 p.77-78). Chaque sous-compétence est déclinée en une série de tâches. Notre intention est d'offrir à l'enseignant un panel d'activités qui pourrait enrichir son « répertoire didactique », par extension de la terminologie introduite par Gibel (2006). Enfin, le champ numérique concerné et une échelle de 1 à 4 indiquant le degré de difficulté au sein de la tâche figurent sur la carte. Pour déterminer cette échelle de difficulté, nous avons joué sur des variables didactiques autres que celle de la taille des nombres. Nous avons essayé de les rendre suffisamment transparentes pour qu'un enseignant qui utilise le jeu les identifie facilement. Le livret d'évaluation-élève reprend le même système de classement.

Trois enseignantes spécialisées ont testé le dispositif : P_1 en ULIS-école (élèves de 6 à 11 ans) et P_2 et P_3 en ULIS-collège (élèves de 11 à 15 ans). Nous leur avons suggéré de faire fabriquer aux élèves un plateau et des cartes spéciales (par exemple, « Recule de trois cases »). Chacune d'entre elle a ensuite imaginé une règle du jeu et une modalité de mise en œuvre qu'elle a éprouvées avec ses élèves pendant la suite de l'année. En plus des rencontres régulières au cours de la phase 2, nous avons mené au mois de septembre 2018 des entretiens individuels avec chacune d'entre elles. Nous analysons les mises en œuvre de P_1, P_2 et P_3 en questionnant trois points particuliers.

1. Le dispositif permet-il de faire travailler les élèves ensemble ?

Pour favoriser une utilisation selon une modalité de travail collective, nous avons présenté le dispositif à P_1, P_2 et P_3 comme un jeu de plateau. Lors des entretiens de septembre 2018, elles s'accordent sur l'intérêt du travail de groupe et le rôle des interactions. P_3 explique :

> Je considère que travailler ensemble, c'est essentiel, on apprend beaucoup des autres. […] En ULIS on nous demande de beaucoup individualiser. Néanmoins, on met certains élèves encore plus en difficulté quand on les met tout seul face à une tâche.

Notre intention, en proposant un plateau de jeu, était de favoriser les interactions entre élèves autour de notions mathématiques, mais le dispositif a surtout donné lieu à des juxtapositions d'activités individuelles déguisées sous forme de jeu collectif. En effet, seule P_3 a proposé un fonctionnement qui présente réellement les caractéristiques d'un jeu de plateau : on joue chacun son tour, la règle permet d'identifier un vainqueur. Toutefois, P_3 mesure les limites de cette modalité qui a parfois généré des angoisses (certains ont peur d'échouer devant les autres). P_1 et P_2 ont adopté des règles beaucoup plus souples (chaque élève joue à son rythme sans attendre les autres) dont elles pensent qu'elles ne font pas perdre l'aspect ludique du jeu aux yeux des élèves et avec lesquelles ils sont moins soucieux du regard des autres. En septembre 2018, P2 précise notamment :

> Même si chacun fait son parcours et ses questions, quand ils tombent sur les cartes fabriquées qu'ils aiment bien, ça implique ceux qui sont autour de la table, donc c'est un moyen de travailler de manière individualisée mais en groupe. […] Ça ressemble énormément à une fiche individuelle. Mais dans la forme, ça n'y ressemble tellement pas que je pense qu'ils tombent dans le panneau !

La modalité adoptée par P_3 rend difficile les interactions autour de notions mathématiques car les élèves travaillent sur des compétences différentes. Or organiser des parties lors desquelles plusieurs élèves sont en activité autour d'un même objet de savoir se révèle

presque impossible en ULIS-collège en raison des contraintes organisationnelles importantes et de la forte hétérogénéité du groupe. À l'avenir, P_1 souhaite tester une modalité individuelle de type « réussite ». En revanche, P_2 et P_3 restent attachées à la mise en œuvre sous forme de jeu de plateau et insistent sur la présence des cartes spéciales rédigées par les élèves qui permettent à leurs yeux d'impliquer les élèves dans l'activité, de limiter l'angoisse, de dédramatiser (facteurs fréquemment évoqués dans les réponses au questionnaire).

Finalement, l'enseignant spécialisé semble emprisonné dans un système contraignant. En effet dans les mises en œuvre de P_1, P_2 et P_3, deux aspects priment au détriment des objets de savoir : les contraintes d'organisation (plus fortes en ULIS-collège qu'en ULIS-école) et les contraintes liées aux caractéristiques individuelles des élèves (attitude face à l'échec, profil psychologique, âge, etc.). En d'autres termes, des éléments ayant trait aux composantes institutionnelle et sociale semblent impacter bien plus fortement les choix relatifs à la composante médiative que ceux relevant des composantes cognitive et personnelle.

2. Le dispositif favorise-t-il la prise en compte de la dimension auto-évaluative ?

P_1 envisage spontanément à l'issue de chaque partie un échange avec un élève sur les réussites et les difficultés rencontrées. Elle fait verbaliser les compétences qui ont été travaillées et qui semblent acquises, ainsi que les points qui ont posé problème et devront être repris. Notons qu'en ULIS-école, elle bénéficie d'une organisation plus souple que P_2 et P_3 en ULIS-collège (séances plus longues, groupes plus stables). P_3 utilise une modalité en deux phases : une première phase lors de laquelle l'élève choisit, dans un lot de cartes sélectionnées par l'enseignante, celles qu'il souhaite retenir pour la partie, puis une seconde phase de jeu. La phase 1 comporte une dimension auto-évaluative et est censée donner lieu à une phase 2 plus ludique (plus de rythme, moins d'angoisse face à des questions trop difficiles, etc.). Toutefois, elle n'est pas investie par tous les élèves car certains ne perçoivent pas réellement son enjeu, d'autres manquent de temps pour lire toutes les consignes, et conduit à une mise en œuvre que P_3 estime a posteriori trop laborieuse. La dimension auto-évaluative n'est pas prise en compte dans la modalité adoptée par P_2. À la question « Serait-il possible de l'intégrer au jeu ? », elle répond :

> Oui, oui mais validé par l'adulte. C'est-à-dire que par exemple, on laisse l'élève se valider, mais pas avec les notions. Peut-être « j'ai fait le niveau 1, le niveau 2 ou le niveau 3 » et après, l'adulte vient vérifier. […] S'ils le font en autonomie, quelle preuve j'ai qu'ils n'ont pas regardé derrière ?

P_2 éprouve des difficultés à envisager une modalité qui offrirait aux élèves un retour d'information sur leurs compétences et P_3 renonce à une mise en œuvre qui prenait cet aspect en compte, toutes deux pour des raisons qui semblent liées aux caractéristiques de leurs élèves (composante sociale). La dimension auto-évaluative semble difficile à négocier dans ce contexte. Le dispositif devrait comporter un élément supplémentaire qui en faciliterait la prise en compte lors de son utilisation (carnet de réussite pour les élèves par exemple).

3. Le dispositif constitue-t-il une aide à la régulation ?

Les trois enseignantes témoignent du fait que le support de jeu leur suggère des activités qu'elles ne proposaient pas d'elles-mêmes. Par exemple, P_1 explique :

> Ça fait un listing assez exhaustif de toutes les activités et de toutes les compétences. Surtout ce que j'aime bien, c'est que les compétences sont rentrées par plusieurs biais. Et il y a des choses parfois auxquelles on ne pense pas, on prend tout le temps les choses dans le même sens, en fait.

Des observations de séances d'utilisation du dispositif nous ont permis de confirmer ce constat : au cours d'une partie par exemple, P_2 repère des cartes proposant des calculs du type « a+9 » ou « a+11 » et enrichit ainsi son répertoire didactique car elle ne songeait pas à

enseigner ces procédures de calcul réfléchi auparavant. On peut également noter que le dispositif s'articule facilement avec le parcours personnalisé des élèves : en voyant ses élèves jouer, P_3 réalise qu'une notion qu'elle supposait acquise chez l'un d'entre eux ne l'est pas. Elle rajoute alors une fiche de travail sur ce thème dans son plan de travail personnalisé. Enfin, le dispositif permet de déceler des compétences insoupçonnées : lors de la phase 1 d'une partie, P_3 est surprise par les cartes que sélectionne une élève qu'elle aurait jugée plus en difficulté. Ici, le dispositif atténue le phénomène d'échec potentiel (Favre, 2004).

Notre dispositif semble permettre une lecture par l'enseignant des variables didactiques et du jeu opéré sur ces variables, aidant ainsi à maintenir une vigilance didactique (Charles-Pézard, 2010), et rééquilibre l'impact de la composante cognitive sur les choix relatifs à la composante médiative par rapport à celui des composantes institutionnelle et sociale.

V. CONCLUSION

L'objectif de notre projet était de recenser les conceptions et les difficultés rencontrées par les enseignants spécialisés lors de l'évaluation des compétences mathématiques de leurs élèves dans le but de concevoir un dispositif d'évaluation adapté à leur contexte d'exercice. L'analyse du questionnaire a permis de dégager quatre points qui ont orienté la conception de notre dispositif : il devait faciliter l'engagement des élèves en limitant le stress lié à l'évaluation, permettre une mise en œuvre en groupe qui génère des interactions en mathématiques, intégrer une dimension auto-évaluative et enfin aider les enseignants à envisager des pistes de régulation.

Le fait de proposer un support sous forme de jeu a bien permis de satisfaire le premier point, mais notre bilan est plus mitigé concernant les deux points suivants. En effet, aucune des mises en œuvre n'a réellement donné lieu à des interactions pertinentes en mathématiques et la dimension auto-évaluative n'a pu être que faiblement intégrée car P_1, P_2 et P_3 se sont heurtées à des contraintes d'organisation et d'autres liées aux caractéristiques individuelles des élèves. Nous constatons une prédominance de facteurs relevant des composantes institutionnelle et sociale dans les choix qui guident les pratiques d'évaluation des enseignants spécialisés. Dans les réponses au questionnaire, on retrouvait bien les contraintes émanant de la composante sociale mais pas celles issues de la composante institutionnelle, alors que ce sont elles qui prédominent dans notre analyse des trois expérimentations. Autrement dit, en répondant au questionnaire, les enseignants spécialisés ne citent pas une source majeure de difficultés qui est celle des contraintes d'organisation inhérentes au fonctionnement des ULIS.

C'est concernant le dernier point que les résultats semblent le plus positifs. Favre (2008, p.18) désigne par « jeu de tâches » une manière d'adapter sa démarche en mathématiques : pour un objectif d'apprentissage donné, on considère une activité « classique » qui vise cet objectif (par exemple tirée d'un manuel), puis on « explore le milieu constitué par cette activité » en déclinant une série de tâches à partir de ce milieu et en identifiant les variables didactiques en présence. C'est la démarche que nous avons adoptée en proposant un dispositif conçu pour favoriser l'identification des variables didactiques et le jeu sur ces variables, et générer un enrichissement du répertoire didactique de l'enseignant en déclinant un panel de tâches pour chaque compétence traitée. Cette démarche a été perçue par P_1, P_2 et P_3, ce qui nous encourage à l'utiliser dans le cadre de la formation des enseignants spécialisés.

REFERENCES

Allal L. & Mottier-Lopez L. (2007). *Régulation des apprentissages en situation scolaire et en formation.* Coll. Perspectives en éducation et formation : De Boeck.

Bednarz N. (2013) Regarder ensemble autrement : ancrage et développement des recherches collaboratives en éducation au Québec. In Bednarz N. (Ed.) *Recherche collaborative et pratique enseignante : regarder ensemble autrement* (pp 13-30). Paris : L'Harmattan.

Bloom, B.S., Hasting J.T. & Madaus G.F. (1971), *Handbook on Formative and Summative Evaluation of Student Learning*, McGraw-Hill Book Co, New York.

Bruner J. (1983) *Le développement de l'enfant.* Savoir faire, savoir dire PUF, coll. « *Psychologie d'aujourd'hui* ».

Butlen, D., Peltier, M.L. & Pézard M. (2002). Nommé(s) en REP, comment font-ils ? Pratiques de professeurs des écoles enseignant les mathématiques en ZEP : cohérence et contradictions, *Revue Française de Pédagogie* 140, Paris, INRP, 41-52.

Charles-Pézard, M. (2010). Installer la paix scolaire, exercer une vigilance didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 30(2), 197-26.

Denis C., Lison C. & Lépine M. (2016) Pratiques d'adaptation de l'évaluation pour l'inclusion d'élèves dyslexiques : qu'arrive-t-il au deuxième cycle du secondaire ? *La Nouvelle Revue de l'Adaptation et de la Scolarisation,* 74, 27-39.

Dias T., Sermier Dessemontet, R., & Dénervaud S. (2016) Étayer les élèves à besoins particuliers dans la résolution de problèmes : un modèle d'analyse. *Math-École*, 225, 4-9.

Eduscol (2014) Les conseillers académiques CARDIE, consultable en ligne à l'adresse : http://eduscol.education.fr/cid47240/conseillers-academiques-cardie.html

Favre, J.-M. (2004) Étude des effets de deux contraintes didactiques sur l'enseignement de la multiplication dans une classe d'enseignement spécialisé. In V. Durand-Guerrier et C. Tisseron (Eds) Actes du Séminaire National de Didactique des Mathématiques 2003. Paris 7: IREM

Favre J.-M. (2008) Jeu de tâches : un mode d'interaction pour favoriser les explorations et les expériences mathématiques dans l'enseignement spécialisé. *Grand N*, 82, 9-30.

Gibel P. (2006) Raisonnement et argumentation : Analyse des différentes formes et fonctions des raisonnements des élèves en situation de débat à l'école primaire. In Bednarz N., Mary C. (Eds.) *Actes du colloque EMF 2006 (Cédérom).* Sherbrooke : Éditions du CRP.

M.E.N. (2015). *Programmes d'enseignement du cycle des apprentissages fondamentaux, du cycle de consolidation et du cycle des approfondissements.* BO spécial n.11 du 26-11-2015.

M.E.N. (2017a) Référentiel des compétences caractéristiques d'un enseignant spécialisé associé au référentiel des métiers du professorat, Annexe I. BO n° 7 du 16 février 2017

M.E.N. (2017b) Circulaire relative à la formation professionnelle spécialisée et au certificat d'aptitude professionnelle aux pratiques de l'éducation inclusive (Cappei), circulaire n° 2017-026 du 14-2-2017

Portevin-Serre G. (2016) *Enseigner à des enfants déficients. Une pratique professionnelle spécifique en IME*. Champ Social Éditions

Reydy C. (2015) Former les enseignants spécialisés à évaluer les élèves en mathématiques : un exercice périlleux. *La Nouvelle Revue de l'Adaptation et la Scolarisation* 72, 4ème trimestre 2015, 249-264.

Robert, A. (2008) La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques d'enseignants de mathématiques. *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (59-68). Vandebrouck F. (Éd.) Toulouse : Octarès Éditions.

Robert, A. et Rogalski, J. (2002) Le système complexe et cohérent des pratiques des

enseignants de mathématiques : une double approche. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, *2*(4), 505-528.

DISPOSITIF POUR ABORDER LA NOTION D'ANGLE AVEC DES ELEVES DE 11-12 ANS DANS UNE CLASSE D'ENSEIGNEMENT SPECIALISE DANS LE CANTON DE VAUD (SUISSE).

SERMENT* Jimmy

Résumé – Grâce aux solides de Platon construits avec des baguettes en bois de 50 cm. et des connecteurs spécifiques imprimés à l'imprimante 3D, les élèves en difficultés scolaires d'une classe à effectif réduit dans le cant de Vaud (Suisse) ont abordé la notion d'angle en devant mesurer l'angle dièdre entre deux faces de ces solides.

Mots-clefs : géométrie, angle, manipulation, expérimentation, dièdre

Abstract – Thanks to Plato's solids built with 50 cm. wooden sticks and specific connectors printed on a 3D printer, students in difficulties in a small class in the canton of Vaud (Switzerland) have approached the notion of angle when measuring dihedral angle between two faces of those solids.

Keywords: geometry, angle, manipulation, experimentation, dihedral

I. CONTEXTE

Ma classe accueille des élèves de 11 à 12 ans qui n'arrivent pas à suivre le programme dans une classe ordinaire pour différentes raisons (trouble de l'attention, dyslexie, dyscalculie, phobie scolaire…). La classe est en effectif réduit et compte entre huit et douze élèves. Le plan d'étude (CIIP, 2011) est le même que pour les classes ordinaires. L'objectif de ce dispositif de classe est de fournir un travail individualisé à des enfants aux profils différents et d'éventuellement pouvoir les réintégrer dans des classes ordinaires.

Dans mon cas, au moment de la séquence sur les angles, j'avais huit élèves, dont deux qui ont de la phobie scolaire, trois qui ont des difficultés de type dyslexie-dyscalculie, un allophone et deux avec des problèmes spécifiques liés à la géométrie (dyspraxie).

Des élèves de 11-12 ans doivent être capables de mesurer un angle à l'aide d'un rapporteur et de communiquer le résultat obtenu par un nombre ou par un encadrement. De plus, les apprenants doivent au minimum réussir une attente fondamentale, à savoir : comparer des angles par manipulation (CIIP, 2011). La notion d'angle n'est pas travaillée avant, hormis pour parler de perpendicularité. Cette étude montre un dispositif permettant à des élèves en grande difficulté de travailler sur la notion d'angle, en tant que grandeur.

II. LA NOTION D'ANGLE

1. Universalité et complexité de la notion d'angle

Comme ont essayé de montrer Izard et al. en 2011, certaines notions en géométrie euclidienne semblent être universelles. Les longueurs et les angles sont les premiers facteurs de reconnaissance d'une figure. Les enfants, même très jeunes, sont sensibles aux variations de longueurs et d'angles :

> Preschoolers are sensitive to angle and lengh, can abstract differencies of orientation and position, but they also abstract away sense relations. (Izard & al., p. 329)

Cette notion est donc importante et il ne faut pas passer dessus rapidement, comme on a tendance à le faire à l'école, la cause étant certainement la complexité de cette notion.

* HEP Vaud – Suisse – jimmy.serment@hepl.ch / jimmy.serment@vd.educanet2.ch

Le concept d'angle est complexe pour plusieurs raisons. La première est que le mot angle comprend trois conceptions différentes, le secteur angulaire, l'angle de secteur et l'angle de rotation (Berthelot & Salin, 1995). A travers ces trois conceptions, il y a trois notions différentes travaillées, soit la notion de surface, soit la mesure, soit la rotation, trois notions bien différentes pour parler du même mot « angle ». De plus, les deux premières sont statiques et la dernière dynamique, ce qui rajoute de la confusion possible sur le concept d'angle (Browning & al., 2008).

Une deuxième difficulté de la notion est historique. Tout au long de l'histoire les définitions ont changé. Les apprenants sont confrontés aux mêmes difficultés historiques et doivent surmonter ces obstacles qui ont pris des siècles à l'humanité pour les surpasser. Proclus (1948) montre ces difficultés historiques liées au concept d'angle. Les premiers Grecs ont eu tendance à définir l'angle dans une de ces trois catégories : une relation, une qualité ou une quantité. Carpos d'Antioche avait choisi de définir l'angle ainsi :

> une quantité et l'intervalle des lignes ou des surfaces qui le comprennent ; que cet intervalle est dimensionné d'une seule manière, et que pourtant l'angle n'est pas une ligne pour cela, car tout ce qui est dimensionné d'une seule manière n'est pas ligne. (Proclus, p. 114)

Carpos voulait certainement parler à cette époque d'une distance de rotation et non pas d'une distance linéaire. Comme les grecs ne mesuraient que des longueurs, des aires ou des volumes, ils n'avaient pas le vocabulaire nécessaire pour aller vers une définition claire (Keiser, 2004).

Une autre contradiction sur la notion d'angle est la 8e définition des éléments d'Euclide du Livre I :

> un angle plan est l'inclinaison, l'une sur l'autre, dans un plan, de deux lignes qui se touchent l'une l'autre et ne sont pas placées en ligne droite. (Euclide, p. 158)

Cette définition place l'angle comme une relation entre deux lignes. Le problème avec cette définition est qu'elle ne permet pas de distinguer une inclinaison de 60° et de -300° par exemple. Il existe plusieurs angles pour une inclinaison dans cette définition.

D'autres mathématiciens ont tenté de définir l'angle comme une qualité. La chaleur en est une, on peut distinguer plus ou moins de chaleur. Mais peut-on vraiment dire d'une figure qu'il y a plus ou moins d'angle ?

Au final, Proclus dit que l'angle ne peut pas se limiter à une définition. L'angle doit être considéré à la fois comme une quantité, une qualité et une relation.

Piaget (1948) donne aussi deux définitions possibles, la première voyant l'angle comme unidimensionnel en considérant toutes les demi-droites partant du sommet et étant à l'intérieur de l'angle. Sa deuxième définition met l'angle à un niveau bidimensionnel en le considérant « comme l'interférence de deux demi-plans limités par les côtés » (p. 236). Piaget ne s'attarde pas sur ces deux définitions, mais là encore on perçoit un mot qui génère deux notions différentes et peut induire de la confusion chez le lecteur.

2. Expérimentation sur la notion d'angle

La séquence sur les angles dièdres était la 4e phase d'une séquence en comportant 5 :

1. Découverte des polyèdres
2. Solides réguliers et leurs propriétés
3. Propriétés des polygones, polyèdres réguliers et notion de perpendicularité
4. Angle dièdre
5. Représentation en perspective des platoniciens et comparaison d'angles

Pour cette 4e phase, les élèves ont construit, par groupe, les solides de Platon avec des baguettes en bois et des connecteurs spécifiques à chacun de ces solides. Une fois cette première tâche réalisée, les élèves ont dû trouver un moyen de mesurer l'angle dièdre de quatre des solides réguliers. Pour y arriver, les élèves pouvaient utiliser le matériel qu'ils voulaient. Au moment des explications de la consigne, il a fallu expliquer ce qu'est un angle dièdre pour que les élèves puissent savoir ce qui leur était demandé de faire. Je donnai deux explications, la première définissant l'angle dièdre comme l'angle entre 2 faces et la deuxième comme l'angle d'ouverture d'un livre, présentée avec un livre à moitié ouvert puis dessinée en perspective au tableau noir. Une deuxième question fut posée ultérieurement : « Combien y a t-il d'angles dièdres différents dans les solides de Platon ? ».

Avant de les lancer sur cette expérimentation, les élèves avaient déjà vu les propriétés des solides en faisant la bataille des polyèdres et la recherche des polyèdres réguliers (Dias, 2011). Les élèves avaient donc vu les cinq solides avant de commencer l'expérimentation sur les angles. Le matériel était aussi connu de la part des élèves, ils l'ont utilisé pour construire un cube d'un mètre et un de deux mètres d'arête : l'objectif étant de trouver les sections du cube et d'ainsi travailler les propriétés des quadrilatères et triangles. Ils ont également construit un icosaèdre et un dodécaèdre en grand pour travailler la notion de perpendicularité dans des plans internes aux solides. Le thème des isométries avait aussi été traité. Le mot « angle » avait donc déjà été vu par les élèves, ainsi que les types d'angles (aigu, droit, obtus). Ils ont utilisé l'« angle » pour parler des propriétés des polygones sectionnés dans le cube puis en parlant des constructions de certains des polygones réguliers (triangle équilatéral, carré et hexagone régulier), enfin ils ont eu l'occasion de vérifier si un angle était droit lors des thèmes des isométries et de la perpendicularité.

Dans la 5e partie, il fut proposé aux élèves des marches à suivre pour représenter les cinq solides platoniciens en perspective. Sur ces dessins, ils ont dû mesurer puis comparer les différents angles trouvés ; la comparaison se faisant entre les angles sur le dessin en perspective et aussi entre les angles du dessin et ceux de la forme en 3D (angles au sommet des faces des polyèdres et angle dièdre).

Il n'y a pas eu d'évaluation diagnostique avant l'expérimentation, mais quatre de mes élèves viennent de classes ordinaires de 7 et 8H (11-12 ans) et avaient déjà travaillé cette notion, le reste de la classe ne l'avait pas travaillée. Tous présentent de grandes difficultés en mathématiques et je suis donc parti de l'hypothèse que cette notion était soit nouvelle, soit incomprise pour mes élèves.

Le matériel officiel et distribué à tous les élèves concernant les angles est une équerre formant un demi carré, soit un triangle rectangle et isocèle, avec un rapporteur inscrit à l'intérieur.



Figure 1 *– Équerre avec rapporteur des élèves*

3. Justification de l'expérimentation

Piaget (1948) constatait l'importance des expériences pour acquérir une notion, en particulier celle de l'angle. Afin que l'élève puisse généraliser et passer plus loin que l'expérience sensible, il doit avoir fait des expériences concrètes, il doit pouvoir faire des erreurs, modifier ses procédures.

> C'est pourquoi les actions constructives des angles … tout en débutant empiriquement et en donnant lieu … à ces tâtonnements et ces erreurs dont sont coutumières les conduites expérimentales, finissent par se grouper selon le mode de composition réversible des actions devenues opératoires, et engendrent ainsi, par leur coordination même, la possibilité d'une déduction dépassant l'expérience et atteignant à la fois la généralité et la nécessité. (p. 269)

Dans la situation proposée, l'expérience est ouverte (Arsac & Mante, 2007), ce qui laisse une certaine liberté à l'élève d'agir, de proposer différentes procédures. L'apprenant peut constater de lui-même de l'efficacité de ses procédures et il peut les modifier.

Chaque individu se construit une intuition de l'espace grâce aux différentes expériences sensorielles acquises au contact de tout ce qui nous entoure. Or, cette intuition est proche de la géométrie euclidienne. Cette notion d'angle est donc présente intuitivement dès les premières années et est associée aux expériences sensibles de la vie. Il est possible, voire même souhaitable, d'aborder cette notion complexe à l'école à travers des expériences sensibles en 3 dimensions et non pas sur feuille de papier, qui est déjà une forme d'abstraction de la notion d'angle par rapport aux expériences sensibles. Ce dispositif, en 3 dimensions, remplit ces conditions d'expérimentation, ce qui devrait avoir un impact positif sur cette notion au final.

A 11-12 ans, les élèves sont confrontés essentiellement à des problèmes posés sur papier, le recours aux expérimentations concrètes, aux modélisations en taille réelle sont rares voire inexistantes. Pourtant les mathématiques font partie des branches scientifiques, qui prennent leurs sens surtout grâce aux expérimentations, aux travaux pratiques. L'idée est de pratiquer les mathématiques en manipulant, en proposant des situations expérimentales (Munier, 2006). Mes élèves sont confrontés à une situation expérimentale concrète, en devant mesurer les angles dièdres des solides de Platon construits avec des baguettes (50 cm. ou 1 m.) et des connecteurs. L'objectif est que mes élèves puissent réinvestir leurs découvertes plus tard, comme Munier le dit :

> Il semble donc que la confrontation avec une situation spatiale dans laquelle la grandeur angle prend tout son sens conduise à une maîtrise du concept d'angle suffisante pour permettre à certains élèves d'appréhender de nouvelles situations physiques (Munier, p. 81).

Grenier et Tanguay (2008) mettent aussi en avant les pratiques de manipulation en trois dimensions pour que les jeunes appréhendent mieux l'espace. Dans la situation proposée aux élèves, on parle des angles avec des objets tridimensionnels, on parle d'angles dièdres :

> Deux faces adjacentes forment un *angle dièdre*, qui est l'angle dont le sommet est sur l'arête commune et dont les côtés, perpendiculaires à cette arête, portent chacun un segment inclus respectivement dans chacune des faces (Grenier & Tanguay, p. 28).

Il est important de proposer aux élèves un matériel qui n'est pas constitué de faces, car les concepts ne sont pas perçus par les élèves, les faces masquent ce qui est important. De plus, la construction avec les faces se fait sans réflexion particulière mais par assemblage automatique.

> … avec du matériel où les faces sont déjà construites (*Polydron*, polygone en carton et élastiques, développement plans de polyèdres, etc.). Les questions relatives aux éléments conceptuels n'y sont pas à la charge des élèves (Grenier & Tanguay, p. 27).

Pour cela, le matériel proposé aux élèves est composé de baguettes (représentants les arêtes) et de connecteurs (représentants les sommets). Avec un tel matériel, la construction est totale, la réflexion permanente car les élèves doivent concevoir les faces puis le solide.



Figure 2 *– Photographie d'un dodécaèdre régulier avec le matériel baguettes et connecteurs*

La taille des objets construits est importante. Pour que l'engagement des élèves dans l'activité se fasse immédiatement, il faut prévoir des constructions géantes (Pound & Lee, 2010). Avec des baguettes de 50 cm., les élèves vont construire les solides de Platon avant de se lancer dans le problème de mesure de l'angle dièdre[1]. Le dodécaèdre fera plus de 1m. de hauteur, on peut parler de construction géante, comparé à ce qui est proposé communément dans les classes. L'objectif de cette taille est d'impliquer les élèves, ils pourront aussi avoir un autre point de vue sur ces objets, être créatif dans la résolution du problème, cela stimulera leur enthousiasme. Si l'élève trouve de l'intérêt dans l'activité, il va s'engager pleinement, son cerveau, et plus particulièrement la zone du cortex préfrontale, sera activée et il va consolider les apprentissages (Rushton & al., 2010), ce qui est le but recherché d'une telle expérimentation.

Au niveau du plan d'étude, les élèves manipuleront les différents angles dièdres des cinq solides platoniciens, ils entrainent donc l'attente fondamentale. Ils doivent aussi mesurer et communiquer le résultat par un nombre. Cette expérimentation respecte le plan d'étude en vigueur pour des élèves de 7-8e année (11-12 ans) du canton de Vaud.

III. RESULTATS

Comme précisé dans l'expérimentation, la séquence sur les angles n'a pas été consacrée uniquement à l'expérimentation citée ci-dessus. Ce qui suit ne concerne que les observations consacrées à l'angle dièdre.

1. Première approche de l'angle dièdre

Les élèves sont partis sur la construction des solides, puis ont expérimenté diverses tentatives pour mesurer l'angle dièdre. La principale difficulté fut que les faces n'existaient pas, il y avait uniquement les arêtes et les sommets. Les élèves ont donc vite pris des feuilles pour matérialiser les faces. Une méthode fut intéressante, reprise de ma part et mise en commun avec le reste de la classe :

1. le premier élève prend une feuille A3, la plie en deux sur une arête puis recouvre en partie les deux faces dont l'arête est l'intersection.
2. le deuxième prend un morceau de feuille, équivalent A5 ou plus petit, le pose orthogonalement contre la feuille A3 du premier élève.
3. le deuxième élève marque au stylo les intersections des feuilles A3 et A5 sur la petite feuille A5.

[1] Les exercices proposés sont téléchargeables sur le site : https://www.simplyscience.ch/a-faire-enseignants/articles/la-geometrie-dans-lespace-cest-facile.html?_locale=fr

4. les deux élèves prolongent les traits sur une 3e feuilles, jusqu'à ce que les deux droites se croisent.
5. tentative de lecture de la mesure de l'angle grâce au rapporteur de l'équerre.

2. Difficultés et amélioration de la méthode des élèves.

Après avoir pu observer la méthode de mesure de l'angle dièdre de ces deux élèves, il est apparu plusieurs imprécisions dues au matériel utilisé. Les feuilles de papier sont trop molles et ont créé deux obstacles au bon fonctionnement de la méthode. Le premier apparut sur la feuille A3 : il était difficile pour l'élève de la maintenir dans les deux plans voulus sans qu'elle tombe, ondule. Ceci a pour effet de créer des plans non plats ou ayant une autre inclinaison par rapport à l'angle dièdre. La deuxième difficulté apparut sur la petite feuille plaquée contre la feuille A3. Il était difficile de marquer correctement l'angle sur la petite feuille, sans la plier, la bouger et les traits se trouvèrent souvent approximatifs.

Lors de la mise en commun, j'ai suggéré pour améliorer cette méthode d'utiliser du carton rigide à la place des feuilles de papier, mais je n'ai pas modifié la méthode en elle-même proposée par les élèves. Ces suggestions ont facilité la manipulation et ont amélioré la précision des mesures. Les élèves ont mesuré ainsi plusieurs angles dièdres dans un solide et ont trouvé les mêmes valeurs d'angle. Ils en ont conclu qu'il y avait une seule valeur d'angle dièdre par solide.

Les élèves ont trouvé les angles dièdres dans 4 des 5 solides de Platon, le cinquième solide (tétraèdre) étant réservé pour l'évaluation finale quelques semaines plus tard.

3. Evaluation finale

Une des questions de l'évaluation finale était de mesurer l'angle dièdre d'un tétraèdre régulier. Pour ce faire, ils avaient à disposition des baguettes de 50 cm., des connecteurs et du carton. Mes huit élèves ont tous construit le tétraèdre et proposé une valeur en manipulant du matériel, ce qui n'est pas le cas d'autres questions « traditionnelles » sur papier. Ceci me montre un intérêt pour cette question, dû à la recherche concrète et ceci même si cette question prend plus de temps qu'une autre et même si elle est plus contraignante au niveau matériel qu'une autre.

Sur mes huit élèves, cinq ont visiblement utilisé la méthode mise en commun correctement. Parmi les cinq, trois ont trouvé un résultat s'approchant à plus ou moins 10° de la réponse (70,53° d'angle dièdre du tétraèdre) et les deux autres ont eu des difficultés de lecture de l'angle sur l'équerre. Trois ont utilisé une autre méthode montrant des difficultés sur la notion d'angle.

Cinq élèves ont donc su ce qu'ils devaient mesurer et ont appliqué une méthode correcte, ce qui peut signifier que la notion d'angle a été appréhendée d'une manière correcte, ou au moins qu'ils ont retenu la méthode proposée au cours. Un élève a donné le supplémentaire de l'angle cherché, la difficulté se trouve sur le matériel à disposition pour mesurer un angle, à savoir que sur le rapporteur il y a la double graduation angulaire de 0° à 180° et de 180° à 0°. L'autre élève donne 160° alors que son angle se rapproche plus des 60°. Ces deux élèves ont su reporter l'angle correctement, mais la mesure sur papier était compliquée. Ces cinq élèves m'ont donc montré, à travers l'activité, certaines acquisitions de la notion d'angle. Si j'étais resté sur papier, certains de ces élèves n'auraient pas eu l'occasion de me montrer leurs apprentissages par le geste. La tâche a permis à la majorité de mes élèves de me montrer ce qu'ils savent sur le concept de grandeur angle et non sur la mesure.

Pour les trois qui ont utilisé une autre méthode, un élève met 110°, mesure qui ne correspond pas à l'angle sur sa feuille ni à son supplémentaire, je ne peux malheureusement pas en dire plus. Par contre pour les deux derniers, il est intéressant de relever leur méthode. Ils n'ont utilisé qu'un seul petit morceau de carton, sans passer par les plans de faces. Ils ont plié le carton pour marquer un angle dessus, puis ils l'ont déplié pour reporté sur une feuille (on voit le pli du carton au milieu de l'angle). Ces deux élèves ont visiblement posé le petit morceau de carton différemment pour reporter des traits, mais au final ils ont décidé de déplier le carton pour revenir sur papier. Ceci me montre que la notion de grandeur, pour ces deux élèves est stéréotypée dans un plan, la feuille de papier. Il est difficile de repérer un angle en 3 dimensions, cette notion reste ancrée comme une notion abstraite en deux dimensions. Il est aussi pertinent de relever qu'un des deux élèves mesure l'angle correctement : pour lui, l'utilisation du rapporteur est apprise, mais reporter un angle d'un objet n'est pas acquis. Cet élève, avec une évaluation uniquement sur papier aurait mesuré correctement des angles et je n'aurais pas pu remarquer ses difficultés sur la notion de grandeur angle, il a certainement appris par cœur l'utilisation du rapporteur sans pour autant comprendre ce qu'il doit mesurer.

Lors de l'évaluation finale, j'ai également posé la question « Qu'est-ce qu'un angle dièdre ? ». Il est à noter, comme pour la manipulation, que tous les élèves ont répondu. On remarque que trois élèves ont « recopié » ce qui avait été dit avant l'expérimentation, ils ont appris par cœur. Trois élèves proposent une représentation imagée en perspective, soit en l'accompagnant d'un texte, soit sans texte explicatif. L'image proposée est tout le temps la même, celle d'un livre ouvert et avec une marque graphique pour l'ouverture.

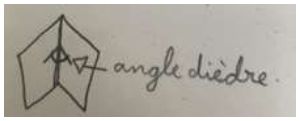


Figure 3 *– Une réponse type à la question : « Qu'est-ce qu'un angle dièdre ? »*

Dans ce cas, j'ai influencé la réponse en proposant une image lors de la définition. Il est quand même intéressant de remarquer qu'autant d'élèves ont retenu une définition texte qu'une définition figurée, d'où l'importance de proposer plusieurs types de support, même pour des définitions qui sont a priori souvent écrites. Il est à relever que trois définitions reprennent en partie ou pas du tout la définition texte proposée en début de séquence et sont complétées par leur auteur. Ils utilisent trois mots nouveaux qui ne sont pas apparu dans la définition textuelle, mais qui ont certainement été utilisé lors de la manipulation : « intérieur », « perpendiculaire » et « inclinaison ». « Intérieur », car ils devaient mesurer l'angle entre deux faces, qui se trouve dans le solide convexe. « Perpendiculaire » est utilisé pour signaler que l'on ne peut pas placer le deuxième petit carton A5 n'importe comment, qu'il doit y avoir des angles droits entre des plans. Je relève que ce mot vient du vocabulaire scientifique spécifique à la géométrie et qu'il est rare pour des élèves en difficulté d'utiliser ce vocabulaire. Ceci me fait penser qu'il a certainement mobilisé d'autres concepts géométriques pendant l'activité afin de réaliser la tâche et qu'il est capable d'y mettre des mots dessus, montrant une certaine maîtrise de la notion et ceci malgré les difficultés de compréhension de sa définition d'un angle dièdre. « Inclinaison », tout comme le mot « intérieur », sont des mots plus imagés ou en rapport avec l'image de la définition proposée, ces deux mots montrent qu'ils ont une certaine idée correcte de la notion d'angle dièdre.

IV. CONCLUSION

J'ai pu constater que la notion d'angle est complexe pour les élèves mais elle l'est également à observer dans les travaux des élèves. Il faut différencier la mesure et la grandeur. Or, dans la plupart des exercices proposés aux apprenants, on passe par la mesure pour faire comprendre la grandeur angle, ceci peut amener les élèves à limiter leur compréhension à la seule mesure. Certains de mes élèves, même s'ils n'ont pas réalisé des mesures correctes, m'ont montré qu'ils appréhendaient correctement les angles en tant que grandeur. A l'inverse, j'ai aussi vu un élève sachant mesurer mais ne comprenant pas la grandeur angle. Dans les classes ordinaires, l'utilisation du rapporteur de l'équerre est l'unique façon d'aborder la notion d'angle. Les élèves doivent mesurer, puis éventuellement construire des angles en 2 dimensions sur papier. La notion de grandeur angle n'est pas abordée, les élèves doivent apprendre à utiliser l'équerre sans pour autant comprendre la notion d'angle. Pour que les élèves puissent penser à la grandeur angle, il a fallu les faire évoluer en 3 dimensions. Les élèves ont au début essayé d'utiliser l'équerre pour mesurer un angle dièdre, mais ils ont vite abandonné ne voyant pas comment la poser. Les élèves ont donc dû penser à la notion d'angle en trouvant un moyen de le représenter sur les objets en 3 dimensions. Une fois représenté sur papier, ils ont cette fois-ci utiliser l'équerre pour mesurer leur report d'angle dièdre. La tâche a permis de séparer la grandeur angle (la recherche d'un angle en 3D) et la mesure angle (mesure associée au rapporteur). En ne travaillant que sur papier, la grandeur angle est plus compliquée à travailler, car les élèves associent immédiatement l'équerre à l'angle. Dans le cas de cette expérimentation, il y a un 1er temps sans rapporteur, qui me permet de voir si les élèves conçoivent la notion d'angle correctement et un 2e de mesure avec rapporteur.

Les élèves devaient travailler par deux au minimum, le matériel utilisé pour ces grandes constructions demande plusieurs mains pour le mettre en place. Par conséquent, quand les élèves veulent mettre en œuvre un système de mesure, ils doivent communiquer ensemble pour s'entendre sur l'expérimentation à faire, puis sur les gestes que chacun doit produire. La collaboration est donc indispensable.

Pour réussir à séparer grandeur et mesure, il m'a fallu proposer un dispositif comprenant :

- des constructions d'objets géométriques de grandes tailles
- proposer un problème de recherche ouvert (Arsac & Mante, 2007)
- laisser les élèves trouver des solutions en collaborant ou confrontant leurs résultats

J'ai aussi pu remarquer que l'instrument de mesure (l'équerre) peut mettre de la confusion auprès des élèves et ne permet pas de faire des liens entre grandeur et mesure. Il faudrait certainement proposer d'autres instruments de mesure et aussi insister avec des comparaisons d'angles par manipulation et non par mesure. Il aurait été intéressant de demander en préambule de l'utilisation du matériel, de faire comparer les angles des différents connecteurs, puis de les faire classer par exemple. J'aurais également pu mélanger tous les connecteurs et à la charge des élèves de retrouver les cinq solides de Platon.

REFERENCES

Arsac G., Mante M. (2007) *Les pratiques du problème ouvert*. CRDP Lyon.

Berthelot R., Salin M-H. (1994-1995) Un processus d'enseignement des angles au cycle III. *Grand N* 56, 69-116.

Browning C., Garza-Kling G. & Sundling E. (2007) What's Your Angle on Angles? *Teaching Children Mathematics* 14(5), 283-287.

CIIP (2011) *Plan d'Etudes Romand*. Récupéré sur http://www.plandetudes.ch

Dais T. (2011) À la recherche des polyèdres réguliers. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, 14(1), 29-48.

Euclide (1990) *Les Eléments : volume 1*. Paris : PUF.

Grenier D., Tanguay D. (2008) L'angle dièdre, notion incontournable dans les constructions pratique et théorique des polyèdres réguliers. *Petit x* 78, 26-52.

Izard V., Pica P., Dehaene S., Hinchey D., & Spelke E. (2011) Geometry as a Universal Mental Construction. *Space, Time and Number in the Brain*, 319–332.

Keiser J. M. (2004) Struggles With Developing the Concept of Angle: Comparing Sixth-Grade Students' Discourse to the History of the Angle Concept. *Mathematical Thinking and Learning* 6(3), 285-306.

Munier V., Merle H., & Devichi C. (2006) La construction du concept d'angle à l'école élémentaire à travers la notion de champ visuel. *Repères – IREM* 64, 65-84.

Piaget J., Inhelder B., & Szeminska A. (1948) *La géométrie spontanée de l'enfant*. Paris : PUF.

Pound L., Lee T. (2010) *Teaching mathematics creatively* Chapter 7 *Giant maths*. Londres : Routledge, 86-95.

Proclus (1948) *Les commentaires sur le premier livre des Éléments d'Euclide* (traduction de Paul Ver Eecke). Bruges : Desclée de Brouwer.

Rushton S., Juola-Rushton A., & Larkin E. (2010) Neuroscience, Play and Early Childhood Education : Connections, Implications and Assessment. *Early Childhood Education Journal* 37, 351-361.

APPUIS INDIVIDUELS POUR LE REPERAGE DE L'ANXIETE MATHEMATIQUE CHEZ UNE ELEVE DU GYMNASE.

TWARDOCH[*1] Corinne, DIAS[**2] Thierry, DERUAZ[***3] Michel

Résumé – Des appuis individuels ont été élaborés par des enseignants d'un gymnase suisse (lycée) et des chercheurs didacticiens en mathématiques de la Haute Ecole Pédagogique de Lausanne en Suisse, afin d'améliorer le repérage des difficultés mathématiques et de proposer des régulations adaptées. Notre étude concerne le cas d'appuis donnés à une élève et va s'intéresser au repérage de l'anxiété à l'égard des mathématiques.

Mots-clefs : appuis, anxiété mathématique, mémoire, performance, amygdale

Abstract – Individual tutoring was developed by high school teachers and mathematical researchers at the Haute Ecole Pédagogique in Lausanne, Switzerland, to improve the identification of mathematical difficulties and to propose appropriate regulations. Our study concerns the case of tutoring given to a student and will be interested in the identification of anxiety with regard to mathematics.

Keywords: tutoring, mathematical anxiety, memory, performance, amygdala

I. INTRODUCTION

1. Objet d'étude

En 2013, le gymnase de Nyon (équivalent du lycée, élèves de 15 à 19 ans), dans le canton de Vaud (Suisse), a entrepris de mettre en place des appuis en mathématiques dont le dispositif a fait l'objet d'un projet de recherche mené conjointement par des enseignants de mathématiques du gymnase et par une équipe de formateurs didacticiens en mathématiques de la Haute Ecole Pédagogique de Lausanne, en particulier Thierry Dias et Michel Deruaz.

Après avoir été affinés, ces appuis furent donnés en 2015 à une vingtaine d'élèves du gymnase. Notre travail porte sur l'étude du cas d'une élève ayant suivi ces appuis particuliers. Il prolonge un travail de mémoire de master en enseignement secondaire II en mathématiques, effectué en 2017 en collaboration avec S. Ferrini (Twardoch & Ferrini, 2017), et qui s'inscrivait dans le cadre du projet de recherche de T. Dias et M. Deruaz**.**

2. Question de recherche et hypothèses

Ces appuis diffèrent des appuis traditionnels et requièrent un dispositif particulier qui nécessite une formation préalable des enseignants. Ils ont la volonté de répondre de façon plus efficace au repérage et au traitement des difficultés spécifiques en mathématiques auxquelles les élèves du gymnase peuvent être confrontés (Deruaz & Dias, 2016). Ces difficultés peuvent provenir de causes diverses qu'il est difficile de lister de façon exhaustive. Parfois elles prennent un caractère permanent et irrémédiable, notamment lorsqu'elles sont liées à des troubles spécifiques comme la dyscalculie développementale ou encore le trouble du déficit de l'attention - hyperactivité (TDA-H). Nous pensons cependant que, pour la majorité des élèves au gymnase, les difficultés qu'ils rencontrent en mathématiques ne sont pas liées à ces troubles de l'apprentissage mathématique. D'autres causes semblent prévaloir au gymnase.

Les recherches de Charnay R. Mante (1991) ont permis d'identifier des causes liées à des obstacles didactiques (liées aux moyens d'enseignement), épistémologiques (liés à la

[1]* Gymnase de Nyon– Suisse – corinne.twardoch@vd.educanet2.ch
[2]** Haute Ecole Pédagogique de Lausanne – Suisse – thierry.dias@hepl.ch
[3]*** Haute Ecole Pédagogique de Lausanne – Suisse – michel.deruaz@hepl.ch

représentation même des concepts sous-jacents) ou ontogéniques (liés au développement de l'enfant, au sens de Piaget). Elles peuvent aussi provenir d'un événement particulier, comme une absence pour une maladie, un décès ou le divorce des parents. Ces difficultés semblent souvent temporaires et circonscrites à un domaine particulier de l'apprentissage mathématique.

Enfin, les recherches plus récentes en neuropsychologie cognitive (Moore & Ashcraft, 2016) montrent que certains facteurs émotionnels liés à l'anxiété à l'égard des mathématiques ont un impact majeur sur l'apprentissage mathématique. Les difficultés en lien avec ces facteurs semblent se manifester lors du traitement de nombreuses tâches mathématiques complexes[4], selon la dénomination de Robert (2003), aussi bien à l'école que dans la vie quotidienne, et semblent perdurer dans le temps. L'étude menée par Foley et al. (2017), s'appuyant sur de récentes recherches en neurosciences ainsi que sur les données expérimentales du programme PISA 2012, qui a testé des élèves âgés de 15 à 16 ans dans 64 pays (510 000 élèves participants, représentatifs des 28 millions d'élèves de 15 à 16 ans dans ces pays), confirme la relation négative forte entre la performance mathématique et l'anxiété à l'égard des mathématiques et montre également l'ampleur du phénomène, qui touche différents pays sur tous les continents.

La prévalence de ce phénomène nous a conduits à porter ce travail de recherche plus spécifiquement sur le rôle des appuis individuels dans le repérage de l'anxiété à l'égard des mathématiques, que nous nommerons par la suite anxiété mathématique.

Nous faisons l'hypothèse que le dispositif d'appuis mis en place dans le gymnase permet un meilleur repérage de l'anxiété mathématique. Notre étude, basée sur le cas particulier d'appuis donnés à une élève, a permis de montrer dans quelle mesure ces appuis permettaient de discerner les éléments saillants caractérisant l'anxiété mathématique chez l'élève, anxiété ayant comme conséquence une altération forte de son sentiment d'auto-efficacité et de sa capacité de raisonnement et ne lui permettant pas d'améliorer ses performances mathématiques, quelques soient les efforts qu'elle fournissait.

II. CADRE THEORIQUE

1. Caractéristiques des séances d'appui individuel

Les élèves au bénéfice des appuis individuels sont repérés lors du premier trimestre du gymnase, à l'aide des résultats dans toutes les matières. Les enseignants (volontaires) listent les élèves qui ont de grandes difficultés en mathématiques et dans les disciplines proches (physique, chimie, économie) mais qui sont proches du seuil de réussite en tenant compte des compensations avec les autres disciplines. Ils leur proposent un appui individuel pendant la semaine spéciale, semaine de l'année durant laquelle des activités particulières peuvent être effectuées. Quatre séances d'une heure sont prévues pour chaque élève inscrit. Elles sont filmées à des fins d'analyse. Les conditions des appuis (voir annexe1) sont expliquées aux élèves qui sont libres de les accepter ou de les refuser.

Ces appuis individuels permettent de créer une relation bienveillante d'aide et d'empathie qui permet à l'élève, en toute sécurité, de se risquer à donner des réponses, même fausses. La démarche repose sur la métacognition, c'est-à-dire, sur le regard qu'une personne porte sur sa démarche mentale dans un but d'action, afin de planifier, évaluer, ajuster et vérifier son

[4] Exemple de tâche complexe:
Pour quelles valeurs de a et b le polynôme x^3-ax^2+b est-il divisible par x^2+x-1 ?

processus d'apprentissage (Lafortune & Deaudelin, 2001). La métacognition sert, selon Doly (2006), quatre intérêts pédagogiques : assurer plus de réussite dans la gestion des tâches, favoriser le transfert des connaissances et des compétences et donc favoriser l'apprentissage, faire apprendre les compétences de contrôle et d'autorégulation et développer l'autonomie, en particulier dans le travail personnel, et enfin développer la motivation et l'estime de soi.

La démarche mise en œuvre lors de ces appuis est proche de l'entretien d'explicitation développé par Vermersch (2003) et fait partie des différentes interventions métacognitives permettant d'améliorer, selon Doly, le processus d'apprentissage. L'explicitation à voix haute par l'élève permet à l'enseignant de mieux comprendre les difficultés de l'élève et permet également d'accompagner l'élève dans la prise de conscience de ses processus mentaux dans le but d'améliorer son processus d'apprentissage. L'enseignant va également pouvoir expliciter sa propre démarche mentale pour montrer à l'élève les questions qu'il se pose, et d'une façon plus générale les questions que posent les mathématiques. L'élève va ainsi se rendre compte des étapes mentales qui entrent en jeu dans la résolution de la tâche.

Enfin, le choix des tâches proposées lors des appuis a aussi été étudié. Selon Deruaz et Dias (2016), c'est par le recours à la résolution de tâches complexes qu'il est possible à l'enseignant de repérer les difficultés et d'en identifier les causes. La résolution des tâches doit demander à l'élève d'élaborer une marche à suivre en plusieurs étapes, doit jouer sur les changements de cadres et de registres et ainsi permettre à l'élève de mieux faire l'inventaire de ses compétences et de ses connaissances. Les tâches doivent également amener l'élève dans sa zone proximale de développement, selon la théorie de Vygostki (1934), qui correspond à la zone de connaissance entre ce que l'apprenant sait déjà faire seul et entre ce qui lui est trop difficile de faire, même avec l'aide d'un expert. C'est à cette condition que la tâche peut déclencher des processus d'apprentissage et donc de développement.

2. L'anxiété mathématique

L'anxiété mathématique est décrite par Moore et Ashcraft (2016) comme :

« *une sensation de tension et d'anxiété qui interfère avec la manipulation des chiffres et la résolution de problèmes mathématiques dans un large éventail de situations de la vie courante et scolaire* ».

Différents chercheurs travaillant sur l'anxiété mathématique l'évaluent en utilisant des mesures appelées MARS ou sMARS (Ashcraft & Kirk, 2001)[5] .

Les recherches de Moore et Ashcraft (2016) ont montré que l'anxiété mathématique avait une corrélation négative forte avec l'intérêt pour les mathématiques, la motivation et le sentiment d'auto-efficacité à l'école, ce qui peut se caractériser par un manque de persévérance face aux échecs et le recours à des techniques de répétition et de mémorisation sans comprendre le sujet et conduisant à de faibles performances mathématiques. Ces élèves se basent sur leur intelligence statique en se focalisant sur leur talent inné. A l'opposé, les élèves peu anxieux à l'égard des mathématiques ont une motivation, un intérêt intrinsèque et un sentiment d'auto-efficacité forts et ont de meilleurs résultats. Ils vont persévérer malgré les échecs, vont produire des stratégies de résolution plus élaborées et vont développer leur

[5] *La mesure s*MARS (short Mathematics Anxiety Rating Scale) est une version plus courte (25 critères) de la mesure MARS plus couramment utilisée (98 critères). Ces mesures permettent d'évaluer le niveau d'anxiété des mathématiques sur une échelle de 1 à 5, en récoltant les réponses des participants mis face à des situations anxiogènes (comme un test en mathématiques à effectuer)

intelligence dynamique en se focalisant sur le processus plutôt que sur leur intelligence ou leur talent inné (Dweck, 2008).

Moore et Ashcraft s'intéressent au mécanisme de l'anxiété mathématique. Selon les auteurs, lors de traitement d'une tâche mathématique, l'anxiété mathématique semble provoquer une inquiétude forte et des ruminations, qui vont épuiser la mémoire de travail (ou mémoire à court terme) intervenant dans le traitement des tâches mathématiques complexes, laissant moins de ressources disponibles aux fonctions cognitives pour résoudre la tâche, et diminuant ainsi la performance au niveau des résultats (plus d'erreurs, plus de difficultés à élaborer des stratégies de résolution). Afin d'expliquer ce mécanisme, les auteurs exploitent plusieurs résultats de recherches qu'ils ont obtenus à l'aide de la neuro-imagerie.

Un premier résultat montre que certaines zones du cerveau (cortex préfrontal ventromédian, cortex pariétal inférieur gauche et gyrus angulaire) reflètent la pensée mathématique et la manipulation de données numériques complexes. Le traitement de tâches mathématiques fait appel aux fonctions exécutives supérieures (comme la mémoire de travail, décrite comme étant le système cognitif utilisé pour intégrer, maintenir, et manipuler les informations présentées à une personne à travers une tâche complexe) qui sont liées au cortex préfrontal.

Par ailleurs, les auteurs s'intéressent aux recherches liées à la régulation des émotions, qui peut être définie comme la capacité à mobiliser des processus afin de moduler l'état émotionnel. Selon Ahmed, Bittencourt-Hewitt et Sebastian (2015) qui étudient les différents modèles neurocognitifs de la régulation des émotions, lorsqu'un stimulus émotionnel significatif apparaît, l'amygdale (région sous-corticale du cerveau située dans les lobes temporaux et intervenant dans les émotions et les expressions de peur) est activée et provoque une modification de l'état émotionnel. L'amygdale est reliée à différentes régions frontales du cerveau (en lien avec les fonctions exécutives supérieures). Différentes stratégies vont être alors utilisées afin de moduler l'état émotionnel: on parle de régulation explicite (consciente et volontaire) ou implicite (inconsciente et involontaire). Ces stratégies sont nombreuses, évoluent en fonction de l'âge de l'être humain et font également appel aux fonctions exécutives liées au cortex préfrontal.

Sur la base de ces résultats, Moore et Ashcraft (2016) en déduisent l'un des mécanismes de l'anxiété mathématique qui consisterait à détourner le traitement efficace des calculs en mémoire de travail vers des réseaux qui sont impliqués dans la régulation émotionnelle des réponses neurologiques. Les résultats de neuro-imagerie montrent que chez des personnes ayant développé une anxiété mathématique, l'activation est plus forte entre l'amygdale et le cortex préfrontal ventromédian. De plus, les études de Ahmed et al. (2015) montrent que l'adolescence est une période dans le développement de l'individu où l'amygdale et les régions préfrontales n'ont pas encore atteint la maturité de l'âge adulte. Par exemple, le volume de l'amygdale augmente entre 7,5 et 18,5 ans. Les connexions entre l'amygdale et les régions préfrontales du cerveau se renforcent et deviennent plus matures au fur et à mesure que l'individu avance vers l'âge adulte, et ne sont pas matures à l'adolescence (Gyurak & al., 2011). D'autre part, pendant cette période, les événements négatifs sont en hausse, provoquant une forte sollicitation de l'amygdale. La régulation des émotions étant dysharmonieuse par manque de maturité des régions du cerveau impliquées, il y a une plus grande vulnérabilité des adolescents face à l'anxiété mathématique (Larson & Ham, 1993).

Moore et Ashcraft (2016) avancent aussi que c'est lors du traitement de tâches complexes que l'anxiété mathématique va se manifester plus fortement car le travail de réflexion autour d'une tâche complexe sollicite justement la mémoire de travail, contrairement à une tâche

simple qui va plutôt appeler la mémoire à long terme (par exemple restituer les tables de multiplication).

Un autre résultat intéressant donné par Lyons et Beilock (2012) montre que chez des élèves anxieux anticipant la réalisation d'une tâche mathématique, la réponse neurologique va être équivalente à une menace physique imminente et est associée à la douleur physique.

Nous avons vu les mécanismes intervenant dans certaines régions du cerveau pour des adolescents manifestant de l'anxiété mathématique. Certaines questions se posent quant aux causes possibles de l'anxiété mathématique.

Quelle est la relation causale entre l'anxiété mathématique et les performances mathématiques ? Est-ce l'anxiété qui cause une diminution des performances ou les faibles performances qui causent l'anxiété mathématique ? Existe-t-il des facteurs génétiques précoces ou développementaux (lors de la grossesse) qui pourraient expliquer un fonctionnement moins efficace des régions du cerveau impliquées dans le traitement des tâches mathématiques, amenant une faiblesse dans les performances ? Existe-t-il des facteurs génétiques précoces ou développementaux pouvant expliquer un fonctionnement moins efficace des régions frontales impliquées dans la régulation des émotions, rendant celle-ci moins efficaces pour inhiber l'anxiété mathématique?

Le sujet est complexe, les recherches actuelles permettant d'obtenir certaines réponses quant aux implications de facteurs génétiques sur l'intelligence générale (Davies & al., 2011), mais pas spécifiquement sur les compétences mathématiques. Par contre, ce qui est étonnant car contre-intuitif, est le fait que ce sont les élèves ayant les plus fortes capacités en termes de mémoire de travail qui vont être les plus à risque face à l'anxiété mathématique (Foley & al. , 2017), alors que l'on pourrait s'attendre à ce qu'une mémorisation accrue de procédures et de faits numériques permet de mieux surmonter des situations anxiogènes.

L'une des hypothèses concernant les causes possibles, rapportées par Maloney et al. (2010, 2011) est que le fait de faire face constamment à des problèmes de compréhension (même mineurs) en mathématiques peut développer chez un enfant l'idée que ses compétences sont insuffisantes, et le fait de se retrouver face à ses limites de façon répétée engendrerait un sentiment de frustration, créant ainsi de l'anxiété à l'égard des mathématiques. Par ailleurs, comme nous l'avons vu, l'anxiété mathématique va épuiser la mémoire de travail laissant moins de ressources disponibles aux fonctions cognitives pour résoudre la tâche, amenant une diminution de la performance et de moins bons résultats. La relation semble donc être plutôt bidirectionnelle, comme le confirme l'étude de Folet et al. (2017).

Une autre cause de l'anxiété serait liée au paradigme de la perte de ses moyens face à la pression (choking paradigm). Cette perte de moyens touche souvent les élèves qui ont un potentiel et un désir de réussir très forts. Elle survient lors d'un examen ou d'un travail écrit lorsque les enjeux sont élevés en provoquant une anxiété situationnelle forte.

Moore et Ashcraft évoquent aussi la menace de stéréotype. Ils la définissent comme étant un obstacle situationnel qui « touche des personnes qui pensent qu'un certain aspect de leur identité (l'identité sexuelle par exemple) sera jugé au regard de leurs performances à une tâche donnée. » Ces personnes pensent que si elles échouent à une tâche donnée, cela va donner une mauvaise image d'elle et va confirmer un stéréotype négatif. Plusieurs études ont démontré le lien entre les performances en mathématiques et l'adhérence à des stéréotypes, comme les stéréotypes de genre (à travers des phrases comme « les filles sont moins bonnes en mathématiques que les garçons », Beilock et al. (2007)), en montrant que l'adhérence aux stéréotypes va provoquer de l'anxiété à l'égard des mathématiques et donc altérer le fonctionnement de la mémoire de travail.

Beilock, Gunderson, Ramirez et Levine (2010) montrent également que l'anxiété mathématique pourrait être transmise aux filles par leurs propres enseignantes en école élémentaire, elles-mêmes anxieuses à l'égard des mathématiques, à travers l'adhérence de la fille au stéréotype de genre induit par l'anxiété de l'enseignante. Moore et Ashcraft évoquent alors la possibilité que d'autres influences, comme les parents, la fratrie ou les amis, pourraient jouer un rôle important sur le développement de l'anxiété mathématique chez un enfant. D'ailleurs Maloney, Ramirez, Gunderson, Levine, Beilock (2015) ont montré par exemple l'influence négative d'un parent anxieux (au niveau mathématique) voulant aider aux devoirs mathématiques.

III. METHODOLOGIE

Afin d'étudier le cas de notre élève, nous avons utilisé différentes méthodes pour récolter les informations et les analyser. Les appuis individuels étant antérieurs à notre étude, nous avons collecté des informations a posteriori pour intégrer les questions concernant l'anxiété mathématique. Cela dit, il aurait été envisageable de concevoir un questionnaire lors du premier entretien de l'appui.

1. La grille de repérage de l'anxiété mathématique

Sur la base des informations recueillies dans la partie théorique, nous avons élaboré une grille en deux parties, permettant de repérer les manifestations et les causes possibles de l'anxiété mathématique, et utilisée lors de notre analyse (voir annexe 2).

2. Les vidéos des appuis individuels

Les vidéos faites durant les appuis mathématiques permettent à l'enseignant ayant conçu les appuis d'analyser a posteriori les difficultés d'apprentissage de l'élève, l'évolution des apprentissages durant la semaine des appuis, ainsi que l'autocritique de la méthodologie même des appuis dans le but de l'affiner. L'élève a été filmée à quatre reprises sur la semaine, pendant une heure à chaque fois. Nous avons visionné chacune des vidéos, en relevant les erreurs commises par l'élève et en interprétant les difficultés mathématiques à travers ces erreurs. Nous avons également observé son attitude générale face aux différentes questions qui lui ont été posées (attention, écoute, implication dans les tâches, motivation, réactions émotionnelles, posture, gestuelle, intonation de la voix).

3. Les entretiens

Après avoir redoublé sa première année, l'élève a eu la même enseignante en mathématiques pendant trois années. Il s'agissait également de la même enseignante en charge des appuis individuels. Nous nous sommes entretenues avec elle afin d'avoir son regard sur cette élève aussi bien au niveau mathématique qu'au niveau de son comportement et de son attitude en classe. Nous nous sommes également entretenues avec son enseignante d'italien qui la connaissait depuis trois ans et pouvait décrire les traits personnels et affectifs qui caractérisaient l'élève. Nous avons enfin rencontré l'élève lors d'un entretien individuel, auquel elle a accepté de venir sans aucune contrainte.

4. Les tests en mathématiques

À la suite de l'entretien avec l'élève, nous lui avons demandé si elle acceptait de nous montrer ses tests depuis la première année. L'objectif de cette démarche, que nous avons

communiqué à l'élève, était d'analyser l'impact des appuis individuels sur l'élève, en regardant les erreurs qui subsistaient après les appuis, à court et moyen terme et en les comparant avec celles travaillées lors des appuis individuels. L'élève s'est montrée très coopérative et nous a transmis ses tests de 2ème et 3ème année. Nous avons analysé chacun d'eux en nous focalisant sur le repérage des difficultés apparaissant dans les vidéos.

IV. ANALYSE ET SYNTHESE DES RESULTATS

Plusieurs manifestations de l'anxiété mathématique listées sur la grille de repérage peuvent être observées chez l'élève.

L'entretien avec l'élève révèle que l'élève avait une peur panique toute la semaine précédant un test de mathématiques

« C'était une semaine où je dors pas, c'est horrible comme ça, je paniquais »

L'explicitation à voix haute lors des appuis permet de mettre en évidence que l'élève a des difficultés avec les tâches complexes proposées, nécessitant des démarches et donc une mobilisation efficace de la mémoire de travail. Elle cherche à appliquer des recettes qu'elle a dû voir auparavant, sans les comprendre. L'élève est consciente de ces difficultés:

« Les problèmes, 'fin si je sais ce que je dois faire et que j'ai la théorie à côté et que je dois juste l'appliquer ça j'y arrive mais (…) si on a un problème, qu'est-ce qu'on cherche et tout ça… »

L'étude des tests montre que l'élève commet de nombreuses fautes d'inattention, surtout au début des tests. L'élève indique aussi:

« C'est vrai que je suis pas une personne concentrée, du coup j'ai l'impression que pendant un test je me dis tout le temps, faut que je me concentre, j'ai plus beaucoup de temps, j'ai plus le temps de vraiment réfléchir le problème »

L'élève est décrite par ses enseignantes et par elle-même comme étant anxieuse, manquant de confiance en soi, qui se « bat » pour réussir. Dans les vidéos, on observe son manque de confiance, elle demande constamment la validation et l'encouragement de l'enseignante pour continuer ce qui suggère un sentiment d'auto-efficacité faible

L'entretien avec l'élève montre qu'elle n'a pas d'intérêt intrinsèque à suivre des appuis individuels avec son enseignante. Elle pense que son enseignante la considère comme une élève qui ne travaille pas car elle ne parvient pas à améliorer ses notes. En s'inscrivant à ces appuis, elle espère changer l'idée que se fait son enseignante sur elle.

« Le fait de faire ces appuis c'est pour que ma prof voit que c'est pas que je m'en fiche des maths mais que vraiment je bloque »

Plusieurs causes possibles de l'anxiété mathématique sont également repérées chez l'élève.

L'élève est confrontée à de faibles performances mathématiques dès le secondaire 1 (collège), donc un risque de s'être confrontée à ses limites régulièrement et d'avoir perdu confiance en ses compétences mathématiques. Les difficultés de l'élève coïncident également avec le début de l'adolescence où la régulation des émotions est dysharmonieuse.

« Quand je suis arrivée en VP, j'ai tout lâché. Je suis passée en VP parce j'avais quand même un 5,5 en maths (…). Mais quand je suis arrivée en 9ème, j'avais 2,5 de moyenne et c'est resté comme ça pendant 3 ans »

L'élève semble adhérer au stéréotype de genre concernant les compétences des femmes en mathématiques

« Mon père était très doué en maths, donc je pense que mon frère il a vraiment pris ça de mon père. Ma mère c'était une catastrophe en maths. Mais elle m'a jamais dit…t'es une catastrophe en maths elle m'a toujours dit – ça m'étonne pas que t'aies de la peine, moi aussi j'avais de la peine »

« Pour moi les maths c'est quelquechose pour les hommes, mais maintenant j'ai toujours eu des femmes comme prof quasiment. Mais c'est vrai que quand on me dit un homme aime les maths je trouve ça normal. Quand on me dit une femme aime les maths, je me dis, ah?

Le frère et les amis perçoivent l'élève comme « nulle en maths », le père ne l'encourage pas.

« Quand les gens ils me disaient t'as quoi comme notes en maths, puis moi je dis 3,5, ils disent ah…toi t'es du genre à être nulle en maths » (…) « Mon père il a plus la mentalité à dire euh…si je ramène un 5, pourquoi pas un 5,5 ? A la base c'est plutôt pour rire. Au final, au bout d'un moment quand ça fait 10 ans comme ça… »

Enfin, les entretiens montrent que l'élève a une pression forte de résultats liée au bon niveau en mathématiques de son père, de son petit frère et de son copain (elle se compare aux deux derniers qui suivent tous deux l'exigeante option spécifique mathématiques-physique). Le père semble ne pas se contenter d'une bonne note à l'école. L'attitude du frère, du père et des amis peut, sur le long terme, affecter son sentiment d'auto-efficacité, sa motivation et son intérêt pour les mathématiques, et ainsi renforcer une anxiété mathématique qui leur est négativement corrélée.

V. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Les différentes illustrations de notre analyse montrent que le dispositif mis en place lors des appuis individuels semble permettre un meilleur repérage de l'anxiété mathématique, en particulier pour cette élève chez qui l'anxiété, causée potentiellement par son vécu mathématique et son entourage, l'empêche, aujourd'hui, de mettre en place des stratégies efficaces lui permettant d'améliorer ses performances mathématiques.

Ces résultats se basent sur la grille de repérage que nous avons mise en place. Plusieurs critères ont été observés pour cette élève, mais il serait encore nécessaire de confronter ces résultats avec une mesure de l'anxiété de type MARS, car il est encore difficile d'évaluer le nombre de critères à partir duquel on peut affirmer que l'élève a une anxiété mathématique.

Il est intéressant de souligner que ces appuis individuels permettent aux enseignants d'améliorer leur discernement des éléments saillants caractérisant l'anxiété mathématique et d'avoir ainsi un regard expert lorsqu'ils sont en classe, afin de mieux repérer l'anxiété mathématique parmi leurs élèves avant même de les avoir inscrits aux appuis. Ils peuvent éventuellement confirmer leurs hypothèses par la suite en travaillant avec eux individuellement ou en groupe. Par exemple, pour réduire l'adhérence au stéréotype de genre, les travaux de Beilock et DeCaro (2007) montrent que le seul fait de dire qu'il n'y a pas de différence de genre lors de la résolution de tâches mathématiques, permettraient d'obtenir de meilleurs résultats. Ces résultats pourraient être croisés avec ceux du travail sur l'égalité des genres récemment mené à l'école en France.

Au-delà du repérage de l'anxiété mathématique, les appuis individuels permettraient, lorsqu'ils sont donnés sur une plus longue durée (programme de 8 semaines intensives), de diminuer l'anxiété mathématique chez des élèves de 7-9 ans et de corriger de façon remarquable et durable les stratégies de régulation des émotions et la connectivité entre l'amygdale et les régions préfrontales. Ces résultats nécessitent cependant d'être encore étendus aux adolescents (Supekar, Iuculano, Chen & Menon, 2015) afin que nous puissions les exploiter au gymnase.

Il serait également intéressant d'étudier les différences entre l'anxiété mathématique et la phobie mathématique. Les recherches en neuro-imagerie montrent en effet que l'anticipation d'un effort mathématique se traduit comme une souffrance physique par les élèves anxieux à l'égard des mathématiques. Est-ce que cette souffrance engendre des comportements d'évitement dans différentes situations scolaires ou sociales liées aux mathématiques, ou autres manifestations de phobie mathématique ?

REFERENCES

Ahmed, S. P., Bittencourt-Hewitt, A., & Sebastian, C. L. (2015). Neurocognitive bases of emotion regulation development in adolescence. *Developmental cognitive neuroscience*, *15*, 11-25.

Ashcraft, M. H., & Kirk, E. P. (2001). The relationships among working memory, math anxiety, and performance. *Journal of experimental psychology: General, 130(2), 224.*

Beilock, S. L., & DeCaro, M. S. (2007). From poor performance to success under stress: working memory, strategy selection, and mathematical problem solving under pressure. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, *33*(6), 983.

Beilock, S. L., Gunderson, E. A., Ramirez, G., & Levine, S. C. (2010). Female teachers' math anxiety affects girls' math achievement. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *107*(5), 1860-1863.

Charnay R. Mante M. (1990-1991) De l'analyse d'erreurs en mathématiques aux dispositifs de remédiation : quelques pistes, *Grand N*, *48*, *37-64*

Davies, G., Tenesa, A., Payton, A., Yang, J., Harris, S. E., Liewald, D., ... & McGhee, K. (2011). Genome-wide association studies establish that human intelligence is highly heritable and polygenic. Molecular psychiatry, 16(10), 996-1005.

Deruaz, M., & Dias, T. (2016). Elèves en difficultés ? Dyscalculiques ? Petit X, 101, 7–35. Dias, T. (2016). Labo-maths : du cube à la pyramide.

Doly, A. M. (2006). La métacognition: de sa définition par la psychologie à sa mise en œuvre à l'école.

Dweck, C.S. (2008). The secret to raising smart kids. Scientific American : Mind. December/January, 36-43.

Gyurak, A., Gross, J. J., & Etkin, A. (2011). Explicit and implicit emotion regulation: a dual-process framework. Cognition and Emotion, 25(3), 400-412.

Foley, A. E., Herts, J. B., Borgonovi, F., Guerriero, S., Levine, S. C., & Beilock, S. L. (2017). The math anxiety-performance link: A global phenomenon. Current Directions in Psychological Science, 26(1), 52–58

Hare, T. A., Tottenham, N., Galvan, A., Voss, H. U., Glover, G. H., & Casey, B. J. (2008). Biological substrates of emotional reactivity and regulation in adolescence during an emotional go-nogo task. *Biological psychiatry*, *63*(10), 927-934.

Lafortune, L., Deaudelin, C., & Deslandes, R. (2001). Formation à l'accompagnement dans une optique réflexive et métacognitive. *La formation continue: de la réflexion à l'action*, 45-71.

Larson, R., & Ham, M. (1993). Stress and" storm and stress" in early adolescence: The relationship of negative events with dysphoric affect. *Developmental psychology*, *29*(1), 130.

Lyons, I. & Beilock, S.L. (2012) "Mathematics Anxiety: Separating the Math from the Anxiety," *Cerebral Cortex* 22 (2012): 2102–2110.

Maloney, E. A., Ansari, D., & Fugelsang, J. A. (2011). The effect of mathematics anxiety on the processing of numerical magnitude. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology*, *64*(1), 10-16.

Maloney, E. A., Risko, E. F., Ansari, D., & Fugelsang, J. (2010). Mathematics anxiety affects counting but not subitizing during visual enumeration. *Cognition*, *114*(2), 293-297.

Maloney, E. A., Ramirez, G., Gunderson, E. A., Levine, S. C., & Beilock, S. L. (2015). Intergenerational effects of parents' math anxiety on children's math achievement and anxiety. *Psychological Science*, 0956797615592630.

Moore & Ashcraft, 2016. Anxiété et affect en mathématiques. Dans Tardif, E., & Doudin, P. A. (2011). Neurosciences cognitives et éducation: le début d'une collaboration. *Revue des HEP de Suisse Romande et du Tessin, 12*, 99-120 (pp 288-317)

Robert, A. (2003). Tâches mathématiques et activités des élèves: une discussion sur le jeu des adaptations introduites au démarrage des exercices cherchés en classe. *Petit x, 62*, 61-71.

Supekar, K., Iuculano, T., Chen, L., & Menon, V. (2015). Remediation of childhood math anxiety and associated neural circuits through cognitive tutoring. Journal of neuroscience, 35(36), 12574-12583.

Twardoch, C., Ferrini, S. (2017). Comment expliquer le faible impact des appuis individuels pour une élève de gymnase ayant des difficultés en mathématiques ? Etude de cas. *Mémoire de master en enseignement secondaire II, Haute Ecole Pédagogique de Lausanne.*

Vermersch, P (2003) *L'entretien d'explicitation*. Issy-les-Moulineaux : ESF Editeur

Vygotski, L. (1985). Pensée et langage (1934). *Paris: Messidor*.

ANNEXE 1 Conditions des appuis

- l'élève est seul avec un enseignant qui peut être ou pas son enseignant de mathématiques
- le premier appui débute par un échange avec l'enseignant sur le vécu mathématique de l'élève, afin de mettre à jour les difficultés connues de l'élève et d'orienter l'enseignant sur d'autres sources potentielles de difficultés
- l'élève doit résoudre différentes tâches mathématiques au tableau noir afin que sa résolution puisse être observée par l'enseignant et qu'il travaille autrement que sur feuille, qu'il change son habitude de travail
- l'élève fait l'effort d'expliciter à voix haute toutes les étapes de résolution afin que l'enseignant puisse avoir accès à la pensée de l'élève, à sa démarche mentale
- à la fin de la séance, l'élève ne peut pas repartir avec ses notes mais doit, pour la séance suivante, résoudre à nouveau, mais seul cette fois-ci, la tâche sur laquelle il avait travaillé
- à la séance suivante, l'élève montre ses notes et l'enseignant reprend ce qui n'a pas marché après que l'élève lui a décrit oralement les difficultés rencontrées

ANNEXE 2 Grille d'analyse

A. **Repérage des manifestations**
   1. Souffrance lors de la réalisation de tâches ou à l'approche d'un test
   2. Techniques de répétition et de mémorisation sans comprendre le sujet
   3. Pas de stratégie de résolution élaborée
   4. Erreurs d'inattention nombreuses, problèmes de concentration
   5. Sentiment d'auto-efficacité faible
   6. Peu de motivation et d'intérêt intrinsèque pour la matière
   7. Focalisation sur le talent inné plutôt que sur les processus d'amélioration

B. **Étude des causes possibles chez l'élève**
   1. Problèmes de compréhension depuis la petite enfance
   2. Menace de stéréotype de genre
   3. Enseignante à l'école élémentaire ou proches ayant une anxiété mathématique
   4. Parents anxieux en mathématiques aidant leurs enfants dans les devoirs
   5. Influence des proches et des amis sur le sentiment d'auto-efficacité
   6. Régulation des émotions disharmonieuse à l'adolescence
   7. Facteurs génétiques ? Intelligence générale basse ?

DEVOLUTION D'UNE MEME SERIE DE TACHES DANS PLUSIEURS CONTEXTES : QUE DE SURPRISES…

VENDEIRA* Céline

Résumé – Cette étude compare le déroulement d'un enchainement de tâches au sein de trois contextes différents, à savoir une classe ordinaire de l'école primaire (cycle 1), une institution avec des élèves aux troubles du comportement et une fondation avec des élèves aux troubles du spectre autistique. Les premières conclusions mettent en évidence des processus de dévolution distincts en fonction des contextes pouvant mettre à mal nos expérimentations.

Mots-clefs : enseignement spécialisé, reconnaissance de formes, visualisation iconique et non-iconique, dévolution, jeu de tâches

Abstract – This study compares the realization of different tasks in three different contexts : an ordinary class of primary school (cycle 1), two students with behavioral disorders and a class of students with autism spectrum disorders. The first conclusions highlight different logics according to the contexts that can undermine our experiments. In such cases, modifications and / or didactic arrangements are necessary.

Keywords: specialized education, shapes recognition, iconic and non-iconic visualization, devolution, set of tasks

I. INTRODUCTION

Cette recherche fait suite aux travaux de Vendeira & Coutat (2017) pointant qu'il est possible de développer et travailler dès le cycle 1 la vision non-iconique chez des élèves de l'école primaire. Pour ce faire, un matériel spécifique a été développé qui force le changement de regard des élèves sur les figures lors de tâches de reconnaissances de formes. Partant de cette recherche, nous nous sommes interrogés sur la transférabilité de ces constats dans le contexte de l'enseignement spécialisé et du processus de dévolution possible.

> La dévolution consiste pour l'enseignant, non seulement, à proposer à l'élève une situation qui doit susciter chez lui une activité non convenue, mais aussi à faire en sorte qu'il se sente responsable de l'obtention du résultat proposé, et qu'il accepte l'idée que la solution ne dépend que de l'exercice des connaissances qu'il possède déjà. (Brousseau, 2010, p.5)

Dans ce qui suit, nous présentons quelques observations suite à l'utilisation de ce matériel dans des classes du cycle 1 de l'école primaire ordinaire. Puis, dans un second temps, nous confrontons ces constats avec des observations réalisées dans deux contextes différents : un centre de jour avec des élèves aux troubles du comportement, ainsi qu'une fondation avec des élèves aux troubles du spectre autistique (TSA).

Nous débutons cet article en présentant brièvement le cadre théorique sur lequel nous nous appuyons pour développer un matériel visant à développer une vision non-iconique chez des élèves de l'école primaire. Nous donnons ensuite quelques éléments méthodologiques et contextuels en présentant les différentes classes qui nous ont accueillis pour mener nos expérimentations.

Nous détaillons alors les surprises, les différences et similitudes observées lors de nos expérimentations au sein de ces trois contextes puis tentons, à ce stade de notre recherche, quelques premières conclusions en lien avec la transférabilité de notre matériel en contexte spécialisé et des processus de dévolutions observés.

* Université de Genève – Suisse – celine.marechal@unige.ch

II. A L'ORIGINE DE NOTRE RECHERCHE, DES TRAVAUX DE SCIENCES COGNITIVES ET LA DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUE

1. L'apport des sciences cognitives

À partir de tests de reconnaissance de figures simples parmi un lot de figures, Pinet et Gentaz (2007) mettent en évidence le fait que les cercles sont mieux reconnus que les carrés, puis les rectangles et les triangles en dernier (99% de réussite pour le cercles, 73% pour les carrés, 64% pour les rectangles et 53% pour les triangles).

De plus, au même titre que les travaux de didactique des mathématiques, ces auteurs pointent que ce sont généralement les figures dans leur orientations prototypiques qui sont le plus facilement reconnues. Dans notre recherche, nous optons dès lors pour l'utilisation de disques comme supports des formes afin de ne favoriser aucune orientation des pièces.

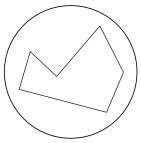


Figure 1 *– Exemple d'une forme reproduite sur un disque*

Les travaux de Gentaz se sont également intéressés à l'importance de l'haptique pour les apprentissages en géométrie. Pinet et Gentaz (2008) ont ainsi mené une étude avec des séances d'entrainement « multisensorielles » (visuo-haptique) pour la reconnaissance de formes avec des élèves de 5-6 ans. Ils ont effectué des séances avec deux groupes, un groupe classique (figures dessinées ne permettant qu'une exploration visuelle) et un groupe « multisensoriel » (avec des figures en relief découpées dans de la mousse permettant en plus de l'exploration visuelle, une exploration haptique). Des entrainements identiques autour de la reconnaissance des figures planes élémentaires et de leurs propriétés ont été proposés aux deux groupes. Des progrès dans les deux groupes ont été constatés mais ces derniers étaient plus importants dans le groupe « multisensoriel » en particulier pour la reconnaissance des rectangles et des triangles. Ces auteurs concluent que l'exploration haptique permettrait aux élèves de porter davantage leur attention sur la structure même des figures et ses propriétés. Partant de ces résultats, nous choisissons, dans le cadre de notre recherche (Vendeira & Coutat, 2017), d'utiliser l'exploration haptique avec l'utilisation de formes géométriques manipulables. A la place de la mousse, nous développons des formes encastrables (gabarits et pochoirs) permettant deux types distincts de manipulation (l'intérieur du pochoir et le pourtour du gabarit). Ainsi, là où des pointes sont détectables sur un gabarit, des trous y sont associés, au toucher, sur le pochoir correspondant.



Figure 2 *– Matériel encastrable comprenant une partie évidée (pochoir) et pleine (gabarit).*

2. L'apport de la didactique des mathématiques

En didactique des mathématiques, de nombreux travaux pointent une rupture dans l'enseignement de la géométrie entre l'école primaire et le collège (Berthelot & Salin, 1992; Houdement & Kuzniak, 1998). Partant de ce constat, notre recherche tend à réduire cette rupture en concevant des tâches en géométrie dès le cycle 1. Les travaux de Duval (1994) soulignent qu'il est nécessaire de changer de regard sur les figures, essentiellement centré sur leur surface à cet âge-là, afin d'entrer dans les propriétés géométriques (Duval & Godin, 2005 ; Duval, Godin, & Perrin-Glorian, 2004). Dans ses travaux, Duval (2005) fait référence à deux types de visualisation : la visualisation iconique et celle non-iconique. La première correspond à la vision des objets géométriques en tant que surface que nous nommons la vision globale (Vendeira & Coutat, 2017). La seconde est celle impliquant une connaissance des propriétés géométriques. A l'école primaire, nous parlons plutôt des caractéristiques des formes comme prémices aux propriétés. La visualisation non-iconique nécessite ainsi de considérer les relations qui définissent les objets, même si elles peuvent être partielles et nécessiter une représentation graphique comme support à la réflexion. Ainsi, afin de forcer le changement de regard des élèves sur les formes, nous avons conçu une collection de 36 pièces comprenant des formes non habituelles. Nous postulons dès lors que faute de pouvoir leur attribuer un nom, ils devront soit discerner une ressemblance entre une forme et un objet de leur environnement familier (« ça ressemble à… », se situant encore dans une vision iconique), soit se baser sur ses caractéristiques afin de la reconnaître ou la définir (« il y a des arrondis »). Dans ce deuxième cas, c'est bien une vision non-iconique que l'élève doit mobiliser. Un mixte de ces deux visions est également possible comme dans cette réponse proposée par un élève pour décrire la forme marquée d'une étoile dans un assortiment de trois formes : « c'est la forme qui ressemble à un poisson avec un arrondi ».



Figure 3*– Exemple d'une tâche impliquant une procédure mixte entre vision iconique et non-iconique*

La collection est conçue afin de travailler certaines caractéristiques des formes : la présence de bords droits ou courbes, de symétries, de côtés opposés parallèles ou encore le caractère convexe de la forme. Le nombre de côtés dont la forme est constituée peut également être travaillé, mais n'est pas la caractéristique la plus pertinente étant donné que les élèves de cet âge-là sont justement en plein apprentissage du nombre.

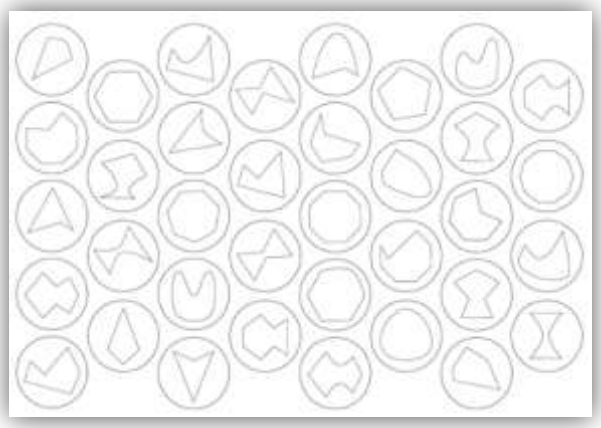


Figure 4 *– Matériel constitué de 36 pièces.*

III. QUELQUES ELEMENTS METHODOLOGIQUES ET CONTEXTUELS

1. Contextes

Depuis 2004, nous collaborons avec des classes de l'école primaire ordinaire. En moyenne nous travaillons avec huit classes par année que ce soit dans des écoles du centre-ville ou en campagne genevoise. Notre matériel a donc été testé avec de nombreux élèves âgés de 4 à 6 ans, puis de 6 à 8 ans. Depuis la rentrée scolaire 2017, nous expérimentons également des activités avec des élèves de 8 à 10 ans. Au cours d'une année scolaire, les élèves travaillent avec les chercheurs entre deux à quatre périodes de 45 minutes chacun. Lors de ces périodes, le chercheur travaille avec entre deux à six élèves. Les séances se déroulent la plupart du temps en dehors de la classe. Nos expérimentations nous permettent de confronter notre matériel ainsi que nos activités à la réalité du terrain. Nous souhaitions ainsi obtenir une tendance quant à l'adéquation de nos activités sur le terrain afin de soit les conserver / abandonner, soit les ajuster si besoin.

Chaque séance est filmée par une, voire deux, caméras. Nous avons ainsi un nombre conséquent d'heures d'observations sur lesquelles nous pouvons nous baser afin de vérifier si les activités proposées aux élèves leur permettent de mobiliser une vision non-iconique en convoquant certaines caractéristiques des formes.

Concernant les élèves de l'enseignement spécialisé, nous avons, à ce jour, peu expérimenté le matériel. Deux institutions nous accueillent actuellement, nous permettant d'explorer si notre matériel permet la dévolution de nos tâches chez des élèves dans d'autres contextes que l'école primaire. Les deux institutions sont très distinctes. La première accueille des élèves aux troubles du comportement et de l'apprentissage et la seconde des élèves aux troubles du spectre autistique. Dans la première institution, nous travaillons avec quatre élèves par groupes de deux. Quant aux élèves TSA, nous travaillons avec sept élèves par groupes de deux ou trois. Dans tous les cas nous travaillons en moyenne durant environ 45 minutes avec les différents groupes d'élèves.

2. Recueil de tâches à disposition

Nous avons à notre disposition un ensemble de tâches. Certaines nécessitent de la manipulation et d'autres n'ont comme support que des représentations de nos formes sur papier.

Nous avons conçu nos tâches en partant d'une situation générale d'encastrement libre dont la description figure ci-dessous.

> Les pochoirs et les gabarits sont séparés, mélangés et dispersés sur une table. L'élève doit procéder à des encastrements jusqu'à ce que chaque gabarit soit encastré dans son pochoir. Il dispose de tout le temps nécessaire et peut manipuler toutes les pièces à sa disposition.

Nous jouons ensuite sur quelques variables didactiques afin de créer une grande variété de tâches. Par exemple, en :

- réduisant le nombre d'essais autorisés à un seul, cela incite les élèves à identifier les caractéristiques des formes ;
- éloignant les gabarits et les pochoirs, le recours à la perception globale diminue ;

- limitant le temps à disposition (par exemple par le biais d'un jeu de rapidité), cela défavorise la stratégie par essais-erreurs ;

Les élèves sont installés autour d'une table. Les gabarits sont dispersés sur la table. Chaque élève reçoit le même nombre de pochoirs qu'il dispose en pile devant lui. Au top départ, chaque élève prend le pochoir situé sur le dessus de sa pile. Il doit trouver le gabarit correspondant sur la table. Une fois trouvé, il le prend et l'encastre. Si les deux pièces s'encastrent, l'élève passe au pochoir suivant et le jeu se poursuit. Sinon, il remet le gabarit incorrect sur la table et poursuit sa recherche. Le premier qui a terminé sa pile a gagné. Les élèves ont le droit de passer autant de fois qu'ils l'estiment nécessaire, en mettant le pochoir non souhaité sous leur pile pour y revenir plus tard.

Figure 5 – *Description de la tâche « Retrouve la bonne forme – le jeu de rapidité »*

- réduisant la vision (complètement ou partiellement), rendant ainsi la vision iconique inopérante.



Figure 6 – *Deux exemples de tâches où 1) la vision des formes est absente et seul le toucher des formes dans un sac est possible 2) la vision est partielle, car se fait à travers une « fenêtre » à déplacer sur la forme à identifier*

IV. OBSERVATIONS : QUE DE SURPRISES…

Le bilan des activités dans les classes de l'enseignement ordinaire est positif. Les élèves réalisent les tâches de manière autonome dès 4 ans et l'encastrement ou non des pièces offre une rétroaction directe du milieu (Brousseau, 1998). De plus, la plupart des activités ne nécessitent que très peu de consignes. Les enseignants peuvent ainsi proposer ces activités lors de moments d'ateliers ou lors de la période d'accueil du matin. Au fil de l'année les élèves semblent, selon les activités et les assortiments de pièces sélectionnées, développer une certaine flexibilité dans le regard qu'ils portent sur les formes. Ainsi, ils se réfèrent dès que possible à une catégorie de formes « la pièce qui ressemble à … » et lorsque cela n'est plus possible, ou pas suffisamment performant, ils adoptent un regard sur les caractéristiques des formes. Les élèves développent également un langage spontané et souvent efficace afin de décrire certaines caractéristiques comme « une ligne », « tout droit », « des traits » pour évoquer les côtés droits des formes, ou encore « arrondi », « une vague » ou « ça tourne » pour l'aspect courbe, etc…

À ce stade, nous pouvons déjà identifier que les différentes tâches conçues et expérimentées en classe permettent de vérifier l'existence d'une variété de manière de penser les objets chez les élèves. Ces différentes manières de penser coexistent en fonction des situations proposées et ne se substituent pas les unes aux autres. Du côté des enseignants, le

bilan est également positif avec une demande forte d'obtenir une séquence d'enseignement qui leur permettrait d'ordonner les activités à proposer à leurs élèves.

Dans l'institution spécialisée avec les élèves aux troubles du comportement, les quatre élèves avec qui nous travaillons sont entrés dans les tâches facilement et les objectifs visés ont bien été atteints, à savoir adopter un regard mobile sur les formes en fonction des tâches proposées. Nous constatons que les tâches proposées permettent le processus de dévolution. Comme les élèves sont plus âgés que dans les classes ordinaires où nous avons expérimentés nos tâches, la mobilisation des différents regards souhaités semble ne pas poser de problème particulier. Quant aux stratégies adoptées et au lexique utilisé aucune nouveauté n'est constatée par rapport à ce qui a pu être observé dans les classes ordinaires. La possibilité de manipuler et d'entrer dans des tâches ne réclamant pas des consignes trop complexes semble un aspect positif dans ce contexte. Par contre, alors que cela semblait un défaut pour les enseignants de l'ordinaire, le fait d'avoir une série de tâches non organisées avec lesquelles rebondir en fonction des réactions des élèves semble un avantage dans ce contexte. Nous pouvons dès lors faire le lien avec le dispositif de jeu de tâches (Favre, 2008) expérimenté par le groupe ddmes[1] avec des élèves de l'enseignement spécialisé.

> Au cours de la partie, l'expérimentateur essaie, par une distribution adéquate des tâches qu'il propose, à entretenir et faire durer les interactions élèves-milieu et à les dynamiser par l'aménagement de surprises que ces tâches sont supposées pouvoir produire. En jouant ses tâches, l'expérimentateur est conduit à engager ses connaissances du milieu et les savoirs mathématiques dont il dispose pour interpréter et contrôler le déroulement des interactions qui s'y produisent. Tandis que de leur côté, les élèves sont eux aussi invités à mettre en jeu leurs connaissances mathématiques, en réponse aux tâches qui leur sont proposées, créant et résolvant parfois leurs propres tâches, en réponse aux sollicitations de l'expérimentateur et/ou du milieu dont ils ont fait l'objet. (Favre, 2008, p.19)

Ainsi, alors qu'avec les élèves de l'enseignement ordinaire deux à trois tâches sont proposées en 45 minutes d'expérimentation, nous en proposons plus du double avec ceux de l'institution spécialisée et pour chaque élève dans un ordre différent mais correspondant à ses expérimentations propres. Ce constat découle du fait que l'expérimentateur n'hésite pas à sauter d'une tâche à l'autre dès qu'il observe des signes de lassitude, angoisse ou autres de la part des élèves.

Dans le dernier contexte, avec les élèves TSA, d'autres constats peuvent être mis en évidence. A cet effet, nous pointons ci-dessous quelques surprises apparues au fil de nos expérimentations. Ces surprises ont pu de manière très rare apparaître avec quelques élèves des classes ordinaires, mais cela reste de l'ordre de l'exception. L'un des premiers points surprenants concerne la quasi absence de manipulation des pièces de la part des élèves. Alors que les élèves des deux autres contextes font constamment le tour des pochoirs et gabarits avec leurs doigts, ce n'est pas le cas avec les élèves TSA. Très rapidement les élèves confrontés à deux pièces qui ne divergent que par une seule caractéristique montrent qu'ils ne voient aucune différence « c'est les mêmes » malgré les quelques relances de notre part.



[1] Groupe de didactique des mathématiques dans l'enseignement spécialisé qui regroupe des chercheurs, enseignants et formateurs qui se posent des questions autour de l'enseignement des mathématiques en contexte spécialisé.

Figure 7 *–Exemple de formes proches perceptivement non distinguées par les élèves aux troubles du spectre autistique.*

Tout ceci va d'ailleurs nous conduire à faire un pas de côté, nous éloignant, momentanément, de nos objectifs initiaux. Nous proposons en effet à ces élèves de travailler sur les ressemblances des pièces de la collection avec des objets de leur quotidien (favorisant ainsi la vision globale plutôt que celle par les caractéristiques). Nous avons ainsi évoqué les pizzas, les nœuds papillons, les rochers, les montagnes, les poissons et les pingouins qui ont permis aux élèves, par un jeu de mimes, de pouvoir reconvoquer ces ressemblances tout au long de la séance. Concernant le lexique permettant de décrire des familles de formes, nous découvrons avec ces élèves des termes encore peu, voir pas du tout, utilisés dans les deux autres contextes, à savoir des épines, des mâchoires, des croissants, des pingouins, des pieds, des chaussures et des boucliers. D'autres surprises sont apparues comme le fait que la plupart des élèves ne suivent pas les consignes. Ils font alors des tâches qui ne sont pas celles demandées et que nous n'avons pas encore eu le temps de questionner. Voici, ci-dessous, quelques propositions d'élèves qui semblent avoir mobilisé toute leur attention.



Figure 8 *– Exemple de tâches d'élèves non liées à des demandes du chercheur.*

Il ressort également que les tâches sans le matériel concret (mais à partir de photocopies des formes) et celles impliquant de la communication entre pairs ne fonctionnent pas. De manière générale, parmi l'ensemble des tâches disponibles, seules deux, voire trois, semblent fonctionner. La dévolution des tâches ne se fait donc pas correctement, alors que nous aurions fait le pari inverse étant donné que les élèves peuvent travailler seuls, que la manipulation est centrale et que nous pouvions éviter les tâches de communication.

V. PREMIERES CONCLUSIONS

Du point de vue de la prise en main par les professionnels de notre matériel, les attentes sont, semble-t-il différentes. Les enseignants ordinaires souhaitent pourvoir s'appuyer sur une séquence d'enseignement qu'ils pourraient suivre sans devoir réaliser un travail de planification conséquent. Les enseignants spécialisés travaillant avec des élèves aux troubles du comportement semblent preneurs d'une série de tâches avec lesquelles jongler (jeux de tâches) en fonction des connaissances et états émotionnels de leurs élèves. Quant aux enseignants spécialisés avec les élèves présentant un trouble du spectre de l'autisme, leur principale préoccupation, à ce stade de notre recherche, semble de voir si les élèves peuvent entrer dans le type d'activités que nous proposons.

La dévolution semble toutefois ne pas se produire comme nous l'espérions. En effet, le matériel et les tâches associées ne rencontrent pas le même succès que dans les autres contextes. A ce stade, il est nécessaire de retourner travailler avec ces élèves notamment car

certains ont pu simplement être gênés par la présence d'une personne étrangère à l'institution, mais surtout afin d'apporter des modifications et/ou aménagements didactiques dans les tâches proposées. Les contraintes des consignes comme « le plus vite », « sans regarder », « en un seul essai », etc. n'étaient pas prises en compte, sauf lorsque le milieu matériel le contraignait. Ainsi, parmi l'ensemble des tâches disponibles, seules deux, voire trois, semblent fonctionner dans ce nouveau contexte. Ne prenant pas en considération les contraintes de la tâche, les élèves se retrouvent à chaque fois dans la tâche d'encastrement libre et témoignent de ce fait une certaine lassitude. Il est donc nécessaire de réfléchir à de nouvelles tâches qui leur permettraient d'entrer dans les objectifs visés.

Une question qui émerge suite à nos premières interventions dans le contexte spécialisé concerne le type de regard à favoriser chez les élèves TSA. Alors que nous mettons tout en œuvre pour que les élèves de l'enseignement ordinaire et ceux du contexte spécialisé avec des troubles du comportement mobilisent une vision non-iconique, cela semble moins certain avec des élèves ayant des handicaps avérés et dont les spécificités sont à prendre en compte. Le fait que les élèves présentant un trouble du spectre de l'autisme ne semblent pas percevoir de différences parmi un assortiment de formes très proches nous amène à constater qu'il est nécessaire de penser différemment les tâches qu'on leur propose et qu'il est donc primordial de faire davantage d'expérimentations avant de tirer des conclusions.

A ce stade de notre recherche, nos premiers constats nous amènent à penser que le processus de dévolution ne se fait pas de la même façon du côté des professionnels comme de celui des élèves en fonction du contexte auquel ils appartiennent et que la transférabilité d'un contexte à l'autre n'est, à priori, pas toujours possible.

REFERENCES

Berthelot R., Salin M.-H. (1992) *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*. Thèse de doctorat. Université Bordeaux I.

Brousseau G. (2010) Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques (1998). [consulté le 10 décembre 2017 : http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf]

Brousseau G. (1998) *Théorie des situations didactiques : Didactique des mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Coutat S., Vendeira C. (2015) Des pics, des pointes et des arrondis en 1P-2P. *Math-Ecole* 223, 14-19.

Duval R. (2005) Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de didactique et sciences cognitives* 10, 5-53.

Duval R. (1994) Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repères IREM* 17, 121-138.

Duval R., Godin M. (2005) Les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand N* 76, 7-27.

Duval R., Godin M., & Perrin-Glorian M.-J. (2004) Reproduction de figures à l'école élémentaire. *Actes du séminaire national 2004*, 7-91.

Favre J.-M. (2008) Jeu de tâches : un mode d'interactions pour favoriser les explorations et les expériences mathématiques dans l'enseignement spécialisé. *Grand N* 82, 9-30.

Houdement C., Kuzniak A. (1998) Géométrie et paradigmes géométriques. *Petit X* 51, 5-21.

Pinet L., & Gentaz E. (2008) Évaluation d'entraînements multisensoriels de préparation à la reconnaissance de figures géométriques planes chez les enfants de cinq ans : étude de la contribution du système haptique manuel. *Revue française de pédagogie* [En ligne], 162. URL : http://rfp.revues.org/753

Pinet L., Gentaz E. (2007) La reconnaissance de figures géométriques planes (cercle, carré, rectangle et triangle) chez des enfants de cinq ans. *Grand N* 80, 17-24.

Vendeira C., Coutat S. (2017) « C'est une montagne ou une trompette ?» Entre perception globale et caractéristiques des formes aux cycles 1 et 2. *Grand N* 100, 79-103.

ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES ET ECOLE INCLUSIVE : CAS DES ELEVES HANDICAPES VISUELS EN CÔTE D'IVOIRE

KOUAME* Koffi Pierre

RESUME - L'éducation est un droit pour tout citoyen ivoirien selon la loi d'orientation N° 95-696 du 7 septembre 95. Malheureusement, notre étude à l'Institut National Ivoirien Pour la Promotion des Aveugles montre que l'inexistence ou l'insuffisance de matériels pédagogiques et didactiques adaptés génère chez les enseignants, des difficultés d'ordre pédagogique et didactique dans l'enseignement des mathématiques à leurs élèves.

Mots-clés : Enseignement, école inclusive, handicapés visuels.

ABSTRACT - Education is a right for every Ivorian citizen according to the Orientation Law N ° 95-696 of September 7, 95. Unfortunately, our study at the Ivorian National Institute for the Promotion of the Blind shows that the non-existence or insufficiency adapted pedagogical and didactic materials generate pedagogical and didactic difficulties for teachers in the teaching of mathematics to their pupils.

Keyword: Teaching, inclusive school, visually impaired.

I. INTRODUCTION

En Côte d'Ivoire, l'éducation est garantie à chaque citoyen selon la loi d'orientation N° 95-696 du 7 septembre 95. En 2015, cette loi a été modifiée. La nouvelle loi introduit, dans les principes fondamentaux qui régissent l'Enseignement, celui de « *La scolarisation obligatoire pour tous les enfants de Côte d'Ivoire des deux sexes de six (6) à seize (16) ans* ». Depuis 2013, l'Etat ivoirien initie un projet d'école inclusive. Ce concept se veut un moyen de combattre les attitudes discriminatoires, en créant des communautés accueillantes, en édifiant une société intégratrice et en atteignant l'objectif de l'éducation de tous.

II. PROBLEMATIQUE

En Côte d'Ivoire, diverses initiatives ont été prises par les gouvernants pour atteindre l'objectif de l'éducation de tous les citoyens. Malheureusement, la prise en charge des enfants présentant des handicaps est problématique. Seules deux (2) structures publiques d'éducation des enfants handicapés existent en Côte d'Ivoire. L'Ecole Ivoirienne des Sourds (EIS) qui a pour mission l'éducation des enfants présentant des handicaps auditifs et l'Institut National Ivoirien Pour la Promotion des Aveugles (INIPPA) qui a en charge les enfants présentant des handicaps visuels. Des interrogations sur la nature des difficultés rencontrées par les enseignants de l'INIPPA dans l'enseignement des mathématiques sont d'un intérêt didactique à clarifier au regard des exigences institutionnelles qui aspirent à une école inclusive.

Notre objectif est d'expliciter la nature des difficultés rencontrées par les enseignants de l'INIPPA dans l'enseignement des mathématiques.

Nous partons de l'hypothèse que les difficultés rencontrées par les enseignants de l'INIPPA dans l'enseignement des mathématiques sont d'ordre pédagogique et didactique.

* Laboratoire de Recherche en Didactique (LAREDI) ENS- Côte d'Ivoire- koffipierrekouame@yahoo.fr

III. CADRE THEORIQUE DE REFERENCES

Pour mener notre étude, nous avons exploré le *constructivisme de Piaget* (1973) relativement à la maturation neurologique, les interactions physiques et l'expérience sociale qui développent l'intelligence de l'enfant, le *socioconstructivisme de Vygotsky* (1989) et *Bruner* (1998) qui relèvent le rôle important des interactions entre pairs et du tutorat.

Nous avons visité les théories didactiques de *Brousseau* (1998), de *Vergnaud* (1990) et de *Chevallard* (1991) car, l'appropriation des savoirs mathématiques se fait en situation de classe avec la manipulation de concepts et la présence d'un enseignant. Ces savoirs ont subi des transformations pour les rendre assimilables par les apprenants.

Les travaux de *Armstrong et Barton* (2003) relatifs à l'école inclusive, de *Lafay* (2017) sur la manipulation d'objet pour faciliter l'apprentissage des concepts Mathématiques et de *Ramel, S., & Bonvin, P.* (2014) sur la nécessité d'un accompagnement des établissements scolaires sur le chemin d'une pratique intégrative à une école inclusive nous ont guidés.

IV. CADRE METHODOLOGIE

1. Terrain de recherche

Notre étude a été menée à l'Institut National Ivoirien Pour la Promotion des Aveugles (INIPPA) de Yopougon (Abidjan).

2. Présentation de l'Institut National Ivoirien Pour la Promotion des Aveugles (INIPPA)

L'INIPPA est un établissement spécialisé créé en Octobre 1974 par la Caritas Suisse, et cédé à l'Etat ivoirien en 1975. Il compte à la rentrée scolaire 2018- 2019, douze (12) enseignants et cinquante et un (51) élèves du primaire dont vingt-trois (23) filles et vingt-neuf (28) garçons.

Classes	Nombre d'élèves	Filles	Garçons	Tranches d'âges
Cours préparatoire première année (CP1)	15	5	10	5- 10 ans
Cours préparatoire deuxième année (CP2)	8	5	3	8- 16 ans
Cours élémentaire première année (CE1)	7	3	4	9- 13 ans
Cours élémentaire deuxième année (CE2)	4	1	3	12- 13 ans
Cours moyen première année (CM1)	9	5	4	11- 17 ans
Cours moyen deuxième année (CM2)	8	4	4	14- 16 ans

Tableau 1*- L'INIPPA*

3. Echantillon

Notre échantillon est composé de douze (12) enseignants tous titulaires de l'INIPPA.

4. Collecte de données

Les données ont été recueillies au moyen d'un questionnaire et des observations de classe pour identifier les matériels utilisés par les enseignants, vérifier la disponibilité de ces matériels, identifier les difficultés des enseignants dans l'enseignement des mathématiques et relever la nature de ces difficultés.

5. Méthodes d'analyse

Pour analyser nos données, nous avons opté pour une analyse mixte : quantitative et qualitative.

V. RESULTATS

Nos résultats révèlent que les difficultés des enseignants de l'INIPPA sont d'ordre pédagogique et didactique : insuffisance ou absence de matériels didactiques adaptés (Feuille à dessin A4, mètre enrouleur, compas, roulette à dessiner, triple- décimètre, rapporteur…), difficultés des enseignants à respecter les moments didactiques et les stratégies pédagogiques en vigueur. D'où des difficultés d'appropriation des savoirs mathématiques par les apprenants (Aux évaluations de fin de séance d'apprentissage, les réponses fausses suivantes ont été notés dans les productions des apprenants: Au CP1, dix (10), au CP2, quatre (4), au CE1 cinq (5), au CE2 trois (3), au CM1 cinq (5) et au CM2, six (6)).

VI. CONCLUSION

En Côte d'Ivoire, la volonté de scolarisation de tous les enfants en âge d'aller à l'école sans distinction a toujours été affirmée par les gouvernants. Malheureusement, toutes les politiques éducatives ne prennent pas suffisamment en compte les enfants vivant avec des handicaps.

Pour L'INIPPA, l'insuffisance ou l'absence de matériels didactiques adaptés impacte négativement les pratiques de classes des enseignants et les apprentissages scolaires.

REFERENCES

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble: La pensée sauvage.

Bruner, J. (1998). *Le développement de l'enfant, savoir-faire, savoir- dire*. Paris : PUF.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique, Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble : La pensée sauvage.

Lafay, A. (2017). *Pourquoi la manipulation d'objet peut-elle aider à l'apprentissage des concepts Mathématiques? https://parlonsapprentissage.com/pourquoi-la-manipulation-dobjets-peut-elle-aidera-lapprentissage-deconcepts-mathématiques/consulté le 08/12/17*

Piaget, J. (1973) *Biologie et connaissance*. Paris : Gallimard, Coll. Idées.

Ramel, S., & Bonvin, P. (2014). D'une pratique intégrative à une école inclusive: nécessité d'un accompagnement des établissements scolaires sur ce chemin. *Revue suisse de pédagogie spécialisée*, 2, 6-12.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Revue en Didactique des Mathématiques*, vol. 10, pp. 33- 115.

Groupe de travail 12 (GT12)
Étude des processus de Vulgarisation

BILAN DU GROUPE DE TRAVAIL N°12

ÉTUDE DES PROCESSUS DE VULGARISATION DES MATHEMATIQUES

Responsables

AMIDOU[*] Morou – GOURDEAU[**] Frédéric – PELAY[**] Nicolas

Correspondant CS

EL IDRISSI[****] Abdellah

I. INTRODUCTION

Le GT12 s'est intéressé aux processus de vulgarisation mathématique, avec l'ambition de tirer pleinement profit de la diversité des acteurs, des modalités et des formes de la vulgarisation mathématique. Il s'inscrivait dans la continuité des éditions EMF2012 et EMF2015, lesquelles avaient fait une place importante aux discussions portant sur la vulgarisation, dans le cadre du projet spécial 4 en 2012 et du projet spécial 2 en 2015. Ils ont ainsi permis de partager une partie de l'expérience acquise et de prendre un certain recul face à ce type d'activités (Fiorelli Vilmart, Belbachir et Tanguay, 2015). En prenant la forme d'un groupe de travail à part entière, il est devenu possible d'approfondir les échanges et pousser plus loin notre réflexion. C'est une dimension que les responsables de ce groupe ont tenu à afficher dans l'appel à proposition de textes ou d'affiches.

À la suite de l'appel à proposition, huit textes avaient été retenus. Malheureusement, un des auteurs n'a pu prendre part au colloque, ramenant le nombre de contributions à sept. Les 20 participants, provenant de 7 pays répartis sur 4 continents, apportaient une diversité de parcours et de points de vue extrêmement riche. On retrouvait des chercheurs en didactique, en mathématiques et en histoire des mathématiques partageant une expérience ou un intérêt marqué pour la vulgarisation mathématique, des fondateurs d'organisations actives dans le domaine, et des professionnels de la vulgarisation mathématique – plusieurs portant plus d'un de ces chapeaux.

Afin de tenir compte de cette diversité, et permettre de véritables échanges, les présentations, basées sur les textes soumis, ont été relativement brèves et planifiées de sorte à pouvoir faire ressortir les enjeux principaux. Elles ont été structurées autour de trois thèmes. Ces trois thèmes seront retenus pour la structuration de la suite ce texte. Ce sont :

1- Qu'est-ce que la vulgarisation ?
2- Quels sont les enjeux de la vulgarisation?

[*]Université de Niamey – Niger – moorou_a@yahoo.fr
[**] Université Laval – Canada – frederic.gourdeau@mat.ulaval.ca
[***]Plaisir des maths – France – nicolas.pelay@plaisir-maths.fr
[****]École Normale Supérieure - Marrakech – Maroc – abdellah_elidrissi@yahoo.fr

3- Quelle didactique pour les actions de vulgarisation ?

II. QU'EST-CE QUE LA VULGARISATION ?

Le début de nos travaux a permis de discuter de ce que nous entendons par vulgarisation mathématique, en nous basant sur des exemples apportés par les participants. Nous avons pu discuter à la lumière d'une brève présentation faite par Frédéric Gourdeau de la contribution d'Abdulkadir Erdoğan (lequel n'a pas pu participer à EMF2018), intitulée *Des activités de vulgarisation des mathématiques en classe : des questions écologiques*, et de celle faite par Pierre-Alain Cherix du texte d'AlPaGe intitulé *Un avenant au contrat didactique : la vulgarisation en classe*.

Plusieurs questions sont abordées dans la discussion animée qui suit les présentations. Une a trait aux publics. En effet, bien que d'entrée de jeu les deux présentations se soient situées dans un contexte scolaire, on reconnait que plus souvent, les actions visent un public général ou des groupes d'élèves dans une activité qui n'est pas réalisée en classe, ou à tout le moins pas dans un cours. Certaines actions virtuelles, comme celles partagées sur Youtube, accessibles à un vaste public et qui reste difficilement identifiable. Il y a aussi des actions qui visent spécifiquement les enseignantes et enseignants du primaire, sans être elles-mêmes dans un contexte formel d'apprentissage. Et la liste peut se poursuivre.

Se pose aussi la question de la nature de l'action de vulgarisation, qui est liée au dénominatif utilisé pour décrire ou désigner celui qui la conduit. Est-il médiateur ou animateur, et dans quelle mesure un enseignant qui fait de la vulgarisation en classe est-il encore et avant tout dans son essence un enseignant ? Dans la présentation de Cherix, il s'agit précisément de cela.

A ce propos, existe-t-il une dichotomie : enseignant ou vulgarisateur/médiateur ? Pour certains, la distinction est liée à la position ou la posture dans laquelle est le public : est-il captif ou pas? Si on adopte ce point de vue, on pourrait exclure l'utilisation du terme pour des actions en classe. Cependant, en classe il y a la possibilité d'un éventuel rejet (même relatif) de la démarche de vulgarisation. Ici, les relations entre motivation et vulgarisation sont abordées. On souligne aussi que les contextes scolaires n'étant pas les mêmes partout, ce qui est de la vulgarisation en classe aux yeux de certains peut être perçu comme une facette habituelle de l'enseignement pour d'autres. Il se dégage tout de même un besoin de prise en compte de la classe comme écosystème, de la dimension écologique, si on veut aborder ces questions.

La compréhension attendue ou espérée des participants est aussi variable. On semble de manière générale avoir des visées communes en ce qui a trait à l'importance de faire voir que les maths ne sont pas figées, que l'on peut faire des maths en se posant des questions, que ces questions n'ont pas toujours une réponse unique. Par contre, l'importance attachée à comprendre de quoi il est question mathématiquement est variable. Pour certains vulgarisateurs/médiateurs, très vite on a l'envie ou le désir que les jeunes comprennent quelque chose. Pour d'autres, les jeunes, mêmes s'ils sont des élèves, sont surtout des enfants. La vulgarisation peut permettre d'enseigner, mais plus tard, et l'apprentissage n'est pas une fin en soi.

Ainsi, on évoque à plusieurs reprises l'absence d'évaluation comme étant l'une des caractéristiques importantes des actions de vulgarisation. Elle est liée à la notion de plaisir, qui est aussi une caractéristique récurrente des actions de vulgarisation. Cependant, ici, on questionne aussi la notion du plaisir. Pour certains, bousculer les convictions et recadrer ce que sont les maths (Non, les maths ce n'est pas terminé, et il n'y a pas nécessairement une seule bonne réponse, comme il n'y a pas seulement une question !) peut créer un inconfort salutaire, et pas forcément le sourire.

Qu'en est-il de la vulgarisation qui vise simplement le plaisir et le spectaculaire, sans aborder de front le comment et le pourquoi? Devrait-on alors parler de vulgarisation ou plutôt de popularisation? Une discussion à poursuivre.

Ajoutons que dans le cours de la discussion, plusieurs exemples sont mentionnés dont flash mob (ou mobilisation éclair), situation de recherche sur des problèmes ouverts (maths en jeans), concours ludiques ou élitistes (Kangourou, Championnat international des jeux mathématiques et logiques), spectacles (magie mathématique, pièce de théâtre), rallyes mathématiques (projet de classe).

III. QUELS SONT LES ENJEUX DE LA VULGARISATION ?

Dans sa présentation de *Quel rôle peut jouer l'histoire des mathématiques dans une action de vulgarisation des mathématiques ?*, Lisa Rougetet souligne que son travail cherche à avancer quelques critères à prendre en compte dans la conception d'une action de vulgarisation pour identifier le rôle à donner à la dimension historique, sans toutefois chercher à prescrire comment elle doit être introduite dans une activité de vulgarisation scientifique.

Elle vise à sensibiliser les animateurs/médiateurs aux différentes formes que peut revêtir l'histoire dans une action de vulgarisation. En se basant sur des travaux portant sur le recours à l'histoire des mathématiques dans des activités d'enseignement, elle offre une analyse qui permet de suggérer une démarche pour les animateurs. Celle-ci part d'une identification des contenus abordés dans l'animation qu'il serait possible de connecter à une dimension historique. Puis, du rôle (compréhension, motivation) de la dimension historique, en ajoutant l'importance de considérer les limites imposées par un tel recours, notamment en considérant l'authenticité des faits historiques. Quelles limites faut-il considérer pour ne pas risquer de basculer vers une déformation de l'histoire?

Benoît Rittaud présente *La tour de Hanoï*, lequel fait ressortir un enjeu mathématique. Ici, la démarche proposée par l'animateur est riche sur le plan mathématique, permettant de cheminer dans un contenu qui est rarement abordé. Les jeunes peuvent cheminer, explorer, conjecturer. L'auteur présente quelques-unes des avenues mathématiques explorées, ou susceptibles de l'être.

Karine Godot présente *Quelle image des mathématiques peut être apportée par les différents acteurs de la vulgarisation des mathématiques? Exemple du projet Maths à modeler.* En se basant sur des travaux réalisés dans le cadre de sa thèse, elle détaille et ausculte l'image des maths chez les jeunes et chez le public. Contrairement à certains domaines scientifiques, l'image des maths est peu remise en question car il y a comparativement peu de vulgarisation mathématique. Qu'est-ce que chercher en math?

Fait-on des maths s'il n'y a pas de nombres ou s'il n'y a pas d'opérations clairement mathématiques à effectuer? L'apport riche de sa contribution nous permet de sortir des a priori et des clichés pour donner les balises d'un point de vue scientifiquement fondé.

Les discussions sont tout d'abord en lien avec l'enjeu historique qui interpelle directement certaines des actions menées par les participants. En effet, l'habillage - parfois historique- fait souvent partie de la vulgarisation. Et si une anecdote est savoureuse, doit-on s'en priver sous prétexte qu'elle comporte des éléments erronés ou légendaires? À cela, certains remarquent qu'il ne faut pas dénaturer l'histoire pour vulgariser les maths, comme il ne faudrait pas dénaturer les maths pour enseigner autre chose. Est-ce qu'on ne fait pas un peu trop dans la facilité sur le plan des anecdotes historiques? Il y aurait une vérité historique comme il y a une vérité mathématique.

L'enjeu de l'authenticité mathématique peut aussi se poser. On peut cacher ou garder implicites des techniques, et occulter l'image de ce que sont les maths. N'est-ce pas mentir par omission? Est-ce qu'on dénature parfois les maths comme on risque de le faire pour l'histoire? Quand le manque de rigueur ou de précision va-t-il trop loin? Le vulgarisateur doit se soucier du rapport à la vérité et de la crédibilité qui est accordée à ces dires.

L'enjeu de l'image des maths est quant à lui présent depuis le début des discussions du groupe. On souhaite sortir les maths de la classe, aller vers une vision plus riche et plus vivante de ce que sont les maths. On souhaite qu'on arrête de dire que les maths, c'est nul! On aborde aussi l'affectivité et les enjeux politiques (accessibilité, iniquité, etc.), lesquels varient considérablement selon les pays et les contextes.

IV. QUELLE DIDACTIQUE POUR LES ACTIONS DE VULGARISATION ?

Caroline Poisard présente *La didactique des mathématiques pour décrire et analyser des activités d'animation scientifique.* Dans cette contribution, à partir d'un exemple d'atelier de fabrication et d'étude d'objets à calculer réalisés par des élèves de CM2 dans un centre d'animation, elle montre comment des concepts de la théorie anthropologique du didactique et de la théorie des situations didactiques sont également pertinents dans des contextes d'animation et de vulgarisation scientifique. Elle en déduit que, selon l'institution, le rapport au savoir est spécifique et s'attèle à l'étude des spécificités du contrat didactique dans ce cas.

Silvania Sousa do Nascimento présente *La pratique de l'animation scientifique à travers le discours des animateurs*. Auteure d'un des premiers travaux de didactique des animations scientifiques, elle présente des exemples de ce qui est fait au Brésil, élargissant l'éventail des actions que l'on peut souhaiter considérer dans nos discussions. Animation dans la rue, festival scientifique, festival des sciences, WhatsApp pour envoyer des questions, café et débats. Puis, elle aborde les différents rôles de celui qui fait de la vulgarisation, ajoutant militant et savant à celui d'animateur.

Nicolas Pelay présente *Esquisse d'un modèle didactique d'analyse pour les actions de diffusion des mathématiques*. Il y détaille des éléments de ce que peut être une didactique des actions de diffusion, en argumentant que la didactique peut offrir une approche théorique commune menée dans des contextes différents. Des distinctions doivent être

apportées pour bien décrire ce que l'on étudie, comme celle suggérée entre vulgarisation et popularisation, cette dernière visant avant tout de faire aimer les maths, alors que dans la vulgarisation, il y a un savoir que l'on souhaite vulgariser, rendre accessible d'une certaine manière à un public. Il s'appuie sur les travaux antérieurs de Poisard et Godot notamment.

Shaula Fiorelli Vilmart présente une deuxième contribution du groupe AlPaGe intitulée *Regards sur les ateliers récréatifs*. Elle indique tout d'abord qu'à la suite des discussions que nous avons eues au sein du groupe de travail, le texte pré-acte sera modifié. Elle explique que des concepts empruntés à la didactique des mathématiques, notamment le contrat didactique et l'ingénierie didactique, de même que la dévolution, peuvent permettre d'éclairer l'activité de professionnels impliqués dans la vulgarisation des mathématiques et de reconnaître à ce type d'activité une spécificité face à l'enseignement. Devrait-on alors nommer cela une vulgaristique des mathématiques? La question est posée.

Dans les discussions, il se dégage un consensus fort pour une didactique des actions de vulgarisation dans laquelle serait développée une typologie des contrats didactiques associés aux différentes situations didactiques. Cela a déjà été amorcé, et le travail doit se poursuivre.

V. CONCLUSION

L'un des objectifs principaux du groupe de travail était de commencer à structurer collectivement les réflexions théoriques encore très émergentes sur le sujet (Pelay & Artigue, 2016) afin de constituer une thématique de recherche propre sur les problématiques de diffusion et de vulgarisation des mathématiques. Le GT12 a certainement cheminé dans cette direction.

Ce faisant, une communauté commence à se créer, formée de praticiens et de théoriciens qui ont indiqué clairement leur souhait de voir se poursuivre ces travaux lors de prochains colloques EMF. Étant au début de la prise en compte de la spécificité de la vulgarisation, il nous parait essentiel de maintenir l'inclusion de participants de profils variés pour permettre des échanges entre praticiens et théoriciens autour des enjeux de la vulgarisation. On souligne aussi que l'organisation parallèle des actions et manifestations autour de la vulgarisation (AM) a été très utile et très appréciée, et qu'il serait intéressant de les maintenir en renforçant leurs liens avec ce GT.

REFERENCES

Fiorelli Vilmart S., Belbachir H., Tanguay D. (2015), Vulgarisation des mathématiques - Compte-rendu du projet spécial n°2. In Theis L. (Ed.) Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage – Actes du colloque EMF2015 – Spé2, pp. 903-908.Lien

Pelay N., Artigue M., Vers une approche didactique des activités de diffusion et vulgarisation des mathématiques, et de leurs synergies possibles avec les activités scolaires, Actes du séminaire national de didactiques des mathématiques, 18-19 mars 2016.

ANNEXE

LISTE DES TEXTES DU GT12 PAR ORDRE ALPHABETIQUE DU PREMIER AUTEUR

GODOT, K.

Quelle image des mathématiques peut être apportée par les différents acteurs de la vulgarisation des mathématiques? Exemple du projet Maths à modeler

GROUPE AlPaGe

Regards sur les ateliers récréatifs

GROUPE AlPaGe

Un avenant au contrat didactique : la vulgarisation en classe

PELAY, N.

Esquisse d'un modèle didactique d'analyse pour les actions de diffusion des mathématiques

POISARD, C.

La didactique des mathématiques pour décrire et analyser des activités d'animation scientifique

RITTAUD, B. & GROUPE AlPaGe

La tour de Hanoï

ROUGETET, L.

Quel rôle peut jouer l'histoire des mathématiques dans une action de vulgarisation des mathématiques ?

SOUSA DO NASCIMENTO, S.

La pratique de l'animation scientifique à travers le discours des animateurs

QUELLE IMAGE DES MATHEMATIQUES PEUT ETRE APPORTEE PAR LES DIFFERENTS ACTEURS DE LA VULGARISATION DES MATHEMATIQUES? EXEMPLE DU PROJET MATHS A MODELER

GODOT*[1] Karine

Résumé –A partir des recherches que j'ai menées dans le cadre de ma thèse « Situations recherche et jeux mathématiques pour la formation et la vulgarisation » préparée au sein de l'équipe Maths à modeler, cette communication vise à présenter les différents acteurs de la vulgarisation scientifique, à catégoriser leurs actions, en vue d'émettre des hypothèses sur l'image des mathématiques qu'ils peuvent susciter auprès du grand public.

Mots-clefs : mathématiques, didactique, heuristique, jeu, médiation

Abstract –This article is based on work done for my PhD on « Research situations and mathematics games for education and popularization » in the research team Maths à modeler. It aims to present the different actors of the popularization of mathematics and to describe their actions, in order to describe the image of the mathematics that may arise in the general public.

Keywords: mathematics, didactik, heuristik, game, vulgarisation.

Dans le cadre de ma thèse, « Situations recherche et jeux mathématiques pour la formation et la vulgarisation » (Godot, 2005) préparée au sein de la structure fédérative Maths à modeler (CNRS, UGA)[2], j'ai été amenée à étudier la place des mathématiques dans divers média de vulgarisation des sciences. Cet article se propose de résumer les résultats de ces recherches. En particulier, je m'attacherai à développer quelle image des mathématiques peut exister au sein du grand public et quels peuvent être les apports des actions existantes, notamment des situations recherche développées au sein de Maths à modeler proposées dans un cadre extra-scolaire (atelier, animation stand, formation d'animateurs…).

I. QUELLE PLACE POUR LES MATHEMATIQUES DANS L'INSTITUTION LOISIR SCIENTIFIQUE?

Nous rassemblons sous la terminologie « institution loisir scientifique », tous les acteurs et supports de communication prenant part à la diffusion de la culture scientifique en France, l'école mise à part. Cette institution rassemble un panel d'acteurs, développant un panel de supports, qui peuvent être classés en deux catégories (Godot, 1999) :

- ceux qui ne rencontrent le public qu'indirectement, via un support de communication tel que la télévision, la radio, internet, la presse ou l'édition. Nous les désignerons sous le terme d'acteurs indirects.
- ceux qui vont à la rencontre physique du public que nous nommerons les acteurs directs : musées des sciences, CCSTI, associations, scientifiques...

Au regard de notre étude3, chez tous les acteurs, les mathématiques sont loin d'être la discipline la plus abordée (quand elle l'est!). Dans le peu d'initiatives existantes, comparé à tout ce qu'il est mis en œuvre pour la diffusion des sciences dites expérimentales, nous retrouvons plusieurs types d'approches :

*[1]maths à modeler/sciences et malice- France- karine.godot@sciencesetmalice.com

[2] fédération de recherche pluridisciplinaire qui regroupe, depuis sa fondation en 2003, des chercheurs en didactique des mathématiques et en mathématiques discrètes. Depuis, des chercheurs en sciences de l'information et de la communication, sciences de l'éducation ou encore en psycho-clinique se sont associés au projet.

3 Nous avons étudié comment les mathématiques sont abordées dans les programmes de France Télévision et Radio France, sur Internet, dans l'édition, les revues généralistes et spécialisées, dans les expositions de la Cité des Sciences, du Palais de la découverte, des CCSTI, l'exposition « pourquoi les mathématiques? » produite par l'UNESCO ainsi que dans les animations des associations actives dans la diffusion des sciences (Petits Débrouillards, Planète Science,.)…

• S'appuyer sur l'histoire des mathématiques et de leurs découvertes : portraits de mathématiciens plus ou moins romancés, histoire des découvertes (la numération, le zéro …)

• Montrer où sont les mathématiques : leur place, leur contribution dans la vie quotidienne, par exemple, les mathématiques dans la nature.

• Faire du spectaculaire : présentation de leur « bestiaire » accompagnée le plus souvent d'une action du public : table de Galton, surfaces minimales et bulles de savon, constructions géométriques, fractales.

• Expliquer ce que sont les mathématiques en abordant, par exemple, des notions transversales aux mathématiques comme la modélisation, la démonstration, ou à travers le témoignage, la rencontre de mathématiciens. On peut noter que cette approche est plutôt rare.

• Inciter les gens à faire des maths, à les fabriquer : jeux mathématiques dans des revues, des livres, de nombreux sites internet, animations. Cependant, le plus souvent, les problèmes sont fermés et comportent une solution. De plus, le modèle mathématique n'étant pas toujours accessible, le hasard a une large place dans la recherche… Dans les actions que nous avons analysées, seul le Palais de la Découverte invite à chercher mathématiquement lors d'ateliers.

Les thèmes abordés par le biais de ces différentes approches sont bien souvent les mêmes de l'une à l'autre et sont proches de ceux développés au collège ou au lycée, agrémentés d'un ton plus ludique et de quelques curiosités. Les savoirs mathématiques sont couramment mis en relation avec leurs applications dans la réalité quotidienne, des découvertes mathématiques récentes sont présentées alors qu'elles ne sont abordées que tardivement dans l'enseignement comme les probabilités, les fractales, les graphes. Enfin, tout est mis en oeuvre pour que le public trouve du plaisir avec les mathématiques, alors que cela est loin d'être une des priorités dans l'institution scolaire.

Intéressons-nous plus particulièrement aux acteurs directs. Alors que de nombreuses initiatives existent, pour tous les âges, pour les sciences dites expérimentales, très peu sont développées vis-à-vis des mathématiques, qui, à la différence des autres sciences, nécessitent semble-t-il d'être rendues attrayantes avant d'être vulgarisables. Parmi ceux qui diffusent des expositions ou proposent des ateliers, certains amènent le public à être actif dans sa rencontre avec les mathématiques[4]. Cependant, alors qu'il a de multiples occasions d'observer, toucher, manipuler, fabriquer des objets mathématiques, il n'est que rarement invité à faire effectivement des mathématiques au sens où nous l'avons défini: se questionner, faire des essais, émettre des conjectures, modéliser, généraliser, prouver. Certains acteurs apparaissent même réfrénés dans leur envie de faire découvrir les mathématiques à travers la démarche expérimentale, alors que cela est couramment répandu pour les autres sciences. Une des causes de cette carence serait la difficulté de trouver des outils adaptés ou disponibles. La responsable des Petits débrouillards Rhône-Alpes, association très active dans la diffusion de la démarche expérimentale auprès des jeunes, nous a expliqué, par exemple, lors d'un entretien que

> « faire faire des maths à l'école primaire de façon ludique me semble beaucoup plus facile que de le faire en dehors de l'école (…) Les maths sont trop abstraites pour être abordées comme les autres sciences, ce qu'on a l'habitude de faire. Elles sont plus dans la démarche de recherche, c'est moins évident de proposer une situation concrète. »

Cela peut aussi être dû à une vision des mathématiques réduite à une juxtaposition de savoirs notionnels, vision qui conduit à occulter leurs aspects expérimentaux. Convier le public à chercher en mathématiques semble donc réservé à quelques actions et loin d'être accessible au plus grand nombre.

[4] Notamment les expositions produites par le CCSTI Centre Sciences, comme « Pourquoi les Mathématiques ? », une exposition internationale produite avec le soutien de l'UNESCO en 2004 (depuis, elle a accueilli plus de 1,5 million de visiteurs, dans 150 villes de 40 pays et est traduite en 20 langues) ainsi que la chaîne youtube Micmaths.

Compte tenu des initiatives recensées, nous faisons l'hypothèse que les acteurs spécialisés dans la diffusion scientifique et en particulier mathématique peuvent amener leur public à considérer que les mathématiques sont une science faite par des hommes et riche de nombreuses découvertes, qui a une longue histoire, transversale à plusieurs civilisations, qui a de nombreuses applications dans notre vie quotidienne, qui a mis à jour et étudie des objets troublants : l'infini, les fractales, la table de Galton … Cette science regroupe différentes branches : arithmétique, géométrie, statistique et probabilité, combinatoire, théorie des graphes, logique. Enfin, elle peut être source de plaisir, d'amusement. Par contre, le faible nombre d'actions développées abordant l'épistémologie d'une part, et proposant des activités de recherche d'autre part, amène à penser qu'en dehors de ce qu'il a pu rencontrer à l'école, le grand public a très peu l'occasion de comprendre ce que sont les mathématiques, leurs fondements ainsi que d'avoir des éléments pour savoir les utiliser dans la vie quotidienne. En quelque sorte ce qui est proposé justifie le fait de faire des mathématiques mais ne donne que très peu de clefs pour comprendre ce que cela signifie. Cela peut s'expliquer par le fait que faire faire des mathématiques en dehors de l'école est jugé a priori difficile. Ainsi, si le grand public n'a que très peu d'occasions de faire des mathématiques, ce n'est pas un manque de volonté de la part des acteurs de l'institution « loisir scientifique » mais c'est avant tout dû à une vision réduite de l'activité de recherche en mathématiques et au manque d'outils adaptés.

II. QUELLE IMAGE DES MATHEMATIQUES PEUT AVOIR LE GRAND PUBLIC?

Afin d'émettre des hypothèses sur les apports des actions menées dans le cadre de Maths à modeler, nous avons cherché à définir quelle image des mathématiques pouvaient avoir élèves, étudiants, enseignants et animateurs. Au regard du peu d'actions proposées en dehors de l'école, comme nous venons de le souligner, nous avons fait l'hypothèse que l'image des mathématiques que pouvait avoir le grand public devait être proche de celle présente dans l'institution scolaire. Nous avons élaboré un questionnaire comportant différents énoncés, les élèves interrogés devaient les identifier comme mathématiques ou pas, en argumentant (voir annexe 1). Le même questionnaire a été rempli par des chercheurs en mathématiques de différentes branches afin de recueillir l'avis d' « experts »[5].

Le choix des problèmes a été guidé par plusieurs variables didactiques. Tout d'abord, la forme ostensible du problème : présence d'une question, forme de la question (question posée sous une forme couramment utilisée dans les exercices proposés dans les manuels ou question posée sous une forme différente), présence de marqueurs à caractère mathématique (dessin géométrique, vocabulaire, présence de nombres dans l'énoncé) ou non (colorier), cadre du problème. Pour cela nous nous sommes inspirés des différents types de problèmes que nous avons recensés dans notre étude des manuels scolaires ainsi que dans des journaux ou sur Internet. Ainsi, les énoncés ont été choisis soit dans le cadre de la déduction logique, de la géométrie, de l'arithmétique ou de la combinatoire. Nous avons également fait varier le type de tâche : calculs, mesures, réflexion/déduction, colorier... ainsi que le fait que le problème ait un sens ou pas, en particulier en incluant un problème dit absurde. Il s'agit ainsi de chercher à identifier quels critères apparaissent aux yeux des élèves comme déterminants pour garantir le statut mathématique d'un énoncé. De plus, nous avons proposé des énoncés de degré de difficulté tel que même de jeunes élèves puissent répondre au questionnaire.

Au regard des réponses apportées par les chercheurs, nous pouvons dégager deux types d'arguments pour justifier qu'il s'agit de mathématique ou pas. Ils se réfèrent tous deux à l'activité

[5] Le questionnaire a été proposé à 15 chercheurs en mathématiques et 161 élèves : 4 classes de cycle 3, une de 6ème, une de 4ème, une de 3 ème, une 1ère STL, une d'étudiants en Licence 3 Lettres Modernes et Science du Langage, à leurs enseignants et à des animateurs en formation autour de l'animation scientifique.

qui doit être mise en place pour résoudre le problème : un premier type d'arguments renvoie à la mobilisation d'un modèle (en en parlant ou en donnant le modèle), l'autre s'appuie sur le fait qu'il faut mettre en place un raisonnement mathématique et donc avoir recours au raisonnement hypothético-déductif.

Les réponses recueillies auprès des élèves nous permettent de faire des hypothèses sur le rapport personnel que peut avoir un élève de l'institution scolaire française vis-à-vis des mathématiques. Ainsi, cette science se limite pour de nombreux élèves bien souvent au cadre numérique, à faire des calculs et cela même pour des étudiants de Licence. Devoir calculer est même pour certains une condition nécessaire à toute activité mathématique, allant même jusqu'à exclure la géométrie. Ainsi, la présence de nombres dans un énoncé est pour eux une « garantie mathématique », car elle ne peut déboucher que sur un calcul. À l'inverse, le fait de ne relever que de la logique, terme employé par les élèves sous son sens courant est, pour beaucoup, loin d'être significatif d'une activité mathématique. La mise en oeuvre d'un raisonnement hypothético-déductif n'est pas suffisante pour tous pour relever des mathématiques, si aucun calcul ne rentre en jeu. Nous avons, par ailleurs, retrouvé ces considérations au cours d'entretiens individuels d'élèves, menés au cours de nos expérimentations.

L'image des mathématiques induite par l'institution scolaire française, du fait des choix de programmes et des activités proposées, semble donc très éloignée de celle que peuvent en avoir les chercheurs et donc de ce que sont les mathématiques. Nos recherches nous ont conduits à faire l'hypothèse que les mathématiques étaient pour de nombreuses personnes fortement attachées à leur enseignement, à la manière dont elles sont présentées à l'école, l'institution où elles sont le plus visibles. Aussi, pouvons-nous supposer que l'image des mathématiques que peut avoir un élève et par extrapolation le grand public, peut être celle d'une discipline où il faut faire des calculs, dont il faut se servir pour résoudre des problèmes numériques. Par contre, il n'est pas certain qu'il ait conscience de ce que sont les mathématiques et en particulier de l'importance et des spécificités du raisonnement mathématique.

III. LE PROJET MATHS A MODELER 6 : DES SITUATIONS RECHERCHE EXPERIMENTEES DANS LES CADRES SCOLAIRE ET EXTRA-SCOLAIRE

Une partie des recherches de la fédération de recherche Maths à modeler se centre sur l'apport de situations recherche dans l'enseignement, du primaire à l'université, et dans un cadre de vulgarisation[7]. Les énoncés sont courts, facilement compréhensibles, les problèmes sont dans le champ des mathématiques discrètes, peuvent comporter une, plusieurs ou aucune solution et sont, pour la plupart, encore ouverts pour la communauté internationale sous leur forme générale (voir pour une définition détaillée (Grenier, Payan, 2003) et (Godot 2005)).

Ces situations didactiques particulières peuvent être considérées comme la transposition pour la classe, ou ailleurs, de l'activité du chercheur en mathématiques, c'est-à-dire se questionner, faire des essais, émettre des conjectures, modéliser, généraliser, prouver… Pour favoriser l'entrée dans la recherche, elles sont présentées sous forme ludique, à l'aide d'un support matériel.

[6] http://mathsamodeler.ujf-grenoble.fr

7 Lors de la Fête de la science, du festival Remue Méninges à Grenoble, du Printemps des Sciences à Liège, du Salon International de la Culture et des jeux mathématiques à Paris, des fêtes d'écoles dans la région grenobloise, de la Maker faire ou au sein de la Grange aux maths, futur musée dédié aux mathématiques qui va être inauguré prochainement près de Grenoble.

Dans le cadre de ma thèse, j'ai étudié plus particulièrement la situation recherche La roue aux couleurs (énoncé en annexe 2), en m'appuyant principalement sur la théorie des situations didactiques de Brousseau (Brousseau, 1998) afin de déterminer et d'étudier les phases de dévolution, d'action, de formulation et d'institutionnalisation.

D'une part, nous avons mené des expérimentations dans le cadre scolaire, du CM2 au L1, avons étudié la dévolution, les stratégies des élèves, leurs difficultés, et cherché à déterminer, pour chaque niveau scolaire, le contrat didactique, les conditions de mise en place et les apprentissages en jeu (Godot, 2005).

D'autre part, dans le but d'identifier quelles peuvent être les différences et points communs entre les productions d'enfants dans deux institutions différentes, La roue aux couleurs a été expérimentée pendant des vacances scolaires lors d'un atelier ponctuel d'une durée de deux heures ouvert aux enfants de 9 à 12 ans dans les locaux du CCSTI[8] de Grenoble ainsi qu'à l'occasion de la Fête de la science sous forme d'une animation stand.

IV. APPORTS DES SITUATIONS RECHERCHE

Au travers de nos expérimentations, nous avons cherché à définir quels pouvaient être les apports des situations recherche dans les institutions scolaires et de « loisir scientifique ».

Que ce soit dans un cadre scolaire ou extra-scolaire, la recherche de La roue aux couleurs permet la mise en œuvre des différentes composantes de la recherche en mathématiques. En effet, si le temps de recherche est suffisamment long, quelle que soit l'institution, des solutions peuvent être mises à jour, suivies de l'énoncé de méthodes de construction, de conjectures et de la recherche d'arguments de preuve. Il ne s'agit pas nécessairement de transmettre des savoirs notionnels mais des notions transversales aux mathématiques telles que la définition, la modélisation, la preuve.

Par ailleurs, dans la mesure où, d'une part elles invitent le public à la recherche d'un problème sans calcul, où seuls le raisonnement et la démarche sont prioritaires, d'autre part, elles sont « dévoluables » dès le cycle 3 ou dans un cadre de vulgarisation, cela nous conduit à émettre l'hypothèse que les situations recherche peuvent contribuer à enrichir l'image des mathématiques, quelle que soit l'institution où elles sont mises en œuvre. En mettant en avant leurs fondements et principes, leur recherche peut aider à comprendre ce que signifie « faire des mathématiques », « chercher en mathématiques » et ainsi donner du sens à cette discipline qui semble en manquer aux yeux de beaucoup.

Bien entendu, que ce soit à l'école ou en dehors : une seule rencontre ne suffit pas pour enrichir fondamentalement le rapport que l'on peut avoir avec les mathématiques, cela ne peut avoir lieu qu'à la suite de rendez-vous réguliers.

V. QUEL CONTRAT DIDACTIQUE DANS L'INSTITUTION LOISIR SCIENTIFIQUE?

Quelle que soit l'institution dans laquelle nous proposons les situations recherche, nos actions sont donc menées dans une intention didactique. Même si la présentation est ludique, le temps à passer défini par le participant et qu'il n'y a aucune évaluation, il peut donc, selon nous, y avoir des connaissances transmises dans un cadre extra-scolaire.

[8] Un centre de culture scientifique, technique et industrielle (CCSTI) est un lieu de médiation scientifique à destination du grand public. Il en existe dans toutes les régions françaises.

Au regard de nos expérimentations et de nos pratiques au sein de Maths à modeler, nous faisons l'hypothèse que les caractéristiques générales du contrat didactique existant au sein de l'institution loisir scientifique sont telles que :

- ce que l'on nous propose est porteur de connaissances susceptibles de nous intéresser
- l'animateur est là pour expliquer ce qu'il faut faire, vérifier qu'on a bien compris et apporter éventuellement son aide
- on est actif, on touche, on fabrique, on manipule. Alors que ces trois premières peuvent être mises en parallèle avec les pratiques de la classe de mathématiques, d'autres s'en démarquent, voire s'y opposent:
- les activités proposées doivent procurer du plaisir
- on est libre de faire ou de ne pas faire
- on nous invite à apprendre des choses mais ce que l'on apprend ne sera pas évalué
- on peut consacrer le temps que l'on souhaite aux activités proposées.

Bien qu'il ait des points en commun avec le contrat didactique habituellement établi dans l'institution scolaire lors de l'enseignement des mathématiques, le contrat didactique inhérent à l'institution «loisir scientifique» est donc caractérisé avant tout par le fait que le plaisir et le libre choix ont une place importante.

Cette définition a été complétée depuis par Pelay dans sa thèse par la notion de contrat didactique et ludique:

> « Le contrat didactique et ludique est l'ensemble des règles et comportements, implicites et explicites, entre un "éducateur" et un ou plusieurs "participants" dans un projet, qui lie de façon explicite ou implicite, jeu et apprentissage dans un contexte donné. (…) De la même façon qu'il y a des éléments de contrat didactique dans le contrat ludique en contexte d'animation et de loisir, il y a des éléments de contrat ludique au sein du contrat didactique. Le but de ce concept est de permettre l'étude des interactions entre ces deux pôles dans leur coexistence, articulation ou opposition. (…) il nous faut détecter dans une animation les phases ludiques, didactiques, ludiques et didactiques, mais il nous faut aussi prendre en compte le fait que l'animateur et les enfants agissent aussi en fonction d'enjeux qui ne sont pas toujours visibles, et qui peuvent influer, implicitement ou explicitement, sur le déroulement de l'activité. » (Pelay, 2011)

Finalement, les discussions au sein du groupe de travail « Étude des processus de vulgarisation des mathématiques » nous ont amenés à introduire la notion de « contrat didactique de vulgarisation ».

VI. PERSPECTIVES ET QUESTIONNEMENT

Au regard de mes recherches et de mes pratiques de médiatrice scientifique depuis plus de 15 ans au sein de l'association Sciences et malice[9], il me semble intéressant de m'interroger maintenant sur comment une situation, en particulier une situation recherche, s'adapte-t-elle pour pouvoir être dévoluable dans un cadre scolaire puis extra-scolaire et inversement? comment le contrat didactique évolue-t-il en passant d'une institution à l'autre? quels choix sont opérés?

D'autre part, mes recherches se portent aussi sur ce qui, dans le scénario et la situation, permet le questionnement de la part du public. En effet, même si le contrat didactique de vulgarisation associé aux situations recherche ne force pas les participants à continuer à chercher, leur seule curiosité et envie de trouver, comprendre, les pousse à persévérer, se creuser la tête, essayer, recommencer et donc à amorcer une démarche de recherche mathématique du problème. Les situations recherche présentées sous forme de jeux apparaissent comme un outil adapté pour amener le public à chercher

[9] http://sciencesetmalice.com

en mathématiques lors d'ateliers de vulgarisation car elles en donnent intrinsèquement envie, piquent sa curiosité. Je cherche à mieux caractériser ces notions pour comprendre ce qui, dans la situation, hormis le support ludique, donne envie de chercher et entraîne le public à pratiquer une activité de recherche en mathématiques.

En conclusion, je pense qu'il est important, comme le groupe de travail « Étude des processus de vulgarisation des mathématiques » l'a permis, que la communauté didactique se penche sur la vulgarisation des mathématiques, en partenariat avec les vulgarisateurs, pour aider à étudier les actions en place, transposer les concepts établis pour l'institution scolaire, mais aussi pour y puiser des approches transposables de l'institution de loisir scientifique à l'institution scolaire.

Ainsi, nous rejoignons Pelay et Mercat (2012):

> « L'hypothèse sous-jacente est qu'il existe des éléments de vulgarisation dans le processus d'enseignement, et des éléments d'enseignement dans le processus de vulgarisation. Ce sont la priorité donnée à certains enjeux plutôt qu'à d'autres, les choix réalisés dans les activités proposées, le discours et le langage utilisé dans les textes et les échanges avec le public, qui vont permettre de caractériser les processus d'enseignement et de vulgarisation mis en œuvre. Aussi, une action de diffusion va pouvoir être étudiée avec une approche théorique globale. »

REFERENCES

Brousseau G. (1998) Théorie des situations, Grenoble, La Pensée Sauvage.

Godot K. (2015) Maths à modeler, des jeux pour apprendre à chercher en mathématiques; In *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage- Actes du colloque EMF 2015* (SPE 2, pp 918-925)

Godot K. (2005) Situations recherche et jeux mathématiques pour la formation et la vulgarisation. Thèse de l'université Joseph Fourier - Grenoble 1, novembre 2005, https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00102171

Godot K. (1999) Etude de la communication scientifique destinée à la jeunesse. Mémoire de Master2 CST, Institut de la Communication et des Médias, Université Stendhal, Grenoble.

Grenier D., Payan C. (2003) Situation de recherche en classe : essai de caractérisation et proposition de modélisation. In Durand-Guerrier V., Tisseron C. (Eds) Actes du séminaire national de recherche en didactique des mathématiques, Paris : ARDM - IREM Paris 7- DIDIREM.

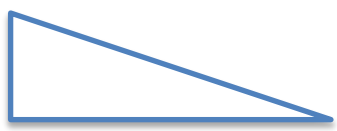
Pelay N. (2011) Jeu et apprentissages mathématiques : Elaboration du concept de contrat didactique et ludique en contexte d'animation scientifique, Thèse de doctorat, Université de Lyon I, Lyon, mai 2011, https://halshs.archives-ouvertes.fr/tel-00665076/

Pelay N., Mercat C. (2012) Quelle modélisation didactique de la vulgarisation des mathématiques? In Dorier J.-L., Coutat S. (EDS) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21^{e} siècle — Actes du colloques EMF2012* (SPE4, pp. 1914—1925).

ANNEXE 1: QUESTIONNAIRE EN VUE DE FAIRE DES HYPOTHESES SUR L'IMAGE DES MATHEMATIQUES

Enoncé 1:

Un agriculteur possède un champ de la forme suivante :



Il souhaite y planter une moitié de blé et une moitié de maïs. Colorie en jaune la surface où il doit planter du maïs et en vert celle du blé.

Enoncé 2 :

Une dame doit emmener de l'autre côté d'une rivière un renard, un canard et un sac de maïs. Elle ne peut pas laisser le renard et le canard ensemble, car le renard mangerait le canard. Elle ne peut pas laisser le canard et le maïs ensemble, car le canard mangerait le maïs. Comment peut-elle transporter ses trois charges sur l'autre rive si elle ne peut emmener qu'une charge à la fois ?

Enoncé 3:

Dans un bus, il y a 30 personnes. Au premier arrêt, 3 personnes montent et 2 descendent. Au deuxième arrêt, 5 personnes montent et une descend. Au troisième arrêt, 2 personnes montent et 10 descendent. A quelle vitesse a roulé le bus ?

Enoncé 4 :

Sur la table, il y a des gâteaux pour le goûter : un croissant, une brioche, un palmier, un pain au chocolat et un pain aux raisins. Pierre a invité ses camarades et chacun doit avoir un gâteau. Manon n'aime pas le chocolat et déteste les croissants. Isabelle a choisi le pain aux raisins. Pierre et Sophie n'ont pas voulu de pains au chocolat. Pierre et Julie sont les seuls à aimer le palmier. Qui a mangé la brioche ?

Enoncé 5 :

Paul organise une petite fête. Il décide de fabriquer des gâteaux rigolos, tous différents. Il veut faire des gâteaux ronds ou triangulaires ou en forme de losange. Il veut aussi qu'ils aient goût au chocolat ou à la fraise ou à la pomme. Il se demande combien de sortes de gâteaux différents il va pouvoir fabriquer. Peux-tu l'aider ?

Enoncé 6 :

Pour faire un pull à Natacha, sa grand-mère a acheté 4 pelotes de laine à 3 euros pièce et 4

	Chercheurs	
	oui	non
Enoncé 2	87 %	13 %
Enoncé 4	87 %	13 %
Enoncé 6	53 %	47 %

	Elèves	
	oui	non
Enoncé 2	32 %	63 %
Enoncé 4	38 %	57 %
Enoncé 6	98 %	2 %

Illustration 1*-Quelques résultats après analyse des réponses recueillies*

boutons à 2,50 euros pièce. Combien a t'elle dépensé pour le pull ?

ANNEXE 2: LE JEU DE LA ROUE AUX COULEURS



Illustration 2*-*

Jeu de la roue aux couleurs

Règle du jeu

Ce jeu est constitué de deux disques de tailles différentes, disposés de façon concentrique. Sur le plus grand disque, on pose un certain nombre de pions, tous de couleurs différentes.

Le joueur doit placer sur le petit disque le même nombre de pions, de une, deux, trois ou plus couleurs choisies parmi celles qui sont disposées à l'extérieur. On fait ensuite tourner le petit disque, cran par cran. Le joueur gagne si, dans chaque position du petit disque, un et un seul de ses pions est de la même couleur que celui qui lui correspond sur le grand disque. Quelles sont toutes les façons que le joueur a de choisir et disposer ses pions

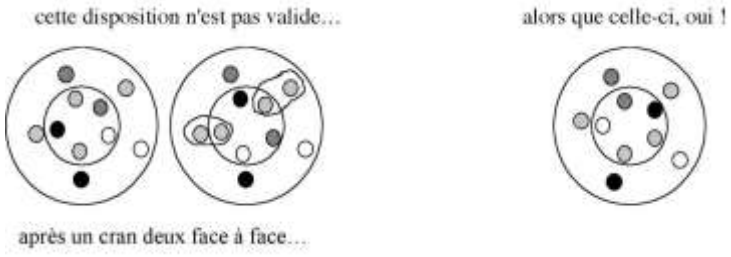


Illustration 3*- Exemple de dispositions valide et invalide*

pour gagner ? Par exemple,

Maintenant, à vous de jouer !

Eléments de résolution:

Soit n le nombre de couleurs du grand disque, et k le nombre de couleurs choisies pour le petit disque. (n,k) est une variable didactique de la situation.

Pour (n,n), il y a des solutions lorsque n est impair et aucune si n est pair.

Pour (n,2), il y a des solutions si et seulement si n est non premier.

REGARDS SUR LES ATELIERS RÉCRÉATIFS

Groupe AlPaGe*

Résumé – Dans ce texte, nous examinons de quelle manière on pourrait utiliser ou adapter les outils de la didactique pour étudier les situations de vulgarisation particulières que constituent les ateliers récréatifs. Nous nous intéressons plus spécifiquement aux concepts de la Théorie des situations didactiques et à ceux de l'Ingénierie didactique.

Mots-clefs : Vulgaristique, ateliers récréatifs, Théorie des situations didactiques, Ingénierie didactique

Abstract – In this text, we examine how we could use or adapt the tools of didactics to study the particular situations that constitute the recreational workshops. We are more specifically interested in the concepts of the Theory of Didactical Situations and those of Didactical Engineering.

Keywords: Vulgaristic, recreational workshops, Theory of didactic situations, Didactic engineering

I. INTRODUCTION

La vulgarisation peut être définie comme un mode de diffusion des mathématiques, à la fois distinct de l'enseignement (Rittaud, 2015), tout en lui étant complémentaire et même semblable sur certains aspects (Pelay & Mercat, 2012). Ces aspects partagés conduisent à explorer si des concepts empruntés à la didactique des mathématiques permettent d'éclairer l'activité de professionnels impliqués dans la vulgarisation des mathématiques et de reconnaître à ce type d'activité une spécificité face à l'enseignement. L'idée de cet article est donc de prendre les notions de base de la didactique et voir comment elles peuvent s'appliquer ou comment il faut les adapter pour qu'elles s'appliquent à la vulgarisation. Nous nous pencherons notamment sur les notions de contrat didactique, de dévolution et nous verrons comment la Théorie des situations didactiques (TSD) de Brousseau et l'ingénierie didactique d'Artigue peuvent s'appliquer à un certain type d'activité de vulgarisation.

En paraphrasant Brousseau (1986), nous pourrions définir la vulgaristique des mathématiques comme l'étude des activités de vulgarisation, c'est-à-dire les activités qui ont pour objet la vulgarisation, dans ce qu'elles ont de spécifique aux mathématiques.

Parmi les activités de vulgarisation possibles, nous nous limiterons ici à la médiation orale en atelier récréatif, plus près du contexte de la classe mais avec toutefois une vaste hétérogénéité du niveau de connaissances parmi les participants du public.

Nous présenterons tout d'abord le concept d'atelier récréatif en soulignant les différences entre celui-ci et l'enseignement. Nous tenterons de dégager les spécificités du contrat didactique qui s'appliquent aux ateliers puis nous verrons comment transposer la Théorie des situations didactiques de Brousseau (TSD) à ce nouveau contrat. Finalement, nous étudierons

* alpage@unige.ch
Pierre Audin – Retraité du Département de Mathématiques, Palais de la découverte, Paris – France
Hacène Belbachir – Faculté des Mathématiques, USTHB, Laboratoire RECITS, Alger – Algérie
France Caron – Département de didactique, Université de Montréal – Canada
Pierre-Alain Cherix, Shaula Fiorelli – Mathscope, Section de Mathématiques, Université de Genève – Suisse
Robin Jamet – Département de Mathématiques, Palais de la découverte, Paris – France
Christian Mercat – Université de Lyon, Université Lyon 1, École Normale Supérieure de Lyon, S2HEP, EA 4148 – France
Benoît Rittaud – Université Paris-13, Sorbonne Paris Cité, LAGA, CNRS, UMR 7539 – France

comment les outils de l'ingénierie didactique décrite par Artigue (1988) peuvent aider le vulgarisateur à créer de nouveaux ateliers.

II. QU'EST-CE QU'UN ATELIER RECREATIF ?

Nous prenons pour point de départ les ateliers récréatifs en mathématiques comme ils sont proposés au Mathscope (Université de Genève), au Palais de la découverte (Paris) ou à la Maison des Mathématiques et de l'Informatique (Lyon). Dans ce type d'atelier, l'idée principale est de mettre les visiteurs (principalement des groupes, scolaires ou non, de 10 à 25 personnes) en situation de recherche au travers d'un ou plusieurs problèmes/activités proposés par le médiateur. Au Palais, il s'agit de trouver des activités dont la règle du jeu est simple à comprendre, qui peut se mettre sous la forme d'une manipulation d'objets simples et agréables (bois, plastique). Au Mathscope ou dans les ateliers thématiques du Palais, le médiateur proposera une question à l'ensemble du groupe et dirigera un peu plus les réflexions pour aboutir plus ou moins à un résultat final. Le déroulé de la séance est, pour le médiateur, un savant mélange de lâcher prise et de soutien à ceux qui se découragent. Il s'agit en effet de laisser au maximum la possibilité aux gens de chercher, seuls ou en groupe, de laisser le temps de sécher, de leur permettre de se rendre compte que parfois un problème n'a pas de solution, de laisser émerger des observations, des questions, des discussions...

L'un des objectifs est de permettre à ceux qui se sont éloignés des mathématiques ou ceux à qui elles font peur de surmonter leur appréhension ou leur rejet. La hiérarchie qui sépare les bons élèves des moins bons n'a plus cours dans ce type d'activité, où même les adultes, voire l'enseignant, peuvent être mis en difficulté.

Bien que les groupes soient principalement scolaires, l'intention n'est pas la même chez le vulgarisateur que chez l'enseignant. Dans les ateliers, il n'y a pas la nécessité d'avoir fait le tour du sujet dans le temps imparti. Plus les élèves auront compris de choses, mieux ce sera pour eux, mais aucun apprentissage spécifique n'est visé[1]. Nuançons cependant en ajoutant que les ateliers visent à transmettre certains messages, comme le fait qu'une méthode de recherche peut être couronnée de succès (sans qu'elle se réduise à un ressouvenir, à une adroite manière de faire dire la réponse au médiateur ou à une simple attente d'un corrigé) ou certaines notions comme la différence entre conjecture et théorème ou encore les méthodes d'approche standard de la recherche en mathématiques (commencer par un petit problème, chercher des conditions nécessaires, suffisantes, etc.).

Pour essayer de mieux comprendre les similitudes et les différences entre enseignement et vulgarisation, nous avons choisi une allégorie classique, celle des mathématiques vues comme une exploration de montagnes. Vous trouverez ce texte dans l'Annexe I.

III. UN CONTRAT DIDACTIQUE SPECIFIQUE AUX ATELIERS RECREATIFS

Les différences entre le contrat didactique et le contrat entre le public et le médiateur nous paraissent suffisamment fortes pour définir la notion de *contrat didactique de vulgarisation* (voir aussi (Pelay, 2018)) Dans ce contrat, il y a avant tout une absence d'évaluation du public

[1] Dans l'article sur le transfert à la classe (AlPaGe, 2018), nous nous intéressons plus en détail à la transposition d'une activité de vulgarisation dans un cadre scolaire.

de la part du médiateur, le médiateur ne donne pas d'appréciation sur le travail du public ni ne sanctionne une réponse fausse.

L'une des composantes importantes du contrat didactique de vulgarisation est justement qu'il n'est pas un contrat didactique scolaire. Le public, qu'il soit scolaire ou non, ne doit pas se sentir en position d'élève. Cela entraîne des réactions, une posture, un type de discours qui est souvent surprenant pour le public, notamment scolaire. Par exemple, le médiateur doit très vite faire comprendre qu'il pose des questions et n'y répond pas. Et que ces questions ne sont pas des questions tests, mais de vraies questions, les plus ouvertes possible.

De plus, en raison du temps court (en général une heure) et du fait que le médiateur ne revoit pas nécessairement le groupe, il n'y a pas d'obligation de réussite ; l'atelier peut se conclure sans que le but annoncé ait été atteint.

Finalement, dans le cas spécifique des groupes scolaires, il existe un contrat particulier entre le médiateur et l'enseignant. L'enseignant doit accepter de lâcher prise et de se mettre au niveau des élèves. Il doit de plus accepter qu'au sein de l'atelier il n'y ait pas d'apprentissage au sens du contrat didactique. Libre à lui d'approfondir, voire d'institutionnaliser, ensuite les contenus de l'atelier en classe dans un deuxième temps.

1. L'essentielle dévolution et les conditions à mettre en place

Dans les ateliers, la dévolution est essentielle. Au travers de matériel manipulable et de règles faciles à comprendre, les participants deviennent acteurs de l'activité et non simples spectateurs. Toute la difficulté réside dans l'équilibre à trouver entre la simplicité de la question initiale, l'accroche, le matériel utilisé et le but que le médiateur vise, entre ce que l'on donne à voir, à chercher et à comprendre (Fiorelli, et al.,2015).

L'activité proposée devrait comporter peu de préalables mathématiques et la possibilité d'entrer dans la tâche par différentes approches (même si elles sont d'une efficacité variable). La recherche dévolue au participant doit être à la fois intéressante, pas trop facile, pour qu'il y ait découverte, et pas trop difficile pour qu'il n'y ait pas de découragement. Elle doit aussi permettre des prolongements « sans fin » : puisqu'il s'agit de donner au public une idée de la recherche, il est bon de donner l'idée que toute réponse amène son lot de questions, assez naturelles.

Il y a comme un élastique entre le médiateur et les participants : s'il n'est pas assez tendu, rien ne bouge, s'il est trop tendu, il casse. Il faut tendre mais pas trop, pour tirer le public derrière soi. La relance a pour effet de relâcher l'élastique s'il est trop tendu, ou de le retendre s'il est trop lâche.

En synthétisant les graphiques de Pelay & Mercat (2012) d'une part et ceux de Csíkszentmihályi (1990) et Liljedahl (2016) d'autre part, on peut construire le graphique retraçant une activité de vulgarisation (voir Figure 1). La zone vulgaristique (assimilée à la Zone Proximale de Développement de Vygotsky) est la zone optimale dans laquelle doit évoluer le travail des participants.

Rappelons que la Zone Proximale de Développement (ZPD) de Vygotsky est définie comme la distance entre le niveau de développement actuel d'un enfant et le niveau de développement potentiel qui peut être atteint avec l'aide d'un adulte ou d'un enfant du même âge mais avec un niveau de compétence supérieur. Autrement dit, il s'agit de la zone dans laquelle un enfant peut résoudre une tâche qu'il n'aurait pas pu résoudre s'il n'avait pas été

accompagné. Dans le cas d'un atelier récréatif, le dialogue avec le médiateur d'une part et avec les autres participants d'autre part permet à chaque participant d'avancer dans la tâche.

La zone vulgaristique est comprise entre deux zones dans lesquelles on ne souhaiterait pas voir se perdre les participants, la zone où la difficulté est trop grande et la frustration se manifeste (l'élastique est trop tendu) et la zone de trop grande facilité, celle où guette l'ennui (élastique trop lâche). Toutefois, à la frontière entre la zone vulgaristique et ces deux zones, il y a deux zones-tampons au contour flou : la zone dite magique, où la difficulté est supérieure aux compétences des participants mais où ils acceptent d'entrer, car il y a un enjeu, un mystère à éclaircir, un défi à relever, et la zone dite maîtrisée, celle où le public se rassure en se disant "ça je sais faire". Des incursions dans ces deux zones dans le déroulé de l'activité sont non seulement autorisées mais aussi souhaitables. L'accroche devrait par exemple toujours se trouver dans la zone magique. Un moment dans la zone maîtrisée permet de rassurer les participants et un aspect ludique peut leur faire tolérer d'y rester sans rien apprendre de nouveau. Mais la frontière est mince entre ces zones et les zones à éviter. La relance est alors inévitable (on tire ou on relâche l'élastique).

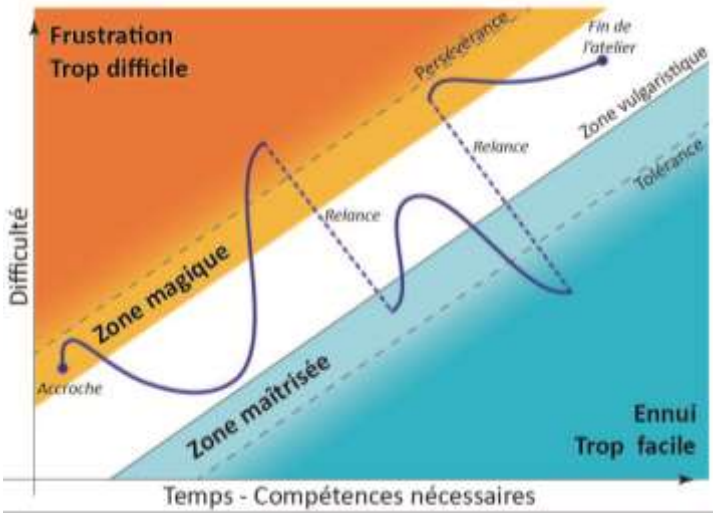


Figure 1 *–Graphique d'une activité de vulgarisation, synthèse de Csíkszentmihályi (1990), Liljedahl (2016) et Pelay & Mercat (2012)*

La frustration est une composante dont il faut également tenir compte. Celle-ci est double. D'abord, dans le public d'un atelier, elle est quasiment nécessaire, car elle est un moteur pour un apprentissage plus en profondeur et probablement plus académique. Ensuite, il y a la frustration chez le médiateur qui doit accepter que le public ne va pas tout comprendre ou qu'il n'aura pas le temps de faire tout ce qu'il aimerait (dans le cas par exemple où il se retrouve face à un groupe en difficulté). Cette deuxième manifestation de la frustration est aussi un moteur qui pousse le médiateur à évaluer et faire évoluer son activité.

Précisons encore que le contentement ou la satisfaction ne sont pas nécessairement le critère ultime de la réussite d'une activité. En effet, les objectifs rappelés plus haut (permettre d'entrevoir un environnement intellectuel, des méthodes de réflexions…) ont facilement un caractère perturbant pour les participants, dont les effets se verront peut-être dans la durée. Au moins autant que les sourires joyeux de fin d'atelier, le succès de celui-ci se mesure parfois aussi au fait que les participants se sentent désormais davantage concernés par l'univers mathématique.

IV. TSD ET VULGARISATION

1. TSD : que faut-il garder et que faut-il modifier ?

Ayant transformé le contrat didactique en un contrat didactique de vulgarisation, la question se pose de la possibilité d'importer les outils de la didactique pour étudier ce nouveau contrat, notamment celui de la Théorie des situations didactiques de Brousseau (TSD), pour analyser les situations vulgaristiques. Que seraient alors les phases d'action, de formulation, de validation et d'institutionnalisation ?

Dans un atelier, la *phase d'action* s'assimile exactement à la définition didactique de Brousseau : un sujet (un participant à l'atelier) effectue des actions ou manipulations sur le milieu (il manipule le matériel mis à sa disposition, questionne l'enseignant et interagit avec ses pairs) et en obtient une rétroaction (il observe les conséquences de ses manipulations). Insistons sur le fait que, dans un atelier, cette phase est cruciale pour permettre l'appropriation du problème.

La phase de *formulation* est elle aussi semblable à celle de la TSD, mais, en raison des contraintes de temps, il y a une prise en charge plus grande par le médiateur. Celui-ci cherche à mettre en place avec le public un langage permettant de décrire les actions effectuées sur le milieu. Dans les ateliers, il est important de mettre l'accent sur le fait que l'abstraction n'est pas une ennemie et permet au contraire de modéliser la réalité, et que les mathématiques, sans être invasives ni réduire la réalité à des concepts désincarnés, permettent de modéliser pertinemment de nombreux aspects de la réalité.

La phase de *validation* a des ambitions plus modestes que celles de la TSD. Il ne s'agit pas tant de la validation des connaissances partiellement élaborées par le public mais de la validation des stratégies mises en œuvre par les participants sur le matériel en tant que constituant fondamental du milieu didactique. Pour le médiateur, il s'agit aussi de la validation du dispositif mis en place. Selon les réactions du public, le médiateur pourra décider si le dispositif utilisé est approprié ou non et pourra concevoir d'éventuelles adaptations.

Si la phase d'*institutionnalisation* dans un contexte d'enseignement vise le « passage d'une connaissance de son rôle de moyen de résolution d'une situation d'action, de formulation ou de preuve, à un nouveau rôle, à celui de référence pour des utilisations futures » (Brousseau, 2010), participant ainsi au développement d'une pratique experte et d'une autonomie des élèves, l'institutionnalisation, dans un contexte de vulgarisation, consiste plutôt à reprendre de la hauteur, à remettre la question, voire les réponses apportées par le public dans un contexte plus large, et à les relier, quand c'est possible, à d'autres aspects de la pensée humaine, comme par exemple les notions de conditions nécessaires ou suffisantes, très présentes dans la vie courante.

Loin de dire que les mathématiques enseignées dans les programmes ne sont pas pertinentes, il est un fait que de belles mathématiques, contemporaines, utiles et accessibles ne sont pas enseignées à l'école; pensons par exemple en France à la théorie des graphes, qui permet pourtant de modéliser aisément une grande variété de situations, en particulier en théorie des jeux et plus généralement en mathématiques discrètes[2]. C'est souvent dans de tels

[2] Il est précisé ici qu'il s'agit d'un exemple français, car des notions de théorie des graphes font partie au Québec du cursus de fin de secondaire.

registres, plutôt que dans les thèmes abordés dans le programme officiel qu'on trouvera des sujets propices à la vulgarisation, présentant un contenu déconnecté de celui étudié en classe, donc extérieur aux appréhensions que le contexte scolaire véhicule parfois.

Pour plus de clarté, récapitulons dans le tableau comparatif ci-dessous les différences entre les phases de la TSD selon les définitions de Brousseau (2010) et comment nous les définissons dans les ateliers récréatifs.

	ENSEIGNEMENT	**VULGARISATION**
Phase d'action	Un sujet effectue des actions ou manipulations sur le milieu et en obtient une rétroaction	
Phase de formulation	**L'élève** met en place avec **ses pairs** (ou avec l'enseignant) un langage permettant de décrire les actions effectuées sur le milieu	**Le médiateur** met en place avec **le public** un langage permettant de décrire les actions effectuées sur le milieu
Phase de validation	**Les actants** établissent **ensemble** la **validité de la connaissance caractéristique** de cette situation	**Le médiateur** valide **les connaissances** partiellement élaborées par **le public** et surtout **les stratégies** mises en place
Phase d'institutionnalisation	Passage d'une connaissance de son rôle de moyen de résolution d'une situation d'action, de formulation ou de preuve, au rôle de référence pour des utilisations futures, personnelles ou collectives.	Reprendre de la hauteur, remettre en contexte, relier l'activité à d'autres aspects de la pensée humaine. Faire un récapitulatif, souligner le changement de conception vis-à-vis des maths sous-jacentes…

Tableau récapitulatif des phases de la TSD appliquées à l'enseignement et aux ateliers récréatifs.

Parmi les auteurs, certains pratiquent une phase d'institutionnalisation au sens quasi didactique : on conclut l'activité par un récapitulatif des notions abordées et des compétences développées (bien que pas nécessairement acquises). Il peut s'agir de fixer les mathématiques sous-jacentes à l'activité ou simplement de souligner le changement de conception vis-à-vis des mathématiques. Dans ce cas de figure, l'institutionnalisation est moins formelle que ce que l'on ferait en classe et insiste plutôt sur des visées que sur le savoir, d'autant plus qu'il n'y a pas l'enjeu de l'évaluation et que l'institution est moins formellement définie.

Que l'on passe ou non par cette phase, il est aussi souhaitable, pour certains auteurs, de laisser partir le public avec des questions pour qu'il se rende compte que l'on n'a pas toujours toutes les réponses lorsqu'on fait de la recherche.

Finalement, quelle suite et quelle conclusion peut avoir une action de vulgarisation ? Un enseignant peut tenter de continuer l'activité en la reliant au contenu travaillé en classe mais assez souvent, ce qu'il faut retenir de l'activité est seulement un changement de perception sur les mathématiques, fondée sur un travail mathématique effectif. La métacognition est en général le sujet de la conclusion par le vulgarisateur : « Vous voyez, ce que vous avez fait c'est vraiment magnifique et sans le pas dans l'abstraction des mathématiques, vous n'auriez sûrement pas fait aussi bien ou aussi vite… »

2. Vers la Théorie des situations vulgaristiques (TSV)

On considérera la "Théorie des situations vulgaristiques" (TSV), en analogie à la Théorie des situations didactiques de Brousseau (1986) et (1998), comme un cadre de réflexion et d'étude de la vulgarisation des mathématiques. Ainsi, en paraphrasant à nouveau Brousseau, nous pouvons dire que la TSV propose une modélisation du savoir, des situations de vulgarisation et des rôles du médiateur et du public notamment la fonction du langage dans le processus médiation-apprentissage des contenus mathématiques, ainsi que le rôle du médiateur. Nous assimilerons à « enseignant-élève » le duo « médiateur-groupe (ou public) » en insistant sur le fait qu'il n'y a pas (ou si peu) de connaissances préalables attendues dans le public, et surtout pas d'évaluation. La médiation peut avoir comme effet l'apprentissage ou la sensibilisation à un concept mathématique, mais elle visera plus typiquement un simple changement de vision à l'égard des mathématiques.

On dira que l'on est dans une situation vulgaristique, s'il y a intention de vulgariser quelque chose à un public à travers la mise en place d'une activité pour résoudre un problème, et qu'il y a dévolution lorsque le public s'approprie le problème et l'activité proposés et participe de manière active au but visé par le médiateur. Tout ceci fait partie de la vulgarisation, car il n'y a pas d'obligation de résoudre un problème mais d'arriver à faire participer à l'élaboration d'une connaissance, d'une stratégie, d'une conception, fût-elle collective dans le groupe (Kuzniak, 2004).

C'est donc bien à une ingénierie didactique particulière que les concepteurs d'ateliers récréatifs sont soumis, une "ingénierie vulgaristique" dont les phases peuvent être assimilées à celles décrites par Artigue (1988).

V. UNE INGENIERIE DIDACTIQUE PARTICULIERE

1. Nature et rôle des analyses préalables (le choix du sujet)

Il est bien compliqué de donner « une marche à suivre » sur le choix du sujet, qui dépend de la variété des sujets traités par les mathématiques, de la culture et des connaissances de celui qui fait ce choix. Si l'idée est de faire découvrir les mathématiques sous un angle inhabituel, il vaut mieux ne pas reprendre des sujets travaillés en classe : le temps dont nous disposons est bref, dans le cadre d'une activité courte et sans lendemain, contrairement à la situation de classe où l'enseignant dispose d'un temps beaucoup plus long, avec possibilité de retours au cours de l'année scolaire. Ce choix du sujet peut d'ailleurs amener des remarques comme « c'est bien mais ce ne sont pas des mathématiques », ce qui peut être le signe d'un bon choix, à partir duquel il s'agit alors de faire comprendre que « ce sont des mathématiques mais peut-être pas celles vues à l'école ».

Avant tout, le choix du sujet dépend du public ciblé : grand public avec diversité de connaissances mathématiques, ou groupe scolaire emmené par un enseignant et donc avec diversité de motivations des élèves mais une certaine unité de savoir-faire mathématique. Dans tous les cas, le public ne sera pas captif très longtemps et la façon de traiter le sujet devra forcément en tenir compte. En général, le sujet sera traité plusieurs fois et l'expérience des animations précédentes permettra de faire évoluer la manière de le traiter et d'envisager l'adaptation à d'autres types de public.

Pour mener l'exploration d'une idée, il sera utile de la transposer dans différents domaines et d'utiliser du matériel autre que tableau noir et craies. Les supports les plus variés peuvent être utilisés : images, objets à montrer ou à manipuler, manips à utiliser ou faire utiliser. Il peut s'agir d'une planche de Galton, de cubes ou de briquettes en bois, de papiers à découper ou coller ou plier, de rubans de Möbius, de volumes (tétraèdres à reconstituer), de casse-têtes ou de jeux (tours de Hanoï). Un temps de manipulation, par au moins une ou deux personnes dans le public, permettra de varier les activités et les discours, par exemple avec une présentation historique de l'objet utilisé, ou en se permettant des traits d'humour et en provoquant l'assistance pour la faire réagir — « que va-t-il se passer ? » — ce qui peut provoquer des échanges dans l'assistance.

Utiliser plusieurs objets successivement, passer d'un objet à un autre, permet d'arriver à ce qu'on veut mais en partant de ce qui est familier au public. Comme les mathématiques dans leur ensemble, c'est une histoire « sans fin », il vaut mieux finir par des questions plutôt que des réponses, et ne pas hésiter à dire de temps en temps « je ne sais pas ». Cherchant à participer à la culture générale du public, il est possible de replacer les mathématiques dans l'histoire humaine, dans le contexte historique pour montrer par exemple l'implication de mathématiciens du Maghreb, ou la place et la contribution des femmes dans cette grande épopée. Cela peut aussi être considéré comme un levier d'attraction vers le sujet traité.

2. Le caractère itératif de la conception, des expérimentations et des analyses

Tout comme dans la conception d'une séquence d'enseignement, la création d'un atelier repose sur un certain nombre de contraintes et de variables. Il s'agit de régler un subtil équilibre entre le contenu mathématique, la part d'expérimentation du public, le matériel utilisé et les raccourcis que l'on peut se permettre.

Bien que lors de la conception, on pratique volontiers l'analyse a priori au sens de l'ingénierie didactique (Artigue, 1988), il est rare qu'une activité fonctionne du premier coup. Une analyse a posteriori, s'appuyant sur la phase de validation avec les participants, doit alors être conduite, non pas tant pour élaborer de nouvelles connaissances didactiques, que pour ajuster l'équilibre pour la prochaine itération de l'atelier. La conception procède alors dans un continuel aller-retour entre pratique et analyse a posteriori, car il est rare qu'une activité ne soit plus jamais remise en question. Contrairement à la situation de classe où il faut souvent attendre l'année suivante pour reprendre une même situation, le nombre et la fréquence de répétition d'un atelier récréatif favorise une convergence plutôt rapide vers une situation viable mais toujours perfectible. Cela dit, comme on perd de vue les participants après l'atelier, il est très difficile d'en évaluer les effets dans la durée.

Par analogie aux variables didactiques, les variables vulgaristiques seraient celles qui permettent de maximiser les possibilités d'entrer dans la situation et de maintenir l'intérêt des participants. Le matériel utilisé répond par exemple à cette définition, car le choix du matériel permet d'induire certaines démarches pour le public.

VI. CONCLUSION

L'idée de cet article était de voir de quelle manière on pourrait utiliser ou adapter les outils de la didactique pour étudier les situations de vulgarisation particulières que constituent les ateliers récréatifs. Nous avons proposé un nouveau contrat didactique de vulgarisation, qui a évolué suite aux travaux d'EMF2018 et plus particulièrement (Pelay, 2018), nous avons

dégagé les différences entre la TSD et la TSV et nous avons observé comment l'ingénierie didactique peut participer à la conception de nouvelles activités.

Conscients que nous n'avons procédé ici qu'à un défrichage sommaire de certaines zones de transposition des concepts, nous avons profité des échanges à l'EMF pour approfondir la réflexion et comparer les différents points de vue, ce qui a fait évoluer notre texte initial. Cependant, un travail conséquent reste à faire et nous espérons que les prochains EMF permettront d'avancer sur ce sujet et de rapprocher encore les mondes de la didactique et de la vulgarisation. Autant les élèves et les participants que les concepteurs-animateurs, les enseignants et les didacticiens pourraient bénéficier d'un tel rapprochement.

RÉFÉRENCES

AlPaGe. (2018). Un avenant au contrat didactique: la vulgarisation en classe. *Actes du colloque EMF2018.* Paris Gennevilliers.

Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en didactique des mathématiques 9/3*, 281-307.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques 7/2*, 33-115.

Brousseau, G. (2010). *Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques.* Récupéré sur http://guy-brousseau.com/biographie/glossaires/

Brousseau, G., & Balacheff, N. (1998). *Théorie des situations didactiques : Didactique des mathématiques 1970-1990.* a pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1996). Leadership didactique mathématique. Dans R. Noirfalise, & M. Perrin-Glorian (Éd.), *Actes de la VIIIe École d'été de didactique des mathématiques.*

Csíkszentmihályi, M. (1990). *Flow: The Psychology of Optimal Experience.* New York, NY: Harper and Row.

Fiorelli Vilmart, S., Audin, P., Belbachir, H., Cherix, P.-A., & Rittaud, B. (2015). Évaluer une action de vulgarisation des mathématiques. Dans L. Theis (Éd.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage – Actes du colloque EMF2015*, (pp. 909-917).

Kuzniak, A. (2004). La théorie des situations didactiques de Brousseau. *L'Ouvert, 110*, 17-33.

Liljedahl, P. (2016). Flow: A Framework for Discussing Teaching. Dans C. Csíkos, A. Rausch, & J. Szitányi (Éd.), *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol. 3*, pp. 203-210. Szeged, Hungary: PME.

Pelay, N. (2018). Esquisse d'un modèle didactique d'analyse pour les actions de diffusion des mathématiques. *Actes du colloque EMF2018.* Paris Gennevilliers.

Pelay, N., & Mercat, C. (2012). Quelle modélisation didactique de la vulgarisation des mathématiques. Dans J.-L. Dorier, & S. Coutat (Éd.), *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012*, (pp. 1914-1925).

Rittaud, B. (2015). Pour une "vulgaristique" des mathématiques. Dans T. L. (Éd.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage – Actes du colloque EMF2015*, (pp. 957-962).

ANNEXE I
CONCEPTION DES MATHÉMATIQUES ET DES APPRENTISSAGES VISÉS

Pour comprendre les similitudes et les différences entre enseignement et vulgarisation, tentons de poursuivre une allégorie classique : celle des mathématiques vues comme une exploration de montagnes.

Les mathématiques offrent une entrée dans des mondes d'abstraction. Ceux-ci nécessitent néanmoins d'emprunter des sentiers parfois escarpés pour atteindre des points de vue qui en permettent la découverte. Il arrive souvent que, pour observer ces mondes, l'explorateur doive escalader des montagnes, traverser des fleuves ou des jungles qui peuvent sembler impénétrables. Il s'agit donc pour lui de se hisser d'une manière ou d'une autre jusqu'à un point de vue. Le mathématicien professionnel est à la découverte de lieux nouveaux, et doit nécessairement disposer d'un certain nombre de techniques d'escalade, de défrichage… L'élève ou la personne suivant une offre de vulgarisation est accompagné, et ne se promène en principe que dans des zones balisées.

Une personne chargée de vulgariser peut donc poursuivre différents buts, offrir différents "stages de découverte" de la montagne : simple aperçu en téléphérique voire en hélicoptère, promenade sur un chemin bien tracé, muni quand il le faut d'escaliers, de rampes, ou stages permettant de découvrir un peu les techniques d'exploration : appelons ces derniers "découverte de l'escalade sur un rocher-école en étant assurés". L'objectif de ce dernier n'est alors pas tant la vue que le fait de donner une idée du fonctionnement d'un raisonnement mathématique, et de montrer que chacun en est capable, ou tout au moins peut comprendre ce dont il s'agit. Tout l'art du vulgarisateur est de trouver les lieux adaptés à ces différentes activités, d'équiper correctement les voies, et d'assurer convenablement, en n'aidant ni trop, ni trop peu dans les passages difficiles.

Dans le cas de la promenade aménagée, le but est de provoquer l'émerveillement de l'arrivée au sommet. Mais dans ces situations, le « touriste » sera toujours tributaire de son accompagnant et ne pourra pas redécouvrir de tels paysages par ses propres moyens ; sans pilote, l'hélicoptère ne décollera même pas.

La différence entre l'enseignement et la vulgarisation peut être vue dans l'importance accordée à la technique, et au degré d'autonomie pour réaliser une tâche que l'on veut apporter : sans s'y réduire, l'enseignement a aussi pour mandat le travail de la technique (Chevallard, 1996) ; cela se traduit typiquement par la répétition sur un grand nombre de fois du parcours de la même voie d'escalade ou de voies semblables, de façon à ce que l'élève sache à coup sûr la réussir. Cela requiert de sa part investissement, entraînement et même parfois chute, mais à la fin d'un enseignement réussi, l'élève aura idéalement acquis les compétences pour utiliser par lui-même ce qui lui a été enseigné et devrait être capable de s'en servir pour découvrir de nouveaux horizons.

À l'inverse il suffit, pour la version "rocher école" que la personne ait eu la sensation de trouver quelques idées, que son cerveau est bien en état de marche et peut produire des raisonnements qui la sortent d'une situation complexe pour que la séance soit réussie. Quitte à

ce qu'une grande partie du raisonnement ait été fournie par le vulgarisateur, et que la personne ne sache toujours pas résoudre un problème seule.

Le tourisme, comme la vulgarisation, ne nécessitent pas une répétition, ni de test. La rencontre a lieu la plupart du temps une fois, et l'essentiel est de changer l'image des mathématiques et/ou l'image que les gens se font d'eux-mêmes, par exemple comme étant incapable de faire des mathématiques.

Quels sont les objectifs des médiateurs ? Montrer à leurs publics ce que sont les mathématiques. Non pas ce qu'ils en connaissent, mais en réalité la façon dont un mathématicien les vit. Les mathématiques sont une façon de percevoir le monde, et de le comprendre. Ce peut être le monde concret environnant (comment la boue s'est craquelée en séchant, comment un cœur s'est formé dans ma tasse de café), le monde concret mais peu accessible (la trajectoire des planètes, les cours de la bourse), mais aussi le monde des idées (définir le concept de sphère pour décrire la forme de la terre ou d'une orange).

Au-delà de ces observations, et pour permettre d'aller plus loin, il s'agit de faire comprendre le fonctionnement des mathématiques. Par exemple, prendre conscience que des expériences, des exemples ne suffisent pas : la validation d'un résultat, d'un théorème, est produite par la démonstration, ce qui est très différent d'une simple inférence, d'une simple observation. Ce qui semble évident doit pourtant pouvoir s'établir dans un cadre précis, mélange de théorie des ensembles, de logique, d'intuition ou d'imagination. Si nous ne pouvons pas espérer un apprentissage dans le peu de temps dont nous disposons, notre objectif est d'abord de permettre à nos publics d'entrevoir cet univers pour ce qu'il est, en l'aidant à dépasser certains stéréotypes comme celui du mathématicien réduit à un simple calculateur prodige. Ainsi, s'il y a un apprentissage visé, il se situe donc dans la conception des mathématiques, vues non pas comme une collection, plus ou moins structurée, de faits et de procédures, mais comme une activité humaine avec sa part de questionnement, d'exploration, d'imagination, de construction, de discussion et de raisonnement logique. Cela n'interdit certes pas à l'activité de vulgarisation de contribuer à l'apprentissage de concepts mathématiques (en lien ou non avec les programmes scolaires), mais de façon incidente, collatérale.

UN AVENANT AU CONTRAT DIDACTIQUE : LA VULGARISATION EN CLASSE

Groupe AlPaGe*

Résumé – La situation d'un enseignant qui se fait vulgarisateur dans sa classe le temps d'un atelier ou d'une présentation générale conduit à étudier les relations entre contrat didactique et contrat didactique de vulgarisation. Selon que la séquence prend place avant, pendant ou après l'enseignement lui-même, son rôle change : accroche, aide à la réappropriation d'un savoir, synthèse des acquis selon les cas. L'un des risques de la démarche tient aux ambiguïtés de ce qui peut s'apparenter à une entreprise de séduction.

Mots-clefs : vulgarisation, médiation en classe, transfert, apprentissage.

Abstract – The case of a teacher that decides to set up for a while a context of popularization in his classroom leads to the study of the differences between the didactic contract and the didactic contract of popularization. Depending on whether the event takes place before, during or after the lesson itself, its role changes: trailer, assistance for the reappropriation of knowledge, synthesis of achievements. As a risk of this approach lies in the ambiguities of what could look like an attempt to seduce.

Keywords: popularization, mediation in the classroom, transfer, learning.

I. INTRODUCTION

Bien qu'enseignement et vulgarisation diffèrent en bien des points (contextes, objectifs, méthodes, ressources…), il arrive que les deux activités se rencontrent. C'est notamment le cas lorsqu'un enseignant, à l'occasion d'un cours, prend momentanément la casquette du médiateur devant sa classe. Les motivations de cette modification temporaire des modalités de ses relations avec ses élèves peuvent être de plusieurs ordres, même si, au fond, la plupart d'entre elles se ramènent, en dernière analyse, à la volonté d'entraîner les élèves dans "la grande aventure des mathématiques". De telles incises de vulgarisation nichées dans un cadre d'enseignement sont réputées pour contribuer à susciter l'intérêt des élèves. Elles peuvent également, pour l'enseignant, être l'occasion d'une conscientisation différente de son propre savoir (et de la façon dont il tâche d'en favoriser l'appropriation par la classe), *via* la confrontation avec des situations en décalage avec celles, mieux balisées, qui sont le lot quotidien d'un cours.

D'une manière générale, le souci du maintien de l'attention et de l'intérêt qui caractérise la vulgarisation en général autorise à penser que les activités qui en relèvent gagneraient à s'étendre davantage aux activités scolaires. Sans constituer l'enjeu de l'apprentissage, ni la recette d'un enseignement réussi, la vulgarisation participe à la mise en place de conditions favorables à la dévolution. L'analyse qui va suivre s'appuie sur diverses expérimentations menées par les auteurs, souvent de façon informelle, et principalement dans le cadre de l'enseignement supérieur.

* alpage@unige.ch
Pierre Audin – Retraité du Département de Mathématiques, Palais de la découverte, Paris – France
Hacène Belbachir – Faculté des Mathématiques, USTHB, Laboratoire RECITS, Alger – Algérie
France Caron – Département de didactique, Université de Montréal – Canada
Pierre-Alain Cherix, Shaula Fiorelli – Mathscope, Section de Mathématiques, Université de Genève – Suisse
Robin Jamet – Département de Mathématiques, Palais de la découverte, Paris – France
Christian Mercat – Université de Lyon, Université Lyon 1, École Normale Supérieure de Lyon, S2HEP, EA 4148 – France
Benoît Rittaud – Université Paris-13, Sorbonne Paris Cité, LAGA, CNRS, UMR 7539 – France

II. MOTIVATION ET IDENTIFICATION D'UNE INCISE DE VULGARISATION

Soupape grâce à laquelle les exigences de la classe (programme sur un temps long, apprentissage imposé, poids de l'évaluation, rôle de l'enseignant…) peuvent être temporairement suspendues, la vulgarisation favorise le décloisonnement de la discipline. Hormis les légitimes questions sur le temps raisonnable à y consacrer, l'intérêt potentiel d'une dose de vulgarisation dans l'enseignement est facile à percevoir. Une justification immédiate de l'introduction d'une séquence de vulgarisation dans un cours est qu'elle constitue souvent une accroche pour lancer un sujet. Le caractère parfois déroutant de la démarche peut toutefois susciter un rejet, au moins relatif : un atelier ou un temps de réflexion autour d'un sujet qui n'est pas directement connexe au programme peut laisser croire aux élèves qu'"on perd du temps", une présentation au tableau d'un sujet mathématique sous forme vulgarisée peut les laisser penser que suivra un mode d'évaluation inhabituel et donc difficile. Pour éviter que l'incise de vulgarisation, et la rupture du contrat didactique qu'elle suppose, provoque ce type de rejet, il peut se révéler nécessaire d'expliciter clairement le statut de la séquence particulière qui prend place. "Jouer franc jeu" de la sorte peut effectivement éviter le risque, mais un autre effet négatif est à craindre : si la maturité intellectuelle des élèves est insuffisante et les laisse prisonniers d'une vision purement utilitaire et court-termiste de l'enseignement (réussir les examens), ceux-ci auront tendance à se désintéresser de la séquence.

Une séquence de vulgarisation au sein d'un contexte d'enseignement prend normalement la forme d'une présentation ou d'une activité dont la forme diffère de celle d'un cours ou d'une séance d'exercices. Le sujet proposé est en décalage manifeste par rapport à ceux traités d'ordinaire, tant sur le fond (thème pluridisciplinaire, questions ouvertes, sujet sans rapport évident avec le chapitre en cours…) que sur la forme (usage de l'ordinateur, travail en groupe, dimension ludique, posture de l'enseignant…). Une autre distinction fondamentale est le fait qu'en principe rien de ce qu'elle produit ne doit constituer un exigible pour l'élève. On pourrait explorer cette différence, et ses liens avec cette autre, plus théorique : le contrat didactique de vulgarisation qui peut s'établir dans une classe ne contient pas de clause globale comparable à celle du contrat didactique (programmes d'enseignement, examens nationaux, et plus généralement institution au sens de Chevallard). Proposé librement par un enseignant, le contrat didactique de vulgarisation signé dans une classe est fondamentalement "local".

Le caractère en principe gratuit d'une telle séquence en fait un outil pédagogique à double tranchant, dont l'efficacité dépend pour une bonne part de la finalité de l'enseignement telle qu'elle est perçue par la classe. Celle-ci peut théoriquement osciller entre les deux extrêmes que sont l'objectif purement utilitaire signalé plus haut et le désir "désintéressé" d'acquérir des connaissances. Une séquence de vulgarisation porte d'autant plus facilement ses fruits que le public est bien disposé à mettre temporairement de côté ses préoccupations de réussite immédiate, faute de quoi l'attention et les efforts des élèves risquent de cesser dès lors qu'ils comprennent que l'activité ou l'exposé ne leur permettra pas d'améliorer leurs résultats — du moins pas de façon directe et rapide.

La difficulté de ce point est notamment apparue lors d'un cours d'algèbre et géométrie présenté à un groupe d'étudiants en Licence 3 de mathématiques. Selon les notes de cours de l'enseignant des années précédentes, la première séance aurait dû commencer par la définition générale d'une action de groupe. Comme il s'agit là d'une notion abstraite, l'idée a été de mener quantité de considérations préalables relevant de la géométrie classique, comme

celle consistant à creuser l'abondance de termes destinés à définir la "ressemblance" (deux figures peuvent être isométriques, superposables, semblables…), à étudier ce que recouvre la notion aujourd'hui surannée de "triangles égaux", et ainsi de suite. L'idée était que, au travers de ce voyage dans ces contrées d'Euclide en principe bien connues des étudiants, s'imposerait peu à peu une conception de la géométrie qui soit peu ou prou celle du programme d'Erlangen (une géométrie est l'action d'un groupe sur un espace) et rende pour ainsi dire "naturelle" l'introduction des principes généraux de la théorie des groupes.

Il est difficile de prétendre tirer des conclusions définitives sur les effets par nature non quantifiables d'une telle démarche. Toutefois, quelques points saillants sont clairement ressortis de cette longue séquence de vulgarisation en introduction à un cours. Le premier est le caractère déroutant du procédé pour les étudiants, peu habitués à ce que des mathématiques leur soient présentées de cette manière. Le second est un intérêt manifeste pour la démarche, qui a incité par la suite les étudiants à se sentir partie prenante du déroulement du cours (ce point s'est notamment traduit, dans les séances ultérieures de format plus traditionnel, par diverses questions "hors-programme" signalant l'appétit des étudiants pour d'autres séquences de vulgarisation). Le troisième est que l'enseignant s'est ainsi doté d'un outil pour prendre la juste mesure de l'assimilation de savoirs en principe acquis depuis longtemps, assimilation dont la fragilité étonne davantage encore que le peu de recul qui accompagne souvent les savoirs les plus récemment acquis (ainsi, pour le premier cas, de l'ignorance de plusieurs étudiants de la notion de polygone régulier et, pour le second, de la question de savoir s'il est possible de faire de la géométrie en quatre dimensions, posée par des étudiants ayant derrière eux deux années d'étude de l'algèbre linéaire et des espaces euclidiens). Enfin, le quatrième point saillant de l'expérience est l'impatience qui finit par gagner les étudiants, vite désireux d'en revenir à quelque chose qui leur est plus habituel : "Quand est-ce que nous *verrons les formules* ?"

C'est ainsi que, de manière paradoxale en apparence, la vulgarisation dans un tel contexte œuvre plutôt dans une perspective de long terme (inciter les étudiants à prendre de la hauteur, à questionner leurs savoirs et à les revisiter), là où l'enseignement apparaît davantage comme un processus de court terme (disposer des techniques permettant de réussir à l'examen).

III. AVANT, PENDANT, APRÈS LE COURS

1. Avant

Placée en introduction à un chapitre de cours, la séquence de vulgarisation est souvent pensée comme un moyen de stimuler les élèves, de leur donner envie par avance de s'approprier les notions qui seront introduites ultérieurement de façon plus formelle. Lorsqu'une telle accroche prend la forme d'une activité proposée aux élèves, qui ouvre sur la construction partielle du nouveau savoir en jeu, elle peut être rapprochée de la notion de situation-problème. Lorsqu'il s'agit d'un exposé introductif sur des considérations historiques ou des motivations pratiques ou philosophiques, la logique est davantage celle d'une "bande-annonce" qui doit créer le désir d'apprendre.

Les paradoxes classiques des probabilités tels que le paradoxe des anniversaires[1] ou le *Monthy Hall Problem*[2] (voir par exemple (Rosenhouse, 2009)) sont des exemples intéressants

[1] Une façon de présenter ce paradoxe est la suivante : quelle est la probabilité que, dans un groupe de 23 personnes, au moins deux aient la même date d'anniversaire ? La réponse est d'environ 50%, soit beaucoup plus que ce que suggère en général l'intuition courante.

d'accroche pour l'étude des probabilités et des statistiques. Dans cette veine, mentionnons aussi l'exemple un peu moins connu des dés non transitifs[3] (voir Figure 1 ci-dessous et (Gardner, 2001)). La relative simplicité des outils combinatoires nécessaires rend cet exemple propice à une telle introduction, qui permet aussi de construire la notion naïve de probabilité comme rapport du nombre de cas favorables au nombre de cas possibles.



Figure 1 *– Exemple de trois dés non transitifs*[4].

2. Pendant

Placée au milieu d'un chapitre, une séquence de vulgarisation peut garder les deux caractéristiques précédentes, le point de vue didactique d'une situation-problème et le point de vue vulgaristique de la bande-annonce. Mais elle peut aussi avoir le rôle en quelque sorte intermédiaire de faciliter la réappropriation de concepts déjà connus, pour les ramener à la conscience des élèves avant d'aller plus loin dans l'opérationnalisation de la notion. L'absence de préparation à l'apprentissage de notions nouvelles éloigne résolument ce type de séquence d'une situation-problème.

Comme exemple, donnons le cas de l'étude de la fameuse tablette babylonienne YBC 7289 (voir Figure 2) qui fournit une évaluation du rapport √2 de la diagonale au côté d'un carré à trois millionièmes près, en notation sexagésimale (c'est-à-dire en base soixante). Dans ce cadre, l'obligation de comprendre une notation par position en base soixante, qui plus est avec des signes différents de ceux que nous utilisons, oblige les élèves à conscientiser leur propre compréhension de la notation usuelle, par position et en base dix. Lors des présentations vulgarisées en classe (voir par exemple (Cherix & Fiorelli Vilmart, 2012)), il peut être significatif de rappeler qu'il s'agit d'une tablette scolaire. Selon l'interprétation dominante actuelle, l'élève d'il y a quatre mille ans répondait à la question de la longueur de la diagonale d'un carré de côté 30. Sachant que le rapport diagonale/côté est égal à √2, sa méthode consiste à multiplier 30 par une (excellente) approximation de √2.

[2] Nommé d'après un jeu télévisé, ce problème consiste en trois portes fermées où derrière l'une d'elle seulement se trouve le gros lot (et une chèvre derrière chacune des deux autres). Le candidat en choisit une, après quoi l'animateur, au lieu de l'ouvrir, ouvre l'une des deux autres derrière laquelle se trouve une chèvre. Le candidat peut alors maintenir son choix ou le modifier en prenant la porte non ouverte par l'animateur. On démontre que, du point de vue des probabilités, la meilleure stratégie consiste à changer de porte.

[3] Jeu composé d'au moins trois dés et tel que la relation « a une plus grande probabilité de donner un plus grand nombre » n'y est pas transitive.

[4] *Le dé blanc l'emporte sur le dé noir avec une probabilité supérieure à ½, le dé noir l'emporte sur le dé bleu avec une probabilité supérieure à ½ et le dé bleu à son tour l'emporte sur le dé blanc avec une probabilité supérieure à ½.*



Figure 2 *− La tablette babylonienne YBC 7289.*

3. Après

Une possibilité moins couramment utilisée mais qui gagnerait sans doute à se développer est celle d'une séquence de vulgarisation qui prend place en fin de chapitre, non pas pour offrir une ouverture vers des prolongements futurs (même si c'est bien entendu possible), mais à l'inverse pour dresser un panorama synthétique de ce qui a été étudié précédemment. Une telle présentation peut se tenir "en différé", c'est-à-dire être le fait de l'enseignant du niveau supérieur, qui prend alors le temps de récapituler un chapitre antérieur qu'il n'a pas nécessairement enseigné lui-même à la classe qui se trouve devant lui. Pour une fois, les élèves à qui est ainsi présenté de nouveau un savoir qu'ils ont en principe assimilé, au moins en partie (mais sans nécessairement beaucoup de recul), sont placés dans une situation dominante, propice à une prise de confiance.

L'utilité de cette démarche est apparue à l'occasion d'une invitation par un collègue à présenter un exposé de vulgarisation à des étudiants de master 2 mathématiques. Il s'agissait d'expliquer de manière théâtrale le cheminement de leur formation sur cinq années consécutives : statistique descriptive ; théorie des probabilités ; statistique inférentielle ou mathématique ; échantillonnage et sondage ; et enfin leurs utilisations en files d'attentes, processus stochastiques et économétrie classique et des variables qualitatives. Les étudiants ont manifesté leur intérêt pour cette démarche, qui leur permettait de récapituler leur propre savoir et ainsi de se l'approprier davantage. À un niveau élevé d'enseignement (master), des explorations similaires exploitent les propriétés combinatoires de l'hypercube : représentation du codage binaire à quatre chiffres, et des variantes telles que la numération de Fibonacci-Zeckendorf (où les nombres entiers s'écrivent à l'aide de 0 et de 1 sans qu'apparaissent deux 1 de suite dans l'écriture).

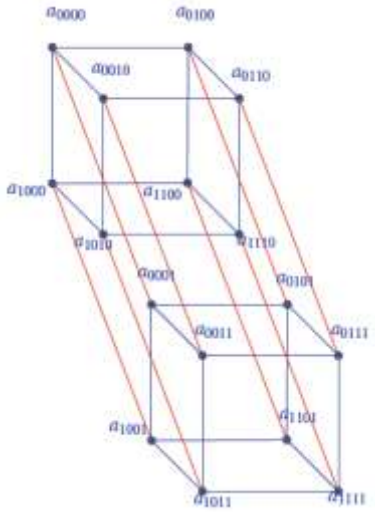


Figure 3 *– L'hypercube et le codage binaire de ses sommets.*

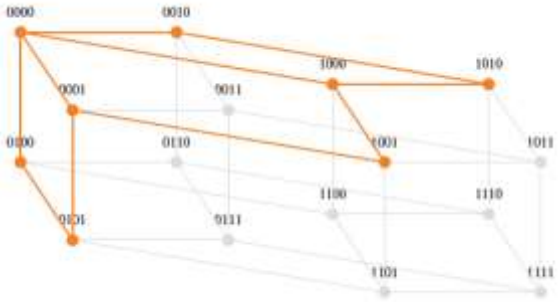


Figure 4 *– Le codage de Zeckendorf sur l'hypercube. Les points en orange sont ceux pour lesquels le codage n'a pas deux 1 consécutifs.*

IV. QUELQUES LIMITES

L'écart entre situations d'enseignement et de vulgarisation rend parfois difficile de mêler véritablement les deux. Le comportement des élèves, celui de l'enseignant ou du médiateur scientifique peuvent y être radicalement différents. Ainsi, lors d'un atelier mené par un médiateur scientifique, chaque élève va à son rythme et ne sait pas forcément où il va, les élèves peuvent s'occuper de sujets très différents, travailler avec d'autres ou pas… le médiateur est libre d'utiliser ces éléments à sa guise. *A contrario*, dans une séance typique de travaux dirigés encadrés par un enseignant, les élèves ont le même sujet, doivent peu ou prou aboutir au même résultat, et dans le temps imparti par la durée de la séance. Dans ces conditions, même un enseignant qui aurait été formé à la vulgarisation ne pourra mener une telle activité que quand elle lui sera explicitement demandée par l'institution. Il ne pourra que difficilement se permettre de prendre sur les heures de classe pour mener une activité qui n'est pas officiellement exigée par les instructions du programme.

C'est à la lumière de ces différences intrinsèques qu'il convient d'analyser la question "Pourquoi ne nous a-t-on pas toujours présenté les mathématiques de cette manière ?" souvent entendue à la fin d'un exposé de vulgarisation qui a lieu "en différé" au sens précédent (le différé pouvant avoir lieu plusieurs années, voire décennies, après le cours initial proprement dit et avoir lieu hors du cadre de l'enseignement). Un tel compliment peut

être mérité, bien sûr, mais également témoigner, de la part de celui qui le fait, d'un manque de recul sur son propre recul. On ne peut construire un pont qu'en disposant de deux rives : la capacité à apprécier un exposé de vulgarisation de synthèse sur un sujet que l'on connaît déjà tient pour beaucoup au travail préalable d'apprentissage sans lequel l'exposé n'aurait pas la même efficacité. L'impression d'avoir compris un sujet lors d'un exposé grand public bien mené n'a pas grand-chose à voir avec la compréhension profonde qu'on obtient par le travail assidu usuel.

Les compliments du genre du précédent sont aussi la marque de la dimension narcissique qui est susceptible d'accompagner le travail de vulgarisation. Au travers de l'intérêt qu'il espère susciter pour sa discipline, le vulgarisateur peut souhaiter aussi se faire aimer, et faire en sorte que son public se souvienne de lui. Ses efforts pour cela, lorsqu'ils sont couronnés de succès, permettent à ses propos de marquer au moins autant, si ce n'est plus, qu'une relation fondée sur un enseignement. La vulgarisation repose sur un contrat dans lequel la séduction joue un rôle plus marqué que dans l'enseignement : de peu d'importance lorsque le cadre dans lequel la vulgarisation s'exerce est celui, le plus ordinaire, d'une séance unique, cette remarque doit en revanche davantage nous interroger lorsqu'elle s'inscrit dans le contexte de relations sur un plus long terme.

RÉFÉRENCES

Cherix, P.-A., & Fiorelli Vilmart, S. (2012). L'expérience des Cafés Mathématiques. Dans J.-L. Dorier, & S. Coutat (Éd.), *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle — Actes du colloques EMF2012*, (pp. 1883-1894). Genève.

Gardner, M. (2001). *The Colossal Book of Mathematics: Classic Puzzles, Paradoxes, and Problems: Number Theory, Algebra, Geometry, Probability, Topology, Game Theory, Infinity, and Other Topics of Recreational Mathematics (1st ed.).* New York: W. W. Norton & Company.

Rosenhouse, J. (2009). *The Monty Hall Problem: The Remarkable Story of Math's Most Contentious Brain Teaser.* USA: Oxford University Press.

ESQUISSE D'UN MODELE D'ANALYSE POUR LES ACTIONS DE DIFFUSION DES MATHEMATIQUES

PELAY Nicolas [*]

Résumé – Les processus de vulgarisation et d'enseignement sont des processus souvent articulés, et nous faisons l'hypothèse qu'il est possible de faire émerger un modèle didactique d'analyse pour l'étude d'une action de diffusion des mathématiques.

Mots-clefs : action de diffusion, popularisation, vulgarisation, contrat didactique et ludique

Abstract – The process of popularization and teaching are often articulated processes, and we claim for a common theoretical model for the analysis of an action of diffusion of mathematics.

Keywords: diffusion of mathematics, popularization, vulgarization, didactic and ludic contract

INTRODUCTION

Nous observons ces dernières années une croissance importante du nombre d'actions de vulgarisation et de popularisation des mathématiques en France et dans le monde entier, et nous pensons que la didactique des mathématiques a un rôle à jouer dans la compréhension de ces processus de diffusion :

> La didactique des mathématiques, qui vise la compréhension des processus de diffusion des mathématiques dans toutes les institutions qui se donnent de tels objectifs, doit se doter des outils théoriques, conceptuels et méthodologiques qui permettent de travailler ces problématiques. (Artigue & Pelay, 2016)

Nos recherches et nos actions menées sur le terrain de l'animation, de la vulgarisation et de l'enseignement des mathématiques depuis 2007 nous conduisent à défendre la thèse qu'il n'y a pas d'un côté le monde de la vulgarisation et de l'autre le monde de l'enseignement, et qu'il est possible de développer une approche théorique commune pour étudier des actions menées dans différents contextes. Selon nous, il existe des connexions, des objets, des situations, des ressources qui circulent dans ces différents contextes, et qu'il s'agit de pouvoir décrire et spécifier avec une approche théorique adaptée. Aussi, nos recherches s'inscrivent en cohérence avec la ligne directrice suivante :

> Mener ce travail implique aussi de ne pas réduire la didactique des mathématiques à l'étude des phénomènes d'enseignement et d'apprentissage. Dans le contexte actuel d'évolution profonde des rapports aux savoirs dans nos sociétés, nous pensons que les formes de diffusion sont de plus en plus articulées et complémentaires, selon les lieux, contextes, publics, dans lesquelles elles se déroulent, et qu'il faut poursuivre le mouvement en cours de développement du champ de la didactique comme étude des phénomènes de diffusion et de dissémination de la culture mathématique sous toutes ses formes. (Artigue & Pelay, 2016)

Adopter une démarche didactique pour l'étude de ces nouveaux contextes, c'est accorder une attention principale aux mathématiques qui sont en jeu dans les processus de diffusion, mais sans se restreindre à des problématiques centrées sur les phénomènes d'enseignement et d'apprentissage. Les connaissances et les savoirs en jeu ne sont pas seulement destinés à être transmis ou appris, ils sont aussi destinés à procurer des émotions, à changer les représentations, à démystifier les mathématiques, à créer du débat social ou politique, etc. Etudier les contextes de vulgarisation et d'animation, c'est accepter l'idée qu'il est possible

[*] Plaisir Maths R&D, France – nicolas.pelay@plaisir-maths.fr

d'étudier des actions dans lesquels il n'y aura peut-être pas d'apprentissage mathématique en tant que tel, mais que le public aura vécu d'autres choses, et que ce sont ces « autres choses » que les recherches devront aussi mettre en évidence.

Dans cet article, nous présentons une première approche théorique en présentant des concepts – encore émergents - qui semblent pouvoir permettre d'analyser des actions de diffusion. Cet article reprendre et actualise les deux articles présentés lors des deux groupes spéciaux consacrés à la vulgarisation à EMF 2012 (Pelay & Mercat, 2012) et EMF 2015 (Pelay & Boissière, 2015), en entrant cette fois plus en détail dans les questionnements théoriques et méthodologiques, et en renvoyant aux deux articles précédents pour l'utilisation de ce modèle pour étudier pratiquement les actions de diffusion.

I. MODELISATION D'UNE ACTION DE DIFFUSION DES MATHEMATIQUES

1. Définition d'une action de diffusion

Une action de diffusion des mathématiques est définie comme la mise en place d'un *dispositif mathématique* dans un *contexte* donné, par un *acteur de la diffusion* et pour un *public donné*.

Nous l'utilisons dans le même sens que Guy Brousseau lorsqu'il définit la didactique des mathématiques, et avec cette perspective, un article, une vidéo, une activité menée en classe, une conférence, une animation sont toutes à considérer comme des « actions de diffusion ».

Le terme de « diffusion » est donc à prendre dans son sens le plus large : c'est le terme le plus neutre et le moins connoté à notre connaissance, et il vise donc à regrouper sans distinction tous les termes que nous avons pu trouver : enseignement, animation, vulgarisation, popularisation, dissémination, etc.

Bien sûr, il est évident qu'il existe des différences profondes entre le processus de *vulgarisation* et le processus *d'enseignement*, mais plutôt que de les opposer *a priori*, notre approche consiste à développer un cadre théorique commun pour étudier les différentes actions menées dans des contextes variés, et à se donner d'outils d'analyse communs pour étudier les spécificités et les points communs de chaque type d'action.

Cette posture théorique correspond aussi au fait qu'il n'est pas possible de distinguer a priori les actions avant de les avoir étudiées : lorsqu'on navigue sur internet, on trouve par exemple toutes sortes de vidéo, et ce n'est qu'en les visionnant qu'il devient possible de se faire une idée de leur nature. Voici par exemple deux vidéos[1] qui peuvent être accessibles via la recherche sur un moteur de recherche du mot clé « table de multiplication », et il apparaît clairement que la première vidéo est une vidéo avec une visée d'enseignement des tables de multiplication pour un jeune public, tandis que la deuxième vidéo est une vidéo de vulgarisation pour un public plus âgé ou adulte qui vise à nous faire découvrir « la face cachée de la multiplication ». Nous faisons l'hypothèse que ces deux vidéos peuvent être analysées avec un cadre théorique commun qui va permettre de justement les catégoriser et les spécifier.

[1] Vidéo n°1 : https://www.youtube.com/watch?v=7-ryWoZ1UoI
Vidéo n°2 : https://www.youtube.com/watch?v=-X49VQgi86E

2. Intentions, enjeux et rôle d'un acteur de la diffusion

La notion d'intentionalité est une notion importante de la didactique des mathématiques, et elle fonde le concept de contrat didactique, sur laquelle nous reviendrons plus loin.

Dès lors qu'il y a une intention, explicite ou implicite, de « diffuser » des mathématiques, il devient possible de considérer que cette action est en partie de nature didactique et qu'il est possible de l'étudier avec des outils et concepts didactiques.

En revanche, comme nous l'avons décrit en introduction, il ne s'agit plus seulement de décrire les intentions en termes d'intention d'enseigner ou d'intention d'apprendre des mathématiques, mais de considérer qu'il existe d'autres intentions qui peuvent être portés par les acteurs de la diffusion des matéhmatiques.

La thèse de Sousa Do Nascmento (1999) sur l'étude des pratiques d'animation scientifique constitue à ce sujet le réel point de départ de notre réflexion théorique. Elle considère qu'une animation scientifique est susceptible de répondre à différents types d'intentions et d'enjeux, qu'elle résume dans le tableau suivant :

INTENTIONS	ENJEUX	ROLE DE L'ANIMATEUR
Elucidation	Valeurs (conscientisation, démystification)	Militant
Production	Procédures (règles, normes, techniques de fabrication)	Technicien
Médiation	Culture scientifique et technique partagée	Médiateur
Instruction	Connaissances scientifiques	Instructeur
Loisirs	Plaisir, sensibilisation	Amuseur

Tableau 1 : *Les modèles d'analyse de l'animation scientifique*

Cette approche théorique ouvre sur de nombreuses questions :

- Ce cadre, ayant été développé pour des actions d'animation scientifique en chimie, est-il encore valable pour caractériser les actions de diffusion des mathématiques ?
- Peut-on rattacher les termes vulgarisation, popularisation, animation, à des enjeux prioritaires spécifiques ? En particulier, une action de vulgarisation peut-elle être caractérisée par un enjeu prioritaire, est-il toujours le même ou varie-t-il selon les actions et les acteurs de la vulgarisation ?

L'objectif de cet article n'est pas de répondre à toutes ces questions, car nos recherches sont encore à ce jour insuffisantes, mais l'approche consistant à identifier et caractériser les actions de diffusion selon les types d'enjeux mis en avant nous semble une démarche féconde pour caractériser les processus de diffusion. Nous formulons l'hypothèse suivante :

Hypothèse de catégorisation d'une action de diffusion : la priorité – si elle existe - donnée à une intention et à un enjeu spécifique permet de caractériser la nature principale de l'action de diffusion.

L'exemple le plus immédiat est celui des actions d'enseignement : une action d'enseignement est une action où la priorité est donnée à la transmission de connaissances et de savoirs mathématiques. L'acteur de la diffusion est dans le rôle de l'« instructeur » : c'est l'enseignant.

Avec cette perspective, il est aussi possible de percevoir qu'une action de vulgarisation ne saurait se définir uniquement par opposition à une action d'enseignement, et qu'elles vont être plus difficiles à catégoriser, car les autres enjeux sont nombreux et n'ont encore été que peu étudiés jusqu'à présent. Néanmoins, on peut remarquer que l'enjeu d'instruction est souvent secondaire dans une action de vulgarisation, à l'image de de ce témoignage recueilli auprès d'un médiateur mathématique :

> L'essentiel, c'est d'essayer au maximum que les gens passent un bon moment. […] A la limite en étant extrémiste, je dirais que le contenu passe après. C'est-à-dire que déjà, si les gens passent un bon moment, évidemment en ayant entendu parler de maths, […] si ils sentent que vraiment il y a des maths là où ils sont, et qu'ils se sentent bien, pour beaucoup c'est déjà énorme. Et donc quelque part, je considère que c'est de notre responsabilité, c'est d'essayer de faire en sorte que ça se passe bien. […] Donc je ne me fixe jamais d'objectif de contenu, il passera ce qui passera.

II. CONCEPTS POUR L'ETUDE D'UNE ACTION DE DIFFUSION

1. Contrat didactique & contrat didactique et ludique

Etudier une action de diffusion des mathématiques et ses enjeux peut aussi être décrit d'un point de vue théorique par la nature du contrat didactique qui se met en place et son évolution au cours du temps (Brousseau, 1998). Ce concept a été extrêmement fécond dans l'analyse des situations didactiques menées en classe, permettant de mettre en évidence des phénomènes didactiques universels : paradoxe du contrat, rupture de contrat, etc.

Mais, ce concept trouve aussi ses limites dans certains contextes de diffusion des mathématiques. Dans sa thèse, Pelay (2011) a pointé certaines insuffisances de ce concept. Dans le cadre d'animations scientifiques, il a montré que les enjeux ludiques étaient très présents, et prenaient même parfois le pas sur les enjeux didactiques. La Théorie des Situations Didactiques ne permettant pas d'étudier de façon complète l'imbrication des phases ludiques et didactiques, il a développé le concept de contrat didactique et ludique en croisant le concept de contrat didactique (Brousseau, 1998) et celui de contrat ludique de Colas Duflo (Duflo, 1997) :

> Le contrat didactique et ludique est l'ensemble des règles et comportements, implicites et explicites, entre un « éducateur » et un des « participants » dans un projet qui lie, de façon explicite ou implicite, jeu et apprentissage dans un contexte donné. (Pelay 2011, p. 284)

Ce concept permet de se donner l'outillage théorique pour décrire et analyser la façon dont évoluent les intentions et les enjeux dans une action de diffusion qui contient des enjeux ludiques et des enjeux didactiques. Il permet ainsi de repérer des moments où un contrat didactique se met en place en lien avec la transmission d'un savoir mathématique précis, des moments où un contrat ludique s'instaure pour faire jouer les participants ou leur raconter une anecdote amusante, et des moments où le contrat didactique et ludique se stabilise pour faire vivre simultanément des enjeux didactiques et ludiques.

Toutefois, la question se pose de la façon dont ce concept doit être adapté pour étudier la prise en compte d'autres enjeux dans l'étude des activités de diffusion. Le concept de contrat didactique et ludique n'est pas non plus toujours pertinent pour étudier certaines actions de diffusion. S'il apparait à l'observation de nombreuses actions de vulgarisation que l'intention de divertissement et de plaisir est très souvent présente sous une forme ou une autre, et que cela engendre des choix dans le déroulement d'une conférence, d'un atelier ou d'un article, certaines actions de diffusion ne présentent pas d'intention ludique explicite et implicite.

Ce questionnement renvoie aussi directement au cadre d'analyse de Sousa Do Nascimento et les enjeux qu'elle a identifiés. Le contrat didactique et ludique semble pouvoir décrire des actions où les intentions « loisir » et « instruction » sont présentes, mais qu'en est-il lorsque les enjeux « élucidation », « production » ou « médiation » sont aussi présents.

Nous faisons l'hypothèse que retravailler le modèle d'analyse de Sousa Do Nascimento permettrait de clarifier les problématiques liées à la définition d'une extension du concept de contrat didactique. Les enjeux principaux d'une action de diffusion des mathématiques ne sont peut-être pas tous à placer au même niveau. Le pôle didactique, relatif au savoir et à la connaissance mathématique, semble être un pôle central, autour duquel s'articule probablement d'autres enjeux.

2. *Zone mathématique d'une action de diffusion des mathématiques*

Ce qui caractérise pour nous une action de diffusion des mathématiques, c'est qu'elle contient des mathématiques qui ne sont pas nécessairement présentes sous la forme de connaissances et de savoirs mathématiques : ce peuvent être des objets, des personnes, des images qui renvoient au monde et à la culture mathématique, et qui vont constituer des éléments déterminants de la nature de l'action de diffusion que le chercheur va devoir repérer et analyser.

Une autre caractéristique, c'est que les connaissances et savoirs mathématiques, même lorsqu'ils sont présents, ne sont pas nécessairement destinés à être transmis ou à permettre d'apprendre des mathématiques. Parce qu'il y a comme nous venons de le voir d'autres enjeux que les enjeux d'instruction, nous considérons donc que ces connaissances et savoirs mathématiques peuvent être classées dans trois zones :

- la **zone maîtrisée** est la zone où le public a une certaine maîtrise du contenu mathématique. Les connaissances mathématiques évoquées ont du sens, et il peut se « raccrocher » à des choses connues. Il peut toujours y avoir des approfondissements dans cette zone, mais l'intervenant va la considérer comme connue par son public.
- la **zone inaccessible**[2] est la zone où le public n'a aucune prise sur ce dont on lui parle. Il ne peut faire référence à des choses déjà connues. Plus la distance est grande, plus les mathématiques paraissent inaccessibles et en quelque sorte magiques pour le public. Souvent invisible ou incompréhensible, le savoir expert est tellement éloigné de celui du public que celui-ci a peu – voire aucune – prise sur la réalité mathématique qui lui est proposée.
- la **zone didactique** est la zone où une compréhension et un approfondissement sont possibles autour d'une notion, d'un théorème, d'une technique, etc. Cette zone est

[2] Il faut préciser que le terme initial dans les deux publications citées était « zone magique » mais il a été modifié à la suite d'échanges dans au sein des groupes de travail. L'aspect magique est un ressort ou une sensation que peut ressentir le public quand on lui présente un savoir inaccessible, mais nous ne considérons plus que c'est le terme approprié pour caractériser cette zone.

souvent celle dans laquelle un enseignant passe une grande partie de son temps de classe.

Notons que ces zones sont spécifiques pour chaque individu, et que l'acteur de la diffusion va nécessairement être amené à situer son action par rapport à un public supposé, et que l'adaptation au public, lorsque l'action est de nature interactive, sera directement liée à l'adéquation de la nature des connaissances et savoirs mathématiques entre le public et les informations qu'il reçoit.

Nous faisons l'hypothèse que la zone dans laquelle va se situer et évoluer l'action de diffusion est un paramètre fondamental dans la conception d'une action de diffusion, et les choix qui vont être réalisés, et qu'elle joue un rôle déterminant dans la réalisation des enjeux et des objectifs de l'acteur de la diffusion, et la perception de l'action qu'en aura le public.

Les processus de sensibilisation, d'accroche, de décrochage, de cadrage et recadrage d'une action, sont selon nous directement liés à la nature de la zone dans laquelle évolue l'acteur de la diffusion par rapport à son public. Il n'existe donc pas une seule zone au cours d'une action de diffusion : plusieurs champs des mathématiques peuvent être présents, et l'acteur peut évoluer dans plusieurs zones. Il peut par exemple prendre appui sur une zone maîtrisée pour permettre l'accès à une zone inaccessible.

Les zones ne sont par ailleurs par fixe. Au cours d'une action, la zone maîtrisée ou la zone didactique peuvent elles-mêmes évoluer, puisque les participants sont susceptibles d'apprentissage dans cette même période.

3. *Trajectoire d'une action de diffusion des mathématiques*

Ces zones étant définies, nous considérons qu'un dispositif de diffusion des mathématiques est comme un vaste territoire mathématique que l'intervenant peut exploiter différemment en fonction du contexte et de son public, et en s'appuyant sur différents ressorts (didactiques, ludiques, magiques, etc.) : il peut poser des jalons et des étapes, et organiser temporellement son action pour réaliser les enjeux fixés. Une action de diffusion des mathématiques est alors définie comme une trajectoire qui se réalise dans la zone de diffusion permise par le dispositif.

Le dessin ci-dessous de la figure 6, bien qu'encore schématique à ce stade de nos recherches, permet de donner une représentation de ce que nous cherchons à décrire par cette notion de trajectoire entre les différentes zones.

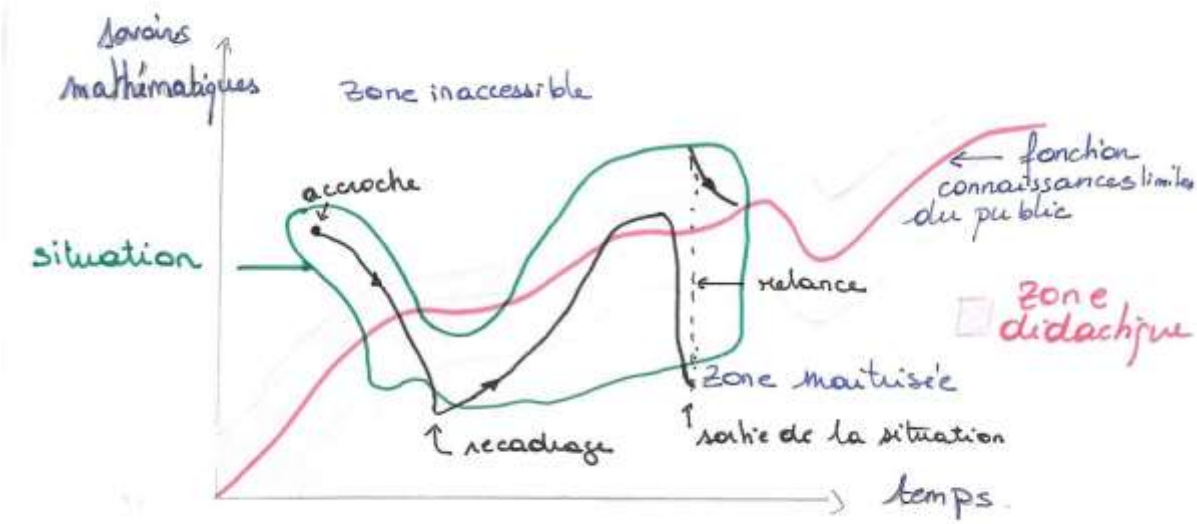


Figure 6 *: Trajectoire individuelle et collective dans l'espace des connaissances*

Il est à noter que ce schéma est une nouvelle version par rapport au schéma présenté lors de EMF 2012 (Pelay & Mercat, 2012), et EMF 2015 (Pelay & Boissière, 2015).

Il est possible de faire à nouveau un lien avec ce que nous avons vu précédemment : dans une action d'enseignement, l'enseignant évoluera quasiment exclusivement dans la zone didactique, naviguant sur les frontières des zones maîtrisées et des zones inaccessibles. Dans les actions de vulgarisation, les trajectoires sont beaucoup plus variées car le vulgarisateur cherche souvent à rendre accessible un savoir expert et à créer des ponts entre toutes les zones.

CONCLUSION

Notre article s'est concentré sur une présentation des éléments de réflexion théorique. Dans les communications de EMF 2012 et 2015, nous avions montré comment cette approche théorique permettait d'analyser certaines actions de diffusion, mais il apparait assez nettement que le contexte d'observation et d'expérimentation doit encore être élargi. Il doit notamment prendre en compte un phénomène qui s'est très largement développé sur la dernière décennie : les vidéos réalisées sur internet, et qui a même fait émerger le métier de « *youtubeurs* », ces personnes qui se professionnalisent dans la réalisation de vidéos de vulgarisation. Aussi, la réflexion sur les intentions et les enjeux d'une action de vulgarisation doit s'appuyer sur le vécu et les témoignages de ces nouveaux professionnels et le travail réflexif qu'ils seront capables d'expliciter sur leurs pratiques, en collaboration avec les chercheurs.

REFERENCES

Artigue M., Pelay N. (2016) Vers une approche didactique des activités de diffusion et vulgarisation des mathématiques, et de leurs synergies possibles avec les activités scolaires, *Actes du séminaire national de didactiques des mathématiques*, 18-19 mars 2016

Brousseau G. (1998) Théorie des situations, Grenoble, La Pensée Sauvage.

Duflo C. (1997) Jouer et philosopher, Editions Puf

Pelay N., Boissière A. (2015) Vulgarisation et enseignement des mathématiques dans le jeu Dobble. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage – Actes du colloque EMF 2015*

Pelay N. (2011) Jeu et apprentissages mathématiques : Elaboration du concept de contrat didactique et ludique en contexte d'animation scientifique, Thèse, Université de Lyon I, Lyon, mai 2011, https://halshs.archives-ouvertes.fr/tel-00665076/

Pelay N., Mercat C. (2012) Quelle modélisation didactique de la vulgarisation des mathématiques. In Dorier J.-L., Coutat S. (EDS) Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle — Actes du colloques EMF 2012

Sousa Do Nascimento, S. (1999) L'animation scientifique : essai d'objectivation de la pratique des associations de culture scientifique et de techniques françaises, Thèse, Université Paris VI.

LA DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES POUR DECRIRE ET ANALYSER DES ACTIVITES D'ANIMATION SCIENTIFIQUE

POISARD* Caroline

Résumé – Notre objectif général est de montrer la complémentarité de deux institutions : l'école et les centres d'animation scientifique. À partir d'un exemple d'atelier de fabrication et d'étude d'objets à calculer réalisé par des élèves de CM2 qui se rendent dans un centre d'animation, nous montrons comment les concepts de didactique, souvent utilisés en contexte scolaire sont également pertinents dans des contextes d'animation scientifique. Nous montrons que selon l'institution, le rapport au savoir est spécifique.

Mots-clefs : didactique des mathématiques, animation scientifique, institutions, contrat didactique

Abstract – Our global aim is to show the complementarity of two institutions: school and scientific activities centres. From an example of a workshop of making and studying calculating instruments by students at the end of primary school that goes to the scientific centre, we show that concepts of mathematics education, often used for school contexts are as well relevant for scientific centres contexts. We show that for a given institution, the relationship to knowledge is specific.

Keywords: mathematics education, scientific activities centres, institutions, didactic contract

D'un côté, l'école possède des programmes, des évaluations et de l'autre l'animation scientifique insiste sur les notions de plaisir, de partage. Notre intention n'est pas ici de mettre en compétition ces deux institutions, mais de pointer la complémentarité des deux démarches proposées. En introduction, nous proposons de clarifier les définitions de didactique des mathématiques et d'animation scientifique. Ensuite, nous présentons quelques concepts de deux théories didactiques importantes : la théorie anthropologique du didactique et la théorie des situations didactiques. Ces concepts nous semblent pertinents pour l'analyse de séances d'animation scientifique. Dans le paragraphe suivant, nous proposons un exemple d'analyse de séances d'animation sur la fabrication et l'étude d'instruments à calculer. En particulier, nous mentionnons l'analyse des savoirs en jeu pour l'étude de ces instruments (boulier chinois, bâtons de Néper, règle à calcul) qui est détaillée dans Poisard 2006. L'analyse est présentée en terme d'institution et de contrat didactique, et l'intérêt de la fabrication des instruments pour les apprentissages mathématiques est discuté.

I. INTRODUCTION : DIDACTIQUE ET ANIMATION

1. Didactique des mathématiques et animation scientifique : de quoi parle-t-on ?

La didactique utilise les concepts de *professeur* et *d'élève*. Le professeur a le rôle, l'intention d'enseigner quelque chose et l'élève d'apprendre quelque chose. Pour cet article, le professeur peut être un animateur, l'élève un enfant dans un centre d'animation. Nous définissons la didactique des mathématiques comme :

> « La didactique des mathématiques est un domaine de recherche qui s'intéresse à l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, de la maternelle à l'université dans le contexte scolaire, mais également en dehors du contexte scolaire (musées, associations, etc.). Son objet d'étude prend en compte le professeur et les élèves en fonction d'un savoir mathématique précis et identifié. En tant que domaine de recherche, la didactique des mathématiques développe des cadres théoriques (avec des concepts) et des méthodologies de recueil et de traitement de données. L'analyse en didactique des mathématiques consiste en particulier en l'analyse de données recueillies qui sont mises en

*UBO - ESPE de Bretagne, laboratoire du CREAD – France – caroline.poisard@espe-bretagne.fr

> relation avec les concepts d'un (de) cadre(s) théorique(s) choisi(s). Ceci permet d'aboutir à des résultats de recherche qui décrivent les phénomènes d'enseignement et d'apprentissage en fonction d'un savoir mathématique. Une des applications des résultats de recherche se fait par la formation des professeurs. » (Poisard, 2017a)

Pour nous, l'animation scientifique est une pratique de la vulgarisation inspirée des méthodes d'animation socioculturelle, pratique assez récente qui date des années 1960-70. Le travail de Sousa Do Nascimento (1999) sur les pratiques des associations de culture scientifique et technique françaises montre que l'animation scientifique trouve ses origines principalement dans deux pratiques : l'animation socioculturelle (particularité française) et la vulgarisation scientifique. L'animation socioculturelle est issue du mouvement d'éducation populaire. Elle possède quatre pôles autour desquels les pratiques d'animation sont construites : le discours libertaire, l'idéologie participationniste, l'occupation du temps libre et la technicité (Sousa Do Nascimento 1999, p.60). Les animateurs sont sensibilisés aux méthodes de pédagogie active et à la communication de groupe. De plus, l'enjeu de création d'une *œuvre culturelle* est central dans ces pratiques d'animation :

> « La visée éducative de l'animation n'est centrée ni sur la théorie ni sur la pratique, mais sur le processus de la production d'une "œuvre culturelle" qui est réalisée par le participant lui-même. [...] L'enjeu, dans ces situations, ce n'est pas seulement l'appropriation des techniques de fabrication d'un objet de haute valeur culturelle mais la valorisation de l'individu comme porteur de savoirs et producteur d'un objet personnalisé » (Sousa Do Nascimento 1999, p.59-60)

2. La place des jeux en mathématiques : en animation et à l'école

Pelay et Artigue (2016) ont établi une liste de publications dans le champ de la didactique des mathématiques concernant « le thème de la vulgarisation, par la problématique ou le contexte expérimental choisi » (Ibid., p.5). Au total, neuf publications seulement répondent à ces critères : trois thèses (Godot 2005, Poisard 2005b et Pelay 2011) et six articles issus des actes du colloque Espace Mathématique Francophone de 2012 et 2015. La notion de jeu est souvent mise en avant dans le contexte de l'animation, c'est le cas dans les thèses de Pelay (2011) et Godot (2005). Toutefois, le jeu n'est pas la seule modalité possible en animation scientifique, c'est le cas par exemple dans notre travail sur la fabrication et l'étude d'instruments à calculer (Poisard 2005b). Notons que l'institution scolaire porte actuellement un intérêt pour les notions de jeu et d'instruments à calculer. Les instructions officielles récentes présentent la notion de jeu dans deux documents dits « ressources pour la classe » : *Les mathématiques par les jeux, cycles 3 et 4* (MENESR 2016) et *Jouer pour apprendre à la maternelle, cycle 1* (MENESR 2015). Dans le document cycle 1, le jeu est présenté à travers différentes disciplines. Ainsi, pour l'instant seul le cycle 2 n'a pas de document ressource en lien avec les jeux. Dans les instructions officielles du cycle 2, les abaques et bouliers sont explicitement nommés comme des instruments « pour calculer, estimer, vérifier un calcul » (MENESR 2015, cycle 2, p.82) tout comme les doigts, le corps et la calculette entre-autres.

II. DES CONCEPTS POUR DECRIRE ET ANALYSER DES SEANCES

1. La théorie anthropologique du didactique (TAD)

En théorie anthropologique du didactique, les notions de *rapport au savoir* et d'*institutions* sont centrales (Chevallard, 2003, 2007). L'auteur différencie le *rapport personnel* à un objet de savoir du *rapport institutionnel*. Regardons tout d'abord comment la notion d'*institution* est définit :

> « Ainsi la classe est-elle une institution (dont les deux positions essentielles sont celles de *professeur* et *d'élève*), de même l'*établissement* (où d'autres positions apparaissent : celle de CPE, d'infirmière conseillère de santé, etc. de même encore que cette institution qui englobe classes et établissements et qui foisonne en positions de toutes sortes, *le système éducatif* ; » (Chevallard, 2003, p.82)

L'évolution du rapport au savoir des élèves permet de caractériser les apprentissages qui sont effectifs quand le rapport personnel à un savoir donné tend au rapport institutionnel attendu. Pour cet article, nous identifions trois institutions : l'école, le centre d'animation scientifique, et la famille. Chacune possède un rapport au savoir spécifique selon ses besoins et ses contraintes d'enseignement et d'apprentissage. L'évolution du rapport au savoir se décrit par les différentes « manières de faire » appelées techniques. En théorie anthropologique du didactique, l'analyse des *praxéologies* propose de décrire la pratique (*technique*) et le discours (*technologie*) pour une tâche donnée. Nous nous référons également à la notion d'*œuvre de savoir* (Chevallard 2001). En se basant sur le principe que la réponse à une question peut être fournie par le recours à des connaissances et des savoirs, l'auteur considère ces connaissances et ces savoirs comme des œuvres, dans le sens où elles créent un milieu de production d'une réponse, pour une certaine institution. Pour illustrer cette remarque l'auteur développe l'exemple des TPE (travaux personnels encadrés) au lycée. Le problème actuel de l'école est le manque de questions et la tendance à fournir directement des réponses ce qui n'engendre qu'une reproduction d'œuvres. L'enjeu des TPE est donc de donner des questions et ainsi de produire des œuvres. Nous montrons ensuite que l'exemple de l'étude d'instruments à calculer permet de créer une œuvre de savoir.

2. La théorie des situations didactiques (TSD)

En théorie des situations didactiques (TSD) (Brousseau 1998), nous présentons tout d'abord la notion de *contrat didactique* :

> « Alors se noue une relation qui détermine – explicitement pour une petite part, mais surtout implicitement – ce que chaque partenaire, l'enseignant et l'enseigné, a la responsabilité de gérer et dont il sera d'une manière ou d'une autre, responsable devant l'autre. Ce qui nous intéresse ici est le contrat didactique, c'est-à-dire la part de ce contrat spécifique du « contenu » : la connaissance mathématique visée. » (Brousseau, 1998, p.61)

Le contrat didactique est donc une ensemble de règles supposées partagées par le professeur (animateur) et l'élève (enfant) concernant un contenu de savoir précis. Le contrat n'est pas complètement explicitable sinon l'enjeu d'apprentissage n'existe plus. Ce contrat n'est ni unique, ni définitif : la didactique cherche à modéliser le « *processus de recherche d'un contrat* hypothétique » (Brousseau, 1998, p.62). De plus, ce sont les changements, les ruptures de contrat qui permettent à l'élève la mise en œuvre d'une connaissance visée. La notion de *milieu didactique* est très liée à celle de contrat. L'apprentissage des élèves se fait par adaptations, par rétroactions par rapport à un *milieu didactique*. Le professeur a en charge de mettre en place le milieu et de la faire évoluer si besoin. Pour un élève donné, les autres élèves de la classe, le professeur, les interactions verbales, le savoir en jeu, les manipulations matérielles (compas, logiciel, etc.) façonnent le milieu. En effet : « On appelle milieu tout ce qui agit sur l'élève ou/et ce sur quoi l'élève agit. » (Brousseau 2010, p.3)

III. UN EXEMPLE : ANALYSE D'ATELIERS DE FABRICATION ET D'ETUDE D'INSTRUMENTS A CALCULER

Cet exemple prend sa source dans notre travail de thèse (Poisard, 2005a, 2005b) qui porte sur l'analyse d'ateliers de fabrication et d'étude d'instruments à calculer. La méthodologie détaillée (recueil de données et traitement) est présentée dans la thèse. Nous continuons aujourd'hui à travailler sur ce thème en observant des classes qui étudient le boulier chinois dans le cadre scolaire. Notre travail actuel porte sur l'articulation des ressources matérielles et virtuelles en classe (Poisard 2016), tant du point de vue du professeur (Poisard et al 2011) que du point de vue élève (Poisard 2005, 2017b). Nous présentons tout d'abord les savoirs mathématiques en jeu pour l'étude d'instruments à calculer, ensuite nous décrivons les trois institutions en relation qui fonctionnent avec des contrats didactiques spécifiques. Enfin, nous discutons les enjeux d'apprentissage concernant la fabrication d'instruments de calcul.

1. Les savoirs mathématiques en jeu pour l'étude d'instruments de calcul

Les savoirs ont une place centrale dans l'analyse en didactique des mathématiques. Pour l'étude d'instruments à calculer (boulier chinois, bâtons de Néper, règle à calcul), les savoirs en jeu sont le nombre, la numération et les opérations. Nous proposons l'étude d'instruments de calcul par les questions suivantes : *Comment fonctionne cet instrument ? Pourquoi ? Pour qui ?* Ce type de questions proposées aux élèves permet de susciter un réel questionnement mathématique, c'est ce que Chevallard (2001) nomme des *œuvres de savoir*. En outre, nous avons montré que la notion de retenue dans les opérations est un savoir important qui est à l'étude lorsque l'on cherche à comprendre le fonctionnement des instruments à calculer (Poisard, 2006). En effet, pour mécaniser les calculs, la signification de la retenue est importante : c'est la gestion des retenues des calculs qui est au cœur de la mécanisation. Mathématiquement, la retenue permet de gérer le changement de la valeur de position, elle réalise un transfert des nombres entre les rangs (pour une définition plus précise voir Poisard 2005b). Nous avons demandé à des élèves de CM2 et aussi à des professeurs de définir ce qu'est une retenue et montré que ceci n'est aisé ni pour les élèves, ni pour les professeurs. Cette question est donc pertinente autant pour l'apprentissage à l'école que pour la formation des professeurs. Clara, élève de CM2 en donne une définition :

> « Une retenue, c'est un chiffre qu'on rajoute à un chiffre quand au résultat on trouve un nombre au lieu d'un chiffre, on met la dizaine au chiffre d'après et on trouve le résultat. » (Poisard 2005b, p.175).

D'autre part, concernant l'analyse des savoirs, nous proposons une *analyse praxéologique* (Chevallard, 2007) en fonction de différents *registres de représentations sémiotiques* (Duval, 1996). La langue naturelle, le langage formel, les figures, les schémas, les graphiques, etc. sont des registres de représentation sémiotiques. Par exemple, concernant des tâches d'inscriptions et de lectures des nombres sur le boulier chinois (Poisard, 2015a, 2017 à paraître), nous considérons les quatre registres suivants : le boulier (matériel et virtuel c'est-à-dire un logiciel), la feuille de papier, les doigts et le langage oral. Pour une tâche donnée, par exemple inscrire 8 ou 73, nous montrons que selon le registre, les techniques disponibles pour les élèves (c'est-à-dire la mise en œuvre) et les technologies associées (c'est-à-dire le discours sur la technique) sont différentes et révélatrice d'un savoir mathématique particulier. Pour Duval (1996), c'est l'articulation de différents registres qui permet d'accéder à la compréhension d'un savoir mathématiques. Ainsi, le recours à différents registres dont celui des instruments à calculer permet d'accéder à la compréhension du nombre, de la numération et des opérations.

2. Contrat didactique et institutions

Pour cette étude, c'est les relations entre trois institutions qui nous intéressent : l'institution scolaire (l'école avec comme représentant le professeur de la classe), le centre d'animation (partenaire scolaire avec les animateurs) et les parents, la famille des enfants. Ce sont les enfants qui sont des acteurs au sein de ces trois institutions et qui vont faire circuler des savoirs, des ressentis entre les représentants de ces institutions. L'institution *centre d'animation* de notre étude fonctionne sur le temps scolaire, en interactions avec l'école et également sur le temps des vacances où les enfants s'inscrivent individuellement. C'est principalement, la fabrication d'un objet qui montre le travail et l'implication des enfants dans les activités. Le contrat didactique est différent selon que l'école est partenaire ou non :

> « Avec les scolaires, chaque enfant construit son objet pendant la demi-journée considérée, si le temps est trop court, la phase d'utilisation et d'explication sera réduite voire mise de côté. L'objectif premier du centre est que l'enfant construise son objet et que celui-ci fonctionne. Une grosse part des explications est laissée volontairement à l'école, la démarche du professeur va donc déterminer l'intérêt didactique des séances. En revanche, pendant les vacances, [...] les animations s'adaptent à la demande des enfants. Suivant la dynamique du groupe, le stage peut se dérouler de manière bien différente, au fil des idées des enfants. Dans ce cas, la partie explications ne peut pas être laissée à l'école. L'instituteur n'intervient plus directement, et ce sont les parents qui sont les premiers témoins des activités réalisées. Même si la portée didactique des ateliers semble plus faible à priori dans ce cas-là, l'intérêt n'est pas nul, il se mesure par contre différemment, mais ce n'est pas l'objet de cette recherche. » (Poisard 2005, p.16)

Pelay (2011) propose la notion de *contrat didactique et ludique* comme contrat spécifique dans des situations de vulgarisation ou des enjeux ludiques sont explicites. Pour notre part, il nous semble que la définition du contrat didactique de Brousseau est une définition commune que l'on peut adapter à différentes institutions qui ont des intentions différentes en termes d'apprentissage et d'enseignement. En effet, certaines activités peuvent être mise en œuvre à l'école ou lors d'animation, c'est le contrat qui sera différent, les attentes respectives en terme d'enseignement et d'apprentissage. Il nous semble qu'il serait intéressant d'envisager une *typologie de contrats didactiques* en fonction d'institutions données, pour un savoir précis, mais ce n'est pas l'objectif de cet article.

3. La fabrication des instruments de calcul : quel lien avec les apprentissages ?

Dans le centre d'animation où se sont déroulées les observations, les élèves de CM2 fabriquent des instruments à calculer (boulier chinois, règles de Néper, règle à calcul). La phase de fabrication est un moment important pour les enfants qui considèrent ces fabrications comme des *œuvres matérielles* (Deforge, 1990). Pour Deforge, les œuvres sont originales, rares, faites mains, exprimant un savoir-faire et la personnalité du créateur, de l'artisan, de l'artiste. C'est aussi une forte implication affective dans la réalisation des objets qui distingue l'œuvre du *produit*. Lorsque les enfants décrivent les moments de fabrication, chaque détail est mentionné. Le déroulement des séances est repris point par point, ce qui montre une activité différente de l'ordinaire. D'autre part, ces objets matériels constituent une trace de ce qui a été appris. Ils permettent aux enfants de montrer aux parents le travail réalisé. Un cahier permet également de valoriser l'apprentissage, de le montrer. Mais un objet matériel, fait-main par l'enfant, que l'on peut garder plusieurs années, entreposé sur l'étagère de sa chambre possède un effet démonstrateur supérieur. Par exemple, Amélie a construit des bâtons de Néper au centre d'animation, elle donne les détails de ce qu'elle pourrait raconter le soir à ses parents :

> « Alors, on a pris des petites plaques en bois, d'une mesure. Même il y avait des grandes de 25 cm ou 26 et il y en avait des moyennes de 15 cm. Alors après, on a pris une grande par exemple on est allé dans une salle pour couper à une machine le bois. On a bien tenu et on a avancé et la scie ça nous a coupé parce que c'est électronique, ça marche tout seul. Ensuite quand on avait tout coupé, on en avait 11 de barres, enfin de plaquettes on en avait 11, dès qu'on avait tout coupé, on les avait mis, bien côte à côte pour que ce soit plus simple, on avait pris du scotch on l'avait collé sur la table en les tenant par-dessus. Ensuite, on a commencé à prendre une règle et un crayon, on a mesuré un cm pour tracer une droite, heu, oui, une droite, plusieurs fois jusqu'à ce qu'on arrive à 9 cm, non 10 cm. Et ensuite, quand on avait fini, on prenait la règle et le crayon, on le faisait en diagonale, de la gauche jusqu'à la droite, en diagonale et on faisait jusqu'en bas. Et après on enlevait le scotch, on l'a mis à la poubelle et ensuite on a pris nos plaquettes et ça nous aide à faire des tables de multiplications donc on a pris une plaquette, on a fait comme un tableau de multiplications. On a mis le fois, le signe de multiplication. Après, on a marqué : 1, 2, 3, 4 jusqu'à 9. Et on a fait notre table avec des plaquettes. […] » (Poisard 2005b p.91)

Lors de la fabrication des instruments, des activités de traçage et de mesurage sont ainsi proposées qui relèvent du domaine des mathématiques. Après cette description précise de la phase de fabrication, Amélie continue en précisant qu'elle souhaiterait que le centre d'animation puisse accueillir ses propres enfants plus tard : « Oui, j'aimerais bien moi, si ça existe encore *Les Domaines*, eh bien que mes enfants ils y aillent ! » (Poisard 2005b p.92). Elle mentionne également qu'elle a apprécié le moment en famille avec ses parents où elle a pu leur expliquer le mode de fonctionnement des bâtons de Néper, cette posture étant peu familière pour elle :

> « Ouais, je me sentais plus grande qu'eux. Comme eux, ils ne savaient pas, moi je leur expliquais au lieu que ce soit le contraire, parce que d'habitude c'est le contraire. Quand j'arrive pas à faire des problèmes ou quoi, c'est eux qui m'expliquent et puis là c'était eux qui avaient un problème parce qu'ils savaient pas. » (Poisard 2005b p.92)

Cet aspect se retrouve dans plusieurs entretiens, par exemple Esther précise :

> « Quand je rentrais des *Domaines*, j'étais toute contente. Je me languissais d'expliquer à mes parents comment fonctionnaient les bâtons, le boulier. C'était drôle. D'habitude c'est le contraire, c'est eux qui m'expliquent. » (Poisard 2005b p.20)

Esther est une bonne élève qui rencontre des difficultés en mathématiques, à la suite des séances au centre d'animation, elle envisage les mathématiques de manière plus positive :

> « Après j'ai vu que calculer, c'était bien. Et que je travaillais mieux aux *Domaines* qu'en classe. Enfin, depuis *Les Domaines*, je travaille mieux en classe. […] Ben déjà, je me suis rendu compte que les multiplications, c'était pas si compliqué, en fait. C'était facile. Et puis, calculer, ça m'a plu alors en classe, j'ai plus de volonté pour calculer. [...] Maintenant que ça me plaît, je finis un peu plus vite le travail, je peux lire, dessiner, faire autre chose qu'avant je pouvais pas faire parce que j'avais pas très bien compris et puis j'aimais pas trop alors je passais beaucoup de temps et je pouvais pas trop lire, dessiner ou quoi. Maintenant que ça me plait, j'ai la volonté donc je le fais. Et après je peux lire, je peux dessiner, je peux m'amuser avec les bâtons de Néper. » (Poisard 2005b p.96)

Ce changement de rapport aux mathématiques pour Esther peut s'expliquer par les objectifs et contraintes de l'animation qui sont différents de ceux de l'institution scolaire. Pour Esther, le fait d'avoir pu découvrir les mathématiques dans un milieu et avec un contrat didactique différent de l'école, lui a permis de voir ensuite les mathématiques dans l'institution scolaire de manière plus positive. Toutefois, dans l'institution scolaire, certains professeurs proposent des fabrications. Nous décrivons l'exemple de Mathilde qui propose la fabrication du boulier à ses élèves 6ème (Poisard 2017a). En effet, Mathilde souhaite remotiver ses élèves en leur proposant des manipulations et elle intègre le boulier chinois en classe. Elle met en place des

séances en début d'année pour fabriquer le boulier, afin que chacun puisse manipuler son propre instrument et ensuite le ramener chez lui en fin d'année. On voit donc que Mathilde prend en compte certains critères importants comme la fabrication d'un objet personnel, elle intègre dans l'institution scolaire des critères plus communs dans l'animation scientifique. Mathilde modifie le milieu didactique en intégrant le boulier matériel mais également en proposant sa fabrication. C'est en particulier des changements dans le milieu matériel qui vont induire des changements dans le milieu et également concernant le contrat didactique.

IV. CONCLUSION ET DISCUSSION

Les concepts de didactique des mathématiques permettent donc de décrire et analyser des séances d'animation scientifique. Nous avons retenu les concepts d'institution, de rapport au savoir et d'analyse praxéologique en théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 2003, 2007) et ceux de contrat didactique et de milieu en théorie des situations didactiques (Brousseau 1998). Ce sont trois institutions qui sont présentes ici : l'école, le centre d'animation et la famille et qui permettent à des savoirs mathématiques de se mettre en place et de circuler. C'est en particulier par la fabrication matérielle que cette circulation est effective et suscite des interactions positives. La notion de contrat didactique, à définir pour un savoir donné en fonction d'une institution, nous semble une piste pour des travaux futurs à envisager. Ceci permettrait de définir des exigences spécifiques en termes d'enseignement et d'apprentissage selon les institutions données. Ce travail nous mène à l'intersection de la notion d'oeuvre chez trois auteurs (Sousa Do Nascimento 1999, Chevallard 2001, Deforge 1990). Ainsi, les pratiques habituelles en animation scientifique se caractérisent par la production d'œuvres qui peuvent avoir trois dimensions : œuvres culturelles, œuvres matérielles et œuvres de savoir.

Au niveau international, un questionnement sur les mathématiques à l'école et en dehors de l'école émerge depuis quelques années (Barbeau, Taylor 2009). La notion de *transition* est également utilisée pour décrire et analyser des phénomènes d'enseignement et d'apprentissage dans le contexte scolaire, périscolaire et extrascolaire (Gueudet et al 2015). Il nous semble que ces travaux sont encourageants et à encourager pour développer les travaux en didactique des mathématiques concernant des activités d'animation scientifique.

RÉFÉRENCES

Barbeau, E. & Taylor, J.P. (2009). *Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom. The 16th ICMI Study.* New York : Springer.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques.* Grenoble : La pensée sauvage.

Brousseau, G. (2010). *Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques.* Site personnel de Guy Brousseau. URL : http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf

Chevallard, Y. (2001). Les TPE comme problème didactique. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*. Paris.

Chevallard, Y. (2003). Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques. In Maury, S. & Caillot, M. (dir). *Rapport au savoir et didactiques.* Paris : Fabert. 81-104.

Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. In L. Ruiz- Higueras, A. Estepa, & F. Javier García (Éd.), *Sociedad, Escuela y Mathemáticas.*

Aportaciones de la Teoría Antropológica de la Didáctico, Universidad de Jaén, 2007, 705-746.

Deforge, Y. (1990). *L'œuvre et le produit*. Seyssel : Champ Vallon.

Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? *Recherches en Didactique des Mathématiques 16-3*, 349-382.

Gueudet, G., Bosch, M., diSessa, M.A., Kwon, O.A., Verschaffel, L. (2015). Transitions in mathematics education. ICMI 13 Topical Surveys. New York : Springer.

Godot, K. (2005). *Situations recherche et jeux mathématiques pour la formation et la vulgarisation. Exemple de la roue des couleurs*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier – Grenoble 1.

Ministère de l'éducation nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche. (2016). *Ressource : Les mathématiques par les jeux.* Eduscol.

Ministère de l'éducation nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche. (2015). *Ressource : Jouer et apprendre, maternelle.* Eduscol.

Ministère de l'éducation nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche. (2015). *Programmes d'enseignement du cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2), du cycle de consolidation (cycle 3) et du cycle des approfondissements (cycle 4).* Eduscol.

Pelay, N., & Artigue, M. (2016) . Vers une approche didactique des activités de diffusion et de vulgarisation des mathématiques et de leurs synergies possibles avec les activités scolaires. *Actes du séminaire national de l'ARDM*, Paris.

Pelay, N. (2011). *Jeux et apprentissages mathématiques. Elaboration du contrat didactique et ludique en contexte d'animation scientifique*. Thèse de doctorat, Université Lyon 1.

Poisard, C. (2017b, à paraître). Introducing an old calculating instrument in a new technologies environment: a praxeological analysis of students' tasks using different registers. *Re SMITEC Review of Science, Mathematics and ICT Education.*

Poisard, C. (2017a, juin). Ressources pour les professeurs au cycle 3 : quand un instrument de calcul ancien s'invite dans une classe utilisant les nouvelles technologies. *Conférences dans les actes du colloque de l'IREM de Poitiers.*

Poisard, C. (2016, dir). Ressources virtuelles et matérielles en mathématiques : des instruments pour travailler en classe sur le nombre, la numération et le calcul. *MathémaTICE 51.*

Poisard, C., Bueno-Ravel, L., & Gueudet, G. (2011). Comprendre l'intégration des ressources technologiques en mathématiques par des professeurs des écoles. Revue pour la *Recherche en Didactique des Mathématiques.* 31-2, 151-189.

Poisard, C. (2006). The notion of carried-number, between the history of calculating instruments and arithmetic. *Mathematics Education Research Group of Australasia (MERGA)*, Canberra, Australie. 2, 416-423.

Poisard, C. (2005a). Les objets mathématiques matériels, l'exemple du boulier chinois, *Petit x, 68, 39-67.*

Poisard, C. (2005b). *Ateliers de fabrication et d'étude d'objets mathématiques, le cas des instruments à calculer.* Thèse de Doctorat de l'Université de Provence, Aix-Marseille I.

Sousa Do Nascimento, S. (1999). *L'animation scientifique : essai d'objectivation de la pratique des associations de culture scientifique et technique françaises*. Thèse de doctorat, Paris 6.

LA TOUR DE HANOÏ

RITTAUD* Benoit et Groupe AlPaGe

Résumé – Nous explorons comment le jeu classique de la tour de Hanoï peut être utilisé dans un contexte de vulgarisation des mathématiques ou d'une séance de réflexion sur des mathématiques qui sortent du cadre de l'enseignement ordinaire.

Mots-clefs : tour de Hanoï, récursivité, algorithme optimal, notation.

Abstract – We investigate how the classical game of the Tower of Hanoi can be used in a context of popularization of mathematics or during a brainstorming about mathematics out of the classical framework of teaching.

Keywords: Tower of Hanoi, recursivity, optimal algorithm, notation.

Le jeu de la tour de Hanoï se joue sur trois piquets verticaux fixes A, B et C sur lesquels peuvent glisser n disques dont les diamètres vont de 1 à n. Dans la situation initiale du jeu, les disques sont disposés sur le piquet A, dans l'ordre des diamètres décroissants, pour constituer une « tour ». Le but du jeu consiste à déplacer les disques pour reconstituer cette tour sur un autre piquet : soit impérativement le piquet C (ce qui constituera notre « variante C »), soit indifféremment sur l'un des deux piquets B ou C (ce qui sera notre « variante BC »). Les deux variantes se jouent avec les règles suivantes :

- On ne déplace qu'un seul disque à la fois.
- Il est interdit de déposer un disque sur un disque de diamètre inférieur.

Il est en général implicitement admis que l'on recherche une solution optimale au jeu, c'est-à-dire qui utilise le moins de déplacements possibles.

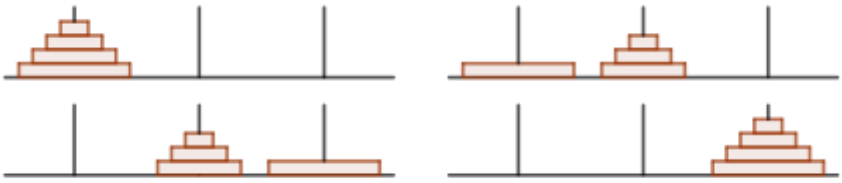
I. ASPECT THEORIQUE

On appelle *solution* toute séquence de déplacements conduisant à une solution au jeu. Les disques étant désignés de 1 à n selon leur diamètre, une remarque fondamentale est que le déplacement du disque n ne peut se faire qu'à un moment où les n–1 autres disques se trouvent rassemblés sur un seul et même autre piquet. Une seconde remarque est qu'atteindre une telle configuration revient très exactement à résoudre le jeu avec n–1 disques.[1]

Notons s_n le nombre minimal d'étapes nécessaires à la résolution du jeu avec n disques. Il vient aisément la relation $s_n = s_{n-1}+1+s_{n-1}$: le premier s_{n-1} pour le déplacement des disques de 1 à n–1 sur un même piquet (distinct de celui de n), le 1 pour le déplacement du disque n sur son piquet final, et enfin le second s_{n-1} pour la nouvelle résolution du jeu à n–1 disques, cette fois destinée à remettre les disques de 1 à n–1 sur le disque n.

* alpage@unige.ch
Benoît Rittaud – Université Paris-13, Sorbonne Paris Cité, LAGA, CNRS, UMR 7539 – France

[1] Ainsi formulée, cette seconde remarque est légèrement abusive : plus précisément, il s'agit en fait de résoudre le jeu à n–1 disques dans sa « variante B » dans laquelle la tour est amenée du piquet A au piquet B. En pratique, cet abus n'est jamais source de confusion, et nous n'en tiendrons pas compte dans la suite.



Pour une tour à un seul disque, il va de soi qu'un seul déplacement suffit. La suite $(s_n)_n$ est donc entièrement définie par les relations $s_1 = 1$ et $s_{n+1} = 2s_n+1$ pour $n \geq 1$. Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique, dont on sait donc obtenir une forme explicite qui, après calculs, se trouve être $s_n = 2n - 1$.

Le calcul de cette forme explicite de s_n passe par l'introduction de la suite $(e_n)_n$ définie par $e_n = s_n+1$. Davantage qu'un simple intermédiaire de calcul, cette seconde suite dispose aussi d'une interprétation naturelle : e_n est le nombre d'*états* successifs rencontrés au fil de la résolution. On a $e_n = 2^n$ pour tout n. L'étude plus approfondie du jeu réserve une large place à la suite des états. Le fait que leur nombre soit une puissance de deux laisse entrevoir que le jeu entretient des liens avec la numération binaire — il en a aussi avec la variante que constitue le codage de Gray, ce qui peut conduire à rechercher d'autres variantes susceptibles d'étendre ce lien à d'autres systèmes de numération, comme il est étudié par exemple dans (Rittaud, 2017).

Le raisonnement précédent, complété d'une simple récurrence, indique aussi qu'il n'existe qu'une seule solution optimale au jeu (ou deux, symétriques l'une de l'autre, dans la variante BC).

Outre ce type de considérations théoriques, ce qui suit s'est nourri d'observations faites sur différents publics à qui le jeu a été proposé. Les cadres de ces observations ont été de plusieurs types : des ateliers librement ouverts au public dans le cadre de manifestations scientifiques en plein air (notamment la Nuit de la Science de Genève en 2016), un cours d'option mathématique donné à de futurs professeurs des écoles (master « métiers de l'enseignement de l'éducation et de la formation », Université Paris-Est), et des ateliers MATh.en.JEANS où des élèves du secondaires étudient, par petits groupes au fil de l'année scolaire et sous la supervision de leur enseignant, un problème posé par un chercheur sous la forme de questions ouvertes (offrant aux élèves la possibilité de choisir leur angle d'étude et leurs perspectives de recherches).

Nous désignerons sous le terme de « participant », de façon indifférenciée, tous ceux, étudiants, élèves ou simples curieux, que nous avons pu faire travailler sur la tour de Hanoï dans l'un ou l'autre de ces cadres.

II. INTERETS SPECIFIQUES

La tour de Hanoï constitue un cas assez rare de jeu que l'on peut aborder à tous les niveaux, du plus élémentaire au plus élaboré. Les écoliers, ou les personnes éloignées des mathématiques et peu volontaires pour se lancer dans une étude fine, peuvent se satisfaire de résoudre le jeu avec 3 ou 4 disques, tandis que les étudiants plus avancés peuvent explorer des questions sur la structure fractale du jeu, ses liens avec les systèmes de numération, voire l'une ou l'autre des nombreuses questions ouvertes qui se posent (variantes à 4 piquets ou plus, modifications des règles…) et qui sont aujourd'hui encore l'objet de recherches (voir (Hinz, Klavžar, Milutinović, & Petr, 2013) pour un état de l'art). Entre ces deux extrêmes,

une multitude de questions intermédiaires offrent à chacun l'occasion d'apprécier à sa manière les ressorts du jeu : aspects algorithmiques, codes de Gray, structures de données, etc. Le problème étant relativement isolé sur la scène mathématique, il offre de réelles possibilités résiduelles de découvertes originales, même par des amateurs. Pour une fois, donc, il n'est pas hypocrite de dire au novice que s'il cherche, alors peut-être fera-t-il une découverte vraiment nouvelle. En l'occurrence, le cas s'est effectivement produit lors d'un atelier MATh.en.JEANS en 2017, où l'un des élèves a proposé un embryon d'étude d'une variante jusque-là inédite à ce qu'il semble. (Dans celle-ci, ce sont les trajectoires des disques qui doivent impérativement suivre le schéma unique : A – C – B – C – A.)

Malgré sa célébrité dans les milieux spécialisés (en informatique davantage qu'en mathématiques, d'ailleurs), la tour de Hanoï reste un jeu qui n'est pas trop connu hormis de quelques cercles spécialisés. Bien que, cela va de soi, les différents participants à un atelier n'avancent pas tous à la même allure, du moins est-il assez rare de devoir faire face à un public dont les membres ne partent pas du même point quant à la connaissance du jeu lui-même.

D'un point de vue théorique, la tour de Hanoï est un cas d'école pour illustrer la puissance de la notion d'algorithme récursif. L'efficacité de ce type d'algorithme pour le jeu qui nous occupe est impressionnante (à peine quelques lignes de code), et donne un exemple bien plus spectaculaire que celui, classique et fort peu ludique, du calcul de factorielle n. C'est d'autant plus vrai que, contrairement à ce dernier problème, un algorithme itératif de résolution de la tour de Hanoï est en général beaucoup moins facilement trouvé — alors même qu'il en existe un extraordinairement simple, comme nous le verrons en section VIII.

III. CERNER LES POSSIBLES

Sans surprise, le moyen le plus courant de faire étudier la tour de Hanoï consiste à distribuer un ou plusieurs exemplaires matériels sur lesquels les participants mènent leurs essais. Souvent, un temps est nécessaire au participant pour s'approprier les règles pour de bon. Malgré leur simplicité, énoncer celles-ci de façon purement théorique se révèle parfois insuffisant, et peut avoir pour effet que le participant

- soit néglige l'une ou l'autre des deux règles, et donc s'autorise à disposer un disque sur un disque plus petit et/ou à se saisir de plusieurs disques simultanément (voire tous les disques, non sans tout de même une hésitation devant ce qui apparaît comme une résolution un peu trop facile) ;
- soit, au contraire, ne s'autorise pas à utiliser tout ce que les règles lui permettent : hésitation sur l'équivalence des piquets, sur la légitimité de poser un disque sur un piquet vide (une éventualité favorisée si la règle est énoncée sous la forme incorrecte : « un disque doit être posé sur un disque plus grand »), ou encore la possibilité, non manifeste dans l'état initial du jeu tel qu'il apparaît au participant, que le disque k soit posé sur un autre disque que k–1.

Une façon d'éviter ces problèmes consiste à donner les règles tout en présentant un exemple explicite de leur usage, sous une forme qui peut ressembler à celle-ci :

> « On déplace un seul disque à la fois d'un piquet à l'autre [saisie puis déplacement du disque 1 du piquet A au piquet B, sans lâcher], sur n'importe quel piquet [déplacement du disque 1 déjà saisi, du piquet B au piquet C (cette fois en lâchant, après éventuellement un ou deux allers-retours), puis déplacement du disque 2 sur le piquet B]. Les déplacements sont libres [déplacement du disque 1 du piquet C au piquet

A], mais il est interdit de placer un disque sur un disque plus petit. Ce déplacement, par exemple, est interdit [déplacement du disque 2 sur le piquet A sans le lâcher, puis replacement de ce disque sur le piquet B.]. Le but du jeu consiste à faire en sorte de reconstituer la tour initiale sur le piquet C [ou « au choix sur le piquet B ou le piquet C », selon la variante]. »

IV. LA CONTRAINTE D'OPTIMALITE

Il semble préférable, au moins dans un premier temps, de ne pas demander d'emblée au participant de trouver une solution optimale, pour plusieurs raisons :

1) Une telle contrainte est susceptible de créer des inhibitions. Parce qu'il autorise les retours en arrière, le caractère réversible de chaque mouvement (tout disque légitimement déplacé du piquet X au piquet Y peut être tout aussi légitimement déplacé du piquet Y au piquet X, annulant le premier déplacement) facilite une appropriation du jeu plus sereine, dans la mesure où il n'y a pas à « tricher » pour revenir en arrière. Compter un aller-retour comme 0 mouvement au lieu de 2, bien que raisonnable s'agissant d'un décompte en vue d'une solution optimale, ressemble en revanche davantage à un abus. Cet aspect « légal » doit sans doute être considéré comme un élément important de démarcation pour distinguer entre l'approche ludique et l'approche mathématique. Si l'esprit qui domine est celui du jeu, alors un aller-retour doit compter pour 2 mouvements, car « il faut payer ses erreurs ». Si en revanche la tour de Hanoï est perçue comme un objet mathématique à étudier, alors un aller-retour compte bien entendu pour 0.

2) Même si la notion de solution optimale est, dans le cadre de la tour de Hanoï, assez simple à saisir (c'est la simple minimisation d'un entier naturel), la nécessité de démontrer qu'on l'a bien trouvée est, elle, beaucoup moins évidente. Pourquoi faudrait-il démontrer qu'on ne peut pas faire mieux qu'en 7 coups pour $n = 3$, alors que « j'ai fait de mon mieux » et que « je vois bien » que ce n'est pas possible en seulement 6 coups ? Présenté trop tôt, ce type de considérations peut apparaître comme inutile pour les petites valeurs de n (et trop difficile pour les plus grandes). Il présente donc le risque d'éloigner le participant du plaisir du jeu, et par conséquent d'entamer sa motivation autant que la confiance qu'il peut avoir en lui-même quant à ses capacités de compréhension.

3) Il n'est pas anormal, du point de vue logique, de s'intéresser d'abord à la question, non triviale, de l'existence d'une solution au jeu à n disques pour tout n avant de s'attaquer à celle d'une solution optimale. Or le caractère optimal de la solution déduite des considérations théoriques de la section 1 découle assez facilement de sa structure « $s_n = s_{n-1}+1+s_{n-1}$ », l'essentiel tenant au caractère crucial de la situation pivot dans laquelle le disque n est seul sur le piquet A tandis que les n–1 autres sont rassemblés sur l'un des deux autres.

V. LE PIQUET FINAL

Malgré les apparences, d'un point de vue théorique la variante C n'est pas significativement plus exigeante que la variante BC. Dans les deux cas en effet, la résolution récursive par « $s_n = s_{n-1}+1+s_{n-1}$ » impose de toute façon de savoir déplacer une tour (de taille n–1) d'un piquet à un autre imposé (de A à B pour le premier s_{n-1}, de B à C pour le second). La « liberté » offerte dans la version BC a donc quelque chose de fictif. En pratique, il est pourtant un moment où elle s'exerce de façon cruciale : lors du déplacement du tout premier disque. Dans la version BC, le choix de poser le disque 1 sur B ou sur C est indifférent. Dans

la version C en revanche, un raisonnement par récurrence montre que le bon choix pour le premier mouvement du disque 1 consiste à le déplacer sur B si *n* est pair, sur C si *n* est impair.

Du point de vue de la progression du participant dans la compréhension du jeu, les différences sont importantes entre les deux variantes, sans qu'un meilleur choix apparaisse clairement entre les deux, du moins dans le cadre mi-ludique mi-pédagogique qui a été le nôtre.

Du côté des inconvénients de la version C, il y a bien sûr que l'anticipation du rôle joué par la parité de *n* est difficile à attendre d'un participant ordinaire (même s'il se trouve quelques plaisantes exceptions). En pratique, le déplacement du premier disque est souvent effectué un peu au hasard. Le participant a donc une chance sur deux d'empiler la tour sur le mauvais piquet. En cas de malchance, une fois les *n* disques sur le piquet B, les participants ne prennent pas toujours conscience que, d'une certaine manière, ils ont tout de même résolu le jeu, même s'il leur était demandé de mettre la tour en C. Comprendre qu'ils pourraient recommencer la partie et empiler à coup sûr la tour sur le piquet C en utilisant une simple « symétrisation » des mouvements qui ont amené la tour sur B (et, par un effort de réflexion supplémentaire, comprendre finalement que le mouvement du premier disque est la véritable question cruciale) dépasse fréquemment les capacités d'abstraction de bien des participants, au moins à ce moment-là de leur recherche qui demeure souvent encore très empirique : le défi de résoudre le jeu à 4 ou 5 disques se relève « à la main », sans que l'idée ou le besoin apparaisse d'une perspective générale. C'est ainsi que bien des participants, une fois la tour amenée en B, ne marquent pas de trouble, probablement habités qu'ils sont par le sentiment d'être sur le chemin de la résolution. (N'ont-ils pas rapproché la tour du bon piquet ?) D'autres tout de même, plus avancés, s'esclaffent en réalisant qu'ils ont tourné en rond.

Quant aux « chanceux » envers qui le hasard se montre bienveillant au moment du déplacement du premier disque[2], leurs efforts victorieux ne les empêchent certes pas toujours de subodorer que leur succès est peut-être partiellement l'effet du hasard, en revanche il leur est difficile de concevoir à quel moment celui-ci s'est manifesté de la façon la plus décisive. Au sens premier, donc, *ils ne connaissent pas leur chance*, même s'ils se doutent souvent qu'ils en ont eu.

Ces inconvénients de la version C peuvent justifier qu'on lui préfère la version BC, au moins pour un temps d'exploration du jeu. Mais c'est aussi là reculer pour mieux sauter, car lorsqu'il s'agit d'approfondir pour traiter le jeu pour d'autres valeurs de *n*, l'algorithme récursif est plus rétif à se mettre en place : l'un et l'autre des s_{n-1} de la solution « $s_n = s_{n-1}+1+s_{n-1}$ » requièrent de savoir déplacer une tour à $n-1$ disques sur un piquet prédéterminé, et non sur un piquet quelconque.

VI. L'EXPLORATION DU JEU ET LE DECOMPTE

Une façon d'amener le participant à approfondir sa compréhension du jeu consiste à lui faire compter le nombre de coups qui lui ont été nécessaires pour le résoudre. En pratique, cela impose de recommencer le jeu, un inconvénient auquel il semble difficile de remédier : demander un décompte dès la première tentative complique les efforts du participant et

[2] un hasard bienveillant auquel peut se substituer l'animateur qui, percevant l'hésitation initiale d'un joueur, peut déclarer : « pour le premier déplacement, et pour celui-là seulement, je vais vous aider : placez le disque sur ce piquet. »

brouille la vocation exploratoire des essais initiaux en introduisant trop vite, fût-ce de manière implicite, la contrainte de rechercher une solution optimale.

En revanche, une fois que le participant s'est raisonnablement bien approprié le jeu pour quelques valeurs de *n*, le décompte prend tout son sens, et la recherche d'une solution optimale devient un nouveau défi qui évite, au moins pour un temps, de devoir considérer des valeurs de *n* trop grandes, c'est-à-dire pour lesquelles il est difficile de ne pas perdre le fil de la résolution et donc d'induire un découragement ou, à tout le moins, le sentiment d'une perte de temps.[3]

À tout point de vue, le jeu à 2 disques est unanimement perçu comme trivial, que ce soit dans la recherche d'une solution, dans le décompte des coups nécessaires ou dans le caractère optimal de la solution à 3 coups. Avec un seul disque il en va de même, bien que certains participants en viennent parfois à redouter un piège devant une situation visiblement si simple qu'elle en devient suspecte. Quant au cas de la tour de Hanoï sans disque ($n = 0$), il est intéressant pour illustrer la cohérence de la convention $2^0 = 1$, mais le caractère très particulier de ce cas est parfois un peu déroutant, et n'est en général d'aucune aide réelle, et peut même mettre le participant un peu mal à l'aise.

Que l'animateur affirme la nécessité de produire une démonstration de l'affirmation « pour 2 (resp. 3) disques, le nombre minimal de coups est de 3 (resp. 7) » est facilement perçu par le participant comme une sorte de provocation, car pour ces deux valeurs de *n* il reste facile de saisir mentalement le déroulement de la solution optimale dans sa totalité, et « on voit bien » qu'il n'y a pas moyen de le raccourcir. Il faut parfois un certain temps avant qu'une structure soit dégagée de la suite 1, 3, 7, 15, 31. Le plus souvent, c'est la structure récurrente qui apparaît (« pour chaque nouveau nombre on multiplie par 2 et on ajoute 1 »). Le besoin de démonstration, lui, ne se manifeste guère, non plus que la recherche d'une formule explicite. Il semble étonnamment difficile de faire le lien avec la suite des puissances de 2, même lorsqu'un travail préparatoire sur cette suite et ses premiers termes a été mené (cas des étudiants de master MEEF). C'est d'autant plus curieux que la suite 1, 2, 4, 8, 16, 32… jouit d'une certaine notoriété, même si elle ne figure pas *stricto sensu* dans les programmes d'enseignement (en tout cas pas davantage que comme exemple, non exigible des élèves).

VII. LA QUESTION DE LA NOTATION

Lorsque la découverte du jeu s'accompagne d'un travail théorique (cas des étudiants du master MEEF), l'étude « *in situ* », c'est-à-dire sur un exemplaire matériel du jeu, montre vite ses limites, notamment parce qu'elle n'offre pas la possibilité de garder la trace des mouvements effectués. Rapidement, donc, les participants (qui sont alors de moins en moins « joueurs » et de plus en plus « chercheurs ») sont amenés à figer sur le papier l'évolution des positions des disques.

Une telle situation évoque, dans un tout autre contexte, la querelle médiévale des abacistes et des algoristes, les premiers ayant défendu l'usage de l'abaque pour faire des calculs tandis que les seconds promouvaient l'emploi des algorithmes écrits (que nous utilisons toujours) pour effectuer l'une ou l'autre des opérations arithmétiques courantes. À cette aune il pourrait

[3] Il arrive toutefois que ce soit l'inverse qui se produise : un jeune enfant, qui s'était fait une perception correcte de l'algorithme optimal de résolution dans le cas général, s'est ainsi mis en devoir de résoudre le jeu pour des valeurs de *n* de plus en plus grandes, non sans fierté à chaque nouveau succès.

être intéressant d'observer plus finement le comportement de participants qui, précisément au moment où ils se font plus authentiquement chercheurs, renoncent à la matérialité physique pour entrer dans un système symbolique. Sous la pression induite par les nécessités antagonistes de précision et de rapidité, on peut penser que certains tâcheront d'améliorer leurs notations, sans nécessairement d'ailleurs avoir clairement conscience de le faire, tant un tel travail est susceptible de s'effectuer de façon incidente, en parallèle aux recherches.

Du point de vue pédagogique, outre la possibilité offerte de relier cette problématique des notations à la querelle médiévale susmentionnée, nous avons là l'occasion d'une réflexion intéressante sur la question, rarement abordée dans l'enseignement, du choix d'une notation adaptée à un contexte. Lorsque les participants franchissent le pas qui consiste à *écrire* des états du jeu qui les intéressent, ils ont souvent tendance à employer des représentations qui donnent à voir un luxe de détails tout à fait inutiles pour l'étude mathématique du jeu. Rares sont ceux qui se donnent la peine de quelques instants de réflexion pour se doter d'une représentation efficace qui fasse ressortir, sous une forme aussi ramassée que possible, les seuls éléments véritablement pertinents pour l'analyse. Nombreux sont les participants qui, ne se posant pas la question de distinguer l'essentiel de l'accessoire, s'obstinent à dessiner (parfois à la règle !) les piquets et leur support. Les disques, eux, sont souvent représentés par des segments de longueurs variables, ou bien des rectangles plus ou moins oblongs, sans que leurs tailles relatives soient toujours clairement apparentes — si bien que, lorsque des dessins de ce type sont faits à main levée pour représenter une situation à 5 ou 6 disques, les confusions entre disques de tailles voisines deviennent vite monnaie courante.

En sus de cette problématique de la notation, nous avons ici affaire à un cas particulier intéressant du contexte d'un travail au brouillon. Dans un texte finalisé tel que le présent article, la représentation d'un état du jeu se fait le plus souvent soit à l'aide de dessins explicites (ainsi ceux de l'aperçu théorique) pour rendre la lecture plus fluide, soit avec une notation abstraite qui évite l'encombrement des pages tout en demeurant claire pour le lecteur un peu aguerri.[4]

Le travail de recherche au brouillon, lui, relève d'impératifs différents : il doit pouvoir tirer profit d'une notation à la fois visuelle (pour appuyer la réflexion) et rapide (pour ne pas freiner l'élan de la recherche). Les dessins explicites aussi bien que les notations compactes ne répondent chacun qu'à une moitié de ce cahier des charges. Une autre notation est donc nécessaire, qui n'a pas vocation à être utilisée autrement qu'avec un stylo. Une possibilité raisonnablement fonctionnelle est la suivante. On assimile chaque disque à son rayon, c'est-à-dire à un entier entre 1 et n. Chaque état du jeu se représente alors comme trois colonnes de nombres, chaque colonne contenant les nombres associés aux disques qui se trouvent sur le piquet qui correspond à cette colonne. Pour matérialiser le fait qu'un piquet est vide, sa colonne est représentée par le signe \ . Pour rendre l'écriture plus compacte, on écrit au besoin Δ_k pour indiquer la superposition des disques de 1 à k. Enfin, des flèches permettent de figurer le passage d'un état à un autre : disons, si le besoin s'en fait sentir, une flèche simple pour un déplacement unique et une flèche double pour signaler des mouvements multiples (dont le

[4] Pour fixer une notation systématique, l'essentiel est de remarquer qu'un état de la tour de Hanoï à n disques est entièrement caractérisé par une partition ordonnée et à trois éléments de l'ensemble $\{1,\ldots, n\}$. Cette remarque illustre combien la simple question du choix d'une notation est susceptible de conduire à une réflexion sur la structure mathématique fondamentale du jeu. Un exercice complémentaire consiste à définir mathématiquement les déplacements de disques, ainsi que les règles, en envisageant effectivement un état de la tour de Hanoï comme une partition ordonnée à trois éléments de $\{1, \ldots, n\}$.

nombre exact peut figurer au-dessus de la flèche). L'état initial du jeu s'écrit ainsi $\Delta_n \setminus \setminus$, et les figures données dans l'aperçu théorique en début d'article deviennent :

$$\Delta_4 \setminus \setminus \qquad \Delta_3 \; 4 \setminus$$

$$\setminus \; 4 \; \Delta_3 \qquad \setminus \setminus \Delta_4$$

Pour donner une situation moins particulière que les précédentes, l'état du jeu pour $n = 5$ dans lequel les disques 1 et 3 se trouvent sur le piquet A, les disques 2 et 4 sur le piquet B et le disque 5 sur le piquet C se représente par :

$$\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{matrix} \; 5$$

Pour une étude plus approfondie de certaines questions liées au jeu, on sera éventuellement amenés à introduire des notations complémentaires (par exemple Δ_i^j pour la superposition de tous les disques de rayon compris entre *i* et *j*).

VIII. ITÉRER POUR RÉGNER : RICHESSE VS. SIMPLICITE

Une fois la structure du jeu correctement comprise, le participant perçoit sans peine que, lorsque *n* devient grand, la gestion pratique de l'algorithme récursif est problématique. On peut aisément relier ce problème très concret de mémorisation à celui des algorithmes récursifs en général, dont une caractéristique fondamentale est d'être aussi économes en lignes de codes que gourmands en mémoire. Cela amène de manière très concrète à percevoir l'utilité d'un algorithme itératif. Dans le cadre d'un atelier récréatif, l'expérience montre qu'il est difficile de se lancer dans une étude complète de la question, qui implique des considérations assez théoriques. Quant à la situation d'enseignement pour des futurs enseignants, le thème dans lequel la séance s'inscrivait (différentes manières d'écrire les nombres, les systèmes de numération) a orienté cette recherche d'algorithme itératif vers la voie des codages des états en numération binaire. (Il se trouve, mais nous n'allons pas le détailler ici, que le disque à déplacer pour aller de l'état *k* à l'état *k*+1 dans la solution optimale se détermine en comparant l'écriture binaire de *k* à celle de *k*+1.) Cela laisse en pratique peu de temps pour la recherche d'un algorithme itératif facile à manier en pratique.

Dans ces conditions, la durée de la séance étant de toute façon limitée quelle que soit son cadre, il s'est en pratique toujours avéré impossible de disposer d'assez de temps pour permettre aux participants de réfléchir de façon un tant soit peu approfondie à un algorithme itératif. Or il se trouve qu'il en existe au moins deux, pour ainsi dire jamais trouvés. L'un se fonde sur la remarque que le disque 1 bouge exactement une fois sur deux et toujours dans le même sens (de A à B puis de B à C puis de C à A etc., ou l'inverse, selon la parité de n et le piquet final), les autres mouvements étant ainsi entièrement déterminés (lorsque le disque 1 ne doit pas bouger, un seul mouvement est possible). L'autre algorithme, tout aussi simple, opère un renversement spectaculaire. La présentation de cet algorithme ne prend que peu de temps et peut servir de conclusion à l'atelier, une conclusion en forme de friandise offerte aux participants pour leurs efforts. (On peut aussi, pourquoi pas, espérer que, piqué au vif d'être passé tout au long de la séance à côté d'une solution étonnamment simple, l'un ou l'autre des participants se posera de lui-même la question par la suite.)

Pour expliquer cet algorithme, considérons un état quelconque du jeu. Chaque piquet définit un mouvement et un seul dont le piquet n'est ni le départ ni l'arrivée, ce qui permet de désigner ce mouvement par le nom du piquet.[5] On peut alors démontrer par récurrence que la suite des mouvements ainsi codés par les piquets est périodique, et que la période est CBA pour *n* pair et BCA pour *n* impair.

C'est ainsi que, vu sous l'angle des piquets plutôt que des disques, le jeu de la tour de Hanoï se réduit de façon spectaculaire à un jeu *périodique*, donc *trivial*. Cette trivialité semble entrer en conflit avec la difficulté des travaux antérieurs des participants sur d'autres aspects du jeu (liens avec la numération binaire, avec les fractales…). Cette opposition, qui n'est bien sûr qu'apparente, peut être l'occasion d'une réflexion sur le fait que l'existence d'une solution simple à un problème n'interdit pas à ce problème d'être d'une grande richesse.

IX. CONCLUSION

La tour de Hanoï offre matière à explorations diverses, que ce soit à un niveau élémentaire ou avancé. Son utilisation pédagogique peut être souple, en laissant à chaque participant une grande latitude pour se poser ses propres questions, adaptées à son niveau et ses centres d'intérêt spontanés. Les recherches théoriques qui restent à mener sur le jeu (systèmes de numération, mais aussi systèmes dynamiques, liens entre le triangle de Sierpiński et l'ensemble de Cantor, etc.) autant que les possibilités de variantes ludiques et pédagogiques en font un outil de choix pour rendre vivant l'apprentissage des mathématiques.

RÉFÉRENCES

Hinz, A. M., Klavžar, S., Milutinović, U., & Petr, C. (2013). *The Tower of Hanoi - Myths and Maths.* Basel: Birkhäuser.

Rittaud, B. (2017). A Numeration System and a Gray Code Given by a Variant of the Tower of Hanoi. *Numeration*, pp. 61-66.

[5] Pour faire comprendre ce point, considérons le piquet C. Il y a deux mouvements envisageables qui n'impliquent C ni au départ ni à l'arrivée : celui où le disque *d* en haut de A est déplacé sur B, et celui où le disque *d'* en haut de B est placé sur A. Or, de *d* et *d'* il en est un plus petit que l'autre, ce qui ne rend licite que l'un de ces deux mouvements.

QUEL ROLE PEUT JOUER L'HISTOIRE DES MATHEMATIQUES DANS UNE ACTION DE VULGARISATION DES MATHEMATIQUES ?

ROUGETET* Lisa

Résumé – Alors que l'utilisation de l'histoire des mathématiques et de ressources historiques dans l'enseignement fait l'objet de recherches approfondies depuis les années 2000 via le réseau *History and Pedagogy of Mathematics* (HPM), la question du rôle que peuvent jouer ces mêmes ressources dans une activité de vulgarisation reste encore à explorer. Basée sur les récentes recherches menées au sein du réseau HPM, cette contribution se propose d'avancer quelques pistes de réflexion à ce sujet.

Mots-clefs : histoire et pédagogie des mathématiques, ressources historiques.

Abstract – While using the history of mathematics and historical resources has been thoroughly studied since the 2000s via the History and Pedagogy of Mathematics (HPM) group, questioning the part that these resources may play for an action of popularization still needs to be explored. Based on the recent researches led within the HPM network, this contribution intends to offer some lines of thought on this subject.

Keywords: history and pedagogy of mathematics, historical resources.

I. INTRODUCTION

Un des enjeux principaux de la vulgarisation des mathématiques est de contribuer à l'acculturation mathématique des individus dans notre société (Pelay & Artigue, 2016, p. 1). Le recours à l'histoire permet de montrer que les mathématiques :

> […] existent et sont en constante évolution dans le temps et dans l'espace, qu'elles ne descendent pas du ciel, et qu'elles sont une activité humaine arborant de multiples facettes au gré des cultures, des sociétés et de l'histoire, et que leur évolution est issue de motivations intrinsèques et extrinsèques animant les mathématiciens dans leur époque […] (Guillemette, 2011, p. 8)[1]

Il existe donc un lien entre histoire des mathématiques et culture des mathématiques qui est fort et qu'il nous semble pertinent d'exploiter. Il est d'ailleurs reconnu que les vulgarisateurs ont fréquemment recours à des éléments d'histoire des mathématiques dans une action de vulgarisation[2]. Mais qu'entend-t-on vraiment par « l'utilisation de l'histoire des mathématiques dans une action de vulgarisation » ?

En didactique, l'existence d'un lien entre histoire des mathématiques et culture des mathématiques fait l'objet de recherches développées par les acteurs du réseau HPM[3] (*History and Pedagogy of Mathematics*) sur l'utilisation de l'histoire dans l'enseignement des mathématiques et dont les contributions visent à apporter des éléments de réponse aux

* ESPE de Bretagne, Centre François Viète (EA 1161), Université de Bretagne Occidentale – France – lisa.rougetet@univ-brest.fr

[1] De manière plus générale, nous rejoignons les propos de Michel Morange sur la nécessité d'une mise en perspective historique en histoire des sciences, permettant « […] à tout chercheur de mieux situer son travail au sein des demandes sociales et ainsi de mieux dialoguer avec la société. » (Morange, 2008, p. 37)

[2] Nicolas Pelay dans (Pelay & Mercat, 2012, p. 1917) évoque « les détours historiques » que peut faire l'animateur au cours d'une activité de vulgarisation.

[3] Ce champ de recherche sur l'utilisation des mathématiques pour l'enseignement et l'apprentissage est initié au début du XXe siècle par des pédagogues (M. Barwell), des philosophes (G. Bachelard), des mathématiciens (H. Poincaré, F. Klein), et connaît une hausse importante de popularité dans les années 1970 avec la création du groupe international de travail sur les relations entre l'histoire et la pédagogie des mathématiques, nommé HPM (*international study group on the relation between the History and Pedagogy of Mathematics*). Depuis les années 2000, cette recherche autour de l'utilisation de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement se restructure et incite ses contributeurs à réfléchir sur la construction d'outils d'investigation plus efficaces. (Guillemette, 2011. pp. 5-6)

questionnements suivants : quelle histoire serait-il approprié ou pertinent d'introduire dans l'enseignement des mathématiques ? Quel rôle peut jouer l'histoire des mathématiques dans l'enseignement des mathématiques ? Dans quelles mesures l'histoire des mathématiques a-t-elle été intégrée à l'enseignement des mathématiques (dans les programmes, les manuels, dans les ressources à disposition des enseignants, dans la formation des enseignants, etc.) ? Comment évaluer l'efficacité de l'apport de l'histoire des mathématiques dans les apprentissages ? (Clark et al., 2016, p. 135)

Certaines des questions énumérées ci-dessus se transposent de façon quasi-immédiate dans le domaine de la vulgarisation des mathématiques : quel rôle peut jouer l'histoire des mathématiques dans une action de vulgarisation ? Peut-on utiliser l'histoire des mathématiques pour motiver un public dans son étude des mathématiques, pour stimuler son plaisir de faire des mathématiques ? Est-ce que le recours à l'histoire des mathématiques conduit à une compréhension plus approfondie des concepts et de la nature des mathématiques ?[4]

En revanche, du fait des spécificités des processus de vulgarisation par rapport à ceux de l'enseignement, notamment par l'absence de programme d'éducation, national ou autre, et du peu de contraintes institutionnelles, d'autres questions davantage liées au milieu de la vulgarisation émergent : pourquoi avoir recours à l'histoire dans une action de vulgarisation ? Comment peut-elle se présenter, sous quelles formes ? À partir de quand peut-on dire qu'une action de vulgarisation est réussie d'un point de vue historique ?

Dans cette contribution, nous présentons quelques premiers éléments de réflexion quant à l'élaboration d'un cadre théorique de construction d'une action de vulgarisation ayant recours à l'histoire des mathématiques, et qui répondraient aux questionnements soulevés ci-dessus. La question de l'utilisation de ressources historiques en situations d'enseignement et d'apprentissage étant déjà fortement exploitée par les acteurs du réseau HPM, nous proposons dans un premier temps d'en présenter les principaux résultats. Nous tâcherons ensuite d'en explorer les potentialités didactiques, en soulignant les éventuelles limites de ces considérations liées au domaine particulier de la vulgarisation, afin d'envisager une grille de lecture pertinente d'une action de vulgarisation à dimension historique, basée sur des modèles théoriques didactiques existants.

II. LES TRAVAUX DU RESEAU HPM

1. Un état des lieux international

En 2011, un article rédigé par David Guillemette (Faculté d'Éducation, Université d'Ottawa) propose un état des lieux de la recherche sur l'utilisation de l'histoire dans l'enseignement des mathématiques : il jette un regard critique sur les aspects méthodologiques de plusieurs recherches empiriques et souligne à la fois le manque de données qualitatives, mais aussi d'évidences empiriques quant à l'efficacité et à l'apport de l'histoire des mathématiques dans l'apprentissage, et ce malgré une réelle effervescence du milieu de la recherche :

[4] Nous avons repris ici les principales questions développées par (Pelay & Artigue, 2016, p. 3) quand ils présentent l'étude ICMI « Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom » sur l'approche des mathématiques par les élèves « comme défi », et les avons adaptées à l'approche historique que nous envisageons d'étudier dans cette contribution.

> En parcourant la littérature récente, on remarque un désir important dans la communauté de chercheurs de construire des outils critiques afin de porter un regard aiguisé sur la recherche actuelle. (Guillemette, 2011, p. 7)

Guillemette présente ensuite plus en détail le travail de catégorisation mené par Uffe Thoma Jankvist (2009) sur l'ensemble des méthodes utilisées afin d'introduire l'histoire des mathématiques en classe (le « comment ») et sur l'ensemble des arguments appuyant cette introduction soulignés par les chercheurs, les enseignants, et mathématiciens (le « pourquoi »). L'objectif de cette distinction est de tenter de faciliter l'observation et l'analyse des relations entre ces deux aspects de la recherche.

Concernant le « comment », Jankvist différencie trois types de méthodes pour introduire l'histoire des mathématiques en classe : l'approche anecdotique (par des faits isolés, des encarts historiques, des anecdotes particulières) ; l'approche par modules d'apprentissage (situations problèmes ou séquences d'enseignement basées sur l'histoire autour d'un sujet mathématique précis) ; et l'approche historique intégrée qui s'inspire ou se base sur les développements historiques de l'objet mathématique étudié pour l'élaboration d'une séance complète d'enseignement (Guillemette, 2011, pp. 7-8).

Concernant le « pourquoi », Jankvist divise l'approche en deux catégories, selon la vision adoptée quant à l'utilisation de l'histoire. La première approche envisage l'histoire des mathématiques

> […] comme un outil motivationnel ou cognitif pouvant venir en aide ou accompagner l'enseignement ou l'apprentissage des mathématiques. (Guillemette, 2011, p. 8)

En effet,

> Les facteurs motivationnels, l'humanisation des mathématiques, le support cognitif pour l'élève, l'approfondissement épistémologique et didactique de la réflexion de l'enseignant sur la matière, l'accès à des problèmes variés et enrichissants ou la réflexion didactique autour d'objets épistémologiques précis sont des arguments associés à cette perception de l'histoire comme un outil. (Guillemette, 2011, p. 8)

La seconde approche envisage l'histoire des mathématiques comme une fin en soi, dans le sens où elle nous apprend ce que sont les mathématiques en montrant leur constante évolution dans l'espace et dans le temps.

Ces deux approches dépendent en fait de l'objectif pédagogique visé par l'enseignant dans l'activité d'apprentissage proposée :

> Si l'intention concerne plus spécifiquement l'objet mathématique, les arguments seront associés à l'histoire perçue comme un outil. Si l'intention concerne principalement des réflexions métamathématiques (les aspects « méta » des mathématiques), les arguments seront alors associés à l'histoire perçue comme un objectif en soi. (Guillemette, 2011, p. 8)

De là se posent des questions sur l'efficacité des agencements entre arguments et méthodes selon les types d'objectifs pédagogiques visés : y a-t-il des agencements plus efficaces que d'autres ? Selon Jankvist (2009), tout est possible, même si, par exemple, l'approche anecdotique se rapproche davantage de l'histoire vue comme un outil (il serait en effet difficile de s'engager dans des réflexions métamathématiques profondes à partir de simples encarts historiques ou anecdotes ponctuelles (Guillemette, 2011, p. 9)).

Un autre aspect soulevé par Guillemette (2011), basé sur les travaux de Michael N. Fried (2001) et qu'il nous semble pertinent de souligner ici concerne les difficultés liées à l'utilisation de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement. La première difficulté est due au fait de traiter « convenablement » l'histoire des mathématiques en classe.

> Très souvent l'histoire prend la forme d'anecdotes et capsules historiques qu'il [Fried] voit d'un très mauvais œil. Déjà au milieu des années 90, LeGoff (1994) critiquait l'introduction d'une histoire plaquée

> formant un écran devant les mathématiques. Fried, lui, y voit le risque d'une dénaturation de l'histoire, celle-ci pouvant être contaminée par la vision moderne des mathématiques qui écrase l'historicité des concepts et aseptise la lecture. (Guillemette, 2011, p. 9)

Ces questions quant aux craintes de dénaturer l'histoire nous paraissent également fondées dans le cadre d'une action de vulgarisation, si l'on souhaite dépasser la simple anecdote ou éviter de tomber dans des « clichés » historiques à la véracité parfois douteuse. Nous y reviendrons dans la troisième partie de cet article.

Guillemette évoque également un ensemble de réticences développées par les enseignants quant à l'utilisation de l'histoire des mathématiques en classe, mais ces dernières sont avant tout émises par les enseignants par rapport à « l'efficacité » des apprentissages, en relation avec les contraintes imposées par les instructions officielles et les programmes scolaires. Cet aspect – devoir atteindre un objectif d'apprentissage à la fin d'une séance d'enseignement – est nettement moins contraignant dans le cadre d'une action de vulgarisation, dont les enjeux sont déconnectés des exigences scolaires. La crainte d'utiliser des ressources historiques dans une action de vulgarisation ne nous semble donc pas fondée, et nous ne développerons pas cet aspect dans la suite de l'article.

Dans la sous-section suivante, nous proposons de rendre compte plus spécifiquement de travaux récemment menés en France en didactique des mathématiques, dont l'objectif est d'analyser des séances de classe utilisant des supports historiques dans le but, d'une part, d'interroger les potentialités didactiques offertes par le recours à une dimension historique (Barrier et al., 2012) et, d'autre part, d'étudier les différentes formes de tâches soumises aux élèves dans une activité mathématique à dimension historique (De Vittori, 2015). Nous pensons en effet que les problématiques soulevées dans ce genre d'études – et les cadres d'analyse qui sont proposés pour tenter d'y répondre – pourraient, sous certaines conditions de modifications, se transposer dans le cadre d'une action de vulgarisation en mathématiques ayant recours à des ressources historiques.

2. Les travaux menés en France

Lancé depuis juin 2012, le programme de recherche EDU-HM (Études Didactiques de l'Utilisation de l'Histoire des Mathématiques en classe et en formation), porté par Thomas de Vittori à l'Université d'Artois, vise à conduire une analyse didactique de séances mêlant mathématiques et histoire des mathématiques. Le site dédié au projet recense un ensemble de vidéos filmées en classe sur une dizaine d'activités différentes, proposées de la 6ème à l'université. L'intérêt se porte en général sur plusieurs questions :

> […] dans quelle mesure la dimension historique contribue-t-elle au fonctionnement des situations et aux apprentissages mathématiques ? quels sont les savoirs historiques visés par l'enseignant ? ou dans quelle mesure des connaissances relevant de l'histoire des mathématiques émergent-elles à travers l'expérience d'activités mathématiques contextualisées ?[5]

Dans un article récent, de Vittori (2015) propose une réflexion sur la mise en œuvre de séances de mathématiques intégrant des éléments d'histoire. À partir d'exemples concrets, tirés de pratiques en classe, il présente une étude des différentes formes de tâches que les élèves ont à effectuer, et de leurs enjeux dans les liens qu'elles tissent avec les deux domaines concernés, à savoir les mathématiques, et l'histoire. Il introduit alors une typologie, nommée « SaMaH » (activités Spécifiques, a-Mathématiques, et a-Historiques) qui, à partir du constat que certaines régularités peuvent être observées dans des séances de mathématiques intégrant

[5] http://eduhm.univ-artois.fr consulté le 4 décembre 2017.

des éléments d'histoire, vise à classifier les tâches des élèves selon les choix didactiques opérés.

La typologie SaMaH repose sur le triptyque S, aM et aH : ces trois appellations désignant respectivement les tâches dites *Spécifiques*, les tâches de type *a-Mathématique*, et les tâches de type *a-Historique* (une activité en classe pouvant présenter plusieurs tâches de type différent au sein d'une même séance). Une tâche a-Historique (notée aH, à ne pas confondre avec une tâche an-historique qui signalerait une absence de lien avec l'histoire) est :

> […] directement liée à cette nécessité d'inscrire la séance dans les apprentissages disciplinaires des élèves. Ainsi, comme dans une situation ordinaire, l'élève devra mettre en œuvre des résultats appris en cours afin d'obtenir la valeur cherchée. (De Vittori, 2015, p. 6)

De Vittori donne l'exemple d'une activité à partir d'un problème tiré des mathématiques chinoises, extrait (et traduit) des *Neuf chapitres sur l'art mathématique* (IIe – Ier siècles av. J.-C.)[6] : une fois la situation du problème schématisée, l'activité de l'élève est purement mathématique,

> […] effacant ainsi de manière plus ou moins temporaire la dimension historique qui n'a servi ici qu'à participer à la dévolution et à *justifier* de nombreuses imprécisions dans l'énoncé. (De Vittori, 2015, p. 6)

De façon assez similaire, une tâche de type a-Mathématique (notée aM) renverra principalement à la construction ou à l'acquisition de connaissances dans le domaine de l'histoire sans qu'un travail mathématique ne soit indispensable :

> Un exemple de ces aspects peut être observé dans la présence très fréquente d'un court texte de présentation historique de l'auteur ou de l'ère culturelle dans laquelle ont été puisées les sources qui apparaissent dans une séance. (De Vittori, 2015, p. 7)[7]

Il existe enfin un troisième de type de tâches, les tâches de type Spécifiques (notées S) :

> Ce type de tâche n'est ni purement mathématique, ni purement historique, mais il contribue à tisser des liens vers l'un et l'autre des deux domaines. […] c'est lors d'une conjonction effective des deux types de connaissances qu'apparaît toute la spécificité des séances étudiées. […] La tâche S a une dimension synthétique qui, pour être pertinente, doit pouvoir renvoyer aux deux champs. (De Vittori, 2015, p. 7-8)

Ainsi, dans une séance de mathématiques à dimension historique, les trois types de tâches peuvent être présentes en proportions variables, mais formant un tout. De Vittori les représente de la manière suivante :

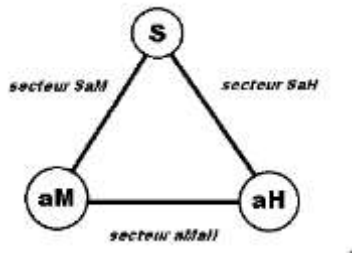


Figure 1 – *Trypique SaMaH* (De Vittori, 2015, p. 14)

On voit alors la présence de trois secteurs, qui amène à se demander :

> Quelles sont les conséquences théoriques de l'absence de mise en jeu de l'un des pôles de SaMaH ? (De Vittori, 2015, p. 14)

[6] Pour une analyse détaillée des contenus des exemples cités dans cette sous-section, nous renvoyons à (De Vittori, 2015).

[7] À ce propos, nous renvoyons au projet porté par l'IREM de Rennes d'analyse de quelques encarts historiques représentatifs dans les manuels scolaires : http://thamous.univ-rennes1.fr/forums/forums/42/exportIrem/

Nous ne développerons ici que les conséquences liées à l'absence du pôle aH, et qui amènent à considérer des activités provenant du secteur SaM. En effet, ces dernières touchent considérablement le domaine de la vulgarisation, car :

> Dans le cas d'une activité de type SaM, la disparition du type aH entraine avec lui la disparition du lien avec son domaine d'ancrage, à savoir les mathématiques. Il en résulte une activité dans laquelle les élèves sont mis en contact avec des connaissances historiques et des tâches à visée spécifiques, mais sans lien avec des objectifs scolaires mathématiques. Il s'agit donc d'une séance déconnectée des enjeux de l'école dont la pertinence pourrait se justifier dans le cadre d'événements extrascolaires (Fête de la Science, Journée du patrimoine,…) mais qui ne saurait répondre aux programmes actuels dans un contexte réel d'enseignement. (De Vittori, 2015, p. 14)

Cette dernière citation nous paraît particulièrement pertinente et en adéquation avec notre volonté de contstruire un modèle d'analyse d'une situation de vulgarisation à dimension historique. Nous développerons plus en détails cette idée dans la troisième partie de l'article.

Un des questionnements importants du groupe de travail « Étude des processus de vulgarisation des mathématiques » étant de réfléchir à l'impact que peuvent avoir les activités de vulgarisation sur l'apprentissage des mathématiques et/ou sur les attitudes des élèves envers les mathématiques, et ce – en ce qui concerne cette contribution – sous le prisme de l'utilisation de ressources historiques, il m'a semblé nécessaire de faire un point sur les recherches menées en didactique des mathématiques à ce sujet. Tâchons à présent de voir si certains questionnements méthodologiques que nous avons présentés ici sont transposables dans le domaine de la vulgarisation et pourraient amener à construire un cadre théorique de construction d'une action de vulgarisation en mathématiques qui aurait recours à l'usage de ressources historiques.

III. QUEL CADRE THEORIQUE POUR UNE ACTION DE VULGARISATION ?

Nous l'avons déjà souligné : les travaux de recherche concernant l'utilisation de ressources historiques dans une activité de vulgarisation mathématique en sont encore au stade embryonnaire. Un des enjeux de l'article de Boissière et al. (2017), qui présente le projet de recherche et développement « les mathématiques c'est stratégique » sur la transposition de la théorie des jeux combinatoires pour l'élaboration d'actions d'enseignement et de vulgarisation, est de chercher à montrer que la théorie mathématique des jeux combinatoires est vivante, qu'elle a une histoire et que cette histoire se poursuit. Les auteurs souhaitent pleinement intégrer l'histoire de ces jeux dans leurs activités (atelier, conférence) à travers les ouvrages de récréations mathématiques des XVIe et XVIIe siècles pour montrer qu'ils font partie intégrante de notre culture. Mais, pour reprendre les idées développées par Jankvist (2009) dans la partie II.*1.*, « pourquoi » intégrer des éléments d'histoire dans une activité de vulgarisation, et « comment » le faire ? Nous nous proposons ici de réévaluer le travail de classification de Jankvist du point de vue de la vulgarisation.

Intéressons-nous tout d'abord à la question du « pourquoi ». Les deux catégories proposées par Jankvist relèvent de la question de l'apprentissage visé. En vulgarisation, l'apprentissage en question ne s'inscrit certes pas dans un objectif scolaire ou institutionnel précis, mais il en existe bel et bien un. Donc selon nous, cette double approche de considérer l'histoire comme « un outil motivationnel » ou comme « une fin en soi » garde tout son sens en vulgarisation. En effet, il n'est pas inconcevable de vouloir entrer dans des réflexions métamathématiques plus profondes – sur ce que *sont* les mathématiques – dans une activité de vulgarisation, même si l'histoire vue en tant qu'outil motivationnel semble davantage cohérent avec la nature même d'une activité de vulgarisation. Disons par là que l'histoire en tant qu'outil est

une des raisons principales qui incite les animateurs à en avoir recours dans une activité de vulgarisation.

La question du « comment » introduire l'histoire des mathématiques dans une activité de vulgarisation se restreint selon nous à deux des trois méthodes proposées par Jankvist : du fait de la ponctualité d'une action de vulgarisation, il ne semble pas pertinent d'envisager « l'approche historique intégrée qui s'inspire ou se base sur les développements historiques de l'objet mathématique étudié pour l'élaboration d'une séance complète d'enseignement ». En effet, bien souvent dans une action de vulgarisation, l'objectif est d'introduire des notions nouvelles ou de présenter à un public des connaissances inédites qui relèvent des mathématiques actuelles. Organiser alors toute une action de vulgarisation sur une approche historique intégrée ne permettrait pas de « raccrocher » les propos abordés à des connaissances liées aux mathématiques actuelles (et sur lesquelles les participants peuvent se questionner). En revanche, l'approche anecdotique et l'approche par « modules d'apprentissage » nous paraît concevable dans le cadre d'une activité de vulgarisation.

L'approche anecdotique par la présentation de faits isolés, ou d'anecdotes particulières pourrait constituer des « accroches » pour le public, le plaçant dans la zone appelée « inaccessible » ou « magique » par Pelay et Mercat (2012, p. 1924). Elle permettrait également de dynamiser une activité, de la relancer, en faisant varier les phases durant lesquelles le rôle de l'animateur est « d'instruire », d'apporter des connaissances scientifiques et durant lesquelles son rôle est « d'amuser », de « sensibiliser »[8]. Selon nous, cette approche permet réellement de considérer l'histoire comme un outil motivationnel fort dans une activité de vulgarisation.

L'approche par « modules d'apprentissage »[9], notamment à travers des situations problèmes à caractère historique autour d'un sujet mathématique précis, pourrait quant à elle être employée dans la zone dite « didactique » développée par Pelay et Mercat (2012, p. 1924), dans laquelle la compréhension et l'approfondissement autour d'une notion, d'un théorème, d'une technique est possible. Ces situations entrent alors, selon nous, dans le secteur SaM défini par de Vittori, et pour lesquelles les liens avec les objectifs scolaires sont absents. Nous pourrions alors envisager de reprendre dans le cadre de la vulgarisation cette typologie, mais sous la forme d'un diptyque avec les pôles S et aM uniquement. Il faudrait toutefois veiller à redéfinir légèrement la nature des tâches de type S car, au sens où l'entend de Vittori, la tâche S se révèle impossible à mener sans son pilier aH. Ceci est dû au fait qu'il faut prendre en compte les contraintes institutionnelles imposées dans une séance d'enseignement, ce qui n'est pas le cas en vulgarisation. Nous pourrions alors définir une tâche S en vulgarisation comme une tâche spécifique qui, par le biais d'une approche historique (une situation problème par exemple), permet d'illustrer et de donner sens au concept, à la notion, au théorème, ou à la technique mathématique abordée dans l'activité de vulgarisation, sans qu'elle ne mobilise de connaissances mathématiques particulières préalablement construites.

Une activité de vulgarisation pourrait ainsi mobiliser en proportions variables des approches anecdotiques (de type aM), en tant qu'outils motivationnels pour accrocher le public ou relancer le dynamisme de l'activité, et des approches par modules (de type S au sens où il a été défini ci-dessus en vulgarisation) pour illustrer ou donner davantage de profondeur aux concepts mathématiques en jeu dans l'activité.

[8] Voir (Pelay & Mercat, 2012) pour les différents rôles de l'animateur dans un modèle d'analyse de l'animation scientifique.
[9] Le terme serait à revoir dans le cadre la vulgarisation.

IV. CONCLUSION ET PERSPECTIVES DE TRAVAIL

L'objectif de cette contribution n'est pas d'imposer ce qu'il faut faire (ou faudrait faire) pour utiliser l'histoire des mathématiques dans une activité de vulgarisation. Tout comme les travaux du groupe HPM, et plus particulièrement à travers le modèle SaMaH présenté dans la deuxième partie, nous souhaiterions avant tout sensibiliser les professionnels de l'animation scientifique des différentes formes que peut revêtir l'histoire dans une action de vulgarisation des mathématiques. Cette première base de travail permettra sans doute par la suite de construire une ingénierie qui permettrait « d'ajuster » les propos historiques dans une activité de vulgarisation selon les objectifs à atteindre, sans en dénaturer ou falsifier les contenus.

Ce travail nous semble important à mener car, au delà de l'analyse des potentialités didactiques offertes par le recours à une dimension historique dans une action de vulgarisation, il pose également la question des limites imposées par un tel recours : jusqu'à quel degré d'exactitude historique l'animateur peut-il aller de sorte à ne pas sortir, d'une part, de la vulgarisation (en se voulant trop expert dans l'historicité des arguments employés) et, d'autre part, de l'histoire des mathématiques (en embellissant l'histoire, en la déformant pour la rendre « sexy »). Comment intégrer l'histoire dans une activité de vulgarisation sans que personne (historien, animateur, public) ne se sente flouée ?

REFERENCES

Barrier T., Mathe A.-C., de Vittori T. (2012) Des séances ordinaires comportant une dimension historique : quels enseignements ?. *Petit x* 90, 5-33.

Boissière A., Pelay N., Rougetet L. (2017) De la théorie des jeux à l'élaboration d'actions d'enseignement et de vulgarisation : le cas des jeux de type Nim. *Petit x* 104, 49-71.

Clark K., Kjeldsen T. H., Schorcht S., Tzanakis C., Wang X. (2016) History of mathematics in mathematics education, recent developments. In Radford L., Furinghetti F., Hausberger T. (Eds.) (2016) *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics*. Montpellier, France: IREM de Montpellier, 135-180.

De Vittori T. (2015) Les tâches des élèves dans une activité mathématique à dimension historique. *Petit x* 97, 22 pp.

Fried M. N. (2001) Can Mathematics Education and History of Mathematics Coexist? *Science & Education* 10, 391-408.

Guillemette D. (2011) L'histoire dans l'enseignement des mathématiques : sur la méthodologie de recherche. *Petit x* 86, 5-26.

Jankvist U. T. (2009) A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics* 71(3), 235-261.

Le Goff J.-P. (1994) Le troisième degré en second cycle : le fil d'Euler. *Repères IREM* 17, 85-120.

Morange M. (2008) *À quoi sert l'histoire des sciences ?* Versailles : Quæ.

Pelay N., Mercat C. (2012) Quelle modélisation didactique de la vulgarisation des mathématiques. In Dorier J.-L. & Coutat S. (Eds.). *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21ème siècle – Actes du colloque EMF2012* – Spé4, 1914-1925.

Pelay N., Artigue M. (2016) Vers une approche didactique des activités de diffusion et vulgarisation des mathématiques, et de leurs synergies possibles avec les activités scolaires. *Actes du séminaire national de l'ARDM 2016*, 15 pp.

LA PRATIQUE DE L'ANIMATION SCIENTIFIQUE À TRAVERS LE DISCOURS DES ANIMATEURS

SOUSA DO NASCIMENTO*, Silvania

Résumé - L'animation scientifique joue un rôle important dans les activités de l'éducation scientifique non scolaire. L'ensemble de nos travaux dans l'Association Planète Science confirme la cohérence entre le discours de sur elle-même et le discours de l'animateur sur le terrain d'action. Dans cet article nous travaillons sur l'hypothèse que le discours de l'animateur scientifique nous permet d'accéder à la structure organisée de la séquence. Nous présentons une discussion au sujet des outils de terrain pour analyser des séquences d'animation scientifique.

Mots-clefs : Analyse du discours; animation scientifique; grille d'observation; éducation non scolaire; observation du terrain.

Abstract - Scientific fairs play an important role in non-formal science education context. Our research confirms the synergy between Association Planète Science`s and educators practices. Moreover, we aim to discuss whereas methodology techniques can analyze scientific educators utterance data.

Keywords : Discourse Analysis; scientific fairs; non-formal education; data collecting

I. INTRODUCTION

L'animation scientifique, telle que nous la connaissons en France, est un système d'actions multiples: des expositions, des cycles de conférences, des ateliers pédagogiques, des musées de sciences, des clubs scientifiques, des écoles (Sousa do Nascimento, *et al* 2002; Sousa do Nascimento, 1999). Elle développe des moyens pour l'appropriation d'une culture scientifique, mathématiques et technique, surtout pour un public jeune dans le cadre de l'éducation non scolaire (Pelay, 2011). Les institutions privilégiées pour sa mise en œuvre sont diverses, comme: les associations de culture scientifique et technique, les Centres de Culture Scientifique, Technique et Industrielle (CCSTI) et les musées de sciences. Guenther & Joubert (2017) ont dégagé que la recherche dans la communication scientifique s'est intensifiée ces dernières années, mais il n'existe pas encore une cartographie de la recherche sur les interactions entre les médiateurs scientifiques et leurs publics. Le cadre théorique d'analyse et les outils développés dans le cadre scolaire ne sont pas facilement transposables à l'éducation scientifique non scolaire. Pour les interactions dans les situations de la médiation scientifique, les didacticiens, en général, interviennent dans les pellent aux activités destinées aux jeunes sur leur temps libre vis-à-vis de la réussite scolaire d'élèves en difficulté, issus de milieux défavorisés ou de minorités ethniques particulières (Rahm, 2006). Gorry (2012) dans une étude sur le dialogue « science en/et société » affirme que dans l'espace d'apprentissage non scolaire, l'enseignant et l'animateur scientifique jouent des rôles différents, il est donc important de comprendre leurs postures et leurs discours lors de ces actions.

L*'animation scientifique* prend son origine d'une part dans le mouvement de vulgarisation des sciences, en particulier avec la mise en place du Palais de la Découverte dans les années 1930, et d'autre part, dans les mouvements d'action socioculturelle des années 1960; l'aspect de « Science pour toutes et tous » s'accompagne des méthodes de conduite de groupe et implique l'engagement spontané des individus sans contrainte d'évaluation.

* Universidade Federal de Minas Gerais – Brésil - silnascimento@ufmg.br

Pour essayer de comprendre le « fonctionnement » d'une animation scientifique nous avons choisi de regarder des séquences d'animation menées par des associations de culture scientifique et technique françaises (loi 1901) héritières de la double origine historique de l'animation scientifique. Nous avons aussi décidé de travailler sur les pratiques des animateurs scientifiques dans des associations qui forment elles-mêmes leurs animateurs. Nous menons notre recherche dans le domaine de la physique, de la chimie et de la technologie, lors de séquences d'animation courtes visant la fabrication d'objets techniques par des enfants de 9 à 11 ans.

S'il y a une formation des animateurs, il y a aussi une réflexion du discours de l'association sur elle-même : ainsi nous faisons l'hypothèse que le discours de l'animateur, lors d'une animation, sera porteur de celui de l'association. Il peut être possible alors de choisir un descripteur pour accéder à la pratique d'animation, à savoir, la décrire et la caractériser. Nous nous proposons à travers de l'analyse du discours de l'animateur de repérer le déroulement de l'animation, et de définir des indicateurs à partir desquels nous pourrons établir une catégorisation des activités demandées par l'animateur aux participants.

Des précédents travaux réalisés dans le cadre scolaire ont montré qu'il est possible, en utilisant des grilles d'observations (Thibault, Davous *et al*. 1997), de procéder l'analyse de toute séquence d'animation, aussi bien en direct qu'en différée, à partir d'enregistrements audio et vidéo. L'ensemble de ces études a confirmé la cohérence entre le discours de l'association sur elle-même et le discours de l'animateur dans les cadres scolaire et non scolaire. Notre démarche de recherche porte sur l'hypothèse que le discours de l'animateur scientifique peut permettre d'accéder à la structure organisée de la séquence. Dans cet article, nous discutons des outils de terrain pour des analyses du discours d'animations scientifique.

Les analyses documentaires que nous avons effectuées nous permettent d'affirmer, que quel que soit l'animateur et quelle que soit la manipulation, il y a un déroulement structuré, et que celui-ci présente une régularité selon un protocole précis. Ce protocole effectif se déroule en quatre étapes, repérées par des phrases d'entrée et de sortie, indiquant un changement d'activité des participants :

- phase de présentation : accueil des participants, enrôlement et engagement dans l'animation, dans laquelle on trouve des enjeux de connaissance (référence au savoir-savant) et de plaisir ;

- phase de mise en situation et/ou construction ou fabrication de l'objet technique : lors de cette phase, les participants disposent d'un document écrit produit par l'association et qui précise les différentes tâches à effectuer, dans lesquelles peuvent exister des enjeux de savoir-faire, des connaissances, de dépassement personnel (surmonter une difficulté, après faire une découverte personnelle après, par exemple) et des enjeux de procédures ;

- phase d'achèvement de l'objet technique : rangement, dans cette phase il y a des enjeux de connaissances et de procédures auxquels s'ajoutent des enjeux de culture scientifique et technique partagée ;

- phase de clôture : consignes pour l'utilisation du produit, et explications à propos du rôle des produits dans la fabrication, le fonctionnement du produit et, pour finir, l'animateur prend congé des participants.

Ce protocole, régulier, spécifié lors de la formation, présente un caractère codifié, normatif, indiquant qu'il s'agit d'une pratique appuyé sur des bases rationnelles.

II. MÉTHODOLOGIE DE L'ANALYSE

Dans cette proposition, nous nous centrons sur la méthodologie de recueil des données et la méthodologie d'analyse de séquences d'animation Planète Science (https://www.planete-sciences.org), en vue de spécifier une procédure de terrain, en précisant les outils utilisés. Cette association est toujours en activité et poursuit encore des ateliers sur les mêmes thématiques et avec des protocoles comparables (Scicluna et al, 2012). Notre cadre de référence repose sur la conception communicationnelle des pratiques de formation. La recherche est menée selon une approche ethnographique impliquant des observations sur le terrain.

1. Recueil de données

La séquence d'animation analysée ici s'est déroulée en 1997 pendant la manifestation « Science en fête » organisée dans l'espace Grésillons. Certes les données sont anciennes, mais le regard que nous essayons d'y porter et les outils méthodologiques investis sont plutôt récents et originaux. Dix-neuf participants sont amenés à construire en deux heures une micro-fusée. Un observateur de terrain (chercheur de l'équipe) est chargé de l'observation directe. Le discours de l'animateur est intégralement enregistré au magnétophone et complété de quelques prises de vue au caméscope (l'observateur de terrain jouant le rôle de *cameraman*) ; celles-ci permettent de rendre compte de l'ambiance générale de l'animation et aident à repérer comment l'espace est occupé (configuration spatiale), et comment le matériel et l'équipement sont utilisés par les acteurs de l'animation (participants et animateur). L'effort pour l'organisation des collections des données vidéo pour des analyses croisées des situations des différentes démarches scientifiques justifie l'actualité de ces corpus (Tiberghien et al, 2014). Le travail de Goujon (2016) sur des ateliers mis en place lors de village des sciences a analysé des situations d'échanges très proches. L'actualité de ces ateliers porte sur des démarches scientifiques pour le cadre hors scolaires, qui sont renouvelés depuis 1991, et qui mobilisent des institutions comme l'école, les associations de culture scientifique et les musées des sciences.

Nous avons développé une méthodologie d'analyse de la séquence d'animation selon un regard croisé de deux analystes. L'un, présent lors du déroulement de l'animation, appelé observateur de terrain : celui-ci dispose d'une large expérience de terrain et connaît le déclaratif de l'association. Le second analyste n'a pas de connaissance du discours de l'association sur elle-même et n'a pas assisté à l'animation. Il mène une analyse « en aveugle ». Par la confrontation des deux analyses, il s'agit de savoir d'un part si l'on retrouve des points en commun sur le protocole effectif. D'autre part, il s'agit de mettre au point des grilles d'observation des activités de médiation scientifique pour le cadre non scolaire.

2. Constitution du corpus

L'observateur du terrain a procédé à une analyse tenant compte de tous les documents disponibles et qui concernent l'animation et l'association. Celle-ci est découpée en tours de parole qui sont identifiés par un chiffre (numéro de prise de parole) et une lettre (désignant le locuteur). Chaque tour de parole comprend des phrases entières ou des segments de phrases. Nous avons choisi de favoriser la lisibilité du texte et de négliger les phénomènes tels que les accentuations et les hésitations qui ne font pas l'objet de cette étude. L'anonymat des participants a été préservé dans la transcription.

III. DISCUSSIONS DES RÉSULTATS

1. Résultats concernant l'analyse du déroulement chronologique

En fonction du déroulement de la séquence, l'observateur du terrain a mis en évidence les étapes de l'animation, définies par un changement notable abordé sous l'angle de l'activité des participants, et qui se sont traduites, le plus souvent, par un changement dans l'occupation de l'espace. Nous considérons que la configuration spatiale rend compte de l'intention de l'animateur, vis-à-vis des participants, d'occuper l'espace et d'utiliser, ou non, le matériel et l'équipement qui appartiennent au décor de la séquence d'animation en vue de la fabrication de la micro-fusée. L'observateur de terrain, maintenant à la place de l'analyste, a procédé ensuite à un découpage plus fin des étapes en *épisodes* en se référant au processus de transformation de l'objet à fabriquer (voir annexe 1, par exemple, micro-fusée - construction de la tête et des ailerons). L'analyste garde comme indicateur des *phrases d'entrée et de sortie*, mais porte alors son attention à ce qui se dit de l'objet lui-même (parties constitutives et matériel pour sa fabrication). La configuration spatiale continue d'être spécifiée, mais elle ne sert plus d'indicateur dans la définition des épisodes. Dans ce corpus, l'analyste a isolé dix épisodes différents : présentation ; dessin ; propulseur : préparation du lancement ; propulseur : mise à feu ; propulseur : exploitation ; micro-fusée : engagement dans la construction ; micro-fusée : la préparation du lancement du propulseur ; micro-fusée : la construction du parachute et la décoration ; rangement et conclusion et séparation du groupe.

Par exemple dans l'épisode propulseur : de la préparation du lancement (78-147), les phrases d'entrée et de sortie sont indiquées ci-dessous :

> 76 A : Tout le monde a fini son dessin ?
> 77 Et : Oui !
> 78 A : Donc // y a / ceux qui n'ont pas fini // ils posent leur stylo et leur dessin là // on va aller dehors // pour vous faire voir quelque chose et après on revient vous allez finir d'accord ? (*voix enfants : protestations*)
> 79 A : non non non tu le poses là / personne prend son dessin // d'accord ? // s'il te plaît tu poses ton dessin vous venez avec moi dehors.
> …
> 145 A: Donc ça ça s'appelle une // ça / c'est un boîtier de lancement / un pupitre de lancement // et // là ça s'allume pas encore / si je fais ça // ça s'allume pas / si j'mets les deux ça s'allume là ?
> 146 Et : Oui !
> 147 A : Les deux s'allument // ça veut d'ça veut dire que le courant passe // appuie voir // vas-y appuie // et i s' passe rien de tout pa'ce que / y a pas la clef magique ça s'appelle // une clef de sécurité // ça veut dire que quand on / quand on fait un lancement avec les enfants // heu nous on peut être amené à hum // à être heu à … OK ? chaque/ bon vous vous mettez comme ça et puis on va faire le lancement.

2. Analyse catégorielle des activités

Nous avons utilisé une approche de l'analyse des finalités des discours spécialisés pour caractériser, dans chaque épisode, les activités prédominantes de l'animateur. Pour ce type d'analyse, il faudrait prendre non seulement des données textuelles, mais également la chronologie des actes, qui permet de mieux comprendre dans quelle mesure l'animateur est contraint par les objectifs et par le public auquel il s'adresse. Nous avons défini l'*activité* comme l'*acte* mis en œuvre par l'animateur pour que les participants exécutent les tâches annoncées, qui sont prises en tant qu'indicateurs. Nous avons repris dans l'analyse 22 activités dans l'analyse. Les activités de l'animateur qui ont trait à la gestion du groupe sont repérées et ne sont pas nombreuses (4 sur 22). Alors que les activités de l'animateur ayant trait aux processus de transformation de l'objet sont au nombre de 18. Après ce découpage, nous avons analysé la finalité du discours. Cette unité d'analyse s'encadre au niveau global de

la situation dans lesquelles il y a des interactions langagières. Ces échanges et interactions définissent rituels, normes et routines des paroles du groupe. Les finalités du discours caractérisent les activités selon les objectifs de l'engagement des participants. Trois types de finalités nous ont semblé particulièrement digne d'intérêt, ils ont trait à la manipulation (faire-faire et faire percevoir) et à la connaissance des enjeux (faire-savoir) lors de la manipulation:

Faire-Faire : les activités consistant à engager les participants à manipuler du matériel, des produits ou des équipements pour la construction de l'objet technique, par exemple :

A: C'est bon/// vous avez une table là-bas non ?/// Alors/ alors sur les tables vous avez/ chacun/ chacun a une feuille devant lui/ et vous avez des crayons/ et des heu/ des crayons et des feutres/ alors/ vous avez/ dix minutes/ vous avez dix minutes/ pour le dessiner/ ce que vous pensez être une micro-fusée/ d'accord/ vous avez des règles des crayons/ des taille-crayons/ vous en avez pas vous l'demandez j'vous en donne/ et chacun me dessine ce qu'il croit être une micro-fusée d'accord ? (15)

Faire-Savoir : les activités consistant à engager les participants à comprendre les événements, en posant des questions ou en proposant des explications, par exemple :

A: Mais pourquoi/ il y a une deuxième explosion de l'autre côté ?
E: Pour que **
Et: Pour que / pour que**
A: Mais non parce que quand /quand/ quand/
E: *C'est la télévision là ?*
A: Parce que si j'envoie un objet en l'air comme ça/ il redescend tout seul c'est pas *obligé* d'une explosion/// quand j'envoie ça en l'air/ il redescend / n'est pas ?
E: Oui. (236-242)

Faire-Percevoir : les activités consistant à engager les enfants à percevoir des événements par les sens la vue, l'ouïe...

Et: Ca a fumé du feu/
A: Elle est part'///(*A s'arrête car les enfants parlent bien qu'inaudibles*)/// à la fin tu as vu du feu ?
E: Oui.
A: On repart là-bas/ vous allez me dire ce que vous avez vu/
E: *Le Quentin il a trouvé la/ la fusée.*
A: Alors/
E1: * brûlé
E2: L'allumette elle est heu /// brûlée.
A: Alors qu'est-ce que vous avez vu c'est chaud ?
E: Ha !
A: Tu touches un peu/ à l'exterieur/ non là là/
E : Ouhau ! (181-192)

Les 18 activités dont l'enjeu a été la manipulation ont été catégorisées dans une seule finalité pour laquelle il y a 7 activités de type « faire-faire » (39%), 5 pour « faire-savoir » (28%) et 6 pour « faire-percevoir » (33%). Ce résultat nous interroge sur la nature des savoirs mis en jeu. Les cinq activités de cette séquence sont des demandes d'explications auxquelles l'animateur ne répond pas nécessairement.

3. Bilan de l´analyse

Toutes ces informations (étapes, épisodes, activité de l'animateur, configuration spatiale, matériel et équipement) sont rassemblées dans un tableau de découpage chronologique. Ce découpage rend possible la lecture de la séquence en deux dimensions : une lecture verticale qui nous renseigne sur le déroulement chronologique de la séquence dans le temps et dans l'espace ; la succession des épisodes et leur caractérisation qui constituent le protocole effectif. La deuxième lecture, horizontale, à l'intérieur des étapes et des épisodes, rend compte dans la durée, et dans une configuration spatiale donnée, des activités mises en place par

l'animateur. Cette analyse repère les enjeux de l'animateur à partir de ces activités et de ces finalités visées.

L'analyste en aveugle dispose de l'enregistrement audio, ainsi que de quelques prises de vue vidéo, mais il n'est pas présent sur le terrain et n'a pas eu préalablement connaissance du déclaratif de l'association. Ainsi, il ne sait pas s'il existe un discours de l'association sur elle-même. Cette analyse permet de mieux assurer une impartialité du transcripteur (aucune mémoire de terrain). Elle invite aussi à s'appuyer sur une transcription très rigoureuse et très détaillée. Cette méthode a nécessité une confrontation inter-codeurs pour assurer la stabilité de la transcription, procédure de transcription similaire à celle utilisée par l'observateur de terrain, pour la première analyse. Ainsi, concernant l'établissement du corpus, les différences par rapport au premier analyste tiennent dans les deux points suivants : d'une part, l'enregistrement est intégralement transcrit et, d'autre part, les aspects non verbaux des interactions filmées sont rapportés sur la transcription, notamment des repères de vidéo sont intégrés au texte de la transcription audio et s'en distinguent aisément. L'analyste a travaillé en vue de confirmer l'existence d'une même structure organisée de l'animation avec l'hypothèse de départ selon laquelle le discours de l'animateur peut en rendre compte (les prises de vue vidéo n'apportant que quelques précisions ponctuelles).

4. Résultats concernant le déroulement chronologique et les activités

Même si l'analyste en aveugle a parfois éprouvé des difficultés pour caractériser les épisodes, il a retrouvé la même trame du déroulement de la séquence que celle établie par le premier analyste : les 4 étapes et la plupart des épisodes (8 sur 10). La différence a été observée quelquefois sur les phrases d'entrée ou de sortie des épisodes et sur le non découpage de l'épisode de la construction de la fusée. La confrontation des deux analyses s'avère fondamentale pour la compréhension de l'intégralité de la séquence. Elle a abouti à l'explicitation d'un même protocole effectif, et indique que l'analyse du discours de l'animateur semble une entrée pertinente pour affirmer que l'animation ne consiste pas en une simple routine ou une pratique sociale improvisée quelconque. La même cohérence a été présente pour l'identification des 22 activités et de leurs finalités. Cette deuxième analyse a été faite à partir de la définition des unités catégorielles des tâches et de la définition des finalités (faire-faire, faire-savoir et faire-percevoir).

IV. POUR METTRE EN PLACE UNE PROCEDURE DE TERRAIN

1. Le terrain de l´animation

Afin de valider une procédure de terrain, permettant d'aboutir à des recherches comparatives lors de ce type d'animation, il restait à mener l'observation d'un nouvel atelier de fabrication de micro fusée par un observateur non familier du terrain. Les outils mis à sa disposition furent, outre une grille d'observation, une fiche de l'animateur (parcours, formation), un enregistrement audio, vidéo et un carnet de notes. Nous avons veillé à accompagner la grille d'observation par des consignes orales, claires et précises, pour l'observation de terrain. Ces consignes ont été faites par un observateur confirmé qui dans ce cas a été un animateur de l'association.

2. Construction de la grille d´observation

La grille d'observation proprement dite comporte quatre parties (voir annexe 2). Une première partie permet de préciser le contexte général de l'animation observée en donnant des

renseignements sur les participants (école primaire, collège, lycée, tout public), le type d'action sous-tendue par l'animation (atelier thématique, club scientifique, etc.) et le cadre dans lequel elle se déroule (culturel, scolaire, loisirs). Une seconde partie renseigne sur les aspects situationnels des échanges entre l'animateur et les participants en présentant le contexte de l'animation, la place des postes de travail et la disposition du matériel. Une troisième partie informe sur la manière dont l'animateur présente la séquence aux participants (enrôlement, engagement et implication des participants dans l'activité). Enfin, une quatrième partie consiste, sous la forme d'un tableau, consiste à remplir à intervalles de temps réguliers, à décrire le déroulement de la séquence d'animation : une lecture verticale chronologique puis une lecture horizontale qui rend compte dans une durée et une configuration spatiale données, du déroulement de la séquence d'après la présentation et selon des indicateurs dont le choix découle de l'expérience acquise lors d'observations d'animations antérieures. Ces indicateurs décrivent, par exemple, l'implication des participants dans l'activité, la présence de matériel ou la monstration des gestes par l'animateur de l'axe situationnel de l'animation.

3. Validation

La validation de la procédure de terrain, et en particulier de la grille d'observation, s'est déroulée en deux temps. Elle a d'abord consisté à tester la grille en tant qu'outil de terrain, en vérifiant, avec succès, sa lisibilité et sa facilité de remplissage par un observateur non familier du terrain lors de l'observation du nouvel atelier. Cette observation s'est déroulée avec l'appui d'un observateur confirmé disposant d'une bonne connaissance des animations et tenu de remplir également la grille d'observation. La comparaison de la grille remplie par les deux observateurs a permis de vérifier sa fiabilité. Puis l'observateur confirmé a mené une analyse en vue de vérifier la pertinence de la procédure pour réaliser un découpage chronologique de la séquence d'animation, en appliquant la méthodologie d'analyse mise en place précédemment. Il s'est, là encore, avéré possible de mener un découpage chronologique de la séquence d'animation et de mettre ainsi en évidence l'existence d'un même déroulement structuré, du même protocole effectif lors de l'observation d'une séquence d'animation.

V. EN GUISE DE CONCLUSION

Le présente étude, à travers des outils de l'analyse du discours et de la confrontation de trois regards (l'observateur confirmé, l'analyste aveugle et l'observateur du terrain), nous a permis de spécifier les indicateurs pour décrire un protocole (étapes, épisodes et finalités d'activités) et donc de construire un outil de terrain adéquat d'observation d'une séquence d'animation (le plan de la prise de vue ; de la configuration spatiale, les participants et la disposition du matériel au poste de travail). Il a confirmé notre hypothèse que le discours de l'animateur est une bonne entrée pour décrire et caractériser le déroulement de la séquence d'animation.

Nous avons vu dans notre recherche que l'animation scientifique recouvre de fait des pratiques très hétérogènes. Si on considère une forme particulière d'intervention, qui met en valeur la construction d'un objet technique en dehors du cadre scolaire, les séquences d'animation étudiées depuis plus de vingt ans présentent encore des caractéristiques communes aux résultats mis en place pour Gorry (2012) et Goujon (2016). Alors même que le cadre temporel et les contextes d'interventions sont différents, les similitudes portent sur les situations non ordinaires d'apprentissage en groupe.

Les interventions sont centrées sur un procédé de fabrication d'un objet où les démarches sont voisines : transmission des consignes d'action, des règles à respecter, des précautions à

prendre, et réalisation collective sous le contrôle de l'animateur. Dans les ateliers ponctuels, l'animateur est dans l'urgence ; tout se passe comme si l'animateur réglait les actions sur la réussite de la construction de l'objet : si le temps manque, l'animateur peut agir à la place des participants. Cela peut justifier la prévalence des activités de faire-faire et faire-percevoir à la place des activités dont la finalité est de faire-savoir.

L'analyse chronologique a permis d'expliciter un protocole effectif qui se déroule en étapes : présentation, mise en situation, construction de l'objet et achèvement. La dernière phase, prévue comme un temps de conceptualisation, d'explication et d'échange de savoirs est très courte, voire inexistante. La démarche part des objets, avec l'espoir que des manipulations et des observations émergeront des questions, pouvant servir de point de départ à la mise en place de concepts, même si rien ne s'échange à leur sujet.

Nos études nous amènent à proposer un modèle d'analyse pour mettre en relations les intentions, les enjeux et le rôle de l'animateur lors des séquences. Dans le cas présenté ici, l'intention annoncée dans le discours de l'animation est la production d'un objet technique : la micro-fusée. Pour accomplir cet objectif, l'animateur joue les rôles du militant, du technicien, du médiateur et de l'amuseur. Les enjeux sont alors dans les cadres des procédures, faire-faire et faire-percevoir, une fois qu'ils sont davantage présents dans le discours que l'est la transmission des connaissances scientifiques et techniques. Les réflexions de cette proposition sont le fruit du travail de notre équipe dans ce domaine de recherche relativement nouveau. Nous souhaitons qu'elles puissent contribuer à la construction de nouveaux regards sur les séquences d'animation scientifique dans le cadre de l'éducation non scolaire.

Remerciements

MEC-CAPES-OBEDUC, CNPq et FAPEMIG pour le support financier et Dominique Davous, Annick Weil-Barais, Olivier Prézeau et Florence Tissot pour la participation à la recherche. Et mes remerciements à Frédéric Goudeau et Abdellah El Idrissi pour la lecture.

REFERENCES

Gorry, A. (2012). *Les postures des animateurs et animatrices scientifique quant au dialogue « science en/et société »*. Master en Arts de la Faculté des Science de l'Education de l'Université de Montréal. https://papyrus.bib.umontreal.ca/xmlui/handle/1866/8366

Goujon, C. (2016). *Didactisation de pratiques de savoir scientifique, transactions avec publics scolaire et non scolaires. Des scientifiques, de leur laboratoire à la Fête de la Science*. Université Bretagne Occidental. https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01692314

Guenther, L., Jouber, M. (2017). Science communication as a field of research: identifying trends, challenges and gaps by analysing research papers. JCOM Vol 16(2).A02. https://jcom.sissa.it/sites/default/files/documents/JCOM_1602_2017_A02.pdf

Pelay, N. (2011). Jeu et apprentissages mathématiques : élaboration du concept de contrat didactique et ludique en contexte d'animation scientifique. Université Claude Bernard - Lyon I. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00665076/document

Rahm, J. (2006). L'accès des jeunes provenant de milieux défavorisés aux activités scientifiques extrascolaires : une question d'équité. *Revue des sciences de l'éducation*. Vol 32 (3). P.733-758. https://www.erudit.org/en/journals/rse/2006-v32-n3-rse1733/016284ar/

Scicluna C., Guiranudon, J-C., Quetard P., Pignolet G., Preaux G., Maignan M., Denis G., Schmitt E., ZirnheldM., Couffin E., Kauffmann S., Bruzzone P. (2012). 50 YEARS OF SPACE EDUCATION AND OUTREACH IN FRANCE WITH PLANÈTE SCIENCES

AND CNES. *In 63rd International Astronautical Federation Congress*. 1– 5 Oct 2012/NAPLES, Italy.
https://www.planete-sciences.org/espace/IMG/pdf/IAC2012_Article_Scicluna.pdf.

Sousa do Nascimento, S., Weil- Barais, A. et. Davous, D (2002). L'animation scientifique, des démarches éducatives différentes ? ASTER. Vol 35, 39-64
http://ife.ens-lyon.fr/publications/edition-electronique/aster/RA035.pdf

Sousa do Nascimento, S. (1999). L'animation scientifique : essai d'objectivation de la pratique des associations de culture scientifique et technique Française. Thèse de doctorat présentée à l'Université Pierre et Marie Curie. Paris 6.
https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00864514/

Thibault, J. ; Davous, D. ; Hatzinikita, V. ; Kastembaum, M. (1997). Former et évaluer des enseignants du primaire à acquérir des savoir-faire expérimentaux en chimie. In : *Mesure et évaluation en éducation*, 20 (1), 91-107.

Tiberghien A. , Chopin M-P. , Lima L. , Talbot L. , Arrieu-Mutel A. et Zaid, A. (2012). Partager un corpus vidéo dans la recherche en éducation : analyses et regards pluriels dans le cadre du projet ViSA . *Éducation et didactique* [En ligne], vol. 6 - n° 3 | novembre 2012, http://journals.openedition.org/educationdidactique/1686

ANNEXE 1

Annexe 1 : Découpage chronologique du scénario d'animation en l'absence d'un protocole écrit distribué aux participants

Etapes	Episodes	Durée (en min)	Configuration spatiale	Matériel et équipement	Activité de l'animateur
I	présentation (4-15)	1	CL		donner des informations générales sur la séquence
	dessin (15-76)	11	CL	papier, crayons, feutres, taille-crayons, règles	faire dessiner une micro-fusée (FF)
	propulseur : préparation du lancement (78-147)	2	RG	moteurs de fusée ou démarreur, propulseur, poudre allumeur ou « espèce d'allumette »	donner des indications de vocabulaire (FS) nommer les parties de la fusée (FS)
	propulseur : mise à feu (149-165)	6	RL	clef de sécurité, batterie	faire marcher le propulseur (FP)
	propulseur : exploitation (166-269)	6	RG		faire toucher le propulseur (FP) faire sentir le propulseur (FP) décrire la chronologie des événements lors du lancement de la micro-fusée (FS)
II	micro-fusée : engagement dans la construction (273-450)	8	CL	corps de la fusée (tube à carton)	donner des consignes d'organisation des dyades énoncer les phases de construction de la micro-fusée (FS)
	micro-fusée : construction de la tête et des ailerons (452-811)	38	DY (tête) CL (ailerons)	(tête) perceuse, papier de verre, balsa carré, masque, lunette, cutter (aileron) scie, balsa plat, cutter, sous-table de découpe, crayon de papier, règle, colle, pisto-colle	donner des consignes de sécurité pour le ponçage (FS) montrer les gestes d'utilisation de la perceuse (FP) montrer les gestes d'utilisation du cutter (FP) faire poncer la tête (FF) faire découper la tête (FF) faire coller les ailerons (FF)
	micro-fusée : construction du parachute et décoration (766-1247)	28	CL	(parachute) plastique, sardine, coton, papier d'aluminium, ciseaux (décoration) feutres pailles	montrer le geste pour faire le parachute (FP) faire faire le parachute (FF)
III	rangement (1156-1374)	10	CL		faire ranger le matériel (FF) faire rendre leur dessin et la micro-fusée (FF)
IV	conclusion et séparation (1376-1471)	2	RG		féliciter les participants soigner les petites blessures

Configuration spatiale
CL : configuration libre
DY : Dyades d'enfants
RG : Regroupés
RL : Rangés en ligne

Activité de l'animateur
FF : Faire Faire
FS : Faire Savoir
FP : Faire Percevoir

ANNEXE 2 : EXTRAIT DE LA GRILLE D'OBSERVATION DU TERRAIN

Association :	Thème :	
Date :	Opération :	
Lieu :	heure début : _____ heure fin :_____	
Nombre de participants :	Code de l'animateur :	
Type de salle occupée :	Modalités de l'enregistrement :	☐ audio ☐ vidéo

A. Organisation générale de l'animation :

A.1 Participants :

☐ EM : Ecole Maternelle
☐ EP : Ecole Primaire
☐ CO : Collège
☐ LY : Lycée
☐ TP : Tout Public (préciser l'âge si possible) :

A.2 Action :

☐ AP : Animation Ponctuelle
☐ AT : Atelier Thématique
☐ CB : Club Scientifique
☐ DI : Diffusion d'information
☐ ME : Actions Médiatiques (Spectacle, Exposition)

A.3 Cadre

☐ CC : Cadre Culturel (Musées de Sciences, CCST…)
☐ CE: Cadre Scolaire (Ecole, Collège, Lycée)
☐ CL : Cadre Loisirs (Centres de Loisirs, Clubs)
☐ DC : D'autre Cadre (préciser : ……)

B. Organisation générale de la séquence d'animation :

AVANT L'ARRIVEE DES PARTICIPANTS

B.1 Disposition de la salle (dessiner et identifier)

Préciser en particulier:
- poste de travail des participants (emplacement, disposition, matériel et produits...)
- poste « activités » et type d'activité

DES LE DEBUT DE L'ANIMATION

B.2 Protocole et documents

☐ 1. L'animateur dispose d'un protocole
☐ 2. Les participants disposent d'un protocole individuel
☐ 3. Autres documents. Préciser (poster…)

B.3 Postes de travail

Postes de travail des participants
☐ 1. Individuel
☐ 2. Autre, préciser

C. Présentation de la séquence d'animation

C.1 L'animateur se présente

☐ Par son prénom
☐ Autrement. Préciser ……

C.2 ☐ L'animateur demande le prénom des participants

Contributions projets spéciaux

Projet Spécial 1 (SPE1)
Projet Jeunes

BILAN DU PROJET SPÉCIAL N°1

LA PAROLE AUX JEUNES ENSEIGNANTS FRANCOPHONES FORMATION ET ENTRÉE DANS LE MÉTIER

Responsables

COPPE[*] Sylvie –DISSA[**] Sinaly – GRAPIN[***] Nadine – PROULX[****] Jérôme

Ce projet spécial trouve son origine dans le premier colloque à Grenoble en 2000, où une délégation de jeunes enseignant.e.s québécois.es était venue suivre diverses activités avant le colloque officiel de EMF. L'idée de ce projet spécial est de créer des liens entre les enseignant.e.s participant.e.s de différents pays (voire de susciter des engagements dans des formations à la recherche en didactique au niveau maîtrise et doctorat). Sauf exceptions, l'expérience a été renouvelée à tous les colloques EMF suivants avec, à chaque fois, une vingtaine de participant.e.s provenant d'une dizaine de pays de la francophonie.

Au delà de l'expérience personnelle que représente une telle participation, un tel projet vise à donner aux colloques EMF une bouffée d'air frais et à capitaliser sur l'avenir quant à l'investissement de ces jeunes pour essaimer autour d'eux l'attrait pour la collaboration au sein de la francophonie et développer une meilleure connaissance des différents systèmes éducatifs et des questions d'enseignement. Il est à noter que quelques un.e.s des participant.e.s se sont engagé.e.s dans des études supérieures de maîtrise ou de doctorat par la suite et certain.e.s d'entre eux et d'entre elles ont participé au colloque EMF de cette année.

Pour EMF 2018 à Paris, nous avons accueilli 14 jeunes enseignant.e.s des pays suivants : Belgique (1), Côte d'Ivoire (2), France (3), Mali (2), Maroc (2), Québec (2), Sénégal (1) et Suisse (1). Les jeunes enseignant.e.s ont été accueilli.e.s pour le pré-colloque le mercredi 17 octobre 2018 au soir. Du jeudi 18 au dimanche 21 octobre, tous les jeunes enseignant.e.s ont été pris.e.s en charge dans le cadre du pré-colloque. Trois types d'activités ont été menés :

- Présentation du système d'enseignement et de formation des enseignants pour chacun des pays. Cela a été l'occasion de moments de partage très enrichissants et d'une ouverture aux mondes scolaires ainsi qu'à leurs visées parfois fort différentes.

- Observation de classes françaises de collèges. Afin de découvrir le système d'enseignement en France, une demi-journée a été consacrée à l'observation de classes de collège de l'académie de Créteil (les classes étaient situées dans des établissements des communes de Montreuil et d'Ivry sur Seine). Les visites se sont effectuées par groupes de 3-4 jeunes, pour une durée de une à deux heures par classe. Les chercheur.se.s responsables du projet spécial ont accompagné les jeunes durant ces observations et un temps d'échange avec les enseignant.e.s des classes françaises a eu lieu. Ces observations de classe ont été précédées d'un temps de préparation lors de la première journée de travail afin de déterminer ce qui pourrait être observé durant les séances, les questions à poser à l'enseignant.e et éventuellement aux élèves. Elles ont été suivies d'un bilan de chacun des groupes en fonction des éléments d'observation et par une mise en perspective de ce qui a été observé.

[*] Université de Genève FPSE-Suisse- sylvie.coppe@unige.ch
[**] ENSup de Bamako (Mali), Institut Fourier de Grenoble (France) – dissasinaly@gmail.com
[***] Laboratoire de Didactique André Revuz – Université Paris Est Créteil - France – nadine.grapin@u-pec.fr
[****] Laboratoire Épistémologie et Activité Mathématiques, UQAM, Montréal, Québec - proulx.jerome@uqam.ca

- Réflexions sur les buts et finalités de l'enseignement des mathématiques à travers quelques activités proposées par les chercheur.se.s responsables, complétée par une visite le dimanche du palais de la découverte à Paris.

Durant le colloque EMF lui-même, les jeunes enseignant.e.s ont choisi un groupe de travail à suivre sur l'ensemble du colloque. Dans le temps imparti aux projets spéciaux, les jeunes enseignant.e.s ont présenté leurs travaux de fin d'études (voir la liste ci-dessous). Au total, 14 exposés sur des sujets variés ont été proposés, tant par les niveaux scolaires en jeu que par les types de problématiques et les degrés de préparation des mémoires (de fin d'études, de maîtrise) dans les différents pays.

Les textes que regroupent ces actes sont donc très divers, tant par leurs sujets que par leurs formes, et attestent du dynamisme et du professionnalisme naissant de ces jeunes qui se sont investis avec un grand enthousiasme dans ce projet. Les thèmes abordés sont divers, certains portent sur l'enseignement au primaire (calcul mental, division, géométrie) d'autres au secondaire (algèbre, mesure, trigonométrie, intégrale, statistique), ou encore sur l'étude de thèmes plus généraux (introduction d'une perspective historique, contexte d'une exposition, résolution de problèmes, soutien pédagogique). Ils présentent des études bien documentées avec des références théoriques en didactique des mathématiques et souvent en lien avec des expérimentations de terrain.

ANNEXE

LISTE DES TEXTES DU SPE1 PAR ORDRE ALPHABETIQUE DU PREMIER AUTEUR

DA RONCH M.

Activité mathématique dans un contexte d'exposition avec manipulations d'objets : utopie ou réalité ?

DIALLO M. L.

Une perspective historique favorise-t-elle la réussite de l'enseignement des mathématiques ? Le cas des nombres complexes au Sénégal.

DIARRA A.

Changement de variable dans la résolution d'équations trigonométriques en 11eme sciences.

DIARRA S. S.

Application des rapports trigonométriques à un problème de la vie courante en 10ème

DUPUIS A.

Difficultés des éleves du secondaire avec la notion d'intégrale : une étude de cas.

EL ABBADI S.

Analyse multidimensionnelle de l'enseignement des mesures et des grandeurs à travers les programmes de l'enseignement fondamental.

HAGÈGE E.

Etude des séances de découverte dans les manuels scolaires : le cas de la division au CE2.

HAIRON E.

Le passage de la géométrie physique à la géométrie théorique au cycle 3

LEROUX A.J.

Dispositif de soutien individualisé en mathématiques

NGOUFO H.

Introduction du concept de limite en classe de première scientifique au Cameroun : un exemple d'approche par les compétences

OHOUNI AREREY L.

Les pratiques des enseignants dans la résolution des systèmes d'équations du premier degré à deux inconnues en classe de 3e.

TIEKOU Z. E.

Intérêt de la statistique dans l'enseignement secondaire en Côte d'Ivoire.

VAN MOORHEM A.

Questionnement enseignant en contexte de résolution de problèmes par calcul mental.

ACTIVITÉ MATHÉMATIQUE DANS UN CONTEXTE D'EXPOSITION AVEC MANIPULATIONS D'OBJETS : UTOPIE OU RÉALITÉ ?

DA RONCH* Mickael

Résumé– Notre travail a pour but de voir s'il est possible de transposer l'activité mathématique du chercheur, à l'aide d'exposition avec manipulations d'artefacts, tout en minimisant la présence du médiateur. Pour ce faire, nous proposons quatre situations issues de la fédération de recherche *Maths à modeler* et de la *Grange Vadrouille* que nous mettons en avant lors d'une exposition au sein de l'institution scolaire (collège). Ceci dans le but de mesurer l'activité mathématique produite par un élève.

Mots-clefs : problème, activité mathématique, médiation, exposition, artefact

Abstract –This work aims to see if it is possible to transpose the mathematical research activity using artifact manipulation exposure to minimize the presence of a mediator. To that end, we propose four problems from the federation of research "*Maths à modeler*" as well as "*la Grange Vadrouille*" that we put them forward during a manipulation exhibition executed in a school institution (middle school). This in order to measure the mathematical activity of the student.

Keywords : problem, mathematical activity, mediation, exhibition, artifact

Notre travail s'inscrit dans le cadre de l'équipe Combinatoire et Didactique de l'Institut Fourier et notamment en lien avec le projet de centre culturel *la Grange des Maths* (Da Ronch, 2018a). Cet article est centré sur la partie théorique d'une étude bien plus abondante dont nous donnons les esquisses dans ce texte.

I. INTRODUCTION

De nombreux centres culturels autour des sciences et des mathématiques ont déjà vu le jour, comme : *Le Palais de la découverte* à Paris, *Le Vaisseau* à Strasbourg, la *Maison des mathématiques et de l'informatique* à Lyon, Le *MoMath* à New York ou encore le *Mathematikum* à Giessen en Allemagne et bien d'autres. Des projets ambitieux sont actuellement en pourparlers concernant la création de centre culturel ou maison de mathématiques en France, comme le centre culturel de la *Grange des maths* à Varces près de Grenoble (2020) ainsi que le projet de *Maison des mathématiques* à l'Institut Henri Poincaré à Paris (2020). Ces différentes institutions culturelles se rejoignent sur de nombreux points. Tout d'abord, elles se défendent de démocratiser les mathématiques, les rendre accessibles à tous dans le but de lutter contre l'élitisme social qui crée de fortes disparités de nos jours. Cependant les expositions ou ateliers mis à disposition d'un public dans ces institutions culturelles n'ont peut-être pas forcément les mêmes objectifs pour traiter ces idées fondatrices. En effet, elles peuvent avoir des buts différents comme observer, manipuler ou jouer avec des objets en lien avec des mathématiques sans réelle intention didactique. Elles peuvent aussi avoir un réel enjeu en termes d'activité mathématique pour un sujet. Nous nous intéressons spécifiquement à ce type d'exposition où l'enjeu didactique est clairement de favoriser la production d'une activité mathématique. Le fait de ne pas avoir cet enjeu semble assez réducteur sur la nature même de l'activité mathématique. C'est donc pour cela que nous nous plaçons dans le cadre d'une exposition avec une réelle intention d'apprentissage.

* Institut Fourier, Université Grenoble Alpes – France – mickael.da-ronch@univ-grenoble-alpes.fr

L'exposition a pris effet durant quinze jours au mois d'avril 2018. Il y a eu plusieurs situations mathématiques proposées et elles étaient toutes associées à différents objets matériels afin de donner le caractère expérimental des mathématiques (Da Ronch, 2018a).

Dans cet article, on s'intéressera dans un premier temps à l'aspect de la communication. C'est-à-dire : savoir ce que nous voulons communiquer à travers cette exposition ? Nous tâcherons de répondre aux questions suivantes : à qui est destinée cette exposition ? Pourquoi avons-nous choisi ce type d'exposition ? Qu'est-ce que nous voulons faire ? Nous nous intéresserons par la suite à l'aspect de la problématisation et plus exactement nous définirons la notion de problème en mathématiques dans notre contexte. Dans un second temps, on s'intéressera à l'aspect de la médiation scientifique, puis on présentera quelques éléments d'analyse et de méthodologie de recherche concernant les situations expérimentées. On finira cet article par un bilan succinct donnant place à l'ouverture d'autres questions de recherche.

II. PROBLEMATISATION

1. Contexte, déroulement et problématique de l'étude

Comme nous l'avons précédemment annoncé notre recherche s'inscrit dans le cadre de l'équipe combinatoire et didactique rattachée à l'Institut Fourier et en lien avec le projet de centre culturel *la Grange Des Maths*. Mais en fait, la *Grange Des Maths*[1] qu'est-ce que c'est exactement et à qui sont destinées les activités proposées ?

Tout d'abord ce projet de centre culturel répond à plusieurs attentes, d'une part démocratiser les mathématiques afin de les rendre accessibles à tous quels que soient l'âge, l'origine sociale, le parcours scolaire. Ce projet se veut à l'opposé de l'élitisme social et de la sélectivité par les sciences. Il veut offrir l'opportunité à chacun de pouvoir découvrir les mathématiques de façon ludique et réfléchir également à *l'aide des mains*. L'association propose également des activités itinérantes nommées *la Grange Vadrouille*. Elles sont destinées à un public scolaire (collège, lycée) dans le but de faire vivre les mathématiques à travers des activités liant manipulations d'objets et activités réflexives sur différentes thématiques comme la logique, la géométrie ou encore le numérique. Tout cela en proposant des problèmes[2]. Les activités proposées ont été conçues pour laisser place à l'autonomie des élèves dans le but de les faire travailler seuls ou en petits groupes. Les ateliers sont en général installés dans un endroit assez grand comme le CDI d'un établissement qui reste ouvert durant une à deux semaines. Chaque activité est dotée d'une fiche pédagogique qui est mise à disposition des enseignants, cela permet de détailler l'activité, les notions mises en jeu, ainsi que quelques éléments didactiques, scientifiques et/ou historiques. Les activités sont présentées sous forme de matériel à manipuler et d'un panneau de consigne en grand format. Comme ces situations ont été pensées pour mettre les élèves en situation autonome de recherche, le but de ce travail est donc d'essayer de répondre à la problématique suivante :

[1] https://www.la-grange-des-maths.fr/

[2] A prendre au sens large du terme, nous le définirons précisément par la suite.

Dans un cadre institutionnel scolaire donné et en situation adidactique d'action, est-il possible de transposer l'activité mathématique du chercheur, lors d'exposition avec manipulations d'artefacts en lien avec un problème ou casse-tête proposé ?

Pour répondre à cette problématique, nous nous posons deux questions fondamentales pour notre travail, qui nous amènent à formuler une première hypothèse de recherche.

- **Q_1** : Ces situations favorisent-elles l'entrée dans une démarche expérimentale pour un élève ? Quels sont les critères C_i préétablis qui sont vérifiés dans ces situations ?

A ce stade et étant données les analogies entre la définition de la démarche expérimentale (Giroud, 2011) et les catégories d'action décrites par Gandit (Lepareur, Gandit & Grangeat, 2017), on peut émettre l'hypothèse de recherche suivante :

Nous pensons *a priori*, que si la situation favorise l'entrée dans une démarche expérimentale, il peut y avoir production d'une activité mathématique chez un élève.

La deuxième question se porte alors naturellement sur l'activité mathématique de l'élève.

- **Q_2** : Cette exposition présentant différentes situations permet-elle la production d'une activité mathématique chez un élève ? Si oui, comment préciser cette activité et quelles sont les connaissances réellement perçues du point de vue du chercheur ?

Pour répondre à cette dernière, il nous semble légitime d'analyser les différentes stratégies possibles pour répondre complètement ou de manière partielle à un problème afin de dégager les actions produites chez l'élève.

2. Qu'est-ce qu'un problème ?

Le cœur de l'activité mathématique est de résoudre des problèmes car c'est le but ultime d'un mathématicien, mais également d'en proposer de nouveaux. Le fait de répondre à une partie du problème n'est qu'une partie du travail d'un mathématicien, il ne faut pas négliger l'importance de se poser les bonnes questions, ceci, du point de vue de Brousseau semble aussi important que trouver la bonne solution. Dans notre contexte, c'est la démarche expérimentale qui va nous intéresser. Comme le montre Giroud (2011) dans son travail de thèse, cette démarche permet d'« avancer » dans la résolution d'un problème mathématique. On peut alors se poser naturellement la question d'une définition possible du terme : problème. Dans notre travail, nous considérons un problème comme un couple formé d'une question de portée générale et d'instances au sens de Giroud (2011). *A contrario* d'un casse-tête que nous définissons comme un problème déjà instancié sur des cas particuliers, dont le seul raisonnement pour le résoudre tient du jeu par essai-erreur. Bien évidemment d'autres raisonnements interviennent mais du côté du concepteur.

Dans notre travail, nous allons considérer quatre situations présentant des problèmes ou casse-tête au sens où nous les avons définis précédemment comme :

- *les Carrés insécables ;*
- *les tours de Hanoï ;*
- *les Chemins de dominos ;*
- *le pavage d'une cuisine par des dominos.*

Nous présentons ci-dessous de manière non exhaustive les quatre situations proposées aux élèves lors de l'exposition. Elles sont extraites de la *Grange Vadrouille : les Carrés insécables*

et *les tours de Hanoï* ainsi que de la fédération de recherche *Maths à modeler* pour *: les Chemins de dominos* et le *pavage d'une cuisine par des dominos.*

3. Exemples des situations exposées

Pavage d'une cuisine par des dominos — Nous voulons paver le sol d'une cuisine avec des dominos (deux cases) et un espace laissé libre (une case hachurée) pour poser un évier. On propose plusieurs configurations dans le cas particulier d'une cuisine de taille 5×5.

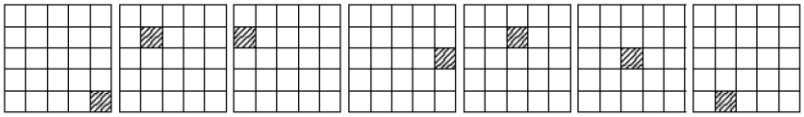


Figure 1 – *Sept grilles et un lavabo (case hachurée) posé dans différentes configurations*

Questions : Parviendrez-vous à paver entièrement votre cuisine quelle que soit la case laissée disponible ? Et en changeant la taille de la cuisine ?

Chemins de dominos — On donne trois paquets de dominos dans les configurations suivantes :

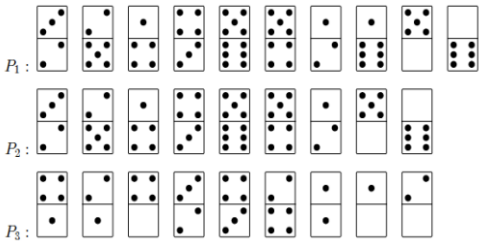


Figure 2 *– Trois paquets de dominos*

Questions : pouvez-vous faire un chemin avec ces dominos (pour chacun des paquets) ? Pourquoi pas une boucle ? Même en partant d'un 4 ?

Carrés insécables — On veut remplir une grille carrée avec des pièces carrées, de telle manière qu'il n'existe aucune droite coupant le grand carré dans toute sa longueur, ni horizontalement, ni verticalement. Vérifier sur cet exemple que toutes les lignes horizontales ou verticales rencontrent l'un des carrés.

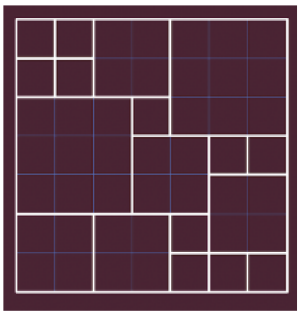


Figure 3 *– Exemple de carré insécable extrait de livret professeur de la Grange Vadrouille*

Question : Essayer avec d'autres tailles de grilles. Existe-t-il toujours une solution ?

Tours de Hanoï – Les règles du jeu sont les suivantes :

- Déplacer un seul disque à la fois : le plus haut de la pile.

- On peut utiliser les trois poteaux de la planche pour poser les disques
- Un disque ne doit jamais être placé sur un disque plus petit.



Figure 4 *: Configuration de départ à gauche et configuration d'arrivée à droite*

Question : Essayer d'abord avec seulement 4 disques. Combien de coups sont nécessaires pour y arriver ? Et avec 6 disques ?

Ces quatre situations possèdent toutes au moins une question et différentes instances. Les Carrés insécables et le pavage de la cuisine par des dominos commencent par un problème instancié, puis se prolongent vers un problème de portée générale. Tandis que les tours de Hanoï et les Chemins de dominos sont des casse-têtes, puisqu'ils sont présentés sous une forme déjà instanciée sans question générale et font intervenir *a priori* uniquement des stratégies par tâtonnements. Les raisonnements différents de celui du tâtonnement ou essai-erreur sont cependant mis en place du côté du concepteur du casse-tête. On peut alors naturellement émettre une autre hypothèse qui découle de la définition que nous avons donnée d'un casse-tête. Celui-ci ne semble donc pas favoriser *a priori* la production d'une activité mathématique chez un sujet à cause de la singularité du raisonnement utilisé pour le résoudre.

III. MEDIATION AUTOUR D'EXPOSITION

D'après Peyrin (2012), la médiation dans les musées regroupe l'ensemble des services d'accompagnement des visiteurs comme par exemple les visites guidées, les conférences, ou encore les ateliers et expositions. Cette définition se veut assez pragmatique mais elle peut encore s'étendre de façon plus idéaliste comme le souligne F. Contenot ou encore D. Jacobi :

> Au musée, la médiation sert d'intermédiaire entre le lieu, l'objet et le public. Elle participe à la fois à la mise en valeur des collections et à l'accompagnement du visiteur. Elle assure également une mission d'éducation informelle et s'intègre dans une démarche de partage du savoir. La médiation encourage l'observation et la prise de position du visiteur, de manière à l'amener à l'autonomie et à l'approfondissement. (Contenot, 2011, p. 11)

> la médiation correspond à toutes les formes d'interventions à caractère culturel organisées à l'attention des visiteurs. Elle est médiation dans la mesure où elle se situe entre le patrimoine et les publics avec la volonté de contribuer aussi bien à favoriser le moment de plaisir de la découverte ou un temps de délectation, qu'à faciliter le travail d'application de connaissance. (Jacobi, 1999)

Ces définitions faites par Contenot et Jacobi, peuvent s'étendre sans perte de généralité à notre exposition, puisque celle-ci est en lien avec le projet de centre culturel qui partage ces différents points de vue. Le but de notre exposition est de donner l'envie au sujet de faire des mathématiques tout en manipulant et en s'amusant. Et de ce fait, démystifier les idées reçues de cette discipline, afin de rendre la rencontre entre l'objet manipulable et les sujets, ludique. Le but étant de lutter contre l'élitisme social de cette discipline, la médiation peut, de ce fait aider et rassurer le public non expert, en donnant des contenus accessibles au plus grand nombre. Nos propos rejoignent en tous points les idées de Contenot :

> Le but principal de la médiation en musée ou en bibliothèque est avant tout celui de la transmission des connaissances. Provoquer, rendre possible la rencontre entre l'objet original et le public, qu'il soit visiteur ou usager. Elle contribue également à démocratiser l'accès à la culture, en sensibilisant aux valeurs culturelles et patrimoniales, en encourageant la découverte et en facilitant l'accès universel à

> l'information. Dans les deux types d'institutions -- musées et bibliothèques --, la médiation permet aussi de rassurer les publics, en particulier les plus éloignés des univers culturels, en rendant les biens culturels plus accessibles par une démystification des lieux, en donnant du sens aux collections par des discours compréhensibles par tout un chacun et enfin en assurant l'accompagnement vers la connaissance par le développement d'interventions attractives et conviviales (Contenot, 2011, p. 11).

Enfin il semble évident qu'un musée ou une exposition sans médiation n'a guère de sens, on peut reprendre la comparaison employée par Aurélie Henry :

> Le musée sans médiation ressemble à un buffet sans couverts : certains audacieux vont manger à pleines mains mais la plupart ne vont pas oser y goûter et vont être frustrés devant tant de plats appétissants hors de leur portée. Les outils de médiation doivent fournir les couverts : les informations nécessaires à une expérience agréable et enrichissante. (Henry, 2010)

Les quatre situations présentées à la section précédente respectent bien cet outil de médiation puisque chaque fiche descriptive de l'activité est accompagnée d'un ensemble d'artefacts manipulables qui va permettre, du moins essayer de répondre au problème et donc d'éviter cette frustration qui peut laisser penser que ce type de problème est hors de leur portée.

Dans l'article de Contenot (2011), on peut distinguer deux types de médiation : *la médiation directe* et *la médiation indirecte*. La médiation indirecte s'effectue sans présence de médiateur humain du moins physiquement, puisque la médiation se réalise à travers plusieurs médias comme des panneaux descriptifs, du matériel à manipuler qui sont nécessairement façonnés par l'homme, d'où le terme de médiation indirecte. Celle-ci correspond parfaitement avec ce que nous voulons observer, à savoir l'activité mathématique d'un sujet via un dispositif d'expositions avec manipulations en médiation indirecte. Ce type de médiation s'explique par le fait que les activités proposées que nous mettons en avant se veulent assez explicites et formulées de façon à ce que le jeune public puisse travailler en autonomie, donc *a priori* sans intervention d'une tierce personne, du moins c'est ce que par exemple la *Grange Vadrouille* soutient. Cependant, dans notre contexte d'étude et au vu du dispositif que nous avons mis en place, il n'a pas été possible de favoriser au sens *stricto sensu* ce type de médiation car les contraintes institutionnelles (gestion du groupe, organisation spatiale et temporelle) ne le permettaient pas. Il a dû falloir revoir le type de médiation à mettre en jeu et se pencher notamment sur la médiation de type direct qui « implique la présence physique du médiateur », tout en minimisant la présence de celui-ci, afin d'être au plus proche de ce que l'on voulait observer au départ. Nous nous sommes donc intéressés à la médiation de type direct « en position retrait » qui semble le plus proche de ce que nous voulons observer. Ce type de dispositif peut être finement analysé grâce à la Théorie des Situations Didactiques de Brousseau (1998) et notamment en faisant le lien avec les situations adidactiques d'action. Les différents supports faisant intégralement partie du milieu doivent être assez riches, prégnants et proposer diverses formes pour conquérir et être accessibles par un maximum de personnes. Ils doivent aussi « anticiper au mieux les attentes des visiteurs, tant en termes de contenu que dans leur démarche » pour les accompagner de manière pertinente dans leur démarche ou réflexion. Afin d'étudier ces différents milieux nous reprenons les travaux de Brousseau (1990) et notamment la notion de double milieu de Sensevy et Mercier (Sensevy & Mercier, 2007 ; Sensevy, 2011) à ce sujet. Le milieu est donc vu comme un système « antagoniste d'action » mais aussi, vu comme un « contexte cognitif ».

Dans notre exposition, les documents qui permettent d'accompagner le sujet et donc de médier un problème ou un casse-tête sont les panneaux descriptifs ainsi que le matériel manipulatoire liés à chaque problème. Ceci rejoint bien les dires de Contenot :

> Ces médiations, proposées aux usagers, tant en bibliothèque qu'en musée, prennent la forme de documents d'accompagnement (fiches de salles, livrets-jeux, journaux d'exposition), de cartels, ou encore

d'expositions sous forme de panneaux pédagogiques, et de plus en plus fréquemment de supports numériques. (Contenot, p. 14)

Dans la prochaine section, nous présentons quelques éléments d'analyse ainsi que notre méthodologie de recherche.

IV. ELEMENTS D'ANALYSE ET METHODOLOGIE DE RECHERCHE

1. Activité mathématique

Gandit a élaboré un tableau permettant de définir l'activité mathématique de l'élève en catégories d'action (Lepareur, Gandit & Grangeat, 2017). Pour Gandit, cette activité mathématique se décompose en quatre catégories d'actions :

- Expérimenter c'est « choisir des cas particuliers, ni trop simples, ni trop complexes pour comprendre le problème, observer ces exemples au regard du problème, formuler des conjectures concernant ces cas particuliers, valider ou invalider ces conjectures, reconnaître les résultats établis concernant ces cas particuliers. »
- Généraliser c'est « dégager le généralisable du particulier en formulant une conjecture de portée générale, la prouver ou l'invalider par un contre-exemple, définir des objets nouveaux utiles à l'étude. »
- Questionner c'est « dégager un questionnement dans une situation donnée, proposer de nouveaux problèmes ou questions, induits par les actions précédentes. »
- Communiquer c'est « débattre scientifiquement de ses résultats, de ses conjectures, donner (par écrit ou oralement) une preuve acceptable par la communauté à laquelle elle s'adresse, expliciter sa démarche de recherche et sa démarche de preuve, présenter un problème et les résultats obtenus sur celui-ci. »

Dans notre travail, on s'est inspiré de ces catégories d'action pour définir l'activité de l'élève qui fait face à un problème exposé. On s'est également posé la question des connaissances visées avec ces types de problèmes. En reprenant les travaux élaborés par l'équipe *Maths à modeler* dans les situations de recherche en classe une des cinq caractérisations principales d'une situation de recherche en classe (SiRC) décrite dans (Denise, 2007) est qu'une question de recherche résolue peut donner lieu à un autre problème. L'objectif principal est de résoudre au moins partiellement le problème et non l'apprentissage d'une notion mathématique. On peut donc dire que ce n'est pas dans ce cadre que les connaissances notionnelles sont visées. En s'appuyant sur les dires de Sackur, Drouhard, Assude, Paquelier, & Maurel (2005), nous avons distingué des connaissances de différents ordres. Les connaissances d'ordre I tels que les axiomes, définitions, théorèmes et propriétés et les connaissances d'ordre II, qui représentent les différentes méthodes de travail sur les objets mathématiques, leur raisonnement, leur validité et leurs différents registres sémiotiques. D'après ces mêmes auteurs, c'est grâce à l'ordre II que l'on peut qualifier l'activité menée d'activité mathématique. Pour notre travail, c'est donc les connaissances d'ordre II qui sont visées et plus exactement la logique le raisonnement et les compétences (mathématiques) transversales.

2. Analyse a priori et a posteriori des situations en lien avec des indicateurs méthodologiques

Dans notre mémoire (Da Ronch, 2018a), nous avons fait une analyse *a priori* de ces quatre situations. Cette analyse a commencé par la présentation de la situation ainsi que de l'ensemble des artefacts permettant une bonne dévolution. Nous avons également fait une analyse épistémologique à travers la littérature de recherche amenant à présenter un problème de portée plus générale afin de resituer nos quatre situations. Puis nous avons terminé par une

analyse mathématique des différents problèmes ainsi qu'une analyse didactique des situations décrivant les différentes stratégies possibles de la part d'un sujet. Cette analyse a permis *a priori* de vérifier différents critères C_i que nous avons élaborés — proches de ceux des Situations de Recherche (Grenier, 2007) — dans le but de favoriser l'entrée dans une démarche expérimentale et donc de permettre la mise en place d'une activité mathématique. Pour mesurer cette activité en termes d'action, nous avons élaboré une méthodologie de recherche permettant une récolte des données via les enregistrements vidéo et/ou traces écrites. Cette méthodologie se base sur une analyse multiniveau allant du niveau microscopique au niveau macroscopique. Nous avons de ce fait élaboré grâce aux travaux de M. Gandit (Lepareur, Gandit & Grangeat, 2017) des indicateurs microscopiques basés sur les catégories d'action au niveau macroscopique. Ceci a permis d'établir une connexion entre ces différents niveaux de granularité favorisant la mesure d'une activité mathématique. Dans l'analyse *a posteriori*, nous avons décrit précisément le déroulement effectif de la séance (organisation spatiale et temporelle), ainsi que les stratégies réellement mises en place par les sujets dans les diverses situations. Celles-ci ont pu être reliées aux catégories d'action grâce aux indicateurs élaborés. On a pu alors naturellement déduire les connaissances de différents ordres et plus précisément les connaissances d'ordre II perçues par les élèves du point de vue du chercheur.

V. CONCLUSION

Ce travail a montré différents points saillants (Da Ronch, 2018a). Plus les critères concernant l'entrée dans une démarche expérimentale sont vérifiés, plus la production d'une activité mathématique en termes d'action semble effective chez un sujet. Le problème de pavage (Da Ronch, 2018a ; 2018b) confirme bien ce résultat. On a également montré dans notre étude que les casse-têtes semblent moins enclins à favoriser la production d'une activité mathématique. De fortes perspectives et de nombreuses questions de recherche viennent naturellement dans le *continuum* de ce travail à savoir : Quel modèle de situation construire ou modifier permettant la mise en place d'une activité mathématique chez un sujet lors de manipulations d'artefacts en exposition sans médiateur humain ? L'ensemble d'artefacts utilisé en situation d'exposition peut-il se transformer en instrument (Rabardel, 1995) de médiation favorisant la production de connaissance d'ordre II ? Quel(s) dispositif(s) — matériel(s), temporel(s) et spatial(s) — instauré(s) pour favoriser l'encrage de ces connaissances chez un sujet ? Les items suivants s'inscrivent dans la perspective de notre questionnement :

- La création d'un modèle de situations de recherche favorisant l'activité mathématique d'un sujet par le biais d'artefacts lors d'exposition sans médiateur humain.
- Étudier les potentialités et les contraintes d'un artefact en lien avec une situation de recherche.
- Étudier le processus de *genèse instrumentale* (Rabardel, 1995) *;* évolution de l'artefact vers un instrument de médiation susceptible à la production de connaissances.
- Élaborer une grille d'évaluation empirique ou par inspection concernant l'évaluation d'un artefact en utilisant les notions d'utilité, d'utilisabilité et d'acceptabilité des travaux de (Tricot et al., 2003) sur l'évaluation d'un EIAH.
- Créer de nouveaux indicateurs multiniveaux — niveaux macroscopique et microscopique — dans le modèle élaboré, permettant de mesurer l'activité mathématique effective d'un sujet.

REFERENCES

Brousseau, G. (1990). Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en didactique des mathématiques*, *9*(9.3), 309-336.

Brousseau, G. (1998). *La théorie des situations didactiques*. Grenoble, La Pensée Sauvage.

Contenot, F. (2011). La médiation au service de la confluence du musée et de la bibliothèque.

Da Ronch, M. (2018a). *Activité mathématique dans un contexte d'exposition avec manipulations d'objets : utopie ou réalité ?* (Mémoire de M2 Didactique des Sciences et Numérique). Université Grenoble Alpes.

Da Ronch, M. (2018b). Un problème de pavage : entre jeu et activité mathématique. Article soumis pour publication. *Revue de Mathématiques pour l'école (RMé).* N°231.

Grenier, D. (2007). Des situations de recherche en mathématiques pour une formation à la démarche scientifique.

Giroud, N. (2011). *Etude de la démarche expérimentale dans les situations de recherche pour la classe* (Thèse de Doctorat). Université de Grenoble.

Henry, A. (2010). Les enjeux de l'information et de la communication. Consulté à l'adresse http://cultural-engineering.com/2010/03/25/ repenser-la-mediation-l%E2%80%99exemple-de- la-smithsonian-institution-1

Jacobi, D. (1999). La communication scientifique : discours, figures, modèles.

Lepareur, C., Gandit, M. et Grangeat, M. (2017). Evaluation formative et démarche d'investigation en mathématiques : une étude de cas, éducation & didactique, 11(3)

Peyrin, A. (2012). Focus-Les paradoxes de la médiation culturelle dans les musées. *Informations sociales*, (2), 62–65.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies; approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin.

Sensevy, G., Mercier, A. (2007). *Agir ensemble :l'action didactique conjointe du professeur et des élève.* Presses Universitaires de Rennes.

Sensevy, G. (2011). *Le sens du savoir. Eléments pour une théorie de l'action conjointe en didactique.* De Boeck.

Tricot, A., Plégat-Soutjis, F., Camps, J. F., Amiel, A., Lutz, G., & Morcillo, A. (2003, April). Utilité, utilisabilité, acceptabilité : interpréter les relations entre trois dimensions de l'évaluation des EIAH. In *Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain 2003* (pp. 391-402). ATIEF; INRP.

de Varine, C. (2008). Table-rond : Dispositifs, usage, public : essai de typologie. In *Actes du colloque « Chemins d'accès : l'autonomisation, une école du visiteur »* (pp. 1–4).

UNE PERSPECTIVE HISTORIQUE FAVORISE-T-ELLE LA REUSSITE DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES ?

LE CAS DES NOMBRES COMPLEXES AU SENEGAL

DIALLO[*] Mamadou Lamine

Résumé - Face au désintérêt pour les études mathématiques, cette recherche se propose de tester une piste de solution, privilégiée en didactique, l'introduction d'une perspective historique dans l'enseignement. Cette étude a établi l'insuffisance des incitations réglementaires et documentaire au Sénégal. Une activité d'introduction aux nombres complexes fournit une application possible de cette approche et permet une analyse du regain d'intérêt postulé pour les mathématiques.

Mots-clefs : didactiques des mathématiques, nombres complexes, perspective historique, enseignement des mathématiques

Abstract - Given the lack of interest to mathematics studies this research aims to experiment a new solution known as the historical approach in teaching. The study points out the insufficiency of legislatives rules and appropriate books despite teachers good willingness in their attempt in Senegal. An introducing activity to the complex numbers give an example of such handling and allows to analyse its alleged impact, a renewed interest to mathematics.

Keywords: mathematics education, complex numbers, historical approach

I. INTRODUCTION

Nous sommes toujours frappés par l'intérêt suscité par l'évocation d'éléments d'histoire lors d'un cours de mathématiques (Roy, 2006). Nous constatons alors que même certains élèves, habituellement peu enclins à suivre, prêtent pour un instant l'oreille comme s'il s'agit de prendre connaissance d'une chose également accessible à tous, une sorte de culture humaine universelle et non un savoir mathématique rebutant. La perspective historique en mathématiques est de plus en plus explorée par les recherches en didactique. Ce texte s'inscrit dans une démarche de mise œuvre pratique de l'approche intégrant l'histoire des mathématiques à l'enseignement de cette discipline au secondaire.

Pour cela, nous avons poursuivi une entreprise initiée, au Sénégal, par le laboratoire de didactique de l'enseignement des mathématiques de la Faculté des Sciences et Technologie de l'Education de la Formation FASTEF de l'université Cheikh Anta Diop de Dakar. Par exemple, Diop (2012) a travaillé sur l'étude de la dérivée, Baldé (2017) sur les équations du second degré et Dia (2013) sur les incitations réglementaires à l'utilisation de l'histoire puis sur le bilan d'une expérience en cours au Sénégal (2017). Néanmoins des interrogations légitimes sur cette approche sont soulevées. Ainsi De Vittori (à paraitre) décèle deux postures, celle de Chorlay (2016) dans laquelle l'histoire intéresse moins pour elle-même mais permet une approche centrée sur les élèves et celle de Fried et al. (2016) ou Jahnke (2016) qui estiment que le recours à l'histoire ne doit pas occulter les spécificités du savoir historique.

Notre recherche s'intéresse à l'étude des nombres complexes pour continuer à apprécier l'impact d'une telle approche dans le contexte de ce débat.

Une dose d'histoire dans un cours de mathématiques serait-elle à même de modifier la perception de celles-ci comme science infuse et abstraite et changer ainsi les attitudes et accroitre l'intérêt à faire des mathématiques ?

[*] Faculté des sciences et technologies de l'éducation et de la formation – Université Cheikh Anta Diop – département de mathématiques - mamadoulamine2liamg@gmail.com

La première partie de ce texte aborde le contexte, la justification du sujet d'étude, et dans la partie méthodologie les différentes séquences du déroulement du travail. Ainsi nous avons fait une revue de littérature pour présenter les travaux qui ont été déjà faits en rapport avec l'intégration de l'histoire des mathématiques, et suggéré ce que nous voulions apporter de nouveau après avoir décliné nos questions de recherche, puis précisé nos hypothèses d'étude.

La deuxième partie est consacrée à l'analyse des programmes et des manuels à la recherche de présence d'histoire des concepts. Enfin l'analyse de la pratique des enseignants, révélés par une enquête, et la présentation d'une fiche de cours, concernant le chapitre sur les nombres complexes en classe de Terminale, ont constitué respectivement la troisième et quatrième partie de ce travail.

II. PROBLEMATIQUE

Les nations, aspirant au développement, doivent se doter d'un système éducatif garantissant un enseignement réussi des mathématiques pour une meilleure appropriation de la démarche scientifique afin de tirer parti des avancées scientifiques et technologiques de notre époque. Le Sénégal l'a bien compris en accordant une place prépondérante aux mathématiques dans ces programmes scolaires (IGEN, 2006). Ces options ont été récemment réaffirmées par le Programme d'Amélioration de la Qualité et de l'équité (PAQUET, 2013) et le Conseil présidentiel sur les conclusions des Assises de l'Education et de la Formation en 2015. Malgré ces initiatives, les résultats escomptés ne suivent pas : en général les mathématiques n'enchantent pas les élèves. Pour contenir la tendance à la baisse des effectifs et la dégradation du niveau dues à une absence d'intérêt pour les mathématiques, une des pistes de solutions envisageable a été justement l'introduction d'une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques, ce qui a été fait par la Commission Nationale de Mathématiques avec une réécriture des programmes.

C'est dans ce contexte que nous avons pensé faire un travail de recherche, dans le cadre de notre mémoire de fin de formation en choisissant le cas des nombres complexes. Ce sujet ne pouvait être plus pertinent dans la mesure où son étude peut, espérions-nous, montrer comment obtenir la participation d'élèves motivés en classe. L'histoire des nombres complexes est l'aboutissement du cheminement d'une longue aventure d'un ensemble, celui des nombres. Elle a été souvent le fait d'un groupe de chercheurs d'horizons et d'époques différents, parfois contemporains, collaborant ou rivalisant, visionnaires et persévérants pour le moins, pour le plaisir, la culture, si ce n'est par défis ou pour résoudre des problèmes pratiques. L'apparition des nombres complexes est intimement liée à des cas de résolution d'équations de degré trois ; elle révèle la distinction entre le caractère outil et le caractère objet des concepts mathématiques. Nous pensons qu'une didactique tenant compte de cette richesse permettrait de réconcilier les élèves avec les mathématiques en déconstruisant l'idée que les mathématiques sont au pire inhumaines et au mieux inutiles. Inhumaines au sens où elles seraient hors de portée car tombées du ciel, désincarnées, inutiles car hors de la sphère des préoccupations réelles.

D'importants travaux ont été faits sur ce thème. Ainsi dans cours de philosophie positive (1830-1842) déjà, Auguste Comte affirmait l'importance de connaitre le passé d'une science pour la connaitre vraiment. En 1986, Gattuso et Lacasse (1986) puis Lefebvre (1993), rapporté par Roy (2006), se sont intéressés à cette question. En 2000, le livre publié par l'ICMI (International Commission on Mathematical Instruction) : History in Mathematics Education (Fauvel et van Maanen, 2000) avait pour objet la prise en compte de l'histoire dans l'enseignement des mathématiques. Ce travail renseigne sur les objectifs reconnus à l'introduction de l'histoire dans l'enseignement des mathématiques : donner ou redonner du

sens aux mathématiques enseignées, créer ou recréer un contexte et accroître le plaisir. Des activités prenant en charge les objectifs sont proposées. Il s'agit de rendre les mathématiques plus humaines, d'amener l'élève à apprendre ou à consolider une notion. La perspective historique dans l'enseignement des mathématiques est tantôt perçue comme un objectif en soi propre à révéler la vraie nature des mathématiques mais aussi, souvent l'histoire passe pour un outil motivationnel de nature à faciliter la compréhension. En dépit de quelques réticences légitimes liées par exemple à un risque de dénaturation de l'histoire ou à un dévoiement du sens des mathématiques, il semble se former pour le moment une convergence forte quant à l'apport bénéfique de cette approche. Dans tous les cas, subsiste la question de savoir quelle histoire en fait et surtout comment l'enseigner pour obtenir les résultats attendus.

Pour notre part, nous nous posons les questions suivantes :

- Quel est le niveau de prise en compte de l'histoire dans l'enseignement au Sénégal ?

- Quel pourrait être l'apport de l'histoire dans notre enseignement ?

Notre première hypothèse était que les incitations programmatiques étaient faibles, peu précises et non soutenues par des ressources pédagogiques et humaines. En fait il nous a semblé que s'il existe des directives allant dans le sens de l'intégration d'éléments d'histoire dans un cours de mathématiques dans les programmes de l'enseignement moyen et secondaire, elles restent au niveau des intentions car aucune consigne précise n'est donnée.

Notre seconde hypothèse était que l'histoire est un outil puissant pour détruire le mythe des mathématiques difficiles pour ne pas dire incompréhensibles, en faisant percevoir les difficultés et obstacles qui les ont jalonnées comme une activité humaine évolutive et non un produit fini et éternellement figé comme l'ont affirmé Gattuso et Lacasse (1986) par exemple.

III. METHODOLOGIE

Pour répondre aux questions soulevées ci-dessous, nous avons eu recours à deux types d'outils d'investigation.

Le premier a consisté en une analyse documentaire. Nous avons tout d'abord effectué une analyse approfondie des programmes officiels et des manuels de mathématiques du Sénégal de 1960 à nos jours. Notre objectif était de percevoir comment l'histoire des concepts mathématiques est abordée dans les programmes et manuels, sous quelle forme (biographies, textes historiques, anecdotes, images, dessins,…), dans quelle mesure et surtout dans quel but. Nous avons étudié ensuite comment l'histoire est prise en compte dans le contenu de quelques manuels de collections différentes. Enfin un questionnaire destiné aux enseignants a été construit (voir Annexe 1) afin de les interroger sur l'utilisation de l'histoire des mathématiques dans leur enseignement. Nous l'avons soumis, en 2017, à 20 professeurs de la seconde à la terminale des écoles publiques comme privées dans huit des quatorze régions du pays.

Le second outil de recherche est d'ordre pratique, il a consisté à confectionner une fiche d'activité (voir Annexe 2) que nous avons mise en œuvre dans une classe de première S pour évaluer l'impact de l'histoire des mathématiques dans le chapitre sur les nombres complexes. Celle-ci permet de découvrir la notion de nombre complexe à partir de la résolution d'équations dont la tentative de résolution a mené à la découverte des nombres complexes. Elle est accompagnée d'un recueil de textes minutieusement choisis relatant les péripéties de l'histoire de la notion à travers le temps.

Tenant compte de l'évolution de la recherche concernant les objectifs standards d'une telle approche, nous nous fixons les objectifs suivants : apprécier le niveau de prise en charge de

l'histoire dans les programmes et manuels, situer les causes des réticences ou les facteurs bloquants pour les enseignants et expérimenter une fiche d'activité.

IV. ANALYSE DES PROGRAMMES

L'analyse des programmes a permis de mettre en relief l'évolution suivante des instructions de l'indépendance à nos jours.

Les programmes de 1960 à 1968 ont été élaborés par des assistants techniques français sous forme de contenus donnés dans les premières pages des livres. Les programmes ne donnaient aucune instruction par rapport à l'évocation des aspects historiques. La situation est restée inchangée malgré le passage des mathématiques classiques aux mathématiques dites « modernes ».

De 1987 à 1990, l'harmonisation des programmes de mathématiques de l'enseignement secondaire en Afrique francophone a banni l'axiomatique et a recommandé des activités motivantes basée sur du concret. La perspective historique apparait pour la première fois mais sans instruction précise.

Depuis 1990 le souci d'identifier les objectifs clairs et de dégager des stratégies pour les atteindre pose la question du sens des concepts. L'évocation des aspects historiques au niveau des suites et des probabilités « est encouragée pour donner à l'élève une ouverture sur la culture mathématique » et seulement encore pour « donner un bref aperçu historique de l'évolution du concept du nombre».

Il ressort de cette étude que le niveau de prise en charge de l'histoire dans nos programmes est faible.

V. ANALYSE DES MANUELS

Nous avons étudié la Collection Inter Africaine de Mathématiques (CIAM), le fruit des séminaires d'Harmonisation des Programmes de Mathématiques (HPM), qui est celle homologuée au Sénégal concernant toutes les classes et série et nous avons aussi décidé d'y ajouté la nouvelle collection USAID 2nde S destinée aux du Sénégal pour chercher le niveau de prise en compte de l'histoire.

Un aspect quantitatif indique le ratio entre le nombre de pages évoquant l'histoire et le nombre total de pages puis les niveaux d'évocation de l'histoire, en introduction ou activités ou exercices et enfin les différentes formes qui vont peuvent aller des bibliographies et portraits aux textes historiques en passant par les bulles.

La recherche de l'existence de références à caractère historique dans les manuels homologués au Sénégal a permis de mettre en exergue les trois informations suivantes. L'histoire, même si elle n'est pas absente dans les manuels, occupe une place très faible avec moins de 6% pour tous les niveaux et tous les manuels. Dans le cas où l'histoire est présente, c'est le plus souvent en introduction. Dans ce cas, elle apparaît sous forme de citations, de bulles historiques, de portraits ou d'anecdotes et encore avec moins de 4% de présences. Nous n'avons pas noté d'activité à saveur historique et très peu d'exercices ont un rapport avec l'histoire.

VI. ANALYSE DES REPONSES AU QUESTIONNAIRE

Le questionnaire (voir Annexe 1) soumis aux enseignants a porté les causes des échecs en mathématiques et sur la pertinence de la perspective historique comme remède possible. Nous voulions déterminer les obstacles au recours à cette approche chez les enseignants qui l'appréciaient favorablement. Les raisons avancées par les enseignants, pour expliquer la désaffection à l'égard de la série S1, par les enseignants permettent de déceler des causes d'échec de l'enseignement. Les réponses fournies par les enseignants sur l'approche historique dans un cours de mathématiques permettent de connaitre les modalités utilisées et de cerner les difficultés dans la pratique de celles-ci.

L'analyse des réponses au questionnaire a permis de dégager les tendances majeures suivantes.

Les approches utilisées par les enseignants, en occultant le sens et présentant un savoir achevé, peuvent rendre difficile la compréhension des concepts. Ainsi une démarche intégrant l'histoire de ce que l'on enseigne a été avancée comme remède possible par la totalité des enseignants comme un remède possible. Les arguments sont que le cours serait plus attrayant et favoriserait la réceptivité des élèves en lui conférant plus d'intérêt. Toutefois le manque de temps et de savoir-faire dû à une absence de formation ou à des instructions explicites sont largement évoqués comme obstacles à une cette démarche. Le recours à l'histoire est le plus souvent effectué pour découvrir une notion pour la majorité des enseignants. Confrontés à test sur des connaissances élémentaires sur l'histoire des nombres complexes, certains professeurs en charge de classes de terminale n'ont pas fourni des réponses appropriées.

Hormis les générations récentes de professeurs sortant de la FASTEF ayant bénéficié d'une formation spécifique, les autres enseignants même titulaires et anciens, et malgré leur bonne volonté, manifestent clairement des insuffisances dans la connaissance tant des objectifs et des modalités de cette approche historique, que des connaissances minimales en matière d'histoire proprement dite des mathématiques. Or les apports ou les potentialités (Lemes, à paraitre) de l'histoire dans la formation des enseignants et donc dans l'enseignement sont très utiles. En effet, pour Radford (1992) cité par Dia (2017) « la détection des obstacles rencontrés tout au long de la formation d'une théorie et la façon par laquelle ils ont été franchis peuvent donner aux professeurs une idée de la profondeur et de la nature de ces obstacles, et les aider dans la façon de mener l'apprentissage chez leurs élèves ».

Par conséquent un module prenant en charge une telle formation serait salutaire à la faculté des sciences et techniques de l'université de Cheikh Anta Diop de Dakar et dans les autres universités constituant le vivier des futurs professeurs de mathématiques.

VII. EXPLOITATION D'UNE FICHE : ACTIVITE DE DECOUVERTE

Voici le dispositif que nous avons élaboré et testé dans une classe de première S2 en fin d'année scolaire.

1. Présentation de la fiche

Une première activité consiste à lire un recueil de textes sur l'histoire des nombres complexes que le professeur a choisi. Les élèves doivent répondre à une série de questions (activité préparatoire) pour rendre compte de leur lecture. Les réponses serviront de trame de fond pour la leçon. L'activité (voir Annexe 2) de découverte de la notion de nombres complexes a été proposée et corrigée en classe.

Nous avons découvert que c'est en résolvant des équations de degré trois dont on connait évidemment une solution réelle alors que les techniques disponibles ne permettaient pas de retrouver la solution si on ne parvenait pas à dépasser, à contourner la difficulté posée la racine carrée d'un nombre négatif. En effet la formule dite de Cardan-Tartaglia fonctionnait seulement pour une certaine classe d'équations cubiques du type $x^3 = px + q$.

2. Enseignements tirés de la séance

En ce qui concerne l'enseignant, la réussite du travail été fortement dépendante de son travail préparatoire. Le maitre s'est beaucoup investi pour la préparation à l'occasion de la recherche et/ou de la compilation des textes et a beaucoup sollicité les élèves.

D'une part la lecture antérieure des textes relatant l'avènement des concepts mathématiques a permis de donner du sens au cours, de le structurer de manière motivante et de favoriser ainsi la participation effective des élèves. Ceux-ci se sont appropriés l'activité en répondant aux questions et en interagissant dans un débat contradictoire, chacun ayant eu son mot à dire, pour parvenir à des résultats partagés.

D'autre part l'activité mathématique qui part de la genèse des concepts, en montrant l'idée à la base de ceux-ci, rend la découverte, l'apprentissage ou la consolidation des notions plus aisée et peut susciter l'esprit créateur et au moins l'esprit de recherche.

En découvrant plus tard les notes des élèves avant que je n'arrive à l'école, catastrophiques pour beaucoup d'entre eux, j'ai été surpris par l'enthousiasme qui les a animés pendant cette séance. Tout le monde a participé et dans l'ensemble, ils ont aimé la séance. Ma croyance était faite que quand vous ne récoltez que de mauvaises notes, suivre le cours devient un fardeau très pesant, sans élan participatif à tout le moins. Ça n'a pas été le cas, bien au contraire, car la classe donnait l'impression studieuse et intéressée.

Les élèves ont investi beaucoup de temps dans l'appropriation des textes et la recherche de l'activité. Les questions sur la vie des acteurs et des évènements marquants de l'époque ont rendu la séance vivante, entrainante et passionnante. L'activité elle-même a permis de résoudre graduellement des difficultés aisément surmontées et conduire ainsi à une compréhension correcte de la définition de l'ensemble des nombres complexes.

Voici les réactions de quelques élèves. Une fille a dit : « La séance a été comme du riz (un repas, voulait-elle peut-être dire, à manger). On aime. Car quand on sait ce que l'on fait et on sait qu'on trouve, on a envie de continuer et d'aller jusqu'au bout ». Une seconde fille a dit : « C'était enthousiasmant de refaire le chemin des anciens et de voir comment ils ont fait avancer les choses aussi naturellement. Cela nous donne l'idée de prendre le relais et de continuer. »

VIII. CONCLUSION

Nous avons montré une présence peu significative de l'histoire des mathématiques dans les programmes et manuels consultés. Cependant à travers notre questionnaire, l'histoire des concepts mathématiques apparait dans les enseignements malgré le manque de formation des professeurs dans ce domaine.

Le savoir enseigné n'est pas le résultat d'un surgissement spontané mais plutôt le fruit d'un travail de longue haleine. Et encore ces connaissances sont moins apparues de manière linéaire, elles se sont imposées au terme d'une aventure humaine et intellectuelle dont la prise en compte est nécessaire à un enseignement intégral réussi au profit des élèves.

Nous pensons qu'un travail pourrait être mené sur l'évolution de l'utilisation de l'histoire des mathématiques. En effet, les enseignants disposent essentiellement de quelques manuels et certaines ressources informatiques pour établir les informations d'ordre historique qu'ils peuvent dispenser à leurs élèves. Pour le reste, la transposition didactique de ces connaissances est totalement laissée à leur charge. Nous pensons que celle-ci mériterait, au contraire, d'être généralisée pour faciliter la tâche aux professeurs et les encourager à utiliser l'histoire dans leur enseignement. Enfin nous pensons qu'une étude sérieuse de la manière de mener cette transposition pourrait s'avérer très utile.

BIBLIOGRAPHIE

Baldé, O. (2017). *Intégration de l'histoire dans l'enseignement : exemple des équations du second degré, Mémoire de mathématiques.* Dakar: FASTEF.

Chorlay, R. (2016). Historical sources in classroom and their educational effects. *https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01349227*.

De Vittori, T. (à paraitre). Histoire des mathématiques en classe : pour une analyse au niveau conceptuel des élèves. *Colloque International EMF 2018*.

Dia, E. H. (2013). Plaidoyer pour l'utilisation de l'histoire dans l'enseignement des mathématiques. *Université Cheikh Anta Diop de Dakar - Fastef.*

Dia, E. H. (2017). Intégration de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement : Une expérience en cours au Sénégal. *Lettre de GREMA*, (pp. 7-15).

Diop, P. M. (2012). Intégration de l'histoire dans l'enseignement : exemple de la dérivée. In J. L. Dorier & Coutat (Eds.) Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle - Actes du colloque EMF2012 (SPE1, pp.1555-1558). *http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012.*

Fauvel, J., & Maanen, J. V. (2000). History in mathematics education. The ICM study Dordrecht: Kluwer Academic. *https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01349228*.

Fried, M. N., Guillemette, D., & Jahnke, H. N. (2016). Theoretical and/or conceptual frameworks for integrating history in mathematics education. *IREM de Montpellier*.

Gattuso, L., & Lacasse, R. (1986). *Les mathophobes : une expérience de réinsertion au niveau collégial* . Cegep du vieux Montréal.

Gouvernement du Sénégal. (1991). Loi d'orientation de l'éducation et de la formation. *Journal officiel*(5401), 107-111.

Inspection générale de l'éducation nationale. (2006). *Programme de mathématiques du Sénégal.*

Lefebvre, J. (1993). *Utilisation de l'histoire dans l'enseignement des mathématiques* . Bulletin de l'AQM.

Lemes, A. J. (à paraitre). Potentialités de l'histoire des mathématiques dans la formation des enseignants de mathématiques. *Actes du colloque EMF 2018.*

Ministère de l'éducation nationale du Sénégal. (2013). *Programme d'amélioration de la qualité, de l'équité et de la transparence.* PAQUET.

Radford, L. (1992). Diophante et l'algèbre présymbolique. *Bulletin de l'AMQ*.

Roy, P. (2006). *Intégration de l'histoire des maths dans l'enseignement.* Québec: Université du Québec.

ANNEXE 1 : Questionnaire et synthèse des résultats

Pourquoi les effectifs sont faibles en série S1 ?

- Le niveau est faible en fin de collège déjà : 100%
- Les préjugés (Peur) et méconnaissance de l'importance des mathématiques : 75%
- Pédagogie et didactique mal adaptées : 65% de oui contre 5% de non

Pour capter l'intérêt pour votre enseignement, quelles approches utilisez-vous ?

- Souvent une démarche intégrant l'histoire de ce que vous enseignez : 65% de oui.

Qu'apporte la perspective historique à un cours de mathématiques ?

- Le cours est encore plus difficile à conduire : 45% de oui et RAS pour le reste.
- Le cours est plus attrayant et favorise la réceptivité des élèves en lui conférant plus d'intérêt et d'humanité : 100% de oui.
- L'enseignement est plus efficace et favorise un apprentissage réussi par plus de clarté et de compréhension : 90% de oui contre 5% de non.

Quels sont les obstacles à l'intégration d'une dose historique dans vos préparations ?

- Des sources documentaires inaccessibles : 95% de non contre 5% de oui.
- L'absence de formation, de savoir-faire pratique : 65% de oui contre 35% de non.
- Des instructions des programmes faibles et peu explicites : 80% de oui et RAS
- Manque de temps : 100% ou Autres : RAS.

Comment utilisez-vous l'histoire dans vos cours ?

- Pour seulement démarrer la leçon puis c'est fini : 40% de oui et RAS pour les autres.
- Pour faire découvrir une notion qui s'y prête : 90% de oui.
- Pour consolider une notion connue : 00%

Avez-vous tenu des classes de Terminales S ?

- Seuls 06 profs répondent oui contre 14 non.

Lors d'un cours appuyé sur l'histoire, quels sont les rôles de l'élève et de l'enseignant ?

- Elèves : Passifs (RAS) Actifs (RAS)
- Enseignants : Raconte anecdotes ou biographie (90% de oui)
    - Lis un texte historique (5%)
    - Pratiques d'activités contextualisées historiquement : (8% de oui)

Quelle est la teneur en histoire de votre cours sur les nombres complexes de cette année ?

- Acteurs incontournables : 70% de réponses satisfaisantes
- Evènements marquants : 80% de réponses satisfaisantes
- Apports décisifs et Autres : RAS

Citez des objectifs, selon vous, poursuivis par les militants de l'intégration de l'histoire des mathématiques dans nos enseignements. Et apprécier leurs arguments.

- Motivation (95% oui)
- Vision claire (95% oui)
- Préparation à la recherche (95% oui)

ANNEXE 2 : Fiche de l'activité

Titre de la leçon : Présentation de l'ensemble des nombres complexes
Objectifs : Connaître les nombres complexes et leur apport décisif
Intérêts :

Comprendre le contexte dans lequel les nombres complexes sont nés ;
Voir comment les anciens résolvent leurs problèmes avec des moyens limités

Sources :

1. Manuel Bächtold Thomas Hausberger, Atelier_A2_Nombres_complexes (Basto). Les nombres complexes : entre mathématiques, physique et philosophie Université Montpellier 2, IREM de Montpellier
2. https://melusine.eu.org/syracuse/contrib/jmd/chap09/chap9.pdf

Activité

Pour tout réel k, il existe un unique nombre réel dont le cube est k. Ce nombre est appelé racine cubique de k. Il est noté $\sqrt[3]{k}$ ou aussi $k^{\frac{1}{3}}$. On a par exemple par ce $\sqrt[3]{8} = 2$ que 2^3=8.

Au XVIème siècle, Jérôme Cardan, confronté à la résolution des équations du troisième degré, de la forme $x^3 = px + q$ donne la formule suivante appelée formule de CARDAN :

lorsque $\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} \geq 0$ a pour solution $\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}$

1. Démontrer cette formule.
2. On considère l'équation $x^3 = 1$. Quelles sont les valeurs de p et q ?
   Vérifier que l'on peut utiliser la formule de Cardan. Quelle solution obtient-on ?
3. On considère l'équation $x^3 = 3x + 2$.Vérifier que l'on peut utiliser la formule de Cardan. Trouver toutes les solutions de l'équation.
4. On considère l'équation $x^3 = 15x + 4$.Vérifier que l'on peut utiliser la formule de Cardan.
5. On considère l'équation $x^3 = 2x + 4$. Justifier que la formule de Cardan ne peut pas s'appliquer. Pris dans un engrenage infernal, on décide cependant d'appliquer la formule. Comment peut s'écrire la solution ?
6. Imaginons un nombre dont le carré est -1, et qui sera très temporairement noté $\sqrt{(-1)}$.
   En utilisant ce nombre imaginaire et en effectuant des calculs « habituels », montre que :
   $$(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + 11\sqrt{-1}.$$
   En déduire $2 + \sqrt{-1}$ est une racine cubique de $2 + \sqrt{-121}$.
   « Démontre » de même que $2 - \sqrt{-1}$ est une racine cubique de $2 - \sqrt{-121}$.

Montre alors que la formule de Cardan appliquée à l'équation $x^3 = 15x + 4$ donne comme solution le réel 4. Vérifie que 4 est effectivement solution de l'équation. On a donc, en utilisant des nombres imaginaires, obtenu un résultat bien réel.

6. Si a et b sont deux réels strictement positifs, alors $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$.
   Si vous appliquez cette propriété a $a = b = -1$, qu'obtenez-vous ?

C'est la raison pour laquelle on n'utilisera plus jamais la notation $\sqrt{-1}$, mais i, nombre imaginaire dont le carré $i^2 = -1$. Il aura fallu près de 150 ans pour prendre cette notation due à Euler.

CHANGEMENT DE VARIABLE DANS LA RESOLUTION D'ÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES EN 11ÈME SCIENCES

DIARRA[*] Amadou

Résumé – La trigonométrie est l'un des principaux chapitres de mathématiques dans les filières scientifiques du lycée au Mali. Abordée sur plusieurs niveaux, nous avons observé durant notre stage des pratiques dans son enseignement qui posent question. Dans ce texte nous nous intéressons aux résolutions algébriques dans $\mathbb{R}$ des équations d'inconnue x du type $acosx + bsinx + c = 0$ où a ; b et c sont des nombres réels. Ce texte présente les résultats d'une expérimentation autour de ce type d'équation avec des élèves de 11ème Sciences (élèves de 16-17 ans).

Mots-clefs : trigonométrie, équations trigonométriques, technique de résolution.

Abstract : Trigonometry is one of the main chapter of Mathematics in scientifics educational stream of high school in Mali. Addressed on several levels, we observed during our practical training, practices in his teaching could be problematic. In this text we will be focus on algebraic resolution in R of unknown x equations of the $acosx+bsinx+c= 0$ type where a, b and c are real numbers. This text has the results of the experimentation with that type of equation with 2nd year science of high school students (11eme science) (16-17 years old).

Keywords: trigonometry, trigonometric equations, resolution technique

I. INTRODUCTION

Au Mali, il n'y a pas de manuels « officiels » pour l'enseignement des mathématiques au lycée. Les ressources exploitées par les enseignants sont en général des manuels des collections : DECLIC, CIAM, IRMA… Certains utilisent des ressources pédagogiques libres ; en particulier le site malimath.net (site géré par un groupe d'enseignants et de formateurs en mathématiques). Les ouvrages CIAM et IRMA recouvrent une grande partie du programme de mathématiques de plusieurs États de l'Afrique de l'Ouest du Madagascar et de l'Océanie. Toutefois, cette abondance de ressources semble ouvrir la voie à certaines dérives dans les pratiques d'enseignement qui semblent très éloignées des préconisations inscrites dans les programmes maliens.

Durant notre stage, nous avons observé certains faits sur l'enseignement de la trigonométrie qui nous semble être des insuffisances. Il s'agit d'une part de l'appropriation de la notion d'angles par les élèves et d'autre part de la résolution dans R d'équations d'inconnue x du type acosx+bsinx+c=0.

Notre intérêt pour la trigonométrie est double. Elle figure dans tous les programmes de mathématiques des filières scientifiques de la 10ème à la terminale ; elle est également utilisée dans plusieurs chapitres des programmes de sciences physiques.

Pour cette étude nous nous posons les questions suivantes :

- Comment les enseignants abordent les résolutions dans R d'équation du type

acosx+ bsinx+c=0 où a, b et c sont des nombres réels?

- Que proposent les manuels familièrement utilisés par rapport à la résolution de ces équations ?

- Que peut-on proposer pour améliorer son enseignement/apprentissage ? Pour mener ce travail, nous faisons d'abord une étude du sujet par rapport au programme et des pratiques de

[*] Enseignant de mathématiques au Lycée Bilaly Sissoko (Bamako) – Mali – diarraamadoulassine@yahoo.fr

classe. Puis nous présentons le contexte d'étude et enfin nous effectuons une expérimentation de situations construites autour de ces résolutions d'équations.

II. ANALYSE DES PROGRAMMES ET PRATIQUES DE CLASSE

1. Méthodologie

Elle se fonde :

- sur la mise en rapport de différentes d'analyses, des programmes du Mali, des manuels usuellement utilisés par les enseignants, des pratiques de classe sur la trigonométrie, en particulier sur la résolution de certains types d'équations trigonométriques ;
- sur l'élaboration et la mise à l'épreuve d'une situation expérimentale, qui met à l'épreuve une méthode de résolution d'équations trigonométriques non fréquente dans nos pratiques de classes

Nous avons dans un premier temps procédé à une série d'entretiens auprès d'une dizaine d'enseignants de mathématiques en exercice dans différents établissements secondaires malienne. Ces enseignants ont tous au moins une maitrise en mathématiques sinon sont des sortants de l'école normale supérieure de Bamako. Pour ces entretiens nous nous donnons le soin de proposer deux équations du type $acosx + bsinx + c = 0$ où a b et c sont des constantes réelles. Ces équations sont choisies suivant les valeurs des variables a ; b et c :

Une première, de sorte que les réels a, b et c nous permettent de retrouver un angle remarquable φ tel que pour $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $si\ r \neq 0$ alors : $\begin{cases} cos\varphi = \frac{a}{r} \\ sin\varphi = \frac{b}{r} \end{cases}$ et que $\frac{-c}{r}$ soit aussi la valeur du cosinus d'un angle remarquable *A*.

La seconde condition était de prendre les réels a ; b et c de sorte qu'aucune des conditions recherchées précédemment ne soit réalisé c'est-à-dire que ni φ ni A ne soit des angles remarquables.

La résolution de ces deux équations avait pour but de nous donner des indices sur comment les enseignants abordent de tels résolutions ; quels sont les méthodes dont ils disposent. Après la question était de savoir :

- S'ils proposent en classe des résolutions d'équation du type$acosx + bsinx + c = 0$ où les solutions ne sont pas des angles remarquables
- Si oui que proposent-ils aux élèves pour de tels résolutions ; sinon pourquoi ?

L'analyse de ces entretiens a révélé que la plupart des enseignants ne proposent pas de résolution dans lesquelles les solutions ne sont pas des angles remarquables. Ceux qui en proposent le font avec des indications de solution (proposition d'une piste de solution à suivre). Ceux qui n'en proposent pas mettent en avant l'une des raisons suivantes : le facteur temps ; le manque de matériel didactique pour l'utilisation de certains registres pour la résolution ; le niveau de compréhension des élèves ; la faible fréquence de ces types de problème dans les manuels ; les programmes ne l'exigent pas.

2. Analyse des programmes maliens de mathématiques de la 7ème à la 11ème année

Dans le cursus scolaire du Mali, l'étude de la trigonométrie débute dès l'enseignement fondamental[1] (1er cycle et 2ème cycle - élèves de 5 à 15 ans) avec l'étude des différents types d'angle. Les secteurs angulaires sont introduits en 7ème. La notion d'angle apparaît en *8ème*, en tant que classe d'équivalence de secteurs angulaires. En 9ème l'enseignement de la trigonométrie est centré sur les calculs des rapports trigonométriques dans un triangle rectangle (Sangare, 2009).

En classe de 10ème (seconde - élèves de 15-16 ans), il y a un retour sur les rapports trigonométriques et les relations métriques dans le triangle rectangle, puis l'introduction du cercle trigonométrique.

En 11ème S (Première Sciences), une étude plus approfondie de la trigonométrie est abordée avec :

- Calculs sur les angles orientés. Mesure d'un angle orienté

- Formules usuelles de transformation. : Formules d'addition et de multiplication

- Propriétés des fonctions trigonométriques : fonction paire, impaire, périodique[2].

- Équations dans :$sinx = a$; $cosx = a$;$tanx = a$;$acosx + bsinx + c = 0$.

- Résolution dans IR d'inéquations du type $sinx < a$; $cosx < a$

Concernant les résolutions d'équations, les programmes ne recommandent pas de méthode de résolution.

3. Étude des pratiques

Au niveau de l'établissement : nous avons mené différents entretiens, sans questionnaire pré-établi, avec le tuteur et avec trois enseignants. Les échanges portaient sur l'élaboration d'une fiche de séquence sur les résolutions dans $\mathbb{R}$ des équations trigonométriques en 11ème Sciences. Nous avons observé que les enseignants ne proposent qu'une stratégie pour résoudre les équations dans $\mathbb{R}$ des équations du type $acosx + bsinx + c = 0$, (a ; b et c sont des constantes réels). Cette stratégie se résume comme suit :

Soit $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $si\ r \neq 0$ il existe un angle φ tel que :$\begin{cases} cos\varphi = \frac{a}{r} \\ sin\varphi = \frac{b}{r} \end{cases}$

L'équation dévient donc équivalente à : $\cos(x - \varphi) = \frac{-c}{r}$. En posant $X = x - \varphi$ et $A = \frac{-c}{r}$ où $\frac{-c}{r} \in [-1; 1]$ et il existe un angle α tel que : $\cos\alpha = A$.

Nous avons aussi observé que les enseignants ne proposent que des cas où α et φ sont des angles remarquables. Autrement dit, $\frac{-c}{r}$, $\frac{a}{r}$et$\frac{b}{r}$ ne correspondent pas à un rapport

[1] L'enseignement fondamental au Mali est constitué de deux cycles :
– le premier cycle comprend 6 niveaux scolaires de la 1ère année à 6ème année (l'accès à la 1ère année s'effectue pour des enfants ayant au moins 6 ans);
– le second cycle comprend 3 niveaux de la 7ème à la 9ème ; la fin de ce cycle est sanctionnée par l'épreuve du Diplôme d'Études Fondamentales (D.E.F.)

[2] Ministère de l'éducation nationale du Mali (2011). Programme de mathématiques de l'enseignement secondaire général (10ème et 11ème sciences)

trigonométrique d'angles remarquables. Nous estimons que ce choix d'enseignement réduit les acquis des élèves aux cas particuliers de résolution d'équations trigonométriques.

Les résultats de ces différentes investigations nous ont permis d'identifier un certain nombre d'éléments susceptibles d'être générateurs de difficultés pour la résolution des équations trigonométriques du type $acosx + bsinx + c = 0$.

C'est au regard de ces enquêtes que nous proposons finalement une situation d'expérimentation permettant de mieux comprendre la conception des élèves sur ces dites équations et d'introduire de nouvelles pistes de solution permettant de favoriser leurs capacités dans la résolution de ces équations.

III. ANALYSE DES SITUATIONS EXPERIMENTALES

Nous avons choisi deux situations ayant pour objectif d'identifier les différentes stratégies de résolution qu'utilisent les élèves pour résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations d'inconnue *x* du type $acosx + bsinx + c = 0$. Elles nous permettront aussi d'identifier les blocages et les difficultés dans les différentes stratégies. Puis nous étudierons un cas particulier non usuel selon les résultats d'entretien avec des enseignants sur leurs pratiques de classe autour des résolutions d'équation.

1. Situation 1

Énoncé. Résoudre si possible dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue *x* : $3cosx + \sqrt{3}sinx - 3 = 0$.

Dans cette situation, les valeurs $a=3$, $b = \sqrt{3}$ et $c = -3$ correspondent à un cas particulier où les solutions de l'équation seront des angles remarquables.

Solutions attendues par la méthode de transformation de l'équation sous la forme

$\cos x = a$ *avec* $a \in \mathbb{R}$

D'après l'étude des pratiques de classe la plupart des élèves procédera comme suit.

$$r = \sqrt{(3)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} \Rightarrow \begin{cases} cos\varphi = \dfrac{3}{\sqrt{12}} \\ sin\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ sin\varphi = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \sqrt{12}\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{\sqrt{12}} \Rightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = cos\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x - \dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x = 2k\pi \end{cases} k \in \mathbb{Z}$$

L'ensemble solution de l'équation est $S = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi;\ 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$

Nous pensons que les élèves n'auront pas de difficulté pour déterminer l'angle φ, transformer l'équation sous la forme $\cos(x - \varphi) = -\frac{c}{r}$; résoudre l'équation

$\cos(x-\varphi) = -\frac{c}{r}$. Nous rappelons que cette méthode est proposée par le professeur et abordée dans les manuels.

2. Situation 2

L'objectif est d'identifier les difficultés et les blocages d'élèves dans la résolution d'une équation dont les solutions ne sont pas des angles remarquables.

Énoncé. Résoudre si possible dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2cosx - 3sinx + 1 = 0$.

Solutions attendues Deux méthodes sont possibles

Solutions attendues par la méthode transformation de l'équation sous la forme $\cos x = a$ *avec* $a \in \mathbb{R}$

$$r = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \Rightarrow \begin{cases} cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{13}} \\ sin\varphi = \frac{-3}{\sqrt{13}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} cos\varphi = \frac{2\sqrt{13}}{13} \\ sin\varphi = \frac{-3\sqrt{13}}{13} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\varphi \cong -0{,}98rd \Rightarrow \sqrt{13}\cos(x+0{,}98) + 1 \cong 0 \Rightarrow \cos(x+0{,}98) \cong \frac{-1}{\sqrt{13}}$$

$$\Rightarrow \cos(x+0{,}98) \cong -\frac{\sqrt{13}}{13} \Rightarrow \cos(x+0{,}98) \cong cos1{,}85$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 0{,}98 \cong 1{,}85 + 2k\pi \\ x + 0{,}98 \cong -1{,}85 + 2k\pi \end{cases} k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} x \cong 0{,}87 + 2k\pi \\ x \cong -2{,}83 + 2k\pi \end{cases} k \in \mathbb{Z}$$

L'ensemble solution de l'équation est $S = \{-2{,}83 + 2k\pi; 0{,}87 + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$

Les élèves peuvent avoir des difficultés dans cette stratégie de résolution car l'usage de la calculatrice n'est pas courant dans les pratiques de classe.

Solutions attendues par la méthode du changement de variable

Soit $x=\pi+2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$. On a $cosx = -1\ et\ sinx = 0$ ce qui implique que

$2cosx - 3sinx + 1 \neq 0$.

Pour toute solution $x \neq \pi + 2k\pi$ de l'équation, $tan\ \frac{x}{2}$est défini.

Soit $t = \tan\frac{x}{2}$ alors $cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2}\ et\ sinx = \frac{2t}{1+t^2}$.

Donc l'équation devient :

$$2\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right) - 3\left(\frac{2t}{1+t^2}\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{2-2t^2}{1+t^2} - \frac{6t}{1+t^2} + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{2-2t^2-6t+1+t^2}{1+t^2} = 0$$

Qui donne : $\frac{-t^2-6t+3}{1+t^2} = 0\ d'ou - t^2 - 6t + 3 = 0 \Leftrightarrow$ les solutions de cette dernière équation sont:$t_1 = -3 + 2\sqrt{3}$et $t_2 = -3 - 2\sqrt{3}$.

A l'aide de la calculatrice ou de la table trigonométrique des angles, on trouve:

$\frac{x}{2} \cong 0{,}43 + k\pi\ ou\ \frac{x}{2} \cong -1{,}42 + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

C'est-à-dire $x \cong 0{,}86 + 2k\pi$ ou $x \cong -2{,}84 + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

L'ensemble solution de l'équation est donc :$S = \{0{,}86 + 2k\pi; -2{,}84 + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

Nous faisons l'hypothèse que cette deuxième méthode sera très peu utilisée dans les productions d'élèves, puisqu'elle n'est pas fréquente dans les pratiques de classe.

3. Relances prévues pour accompagner des procédures des élèves

Pour accompagner les élèves dans la découverte de cette méthode du changement de variable nous prévoyons quelques questions de relance :

a) Avez-vous déjà résolu une équation en utilisant un changement d'inconnue ? Si oui proposez-en. Si oui, en avez-vous déjà utilisés pour résoudre des équations trigonométriques ; proposez-en pour la deuxième l'équation.

b) On pose $t = tan\frac{x}{2}$; exprimez l'équation initiale en une équation équivalente dont l'inconnue est t.

c) Les angles de la forme $\pi + 2k\pi$ sont-ils solutions de l'équation ?

d) Achevez la résolution de l'équation d'inconnue x.

e) Pensez-vous que la démarche de résolution précédente peut s'appliquer à toute équation du type $acosx + bsinx + c = 0$.

Ces questions de relance ont été construites sur la base d'une succession d'étapes dans une démarche de résolution d'équation trigonométrique du type de la situation 2 utilisant le changement de variable de $cosx$ et $sinx$ en fonction $tan\frac{x}{2}$.

Ces questions de relance étaient prévues seulement pour la situation 2.

4. Déroulement de l'expérimentation

Elle a eu lieu avec 36 élèves d'une classe de 11ème S (16-17 ans) du lycée Bouillagui Fadiga (Bamako)[3]. Nous précisons toutefois que nous ne sommes pas le professeur de mathématiques titulaire de la classe et que le chapitre de la trigonométrie est déjà enseigné en intégralité. Nous avons réorganisé la classe en groupe de quatre élèves afin de permettre les échanges entre les élèves. Les notes de cours sont autorisées. Les élèves disposent aussi de leur trousseau de géométrie et de calculatrice.

Les situations sont prévues respectivement pour 20 et 25 minutes chacune. Chacune des situations est suivie d'une phase de correction et de synthèse de 30 minutes.

Pendant la première situation, nous suivons le déroulement des activités et intervenons (si nécessaire) pour amener les membres du groupe à trancher sur des critères uniquement mathématiques. Quant à la deuxième situation nous accompagnons les élèves avec des questions de relance prévues qui sont décrites dans le paragraphe précédent.

IV. ANALYSE DES PRODUCTIONS ET RESULTATS

Lors de la résolution des deux situations, les élèves n'ont utilisé que la *méthode 1* décrite précédemment.

[3] Etablissement d'enseignement public du Mali de 800 élèves en moyenne chaque année.

1. Situation 1

Cinq groupes sur neuf n'ont pas pu déterminer un ensemble des solutions de l'équation *3 cosx + √3 sinx - 3 = 0* et nous avons identifié un certain nombre de difficultés :

- trois groupes sur neuf ont eu une mauvaise valeur de l'angle φ. C'est-à-dire $r = \sqrt{3^2 + \sqrt{3}^2} = 2\sqrt{3}\ on\ a \begin{cases} cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ sin\varphi = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$ au lieu de $\varphi = \frac{\pi}{6}$

- deux groupes sur neuf ont fait des erreurs dans l'utilisation des formules de transformation. Trois groupes ont fait des erreurs (confusion entre $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$dans la résolution de l'équation. Nous y avons remédié avec des exemples à partir des tables des rapports trigonométriques des angles remarquables et des rappels sur les formules de transformation et de résolution.

2. Situation2

Aucun groupe n'a pu trouver l'ensemble solution de l'équation $2cosx - 3sinx + 1 = 0$. La plupart des groupes ont essayé de transformer l'équation sous la forme *cos x=a.* Mais tous sont restés bloquer après avoir calculé la valeur de $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Dans ce cas d'équation la valeur de φ n'est pas celle d'un angle remarquable. Nous pensons que ces difficultés sont liées au fait que la plupart des exemples étudiés en classe n'utilise que les valeurs remarquables pour déterminer φ et α. L'usage de la calculatrice suffisait pour la détermination de ces deux angles. Le fait de ne pas avoir pu trouver d'angle remarquable correspondant à φ et à α a amené la plupart des élèves à conclure que l'équation n'admet pas de solution. Rappelons que la plupart des élèves ne pense pas à l'utilisation de la calculatrice pour la détermination de l'angle φ.Signalons qu'aucun groupe n'a utilisé une autre méthode que celle utilisée pour la *Situation 1.*

Dans la suite, nous avons orienté les élèves vers la méthode de changement de variable avec des questions de relance. Cette démarche demande la transformation de l'équation trigonométrique en une équation algébrique à l'aide du changement de variable:

$cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2}\ et\ sinx = \frac{2t}{1+t^2}$.

Tous les groupes ont pu donner l'expression de cosinus et sinus en fonction de tangente. Parmi les neuf groupes, tous ont réussi à effectuer le changement de variable et transformer l'équation trigonométrique en équation algébrique. La question sur la réduction de l'équation n'a plus été utilisée car les différents groupes l'avaient deviné. Seul un groupe a fait une erreur au niveau de la réduction au même dénominateur l'équation$\frac{2-2t^2}{1+t^2} - \frac{6t}{1+t^2} + 1 = 0$.

Pour la résolution de l'équation algébrique du second degré$-t^2 - 6t + 3 = 0$, sept des huit groupes qui l'ont retrouvée, ont pu la résoudre correctement. Un groupe n'a pas pu déduire l'ensemble solution de l'équation trigonométrique à cause d'une mauvaise manipulation de la calculatrice.

Notons que le temps réduit octroyé pour l'expérimentation et /ou l'insuffisance de matériel didactique ne nous ont pas permis d'engager les élèves à utiliser les registres graphique et numérique : une telle technique pouvait induire des pistes prometteuses pour une solution souhaitée. Signalons que les calculatrices au niveau des élèves ; les vidéo- projecteurs et les ordinateurs au niveau des enseignants sont des ressources qui font vraiment défaut. Leur

accessibilité pouvait être d'un grand apport dans notre étude. Le caractère dynamique de certains logiciels de géométrie tel que GeoGebra pouvait nous permettre de mieux aborder les résolutions dans un registre graphique.

V. CONCLUSION

Au terme de notre étude, nous pouvons conclure qu'une seule méthode est utilisée par les enseignants pour la résolution dans $\mathbb{R}$ des équations du type $acosx + bsinx + c = 0$ dans les pratiques de classe. Ce constat peut être dû au fait que la plupart des manuels utilisés au Mali ne proposent que des cas particuliers pour ces dites équations. Dans ces cas particuliers les réels *a, b et c* sont choisis de sorte que les angles φ et α soient fonctions d'un angle remarquable. Pour ces résolutions on constate une aussi une forte absence de méthode de résolution dans le registre graphique et numérique. D'autre part, certains enseignants mettent en avant le facteur temps qui ne leur permet pas de proposer des méthodes différentes pour la résolution de ces dites équations. L'absence de méthode de résolution dans le registre graphique et numérique s'explique par l'insuffisance des TICE et des calculatrices dans notre milieu scolaire et cela malgré les efforts autorités du pays et ses partenaires.

Dans l'utilisation de la méthode du changement de variable par les élèves, nous avons constaté que certains groupes ont eu des difficultés pour la déduction de la solution de l'équation après avoir résolue l'équation du second degré.

Malgré la taille relativement réduite de l'échantillon (nombre d'enseignants et d'élèves), nous pensons qu'il existe effectivement des insuffisances dans l'enseignement et l'apprentissage des équations trigonométriques.

Pour surmonter ces insuffisances, il nous semble que, d'abord, les concepteurs des programmes de mathématiques au Mali devraient élaborer des guides donnant le maximum d'éclaircissement quant à la résolution dans $\mathbb{R}$ des équations du type $acosx + bsinx + c = 0$. Les enseignants devraient varier le plus possible les méthodes proposées pour ces résolutions. Ils devraient aussi faire des efforts dans l'utilisation des calculatrices et des TICE dans leurs pratiques de classe. De plus, ils devraient varier leurs manuels de référence, s'en inspirer mais sans tomber dans la technique du « copier/coller ». Il s'agit fondamentalement d'adopter une posture de formation professionnelle durant toute la carrière car, enseigner c'est d'abord apprendre en permanence.

RÉFÉRENCES

COLLECTION CIAM (1998). *Mathématiques 1ère SM*. ÉDICEF

COLLECTION IRMA (1988). *1ère CE Géométrie*. Les Nouvelles Éditions Africaines

KONE M. et KONATE M (2009). *Résolution des équations trigonométriques de la forme* $acosx + bsinx + c = 0$ *en 11ème sciences exactes*. Mémoire de fin de cycle - École Normale Supérieure de Bamako

MAIGA A. (2007). *Résolution d'équations trigonométriques en classe de 11ème science biologique*. Mémoire de fin de cycle – École Normale Supérieure de Bamako

Ministère de l'éducation nationale du Mali (2011). Programme de mathématiques de l'enseignement secondaire général (10ème et 11ème sciences)

Ministère de l'éducation nationale du Mali. Programme de mathématiques de l'enseignement fondamental (7ème 8ème et 9ème)

SANGARE M. S (2009). *Interactions « angle~rotation » ; pertinence et limite dans l'enseignement au Mali.*Educação Matemática Pesquisa - ISSN 1983-3156 - Vol 11, No ; septembre 2009.*http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/2117*

APPLICATION DES RAPPORTS TRIGONOMETRIQUES A UN PROBLEME DE LA VIE COURANTE EN 10EME

DIARRA Salimata Soumba*

Résumé - Les élèves sont-ils capables de réinvestir des connaissances théoriques acquises en classe de mathématiques dans la résolution de problèmes concrets de la vie courante ? Si oui, comment ? Si non, pourquoi ? Pour trouver des éléments de réponse à ces questions, nous avons mené une étude sur la résolution de problèmes de modélisation d'une situation d'application des rapports trigonométriques. Dans cette étude, nous tentons de constituer un dispositif pédagogique et d'expérimenter en classe. Ce dernier se fonde sur la mise en relation du contenu des programmes, du contenu de quelques manuels et des savoirs faires en classes des enseignants par rapport au problème de modélisation en trigonométrie dans des classes de 10ème (élèves âgés de 14-16 ans).

Mots-clefs : Trigonométrie, problème concret, connaissances théoriques, modélisation, rapports trigonométriques

Abstract – are students able to reinvest theoretical knowledge acquired in mathematics class in solving real life problems? If yes, how? If not, why? To find some answers to these questions, we conducted a study on the problem solving of modeling a situation of application of trigonometric ratios. In this study, we try to constitute a pedagogical device and to experiment in class. The latter is based on the linking the content of the programs, the contents of some textbooks and the knowledge of teachers' classes in relation to the problem of modeling in trigonometry in 10th grade classes (students aged 14-16 years).

Keywords: trigonometry, concrete problem, theoretical knowledge, modeling, trigonometric ratios

I. INTRODUCTION

Une des finalités de l'enseignement des mathématiques en milieu scolaire est de permettre à l'apprenant de résoudre des problèmes qui se présentent à lui en dehors de la classe[1] tout en réinvestissant les connaissances acquises en classe. Après une analyse préalable, des premiers constats semblent indiquer que les élèves ont des difficultés à réinvestir ses connaissances dans la vie quotidienne. La trigonométrie constitue un chapitre important du programme de mathématiques de la 10ème (élèves âgés de 14-16 ans), libellé selon la nouvelle méthode d'enseignement au Mali APC (Approche par Compétences) introduite dans l'enseignement secondaire en octobre 2011 par le gouvernement dans sa politique d'améliorer l'apprentissage des élèves et pour objectif d'éveiller l'imagination et le bon sens de l'apprenant. En effet, la trigonométrie est utilisée dans la résolution de plusieurs types de problème : en physique, en chimie dans la vie quotidienne.

C'est dans le contexte de lier l'école à la vie quotidienne, de mettre l'apprenant dans des situations où il pourra construire des articulations entre l'abstrait et le concret et d'utiliser ses savoirs théoriques pour résoudre des problèmes que ce projet a vu le jour. Nous travaillons sur des situations concrètes avec des élèves de la 10ème réinvestissant les acquis sur les rapports trigonométriques dans la résolution de problèmes de la vie quotidienne. Nous cherchons aussi à rendre compte d'un travail sur les obstacles rencontrés par ces élèves lors de la construction ou l'exploitation de modèles en mathématiques plus particulièrement sur l'utilisation des rapports trigonométriques. Nous présentons une activité de modélisation dans l'enseignement des mathématiques faisant intervenir un changement de registres, par exemple, la langue d'enseignement, le graphique et l'écriture symbolique. Pour mener à bien notre étude, nous avons construit et expérimenté une situation d'apprentissage avec les élèves d'une classe de 10ème.

* *Lycée Mgr Didier de Montclos de Sikasso, Mali – diarrasalimata2708@gmail.com*

[1] Savoir-faire de Mathématiques, 10ème Commune programme officiel du Mali en 2011

II. ANALYSE DE PROGRAMMES ET DE MANUELS

Le programme officiel [2] de l'enseignement des mathématiques au Mali recommande à ce que les élèves de la 9ème (13-15 ans) aient des connaissances sur les rapports trigonométriques, les relations entre les rapports trigonométriques d'un même angle aigu dans un triangle rectangle et la construction d'une table de rapports trigonométriques. Au passage à la classe suivante (10ème) [3] les élèves doivent acquérir des connaissances sur l'utilisation du matériel de géométrie et les rapports trigonométriques dans un triangle rectangle, effectuer des changements d'unité en trigonométrie, utiliser le cercle trigonométrique et déterminer les rapports trigonométriques des angles complémentaires et supplémentaires. Certains élèves ont du mal à distinguer un « angle non orienté » à un « angle orienté ».

Il n'existe pas de manuels officiels au Mali pour l'enseignement des mathématiques au lycée. Ce fait donne le libre choix à chaque enseignant d'utiliser le manuel qui lui convient. Cependant bon nombre d'enseignants utilise au niveau de la Seconde, le manuel « 2è Scientifiques Mathématiques » de la collection CIAM[4]. Le contenu de ce manuel ne correspond pas à l'intégralité du programme malien. En effet, la collection CIAM constitue pour chaque niveau scolaire un noyau minimal sensé être adapté aux programmes de mathématiques des pays francophones d'Afrique et de l'Océan Indien.

III. PRESENTATION DU DISPOSITIF EXPERIMENTAL

1. Le questionnaire

Pour avoir des éléments de réponses qui nous permettent de connaître les pratiques de classes des enseignants, ainsi que les manuels et leur exploitation en ce qui concerne la résolution de problèmes quotidiens en trigonométrie. Nous avons élaboré une fiche de questionnaires adressés aux enseignants du lycée. Ce questionnaire comporte 5 questions sur l'expérience professionnelle des enseignants les manuels scolaires qu'ils utilisent la fréquence de quelques types de problèmes qu'ils proposent aux élèves à savoir les problèmes du type : calculs (cosinus sinus tangente longueur d'un côté), écrire des démonstrations et résoudre des problèmes « concrets ». Nous avons mis l'intégralité de la fiche de questionnaire en annexe.

2. Situation expérimentale

Objectif

L'objectif de l'activité est d'évaluer les compétences d'observation et d'analyse des élèves et de tenter de comprendre leurs façon de se servirent des connaissances théoriques.

3. Énoncé de la situation

Le but de cette activité est de déterminer la taille d'un manguier à partir des données mathématiques et d'essayer de comprendre la traduction de l'énoncé donné en français en un schéma. Autrement dit, l'objectif est de faire une conversion entre les registres de représentation. Il s'agit pour l'élève de choisir une représentation graphique pour une situation donnée de la valider puis faire ressortir la relation entre les différents côtés d'un triangle rectangle.

[2] Ministère de l'Éducation Nationale –Institut Pédagogique National (1991) - *Programme de mathématiques du Second Cycle fondamental 9ème Année.*

[3] Ministère de l'Éducation Nationale (2011). *Programmes de mathématiques de l'enseignement secondaire général classes 10ème Commune*

[4] CIAM : Collection Inter Africaine de Mathématiques

Amadou veut connaître la taille de leur manguier, sa sœur Mariam lui fait savoir que le manguier est situé à 10 m du plancher de la porte de leur maison et qu'étant là-bas elle voit le sommet du manguier avec une inclinaison de $\alpha = 45°$ et le pied du manguier avec une inclinaison de $\beta = 30°$. On veut l'aider à résoudre son problème. Parmi les schémas suivants, y en a-t-il qui correspond à cette situation ? Si OUI lequel ? Justifier votre choix. Si NON, donner un schéma correspondant. Déterminer alors la taille du manguier.

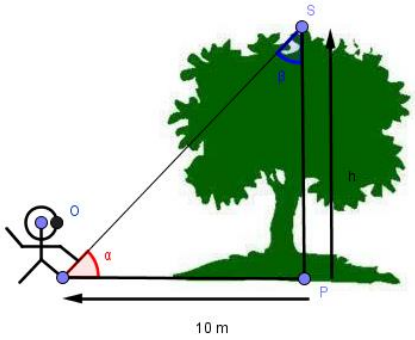


Figure 1. Schéma 1

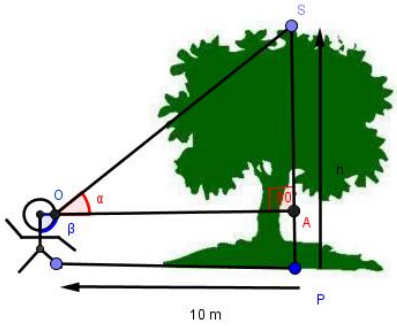


Figure 2. Schéma 2

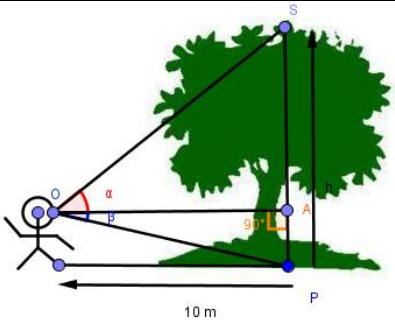


Figure 3. Schéma 3

IV. DEROULEMENT DE L'EXPERIMENTATION

L'expérimentation s'est déroulée dans une salle de classe 10ème. Dans cette classe il y a 60 élèves mais 30 élèves ont été retenus par mesure d'organisation pour cette expérimentation. Le travail s'est effectué dans l'environnement papier-crayon. Les matériels disponibles sont :

stylos crayons gommes chiffons craies et matériels de géométrie (règle graduée, équerre, compas, rapporteur).

Les élèves ont été répartis en six (6) groupes de cinq (5) élèves afin de développer leur esprit d'équipe comme l'exige la méthode APC. Nous avons veillé au bon déroulement de l'expérimentation les élèves échangeaient et étaient concentré sur la tâche souvent notre intervention était nécessaire pour plus d'éclaircissement points. À titre d'exemple, il y a eu un groupe qui ne comprenait pas le sens de l'angle d'inclinaison, alors qu'un autre était confus au sujet de la taille du manguier. Nous sommes donc intervenons pour clarifier ces points.

V. ANALYSE DES PRODUCTIONS

Solutions du problème

1) Parmi les schémas, un seul correspond à la situation du problème, soit le schéma 3. C'est le schéma 3, car les angles $\alpha \; et \; \beta$ sont bien représentés par rapport à l'horizontal et sont dans le champ de vision de l'observateur situé au planché de la porte de la maison.
2) Soit t la taille du manguier (en m)

$$t = h = PA + AS$$

1ère Méthode.

$$\tan\beta = \frac{PA}{OA} \Longrightarrow PA = OA \times \tan\beta$$

$$PA = 10 \times \tan 30° \Longrightarrow PA = 10 \times \frac{\sqrt{3}}{3} \Longrightarrow PA = 5{,}77\ m$$

$$\tan\alpha = \frac{AS}{OA} \Longrightarrow AS = OA \times \tan\alpha$$

$$AS = 10 \times \tan 45° \Rightarrow AS = 10 \times 1 \Rightarrow AS = 10\ m$$

$$t = 5{,}77\ m + 10\ m \Rightarrow t = 15{,}77\ m$$

2ème Méthode :

$$\cos\alpha = \frac{OA}{OS} \Longrightarrow OS = \frac{OA}{\cos\alpha}$$

$$OS = \frac{10}{\cos 45°} = \frac{10}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 10\sqrt{2}\ m$$

$$OS^2 = OA^2 + AS^2 \Longrightarrow AS^2 = OS^2 - OA^2 \Rightarrow gvf\ AS^2 = \left(10\sqrt{2}\right)^2 - (10)^2$$

$$AS^2 = 200 - 100 \Rightarrow AS^2 = 100 \Rightarrow AS = \sqrt{100} \Rightarrow AS = 10\ m$$

$$\cos\beta = \frac{OA}{OP} \Longrightarrow OP = \frac{OA}{\cos\beta} \Longrightarrow OP = \frac{10}{\cos 30°} = \frac{10}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{20\sqrt{3}}{3}$$

$$OP^2 = OA^2 + PA^2 \Longrightarrow PA^2 = OP^2 - OA^2$$

$$PA^2 = (\tfrac{20\sqrt{3}}{3})^2 - (10)^2 \Rightarrow PA^2 = 133{,}33 - 100 \Rightarrow PA^2 = 33{,}33 \Rightarrow PA = \sqrt{33{,}33}$$

$$PA = 5{,}77$$

$$t = 10 + 5{,}77 \Rightarrow t = 15{,}77\ m$$

Après analyses des productions, nous constatons que les élèves ont des lacunes en ce qui concerne la détermination des rapports trigonométriques et l'adaptation d'un modèle mathématique à un problème de la vie courante. Les difficultés des élèves portent surtout sur l'analyse de la situation et de l'élaboration du résumé. Pour la question N° 1 : Trois (3) groupes soient 15 élèves sur 30, soit 50% ont des difficultés à traduire l'énoncé écrit en registre schémas et à adapter un modèle mathématique à un problème de la vie courante.

Dans la copie suivante, le groupe a construit son propre schéma. Les élèves ont négligé la taille de l'observateur, qui est une variable important dans cette situation. Malheureusement ils n'ont pas pu aller au bout de leur démarche pour qu'on puisse voir comment ils allaient déterminer TS.

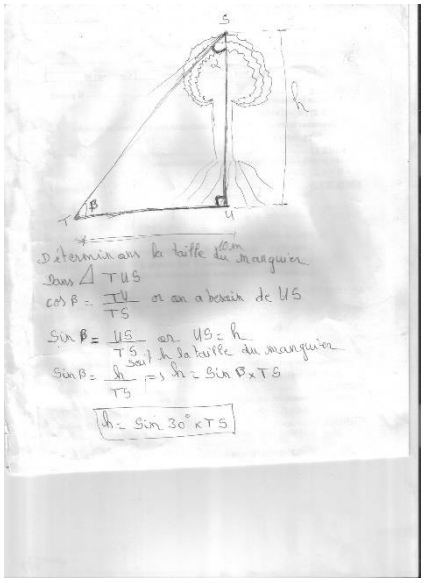


Figure 4. Production d'élèves

Deux groupes d'élèves ont eu des difficultés par rapport au vocabulaire, en particulier au sujet de la signification du mot « inclinaison ». Pour la question N°2, le choix du rapport trigonométrique permettant d'avoir la taille du manguier a posé problème à deux groupes d'élèves, particulièrement concernant la formule à utiliser pour retrouver le côté du triangle.

Dans la production de la Figure 5, le groupe d'élèves a non seulement identifié le bon schéma (N°3), mais aussi a utilisé la bonne formule pour calculer la taille du manguier et identifié les différents côtés des différents triangles utilisés. Ils se sont servis de la tangente de l'angle α et β dans les différents triangles pour avoir les mesures des deux parties qui composent la hauteur du manguier ensuite additionner ces deux mesures.

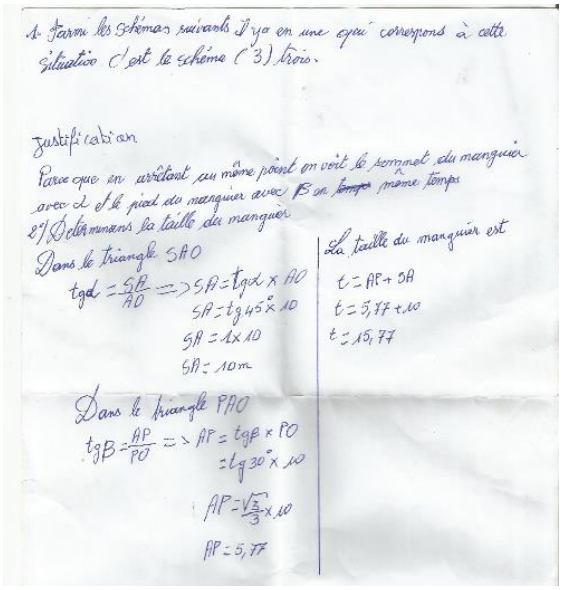


Figure 5. Production d'élèves question

Dans la Figure 6, les élèves de ce groupe connaissent la définition des rapports trigonométriques. Toutefois, l'identification des différents côtés (opposé et adjacent à un angle) et l'application de ces formules leur a posé problème (confusion entre le côté adjacent et l'hypoténuse dans le calcul du $cos \propto$).

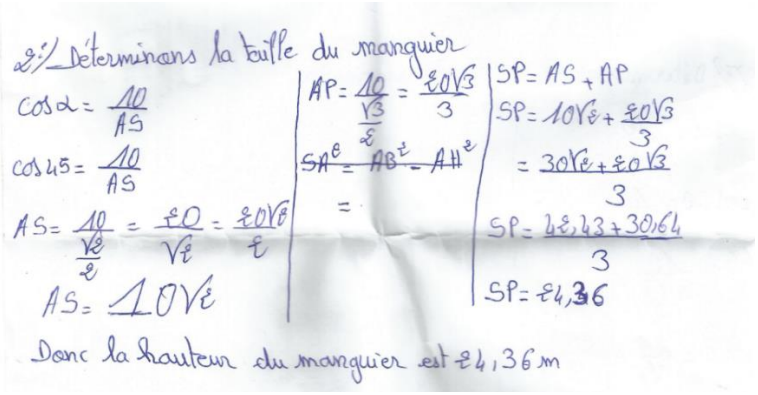


Figure 6. Production d'élèves question 2

VI. CONCLUSION

Lors de l'activité, les élèves étaient enthousiastes et concentrés sur la tâche. I y a eu beaucoup de discussions par rapport au choix du schéma, vu la divergence d'idée dans les différents groupes. Les élèves ont déclaré que le problème était un peu difficile, mais motivant et qu'ils ont eu du plaisir à le faire en équipe. Nous pouvons retenir que certains élèves ont éprouvé des difficultés à réinvestir leurs acquis théoriques dans ce problème la vie quotidienne. Certains élèves se montrent plus performants dans les travaux de groupe et d'autres plus à l'aise et plus compréhensifs avec leurs pairs. L'impact des pratiques de classe des enseignants et les manuels qu'ils utilisent sur l'apprentissage des élèves semble aussi important. Par conséquent, nous pouvons estimer que les enseignants peuvent développer chez les élèves des attitudes propres au travail scientifique et au travail d'équipe, afin de leur permettre de traiter des situations nouvelles à partir de leurs acquis. Par ailleurs, il est possible de donner aux apprenants des activités de natures variées (observations calculs et résolution de problème de la vie) pour leur permettre de lier les mathématiques à la vie quotidienne, afin de réduire les difficultés par rapport aux applications pratiques de la géométrie. En classe de mathématiques, les problèmes proposés aux élèves sont souvent théoriques, mais certains à caractère plus pratiques semblent aussi à être proposés aux élèves dans leur formation générale.

REFERENCES

Textes officiels

Ministère de l'Éducation Nationale (2011). *Programmes de mathématiques de l'enseignement secondaire général classes 10ème Commune.*

Ministère de l'Éducation Nationale –Institut Pédagogique National (1991) - *Programme de mathématiques du Second Cycle fondamental 9ème Année.*

Manuels

Collection CIAM (*1997*) *Mathématiques Seconde Scientifique*.

Collection IRMA (Les Nouvelles Editions Africaines- Abidjan 1985)

ANNEXE

Questionnaire à l'adresse des enseignants du lycée

NB. Cette fiche de questionnaires anonyme qui vous est adressée rentre dans le cadre d'un projet de recherche sur l'enseignement de la trigonométrie en $10^{ème}$ commune au Mali. Nous avons besoin de votre avis. Il nous semble que 30min devraient suffire. Merci pour le temps que vous allez y consacré.

1. Depuis combien d'années enseignez-vous ?

   Moins de 5ans ☐ Entre 5 ans -10 ans ☐ Plus de 10 ans ☐

2. Quels manuels scolaires utilisez-vous pour préparer vos cours de trigonométrie en ($10^{ème}$)?

   CIAM OUI ☐ Non ☐

   Autres manuels ? (Précisez)……

3. Quelle fréquence accordez-vous aux types de problèmes dans votre enseignement de la trigonométrie ?

Types de problèmes		Un peu	Beaucoup	Pas du tout
P_1	Calculs (cosinus, sinus, tangente, longueur d'un côté)			
P_2	Écrire des démonstrations			
P_3	Résoudre des problèmes « concrets » (problèmes de la vie courante)			

4. Si vous proposez des problèmes de type P_3 à vos élèves, donnez l'énoncé d'un ou deux (veuillez utiliser le verso si espace insuffisant)
5. Si non, donnez vos raisons ?

DIFFICULTÉS DES ÉLÈVES DU SECONDAIRE ÀVEC LA NOTION D'INTÉGRALE : UNE ÉTUDE DE CAS

DUPUIS[*] Antoine

Résumé – Notre mémoire porte sur les difficultés des élèves avec la notion d'intégrale dans l'enseignement secondaire en Belgique. Pour aborder ce questionnement, nous étudions comment la dimension outil-objet de la notion d'intégrale est prise en compte dans le secondaire. Nous présentons ici une analyse des programmes et de trois manuels qui montre comment l'intégrale est introduite en tant qu'objet et comment elle est utilisée comme un outil dans le cours en nous centrant sur les liens entre l'intégrale et la notion d'aire. De plus, nous complétons notre étude par une analyse des résultats obtenus à un questionnaire destiné aux enseignants et à un questionnaire destiné aux élèves. Nous donnons finalement des éléments de réponse à nos questions de recherche.

Mots-clefs : intégrales, aire, conceptualisation, dialectique outil/objet

Abstract – Our master thesis is about difficulties pupils encounter with the concept of integral in secondary school in Belgium. In order to investigate this question, we study how the tool-object dimension of the concept of the integral is taken into account in secondary school. We present here an analysis of the teaching programs in Belgium and of three textbooks which shows how the integral is introduced as an object and how it is used as a tool in the course, focusing on the links between the integral and the concept of area. Moreover, we complete our study by analysing results from a questionnaire for teachers and a questionnaire for pupils. We eventually give some answers to our research questions.

Keywords : integrals, area, conceptualisation, tool/object dialectic

I. CONTEXTE DU TRAVAIL

Cette recherche trouve son origine dans un projet que nous avons mené durant notre première année de master et qui traitait des difficultés d'enseignement de la notion de limite (suite et fonction) en première année universitaire. En Belgique, la définition formelle de limite est peu ou pas travaillée dans le secondaire. Les résultats liés aux limites de suites et de fonctions d'une variable réelle sont en général admis sans démonstration et les exercices proposés se réduisent souvent à des calculs de limites reposant sur l'application de règles de calcul admises elles aussi sans démonstration. Cela rend donc l'introduction de la notion difficile à l'université puisque la nécessité de définir la notion ne se fait pas sentir.

En prenant appui sur notre expérience personnelle lorsque nous étions élève dans le secondaire, nous retrouvons des caractéristiques semblables avec la notion d'intégrale. En effet, le cours sur l'intégration que nous avons suivi dans le secondaire était très algébrisé, centré sur les techniques pour calculer des intégrales (par exemple les calculs de primitives, l'intégration par parties ou par substitution) alors que l'enseignement universitaire s'attache davantage à formaliser la notion d'intégrale et à articuler cette notion avec celles d'aire et de primitive.

Le premier questionnement qui a donc émergé dans notre mémoire consiste à adopter un point de vue plus général que notre expérience personnelle pour étudier quels sont les liens qui sont réellement pris en compte entre les notions d'aire, d'intégrale et de primitive dans l'enseignement secondaire belge francophone.

[*] UMONS – Belgique – antoine.rsg.dupuis@gmail.com

II. TRAVAUX ANTERIEURS

Des travaux menés sur le plan international révèlent des difficultés récurrentes chez les élèves et les étudiants à articuler les notions d'aire, d'intégrale et de primitive. Les symboles utilisés pour écrire et calculer des intégrales sont eux aussi source de difficultés.

Par exemple, Orton (1983) a proposé la question suivante (Figure 1) à des étudiants universitaires n'ayant pas encore suivi de cours sur l'intégration à l'université. Leurs connaissances pour résoudre cette question sont donc celles acquises dans l'enseignement secondaire.

TASK D4

Calculate the shaded areas below, where possible. If it is not possible, explain why not.

(b)

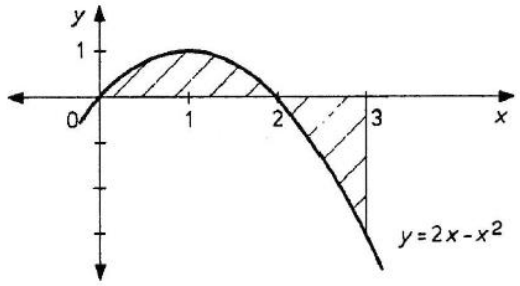


Figure 1 *– Extrait du questionnaire d'Orton (1983)*

Les résultats obtenus à cette question révèlent que les étudiants sont capables de dire qu'il faut calculer l'expression suivante :

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x - \int_2^3 f(x)\mathrm{d}x$$

En revanche, pratiquement aucun d'entre eux ne peut expliquer pourquoi le calcul de l'aire est découpé en deux intégrales ni pourquoi le signe « - » est présent.

Haddad (2012, 2013) constate elle aussi que l'articulation entre aire, intégrale et primitive pose des problèmes de compréhension chez les étudiants. Comme elle le souligne, « dès que la situation évoque la notion d'aire, la plupart des étudiants interprètent l'intégrale en termes d'aire sans jamais chercher à vérifier les conditions de validité d'une telle interprétation ». Il y a donc une confusion entre la notion d'intégrale et la notion d'aire. Malgré tout, Haddad constate que cela ne pose pas de problème aux étudiants puisqu'ils réussissent bien des exercices stéréotypés. Cette confusion pourrait, selon Haddad, être liée au fait que dans l'enseignement secondaire, une des seules applications du calcul d'intégrales est le calcul d'aire. Ainsi, les élèves « finissent par traiter l'intégrale et l'aire en tant que synonymes » (Haddad, 2013).

Schneider (1988) fait des constats semblables par rapport à l'enseignement belge : « un élève a plus avantage, s'il veut réussir à l'examen, à retenir par cœur 'le truc' des primitives et à connaître les techniques d'intégration, qu'à approfondir le théorème fondamental ».

Dans une étude comparant l'enseignement de l'intégrale en France et au Viêt-Nam, Luong (2006) montre que les programmes prennent en compte les liens entre l'aire, l'intégrale et la primitive mais que l'accent mis sur certains liens varie en fonction du pays. Au Viêt-Nam, les liens sont monodirectionnels en ce sens que les primitives servent à calculer des intégrales qui servent à calculer des aires. En France, en revanche, ces mêmes liens sont présents, mais également les liens réciproques. Ainsi, les aires servent à définir la notion d'intégrale (alors qu'au Viêt-Nam cette dernière est définie par la formule de Newton-Leibniz). Elles permettent aussi de calculer certaines intégrales directement, par exemple l'aire d'un demi-cercle de rayon R pour calculer $\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\mathrm{d}x$). Les intégrales permettent aussi de définir des primitives (de par l'intégrale dépendant de la borne supérieure). En effet, le Théorème Fondamental nous dit que si une fonction f est continue sur un intervalle $[a,b]$, alors la fonction $F : x \mapsto \int_c^x f(y)\mathrm{d}y$ est dérivable et est la primitive de f s'annulant en c (pour c un point de l'intervalle).

Luong s'intéresse aussi aux notations et plus particulièrement aux symboles ∫ et « d*x* ». En ce qui concerne le « s » étiré, il explique que ce symbole fait vivre la notion d'intégrale indéfinie au détriment de celle de primitive. En ce sens, Luong a repéré chez des élèves une confusion entre le calcul de primitives et le calcul d'intégrales où la seule différence *a priori* entre l'intégrale indéfinie et l'intégrale définie serait la présence ou non des bornes.

Au niveau du « d*x* », Luong (2006) constate que le symbole d*x* a une signification différente en fonction du contexte : soit il est utilisé comme indicateur de la variable d'intégration, soit il est utilisé comme élément différentiel. Ses analyses montrent également que dans certains manuels, le d*x* n'est jamais utilisé en tant que différentielle mais dans d'autres oui.

III. QUESTIONS DE RECHERCHE ET METHODOLOGIE

Les travaux qui viennent d'être évoqués montrent les difficultés des élèves et des étudiants à donner du sens d'une part aux symboles utilisés dans la définition de la notion d'intégrale et d'autre part dans les calculs, donc dans les aspects techniques, où il s'agit de mettre en relation les notions d'intégrale et d'aire. Or, selon Douady (1987), mettre en place une dialectique entre le sens et la technique participe à une bonne conceptualisation des notions. Elle souligne ainsi l'importance d'intégrer la dimension outil/objet des notions dans l'enseignement. Elle parle du caractère outil d'une notion lorsque celle-ci est utilisée pour résoudre un problème. Le caractère objet relève quant à lui de la présentation générale de la notion, notamment dans une définition. Douady explique que travailler une notion dans sa double dimension outil/objet s'associe à une certaine disponibilité de la notion et en favorise la compréhension.

De ce point de vue, nous cherchons à étudier comment la dialectique outil/objet est mise en place dans le chapitre sur l'intégration dans l'enseignement secondaire belge puisque les travaux antérieurs ont montré qu'il y a des variabilités en fonction des pays. Plus précisément, nous avons abordé dans notre mémoire les questions suivantes :

- Quel sens les élèves donnent-ils aux symboles associés à l'objet « intégrale » et à une écriture telle que $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$?
- Quels liens les élèves sont-ils capables de faire entre les notions d'aire, d'intégrale et de primitive ?

Dans cette communication, nous nous centrons sur l'introduction de la notion d'intégrale pour étudier comment l'objet est introduit et la dimension outil sera étudiée à travers les liens entre l'aire et l'intégrale.

Notre méthodologie repose sur différentes analyses didactiques. À partir d'une analyse des documents officiels, nous avons dans un premier temps élaboré un questionnaire visant à comprendre comment les enseignants du secondaire introduisent la notion d'intégrale et les symboles associés, puis s'ils repèrent des difficultés récurrentes chez les élèves. Nous avons mené 11 entretiens avec des enseignants. Cette première étude a été complétée par une analyse de manuels belges. Enfin, nous avons élaboré un questionnaire destiné aux élèves, dont le but est d'étudier comment les élèves mettent en lien les objets « aire » et « intégrale ».

IV. ANALYSE DES PROGRAMMES

La lecture des anciens et nouveaux programmes révèle une attention portée sur l'introduction de la notion d'intégrale et l'importance d'insister sur la présence de la notion de limite et d'un découpage de plus en plus fin pour évaluer de mieux en mieux une aire. Dès lors, l'aspect « objet » de l'intégrale apparaît très clairement, bien que l'insistance qui y est portée est plus petite dans les anciens que dans les nouveaux programmes.

Ensuite, l'élève est amené à réaliser dans le chapitre sur les intégrales un travail varié puisqu'il lui est demandé d'écrire des intégrales, de calculer des aires et des primitives et de mener également des démonstrations. Il y a donc un focus sur les registres d'écriture. Malgré tout, des implicites subsistent, comme nous pouvons le voir sur la figure 2. On nous indique que les notations sont très importantes, on mentionne le signe sommatoire et les indices, mais rien n'est dit sur le symbole « $\int$ », ni sur le d*x*.

> **Rédiger, argumenter, structurer, démontrer** : la définition de l'intégrale et les démonstrations requièrent une rédaction soignée, structurée faisant, entre autres, appel au signe sommatoire et aux indices.

Figure 2 *- Commentaire sur les notations dans les programmes.*

Au niveau de notre seconde question de recherche, les programmes permettent de traiter les liens entre les notions d'aire, d'intégrale et de primitive schématisés à la figure 3.

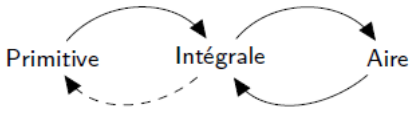


Figure 3 *- Liens à traiter entre les notions d'aire, d'intégrale et de primitive dans les programmes belges.*

Le lien primitive vers intégrale (désignant le fait qu'on a besoin d'utiliser les primitives pour calculer certaines intégrales (Théorème Fondamental)), le lien intégrale vers aire (désignant le fait qu'une des applications de l'intégrale est le calcul d'aires) ainsi que le lien d'aire vers intégrale (désignant le fait que pour définir l'intégrale, on a besoin de la notion

d'aire (signée) puisque la construction des sommes de Darboux ou de Riemann se base sur l'approximation de l'aire sous la courbe) doivent être enseignés. En revanche, il n'y a aucune obligation de travailler le lien intégrale vers primitive. Ce lien représente le fait qu'une intégrale permet de construire des primitives d'une fonction, via le théorème suivant : Soit $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et soit $c \in [a,b]$. Alors la fonction $F : [a,b] \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \int_c^x f(t)\,dt$ est l'unique primitive de f s'annulant en c. Sur le schéma, ce lien est en pointillés pour représenter le fait qu'il est libre d'interprétation de l'enseignant à la lecture des programmes.

V. ANALYSE DE MANUELS

Nos analyses portent sur les manuels Actimath 6, Espace Math 66 et CQFD Maths 6e (6 périodes par semaine). Ces collections sont très utilisées par les enseignants en Belgique.

Dans les trois manuels analysés, la dimension « objet » de la notion d'intégrale est bien présente mais l'insistance qui y est portée est variable en fonction du manuel. Plus précisément, chaque manuel présente la définition formelle de l'intégrale en termes de limite à partir des sommes de Darboux. Au niveau des notations, ce qui est commun aux manuels est que le « dx » indique par rapport à quelle variable il faut intégrer.

Dans l'Actimath et le CQFD, les auteurs ajoutent à cela que le symbole « ∫ » représente un « s » étiré symbolisant le « s » du mot « somme » pour rappeler les sommes de Darboux et le « dx » symbolise les largeurs des rectangles Δx (ou Δx_i) présentes dans le terme général des sommes de Darboux. A contrario, l'Espace Math ne commente pas les notations.

En ce qui concerne la dimension « outil » de l'objet « intégrale », les trois manuels insistent clairement sur le calcul d'aire (donc ils font le lien de primitive vers intégrale et d'intégrale vers aire). Ils introduisent également l'approximation d'une intégrale définie à partir de la méthode des trapèzes (basée sur la construction de la définition de l'intégrale). En revanche, le fait que l'intégrale sert à donner des primitives n'est que simplement cité dans les trois manuels.

L'utilisation de la définition de l'intégrale varie très fortement entre les manuels. Ainsi, dans l'Actimath, il est dit d'emblée que la définition de l'intégrale en termes de limite n'est pas utilisée pour la suite. Les propriétés sont donc démontrées à partir de la notion de primitive et de la formule de Newton-Leibniz. En revanche, l'Espace Math utilise la définition de l'intégrale pour démontrer ces propriétés mais également pour calculer des valeurs approchées d'intégrales définies. En revanche, dans le CQFD, les propriétés ne sont pas démontrées et la définition d'intégrale est utilisée, à l'instar des deux autres manuels, pour calculer des valeurs approchées d'intégrales définies.

Par ailleurs, le lien « intégrale » vers « aire » est beaucoup plus présent que le lien réciproque. Il reste des implicites autour de la dimension outil de l'intégrale qui pourraient, selon nous, induire des confusions chez les élèves semblables à celles repérées par Haddad (2013). Ces manques peuvent évidemment être comblés par les enseignants dans les classes, d'où l'intérêt des entretiens menés.

VI. ENTRETIENS AVEC LES ENSEIGNANTS

Les interviews ont été réalisées auprès de onze enseignants et ont duré une vingtaine de minutes. Nous leur avons posé des questions à propos des difficultés des élèves qu'ils repèrent, ainsi que sur les liens sur lesquels ils insistent en cours et sur les notations liées à l'intégrale.

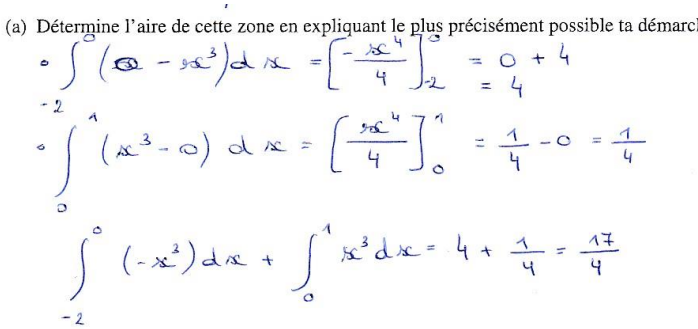
De ces interviews, nous en tirons les constats suivants. Un seul enseignant insiste sur le lien direct entre aire et primitive. Deux enseignants parlent du lien intégrale vers primitive. En revanche, tous les enseignants insistent sur le lien primitive vers intégrale ainsi que sur le lien intégrale vers aire (ce qui est logique, étant donné qu'il s'agit du cœur du cours du secondaire sur les intégrales) et tous insistent sur le lien aire vers intégrale, ce qui donne une place assez importante à la dimension « objet » de la notion d'intégrale dans l'enseignement de cette dernière en Belgique.

Nous concluons ainsi en constatant que ce sont donc les liens entre aire et intégrale qui sont mis en avant en classe. Les résultats des interviews sont conformes avec le contenu des programmes. Nous ajoutons que l'oubli du « - » n'est presque pas repéré par les enseignants, contrairement à l'enquête d'Orton (1983).

VII. QUESTIONNAIRE ÉLÈVES

Au vu des résultats des entretiens avec les enseignants, nous avons centré le questionnaire destiné aux élèves sur les liens entre aire et intégrale. Ce questionnaire a été soumis à 78 élèves issus de 5 écoles différentes et de 6 classes différentes. Le temps accordé aux élèves était de vingt minutes. Nous ne ciblerons, dans cette communication, qu'une partie du questionnaire.

La première question du questionnaire était la suivante : « On considère la courbe d'équation $y = x^3$ ainsi que les deux droites verticales d'équations respectives $x = -2$ et $x = 1$. On s'intéresse à la zone délimitée par la courbe, les deux droites verticales et l'axe des x. Détermine l'aire de cette zone en expliquant le plus précisément possible ta démarche. » Parmi les 78 élèves, 45% d'entre eux proposent un raisonnement correct, similaire au raisonnement de la figure 4.


(a) Détermine l'aire de cette zone en expliquant le plus précisément possible ta démarche.

$\int_{-2}^{0} (0 - x^3)\,dx = \left[-\frac{x^4}{4}\right]_{-2}^{0} = 0 + 4 = 4$

$\int_{0}^{1} (x^3 - 0)\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1} = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$

$\int_{-2}^{0} (-x^3)\,dx + \int_{0}^{1} x^3\,dx = 4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$

Figure 4 *- Raisonnement correct d'un élève.*

Cependant, un élève sur quatre (25 %) calcule l'aire en question en ne calculant que purement simplement l'expression $\int_{-2}^{1} x^3 dx$. Ceci témoigne d'une ambiguïté entre les concepts d'intégrale et d'aire.

Dans la suite de la question, nous leur avons demandé : « Selon toi, peux-tu déduire qu'il existe un lien entre la notion d'aire et la notion d'intégrale ? Explique ta réponse. ». Pour cette question, 51% des élèves jugent que l'intégrale est un outil pour le calcul d'aires. Ceci confirme l'accent très prononcé sur l'aspect « outil » de l'intégrale dans l'enseignement secondaire. Pour 15% d'entre eux, et c'est non-négligeable, l'aire sert à définir l'intégrale. Donc la dimension « objet » de l'intégrale n'est pas totalement occultée par sa dimension « outil ». Enfin, pour 10% des élèves, l'intégrale et l'aire sont deux concepts équivalents.

Enfin, la dernière question que nous présenterons dans cette communication est un vrai ou faux : « Dis si l'affirmation suivante est vraie ou fausse. Coche "je ne sais pas" si tu n'as aucune idée de la réponse. Tu ne dois pas justifier ta réponse. "L'aire de la zone entre la courbe d'une fonction, les droites verticales d'équations respectives $x = a$ et $x = b$ et l'axe des x est toujours donnée par $\int_a^b f(x)dx$."». La réponse « faux » a été cochée par 58% des élèves, la réponse « vrai » a été cochée par 35% des élèves et 7% d'entre eux ne répondent rien. Nous interprétons ces résultats dans la conclusion suivante.

VIII. CONCLUSION

Dans cette communication, nous avons étudié la dimension outil/objet de la notion d'intégrale en analysant les programmes, trois manuels et les résultats obtenus à un questionnaire destiné aux enseignants et à un questionnaire destiné aux élèves. Rappelons que nos questions de recherche sont les suivantes :

- Quel sens les élèves donnent-ils aux symboles associés à l'objet « intégrale » et à une écriture telle que $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$?
- Quels liens les élèves sont-ils capables de faire entre les notions d'aire, d'intégrale et de primitive ?

Attardons-nous sur la première question, dans un premier temps. Nos analyses montrent que le symbole « ∫ » est peu souvent mentionné, que ce soit dans les manuels ou par les enseignants, mais quand c'est le cas, le lien est clairement fait entre ce symbole et le « s » de « somme ». De plus, tous les enseignants interrogés et les trois manuels analysés insistent sur le fait que le « dx » provient des Δx_i, largeurs des rectangles dans la construction de la définition. De même, tous les enseignants et manuels insistent sur le fait que le « dx » indique la variable d'intégration. Nous pouvons donc conclure que pour les élèves, l'expression $\int_a^b f(x)dx$ rappelle *a priori* une somme (par l'intermédiaire du symbole « ∫ ») de rectangles d' « aire » $f(x)\mathrm{d}x$, rappelant la formule « longueur fois largeur »).

Intéressons-nous maintenant à la seconde question de recherche, portant sur les liens que peuvent faire les élèves entre les concepts d'aire, d'intégrale et de primitive.

Le lien primitive vers intégrale est introduit dans tous les manuels et par tous les enseignants interrogés. Il semble également compris de tous les élèves puisque, dans le questionnaire, ont réussi à utiliser les primitives pour calculer les intégrales définies. Il y a également une insistance très forte sur la dimension « objet » de l'intégrale puisque tous les manuels et tous les enseignants interrogés insistent sur le lien aire vers intégrale. De plus, 15% des élèves estiment ce lien suffisamment important pour le mentionner dans le

questionnaire. Par ailleurs, en toute cohérence avec nos analyses, de manière générale, le lien intégrale vers primitive n'est que simplement cité et pas travaillé.

Enfin, le lien intégrale vers aire semble connu mais pas totalement compris, étant donné que 45% des élèves peuvent calculer des aires (et ainsi différencier le concept d'aire du concept d'intégrale) alors que 58% des élèves connaissent ce lien puisqu'ils ont répondu correctement au vrai ou faux du questionnaire. Cette différence dans les pourcentages témoigne du fait qu'il reste des implicites autour de ce lien. Ceci est peut-être dû au fait que pour le vrai ou faux, il suffit de mobiliser une connaissance apprise « par cœur » alors que pour le calcul de l'aire sous la fonction cube, plus que connaître le lien il faut également le comprendre, et c'est peut-être cette différence qui explique le clivage entre les deux pourcentages.

Pour conclure, la figure 5 exprime schématiquement ce que nous venons de développer. Ainsi, en résumé, nos analyses semblent montrer que le lien aire vers intégrale ainsi que le lien primitive vers intégrale sont bien ancrés dans l'enseignement belge. Cependant, il ne semble pas y avoir suffisamment d'insistance sur le lien intégrale vers aire, de par les résultats de notre enquête auprès des élèves. Nous notons, pour terminer, qu'il n'y a presque aucune prise en compte du lien direct entre aire et primitive et le lien intégrale vers primitive n'est que simplement cité, comme évoqué ci-dessus.

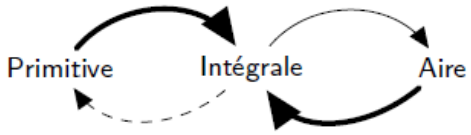


Figure 5 *- Liens que les élèves semblent faire entre l'aire, l'intégrale et la primitive en Belgique.*

REFERENCES

Adam, A., Lousberg, F. (2003) *Espace Math 66*, Éditions de Boeck.

Delfeld, H., t'Kindt-Demulder, I., Sevrin, N., Timmermans, M.-M., (2004) *Actimath 6*, partie 1 : analyse, Éditions Van In.

Douady, R., (1987) Jeux de cadres et dialectique outil/objet, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7/2, 5-31.

Haddad, S., (2013) Que retiennent les nouveaux bacheliers de la notion d'intégrale enseignée au lycée ? *Petit* x, 92, 5-30.

Luong, C. K. T., (2006) *La notion d'intégrale dans l'enseignement des mathématiques au lycée : une étude comparative entre la France et le Vietnam*, Thèse de doctorat.

Orton, A., (1983) Students'understanding of integration, *Educational Studies in Mathematics*, 14, 1-18.

Schneider, M. (1988) *Des objets mentaux « aire » et « volume » au calcul des primitives*. Thèse de doctorat, Université catholique de Louvain-La-Neuve.

ANALYSE DE L'ENSEIGNEMENT DE LA MESURE ET DES GRANDEURS A TRAVERS LES PROGRAMMES MATHÉMATIQUES MAROCAINS DE L'ENSEIGNEMENT FONDAMENTAL

EL ABBADI[*] Salwa

Résumé : Cette étude en quatre parties aborde l'image de grandeurs et de la mesure proposée par les programmes mathématiques marocains de l'enseignement fondamental afin de comprendre leurs traitements. Nous abordons dans une première partie, les éléments composant la problématique de notre recherche, puis présentons notre cadre théorique incluant deux aspects d'analyse (conceptuel et didactique) ; nous abordons ensuite le cadre méthodologique à travers l'analyse de contenu et concluons par les résultats obtenus.

Mots-clés : Grandeurs et mesures – enseignement fondamental – grandeurs mesurables et réparables – unité de mesure – mesurage.

Abstract: This four-part study examines the size and measurement offered by Moroccan mathematics programs in basic education in order to understand their treatments. The first part exposes the elements composing the problematic of our research. The second part presents our theoretical framework including two aspects of analysis, conceptual and didactic. The third part deals with the methodological framework. Content analysis is the technique we selected to carry out our study.

Keyword: Sizes et measures – basic education – measurables and identifiable quantities – unit of measurement – measurement

I. INTRODUCTION

Notre mémoire porte sur l'enseignement des grandeurs et des mesures en Primaire et en collège au Maroc ; le cycle primaire dure de la classe de CE1 jusqu'à celle de CE6 et accueille des élèves âgés de 6 à 12 ans, et le cycle collège accueille pendant trois années les élèves de 13 à 15 ans issus de l'école primaire, titulaires du certificat d'études primaires. Nous exposons dans une première partie notre problématique, puis afin de répondre aux questions de notre recherche, nous définissons un cadre théorique qui englobe deux types d'analyses, conceptuelle et didactique, attachées aux notions de grandeurs et de mesures ; nous poursuivons notre propos avec la méthodologie et l'analyse des documents afin d'expliciter l'outil adopté pour l'analyse des programmes. Nous concluons enfin avec les résultats obtenus à partir de l'étude des programmes de mathématiques pour chaque cycle d'enseignement fondamental.

II. PROBLEMATIQUE DE RECHERCHE

Les systèmes éducatifs de la majorité des pays s'accordent sur l'importance du domaine de la mesure et des grandeurs dans l'enseignement des mathématiques. Cependant, cette importance ne se traduit pas de la même façon dans chacun des programmes. D'ailleurs, tout curriculum fait appel dans l'élaboration à un ensemble critères et de choix qui justifient la conception, l'organisation et l'efficacité des contenus de ces programmes.

La majorité des notions mathématiques se sont construites pendant plus de deux mille à partir de relations entre les grandeurs et les nombres et entre les grandeurs et la géométrie ; ce qui a suscité notre intérêt pour ce domaine d'enseignement. De plus, les grandeurs et la mesure occupaient une place importante dans les programmes d'enseignement des mathématiques avant les années soixante-dix et surtout avant l'introduction des

[*] Ecole Normale supérieure, UCA- Marrakech, Maroc- salwaelabbadi@gmail.com

mathématiques modernes dans tous les programmes d'enseignement. Les derniers programmes marocains de l'enseignement fondamental intègrent les grandeurs et la mesure sous forme de domaine mathématique au primaire et comme objet d'étude en géométrie et en lien avec des activités numériques en enseignement secondaire collégial.

De ces différentes considérations, notre intérêt pour ce domaine n'a cessé de croitre et nous avons cherché à cerner et expliciter la place occupée par les grandeurs et la mesure dans ces programmes, ce qui nous a amenée à considérer la question suivante : comment les grandeurs et la mesure sont-elles traitées dans les programmes mathématiques de l'enseignement fondamental marocain ?

Pour traiter cette question, nous avons mené deux types d'analyse :

- une première, conceptuelle, sur les différentes grandeurs présentes dans les programmes à savoir la longueur, la masse, le temps, la contenance, l'aire, l'angle et le volume. Il s'agit de cerner tous les aspects fondamentaux caractérisant les grandeurs et la mesure en répondant aux questions suivantes : quelles sont les différentes approches utilisées pour définir les grandeurs et la mesure ? Quels sont les aspects fondamentaux de chaque grandeur traités par l'enseignement fondamental ?

- une seconde, didactique, sur l'enseignement de ces différentes grandeurs et de leurs relations d'intégration dans les différents domaines des programmes. Nous analyserons le développement des grandeurs et mesure en termes de progression dans le cadre des programmes et leurs utilisations dans les différents domaines. Cela nous permettra d'examiner les choix institutionnels et didactiques opérés au niveau des programmes : comment traiter la progression de l'enseignement des grandeurs et de la mesure au sein des programmes mathématiques marocains pour chaque cycle de l'enseignement fondamental ? Quels sont les différents aspects d'utilisation de la grandeur et de la mesure en tant qu'outils de traitement et de résolution des problèmes dans les différents domaines mathématiques ?

III. CADRE THEORIQUE

Dans une première partie, nous montrons la façon dont l'analyse conceptuelle permet de définir et caractériser les grandeurs et mesures et nous illustrons notre propos par l'étude d'une grandeur particulière, l'aire. Dans une seconde partie, l'analyse didactique traitera de l'introduction, de la progression de l'enseignement, et enfin de l'utilisation des grandeurs et de leurs mesures : il s'agit de voir ce qui caractérise la progression des apprentissages au sein de ce domaine, le rôle et le statut des grandeurs et de la mesure dans les autres domaines.

1. Analyse conceptuelle

Dans ce paragraphe, nous définissons la mesure et la grandeur selon deux angles : métrologique en rapport aux sciences expérimentales, et abstrait en rapport aux mathématiques.

En métrologie, selon le dictionnaire VIM (2012), la grandeur est une caractéristique physique qui caractérise une propriété d'un phénomène, d'un corps ou d'une substance, que l'on peut exprimer quantitativement sous forme d'un nombre et d'une référence. La référence peut être une unité de mesure, une procédure de mesure, un matériau de mesure ou une de leurs combinaisons.

En mathématique, la grandeur est une relation d'équivalence définie sur un ensemble d'objets comparables. Cette relation d'équivalence est issue d'un critère de comparaison.

Ces deux définitions conduisent à deux introductions potentielles des grandeurs : la première met l'accent sur le procédé de mesure auquel on s'intéresse, à l'acte de mesurer, et la deuxième renvoie au principe de comparaison sans faire appel au procédé de quantification. Par conséquence, nous pouvons nous interroger sur le choix fait par les programmes de mathématiques de l'enseignement fondamental : s'orientent-ils vers la quantification de la grandeur ou vers son principe de comparaison ?

En métrologie, la mesure se base sur un principe physique fondé sur un procédé physique expérimental ; afin d'identifier le résultat issu de ce procédé, sont déterminées une grandeur unité prise comme étalon, des techniques et du savoir-faire liés à des instruments.

En mathématique (Lebesgue 1975, Rouche 1991), la mesure est une application d'un ensemble d'objets vers l'ensemble des réels positifs et sa définition mathématique nécessite plusieurs conditions :

- l'ensemble des objets doit être muni d'une relation d'équivalence dont l'ensemble quotient est muni d'une structure totalement ordonnée ;

- tout sous ensemble de ces objets est mesurable. Toute composition ou décomposition de certains de ces objets est mesurable ;

- un principe de quantification : la mesure de tout sous ensemble d'objets est un nombre réel positif ou nul ;

- un principe d'additivité : la mesure d'un sous ensemble d'objet est égale à la somme des mesures de chacun de ses éléments.

Ainsi, la grandeur et la mesure apparaissent comme deux notions étroitement liées au niveau de leur définition, l'une renvoyant à l'autre. Par conséquence, nous pouvons nous demander ce qui doit être retenu comme élément primitif : la mesure ou la grandeur ?

Chaque grandeur a sa relation d'équivalence (son principe de comparaison) ou son procédé de mesurage qui la représente, un vocabulaire associé, et un traitement expérimental qui la distingue. D'un point de vue épistémologique, on peut souligner la présence de deux types de catégorisation des grandeurs : la première distingue les grandeurs mesurables de celles qui sont repérables, et la deuxième distingue les grandeurs géométriques des grandeurs physiques. Dans ce cadre, les grandeurs de base sont : la longueur, l'aire, le volume/la contenance, l'angle, la masse et la durée.

Pour chacune de ces grandeurs fondamentales, l'analyse conceptuelle vise à : définir cette grandeur en mettant l'accent sur le vocabulaire associé, établir le principe de comparaison et déterminer le principe de la mesure, l'instrument et les unités. Nous expliquons, à l'aide d'un exemple de la grandeur de l'aire, comment s'organise cette analyse (Annexe 1). Cette analyse conceptuelle nous oriente par la suite dans l'analyse didactique de l'enseignement.

2. Analyse didactique de l'enseignement de la mesure et des grandeurs

L'enseignement de la mesure et de la grandeur occupe une place importante dans les programmes de mathématiques de l'enseignement fondamental. Il traite un ensemble d'éléments : les propriétés des grandeurs, les différentes relations et comparaisons entre les grandeurs, les unités de mesure, le mesurage, les estimations et le calcul. Notons que la notion de grandeur prend naissance à partir d'activités de rangement et de classement d'objets physiques à travers des réalisations de tâches, de comparaison (Perrin-Glorian, 1999). D'un point de vue curriculaire, nous considérons trois parties de l'enseignement des grandeurs et mesures : l'introduction, la progression et l'utilisation dans d'autres domaines.

L'introduction porte sur la façon dont sont introduites les grandeurs : soit comme objets mathématiques étudiés par le biais de comparaisons sans passer par la mesure, soit à partir d'activités de manipulation d'objets concrets définissant la grandeur par la mesure et son unité. Par comparaison, il s'agit de définir la grandeur visée sans faire appel au procédé de quantification, de déterminer le type de comparaison (direct – indirect) et les transformations qui conservent la grandeur. Dans le principe de mesure, on s'intéresse à l'acte de mesurer mais aussi à l'estimation de la mesure, à l'utilisation d'instruments et à la quantification comme contexte pour traiter les nombres.

La progression d'enseignement peut être étudiée par grandeur (comment l'enseignement de chaque grandeur est-il réparti dans chacun des cycles d'enseignement ?), par années (comment les différentes grandeurs sont-elles enseignées chaque année ?), par la position d'une grandeur par rapport à l'autre ou encore par l'organisation des grandeurs selon les autres domaines mathématiques.

L'utilisation de la mesure des grandeurs est vue enfin comme écologie du savoir mathématique afin de soutenir le choix de situations d'apprentissages d'autres notions mathématiques, par exemple pour introduire des types de nombres comme les fractions, comme outil de raisonnement en géométrie ou pour traiter des données et des situations de proportionnalité.

IV. METHODOLOGIE ET ANALYSE DES DOCUMENTS

Notre recherche s'inscrit dans une méthodologie d'analyse du contenu, en considérant les aspects conceptuels et didactiques définis précédemment. Rappelons que nous nous interrogeons sur ce que les programmes de l'enseignement fondamental marocains ont retenu comme aspects fondamentaux et comme élément primitif la mesure ou la grandeur. Trois dimensions structurent notre analyse. Une première porte sur la façon dont sont définies les grandeurs et leurs mesures : quelles approches sont utilisées ? quels sont les aspects des grandeurs traités dans cet enseignement ? Une deuxième traite de la progression de l'enseignement par grandeur et par année d'enseignement, et une troisième s'intéresse aux grandeurs et mesures en tant qu'outil de traitement mathématique et de de résolution de problème dans différents domaines mathématiques.

Nous fondons cette analyse sur l'étude des documents officiels produits par la direction du curricula du ministère de l'éducation nationale, ainsi que sur les notes ministérielles soutenant son opérationnalisation ; cet ensemble étant considéré comme référence dans les pratiques enseignantes (Annexe 2). Dans notre mémoire, nous complétons cette étude par une analyse de manuels scolaires en termes de praxéologies mathématiques (Chevallard 2003), mais nous ne montrons ici qu'un seul extrait de manuel afin d'illustrer notre propos.

V. ANALYSE ET INTERPRETATION DES RESULTATS

De façon générale, nous avons observé que la progression de l'enseignement des grandeurs et de leurs mesures au cycle primaire est fondée sur une manière graduée d'une année scolaire à d'autre, et sur une progression spiralaire. Les concepts sont introduits par des situations d'apprentissage concrètes fondées sur la manipulation d'objets intermédiaires comme étant des unités données ; ensuite, des unités conventionnelles sont présentées avec leurs multiples et sous-multiples, puis, des opérations arithmétiques interviennent dans la résolution de problèmes associés aux mesures. Par exemple, selon le guide de l'enseignant de la première

année du cycle primaire, l'enseignement-apprentissage de la grandeur de la masse est fondé sur les tâches présentées comme suit:

- comparer des masses d'une manière directe à travers l'observation et l'utilisation de mains ;

- comparer des masses d'une manière indirecte à travers l'utilisation d'unités non conventionnelles données comme les billes ;

- comparer des masses à travers l'utilisation de la balance de Roberval. Dans ce cadre, l'enseignant insiste sur la position de l'aiguille de la balance, qui détermine l'équivalence des objets ;

- classer des objets selon leurs masses par rapport à une unité donnée.

Le processus de l'enseignement-apprentissage du domaine de la mesure au cycle primaire souligne en premier temps qu'il faut baser sur une comparaison d'objets côte à côte pour distinguer ce qui est commun, et sur une catégorisation fondée sur le regroupement d'objets ayant des caractéristiques communes. Des activités proposées dans un manuel pour soutenir la première leçon du domaine de la mesure sont données en Annexe 3.

Nous constatons que les activités du manuel étudié concernant l'introduction de la notion de grandeur sont fondées sur l'observation d'images d'objets. Les différentes consignes consistent à demander à l'élève soit :

- de sélectionner, à partir d'une image contenant des couples d'objets, celui qui est le plus long, ou qui occupe la grande superficie ;

- de relier une pancarte à un groupe d'image selon un critère donné (même longueur, même forme, même volume, même couleur) ;

- de mettre une croix sur les grands objets et un rond sur les petits.

Le programme de mathématiques insiste sur la nécessité de travailler sur le développement des grandeurs et leurs mesures en tant qu'outils de traitement et de résolution des problèmes dans les différents domaines mathématiques. Ainsi, la construction des nombres est abordée à partir des mesures des grandeurs et des opérations arithmétiques sur les mesures. Dans le domaine numérique, les différents ensembles des nombres (nombres décimaux et fractions), les opérations, les relations d'ordre peuvent être construites à l'aide des mesures des grandeurs. La proportionnalité est travaillée à la fois dans le cadre des mesures de grandeurs et dans le numérique. Par conséquent, la grande partie du programme de mathématiques du cycle primaire est consacré à la mesure, plus qu'aux grandeurs indépendamment de leur mesure.

Les activités géométriques se basent sur les connaissances intuitives et spatiales de l'élève, sur des caractéristiques des objets, des polygones, et des figures géométriques, et sur les transformations géométriques. Les grandeurs visées par ces activités sont celles de nature géométrique comme la longueur, l'angle, l'aire et le volume. Elles sont considérées comme étant des caractéristiques géométriques à étudier en rapport aux figures et transformations géométriques. En fait, l'apprentissage des différentes notions géométriques se réalise à partir de situations dans lesquelles interviennent des grandeurs géométriques et leurs éléments associés (le vocabulaire, la mesure, …). Par conséquent, les savoirs relevant de ce domaine se révèlent être fondamentaux afin produire des raisonnements géométriques pour le cycle secondaire collège.

L'étude des notes ministérielles associées à la fois aux contrôles continus et au cadre du référentiel d'examen régional de fin de cycle primaire nous permet de voir que l'évaluation

n'évalue pas les compétences visées par le programme de mathématiques mais plutôt le contenu mathématique enseigné. L'évaluation du domaine de la mesure se base principalement sur des pratiques de mesurage et de calcul. En fait, d'après les objectifs de l'évaluation de ce domaine, nous avons remarqué que c'étaient principalement des procédures basées sur l'utilisation des formules de calcul, de changements d'unités et d'utilisation d'instruments de mesure qui étaient visées. Par conséquent, l'approche métrologique est l'approche fondamentale adoptée pour évaluer le domaine de la mesure.

VI. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

La méthodologie employée pour étudier les programmes de mathématiques marocains de l'enseignement fondamental fait apparaitre l'importance de la mesure au détriment de grandeur indépendamment de la mesure. La méthodologie que nous avons employée, basée sur la combinaison de l'analyse conceptuelle et de l'analyse didactique des grandeurs et de leur mesure nous permet de construire un outil d'analyse des programmes, mais aussi des manuels scolaires et de l'enseignement dispensé en classe. Nous sommes bien consciente de l'importance de prendre en compte les choix et les décisions de l'enseignant, mais aussi ses interactions et stratégies en classe : les outils que nous avons utilisés pour notre travaild peuvent aussi être développés pour étudier de telles questions.

REFERENCES

Chevallard, Y. (2003), Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques. Communication aux IIIe Journées d'études franco-québécoises (Université René-Descartes Paris 5, 17-18 juin 2002). Paru dans S. Maury S., M. Caillot (éds), Rapport au savoir et didactiques, Paris : Fabert, p. 81-104.

Guide d'enseignement des mathématiques efficaces d'Ontario de la maternelle à la 3ème année-Mesure (2010) http://www.atelier.on.ca/edu/resources/guides/GEE_math_M_3_Mesure.pdf

Guide d'enseignement des mathématiques efficaces d'Ontario de la 4ème à la 6ème année – Mesure (2010) http://www.atelier.on.ca/edu/resources/guides/GEF_math_4-5-6_Mesure.pdf

Guide d'enseignement des mathématiques efficaces d'Ontario pour les attributs de mesure – longueur, aire, volume, capacité, angle, masse, temps, température

Lebesgue, H (1975) La mesure des grandeurs. Réédition A. Blanchard.

Perrin-Glorian M-J (1999) Le problème de l'enseignement des mesures des grandeurs géométriques à partir de l'exemple des aires. Repéré à http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01385025/document.

Rouche, N. (1991) Le sens de la mesure. Didier-Hatier : Bruxelles.

ANNEXE 1 – ANALYSE CONCEPTUELLE DE LA GRANDEUR AIRE

Définition : l'aire est une grandeur géométrique caractérisant toute surface plane. L'aire d'une figure plane est l'aire de sa surface intérieure limitée par sa frontière.

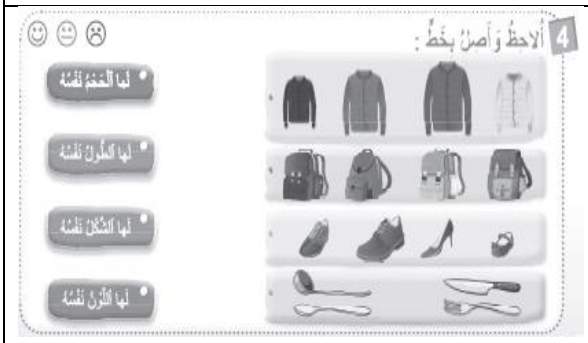
Principe de comparaison : notons que le principe de comparaison des surfaces par la superposition ne s'applique que pour celles ayant la même forme. Pour les cas des surfaces de formes différentes, on applique le principe de découpage-recollement.

Mesure : la mesure de l'aire d'une surface nécessite la mise en œuvre d'un ensemble d'unités, pouvant être conventionnelles et non conventionnelles. L'unité de mesure universelle est le mètre carré. D'autres unités agraires existent comme l'are (cent mètres carrés), le centiare (un mètre carré) et l'hectare (dix mille mètres carrés). Par ailleurs, les carrés d'un quadrillage sont considérés comme étant des unités de mesure non conventionnelles.

ANNEXE 2 - LISTE DES DOCUMENTS OFFICIELS RETENUS POUR L'ANALYSE

Cycle	
Primaire	Le guide pédagogique de l'enseignement primaire – 2009-
	Les programmes et les orientations pédagogiques de l'enseignement primaire – Septembre 2011
	Le programme révisé pour les quatre premières années de l'enseignement primaire – 10 Septembre 2015 : - Le cadre d'orientation général - Les programmes et les orientations pédagogiques
	Mise à jour du curriculum pour l'enseignement primaire – 20 Aout 2018 : les matières de la langue arabe, la langue française, les mathématiques et la science pour les quatre première années de l'enseignement primaire.
	La note ministérielle numéro 179 de suivi des contrôles continus
	Le cadre de référence de l'examen régional commun pour l'obtention du certificat d'études primaire – 2007 – les mathématiques
	La note ministérielle numéro 63 définissant le cadre de référence de l'examen régional commun pour l'obtention du certificat d'études primaire – 2011- les mathématiques
Secondaire collégial	Les programmes et les orientations pédagogiques des mathématiques du cycle secondaire collégial – Aout 2009
	La note ministérielle numéro 192 de suivi des contrôles continus
	Le cadre de référence de l'examen standard régional pour l'obtention du certificat d'études collégial - 2010

ANNEXE 3 : ACTIVITÉS PROPOSÉES POUR INTRODUIRE LA MESURE

	1-les apprenants cernent chaque objet de grande forme en rouge. On s'intéresse par la propriété du volume pour ces objets. En fait, ces objets ont des formes différentes, cependant, ils ont de volume commun.
	2-cerner en vert les objets petits. Malgré les objets se différent, ils ont un volume commun, c.-à-d. ils ont tous petits.
	3-cerner chaque objet long. Dans ce cas, la longueur est considéré la propriété commune de ces objets.
	4-les apprenants observent des images, et ils relient chaque ligne de ces images avec les propriétés communes de ces objets. Les chemises de la première ligne ont la même forme, et les cartables de la deuxième ligne ont le même volume. Cependant, les chaussures de la troisième ligne ont la même couleur, et les objets de la quatrième ligne ont la même longueur.

ETUDE DES SÉANCES DE DÉCOUVERTE DANS LES MANUELS SCOLAIRES : LE CAS DE LA DIVISION AU CE2

HAGÈGE Estelle[*] - LOPES MARIE[**]

Résumé – L'étude que nous avons menée porte sur une analyse *a priori* de séances de découverte proposées pour la division dans deux manuels scolaires de Cours Elémentaire 2 (CE2), soit pour des enfants de 8-9 ans. Afin d'acquérir des nouvelles notions mathématiques et d'ancrer les apprentissages chez les élèves, nous avons démontré le bien fondé de proposer des situations-problèmes lors de séances de découverte, ici la division. Nous avons donc voulu analyser si les situations proposées par les manuels scolaires étaient des situations problèmes.

Mots-clefs : manuels scolaires, séance de découverte, division, situation-problème, didactique.

Abstract : The study we have conducted focuses on an a priori analysis of the discovery sessions of division available in two scolar manuals for "Elementary Course 2" (CE2) level, either 8-9 year-old children. To develop new mathematical notions and to consolidate the acquired skills among students, we have shown the merit to propose situational problems in discovery sessions, here for the division. We decided to analyse if the problem-solving tasks offer by the scolar manuals were situational problems.

Keywords : scolar manuals, discovery sessions, division, situational problems, didactic.

I. PRESENTATION GENERALE DU MEMOIRE

Dans le cadre du mémoire de master Métiers de l'Enseignement, de l'Education et de la Formation, 2ème année, nous avons décidé de nous intéresser aux manuels scolaires de mathématiques à l'école élémentaire. Si nous nous sommes intéressées à ce sujet, c'est parce qu'il nous importait de comprendre d'un point de vue didactique les enjeux de l'usage d'un manuel scolaire en classe. Cette recherche a été initié par la volonté d'éclairer notre pratique professionnelle (professeurs des écoles stagiaires) à travers une démarche scientifique. Nous avons souhaité plus précisément nous intéresser aux activités dites de découvertes, exploratoires ou préparatoires, celles qui servent à aborder une notion nouvelle pour les élèves. Dans ce mémoire, nous nous sommes penchées sur le cas de la division de nombres entiers au CE2. Nous avons choisi le CE2, car dans les programmes scolaires, c'est à ce moment-là que les élèves découvrent cette notion. L'enjeu que nous avons défini à travers ce mémoire est d'analyser ces séances de façon à observer si elles étaient adaptées au savoir visé, si elles étaient pertinentes pour atteindre le savoir visé.

II. CADRE THÉORIQUE ET PROBLEMATIQUE

Notre cadre théorique s'appuie tout d'abord sur le triangle pédagogique de Jean Houssaye qui s'intéressent à la relation entre le savoir, l'étudiant et l'enseignant.

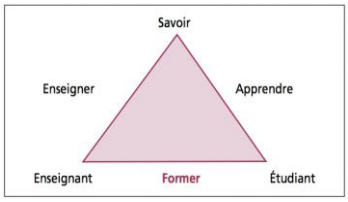


Figure 1 - Les pôles de l'apprentissages selon Houssaye (2000)

[*] UPEC-ESPE, France – estelle.hagege@gmail.com
[**] UPEC-ESPE, France – lopes.marie94@hotmail.fr

Selon lui, deux des éléments de ce triangle se constituent comme sujet, pendant que le troisième *« doit accepter la place du mort ou, à défaut, se mettre à faire le fou »* (Jean Houssaye, 2009, p.15). Si, en classe, l'enjeu est bien l'apprentissage de l'élève et donc qu'il acquière le savoir, alors l'enseignant doit pouvoir « s'effacer » afin de laisser le savoir et l'élève devenir sujet, et surtout l'élève doit être responsable de son savoir. En didactique des mathématiques, le savoir est bien celui du savoir mathématique.

Nous avons ensuite appuyé notre recherche sur des travaux en psychologie constructiviste et socioconstructiviste. Ils nous ont permis de rendre compte du processus de l'apprentissage. Quels facteurs pouvaient influencer la construction des apprentissages chez l'élève ? Nous avons mis en évidence qu'un des facteurs était la motivation intrinsèque. Ainsi à travers ces travaux nous avons pu mettre en évidence la nécessité de donner du sens aux apprentissages pour les élèves et de les mettre en position d'acteur dans la construction de leur savoir.

La didactique des mathématiques étant notre domaine de recherche, il nous a fallu définir un certain nombre de concepts essentiels, comme ceux de « tâche » et « activité » définit par Rogalski (2003), car c'est bien au niveau de la tâche que nous nous situons dans ce mémoire, c'est-à-dire dans ce qui est prescrit aux élèves avant toute activité de leur part.

En s'intéressant à la didactique des mathématiques, nous nous sommes rendu compte que la manière de donner du sens aux apprentissages et de les rendre effectifs, selon certains auteurs, était de rendre actif les élèves, en leur faisant adopter une posture de chercheur. La théorie des situations didactiques de Brousseau nous a permis de mettre en évidence que les situations a-didactiques étaient les situations qui permettaient de préserver le lien entre le savoir et l'élève, ce qui signifie que l'enseignant, responsable des moyens mis en œuvre dans la classe selon l'institution et des conditions d'apprentissage des élèves, doit proposer de telles situations et du même coup s'effacer.

C'est ainsi que nous nous sommes demandées quelles pouvaient être ces situations mises en place par l'enseignant, les plus propices aux apprentissages dans la classe. Après avoir effectué le champ conceptuel de la division, en nous appuyant sur les travaux de Vergnaud (cité par Fénichel et Pfaff, 2005), en y relevant notamment les classes de problèmes, nous avons défini alors la situation-problème, en nous appuyant sur la définition de Fénichel et Pfaff. Selon elles, la résolution de problème est une activité fondamentale de la démarche d'apprentissage et pour qu'une situation soit construction de connaissances, des critères doivent être réunis.

Ainsi, selon ces auteurs, ce sont ces situations-problèmes qu'il convient de donner aux élèves afin qu'ils construisent au mieux le sens des apprentissages et donc le savoir visé. Or rappelons-le, les moyens mis en œuvre par l'enseignant qui nous intéressait ici, sont les manuels scolaires proposés aux élèves.

Les travaux de Brousseau sur la TSD, ainsi que les travaux de Fénichel et Pfaff sur les situations-problèmes, au cœur, selon elles, du processus d'apprentissage des notions mathématiques, nous montrent comment ces situations doivent être menées pour que les notions mathématiques fassent sens chez les élèves et que l'apprentissage d'une notion mathématique puisse se faire. L'élève doit faire preuve de dévolution (Brousseau,1998 mise à jour 2010), grâce aux moyens mis en œuvre par l'enseignant, dans une situation qui va ébranler ses connaissances actuelles afin de s'approprier la connaissance nouvelle.

Or d'après Brousseau (1986, cité par Bessot, 2003), « il existe pour tout savoir une famille de situations susceptibles de lui donner un sens *correct* », ce qui signifie qu'il est possible d'estimer de façon *a priori* si la situation proposée par le manuel est susceptible de donner un sens. Brousseau nomme ces situations, des situations « fondamentales », elles le sont car elles font en sorte que la stratégie optimale pour résoudre le problème amène à la connaissance

visée, en ce qui nous concerne la connaissance visée est la division. Bessot ajoute que « cette situation "fondamentale" est représentée par un *ensemble fini de variables didactiques*, pertinentes par rapport à la signification du savoir, enjeu d'enseignement. » (Op. cit p.17).

Il ajoute dans un autre de ses ouvrages que « ces variables sont pertinentes à un âge donné dans la mesure où elles commandent des comportements différents. Ce seront des variables didactiques dans la mesure où en agissant sur elles, on pourra provoquer des adaptations et des régulations : des apprentissages. » (Brousseau, 1982 b, cité par Bessot, 2003). Les variables didactiques sont donc susceptibles de favoriser ou de bloquer des procédures. On voit bien ici l'importance d'analyser les variables didactiques à travers une analyse *a priori* car en montrant les choix possibles, les stratégies envisageables, les alternatives et les conséquences de ces choix, nous pourrons voir quels apprentissages sont en jeu.

Mounier et Priolet (2016) s'intéressant dans une étude à la programmation des techniques opératoires dans les manuels scolaires, et plus particulièrement au cas de l'addition et de la soustraction, se positionnent :

> « dans le cadre d'une double approche didactique et ergonomique (Robert & Rogalski, 2002) en considérant que les tâches données aux élèves génèrent des activités qui témoignent des mathématiques à l'œuvre. Bien qu'elles puissent être redéfinies par les enseignants puis les élèves (Rogalski, 2003), les tâches prescrites dans les manuels sont potentiellement à la source de ces activités, et donc de manière plus générale à celles des mathématiques fréquentées par les élèves sur l'année. » (p.5)

C'est dans ce même cadre que nous nous sommes positionnées. Si nous ne pouvons analyser précisément l'activité réelle de l'élève lors d'une activité de découverte, et surtout le sens que celle-ci a pour lui, nous pouvons analyser ce qu'il peut mettre en place *a priori* lors de celle-ci. Quelle activité va pouvoir être engagé potentiellement par l'élève à qui on prescrit une tâche ?

Rogalski (2003) distingue la tâche prescrite (par un enseignant par exemple), qui est définie par un but et des conditions particulières pour l'atteindre, et l'activité réalisée par l'élève, c'est-à-dire ce que fait réellement l'élève pour réaliser cette tâche. Grâce à l'analyse *a priori* des activités de découvertes, nous nous sommes demandées si les tâches prescrites par les manuels sont adéquates à provoquer l'activité de l'élève, celle qui viserait à découvrir une notion nouvelle en provoquant le conflit cognitif visant à l'instauration d'un savoir nouveau. Autrement dit, est-ce que le savoir visé est effectivement celui potentiellement mis en œuvre par l'élève ?

Dès lors en prenant en considération tous ces éléments, les questions que nous nous sommes posées sont : si les enseignants permettent les apprentissages en mettant en place des moyens, et que les moyens qui nous intéressent ici sont les manuels scolaires, plus précisément les séances proposées par les manuels scolaires lors de la découverte d'une notion mathématique (dans notre cas la division), alors est-ce que ces séances de découverte proposées dans les manuels scolaires peuvent provoquer les conditions de ces apprentissages ? Les conditions sont-elles présentes pour provoquer au mieux le savoir attendu ? Quel est le savoir visé ? Est-il conforme à celui annoncé par le manuel, c'est-à-dire ici, la division ?

Si les situations a-didactiques décrites par Brousseau sont les mieux placées pour préserver le lien entre le savoir et l'élève, sans l'intervention de l'enseignant ; si les situations-problèmes décrites par Fénichel et Pfaff (2005) semblent être des situations qui mettent l'élève dans une posture de chercheur, et qui favorisent donc la construction d'une notion nouvelle chez les apprenants en contribuant à la prise de conscience des limites de leurs connaissances actuelles et en leur donnant du sens ; et si « les situations-problèmes devraient donc être proposées au démarrage de tout apprentissage » (Fénichel et Pfaff, 2005, p.1), alors il nous a semblé intéressant d'observer si les séances de découvertes proposées par les manuels sont de réelles

situations-problèmes. Tout en prenant en compte toutes les caractéristiques de la situation-problème, il nous a fallu comprendre à quelle(s) stratégie(s) font appellent potentiellement les tâches prescrites dans les activités de découvertes proposées par les manuels scolaires, et si ces procédures (mises en place potentiellement par les élèves) correspondent au savoir visé par le manuel, et donc analyser quel est le savoir ou quels sont les savoirs visé(s). Nous avons analysé si l'utilisation de la connaissance visée est nécessaire pour parvenir à la solution du problème, et enfin la possibilité pour l'élève de comprendre la consigne et de s'engager vers une solution sans disposer de cette connaissance entièrement élaborée.

III. METHODOLOGIE

Afin de tenter de répondre à notre problématique, nous avons donc mené une analyse *a priori* des séances de découvertes proposées par deux manuels scolaires de CE2, *J'apprends les maths CE2* et *Cap Maths CE2*, pour l'apprentissage de la division d'un nombre entier. Nous avons donc construit une grille d'observation qui avait comme objectif de déterminer si les critères de la situation-problème, précédemment évoqués et définis par Fénichel et Pfaff (2005), étaient présents dans les séances de découverte analysées. Ainsi, il nous a fallu répondre à travers cette analyse, à un certain nombre de questions : la situation rend-elle nécessaire la connaissance dont l'apprentissage est fixé et explicité par les objectifs ? La réponse est-elle immédiate ? L'élève est-il capable de s'engager dans la tâche ? L'élève est-il en posture de chercheur ? L'élève est-il en mesure de valider par lui-même sa stratégie et sa réponse ?

Cette grille d'analyse a été soumise à chaque manuel étudié et à toutes les tâches qui étaient prescrites avant l'exposition à un nouveau savoir, ici la division, c'est-à-dire avant l'institutionnalisation**,** de façon à pouvoir répondre dans l'analyse de leurs données à la problématique. Nous avons intégré dans notre analyse les guides pédagogiques, fichiers, ou tout autre document lié à la séance ou les séances de découverte.

IV. RÉSULTATS

Notre analyse s'est construite en deux temps. Tout d'abord l'analyse s'est basée sur la présentation générale des manuels (organisation, présentation, constitution, etc.). Un des objectifs de cette première partie fût d'observer ce qui était présent avant la ou les séances de découverte de la division, car un des critères de la situation-problème est le fait que l'élève puisse être capable de s'investir dans la tâche, ce qui sous-entend qu'il ait les prérequis à réaliser celle-ci, mais aussi que la tâche proposée soit un problème où la réponse n'est pas immédiate, sinon cela reste un exercice de réinvestissement. Il nous fallait donc observer si ce qui avait été fait avant ces séances.
Dans un deuxième temps, l'analyse a porté sur les séances de découverte consacrées à la division. Celle-ci s'est constituée de deux étapes. La première fût l'analyse de l'architecture des séances de découverte.

Sur quel support se trouve-t-elle ?	Les « activités préliminaires » se trouvent dans le guide pédagogique. Les « activités découvertes » sont sur le fichier.
Séance de découverte bien identifiée Oui/non	Oui, dans le guide pédagogique : partie activité préliminaire puis activité sur le fichier. Dans le fichier de l'élève, 2 types d'activités signalées par une couleur de cadre différente.
Y-a-t-il une institutionnalisation sur la même page ?	Présence ponctuelle : institutionnalisation sous le titre « J'ai appris » dans le fichier de l'élève. Lorsqu'elle est présente, elle est dans le même encadré que « l'activité de découverte », sous forme d'un bandeau de couleur, qui est bien

Présence/absence	visible. La tâche est d'abord présentée, et juste après, dans le même cadre, le « J'ai appris » qui sert à mettre l'accent sur ce qui a été vu précédemment, une sorte d'essentiel à retenir, avec parfois des exemples, voir la solution de la tâche de « l'activité de découverte » (exemple sq 63).

Figure 2 : l'architecture des séances de découverte de *J'apprends les maths CE2*.

Sur quel support se trouve- t-elle ?	Sur le guide pédagogique et le fichier matériel photocopiable pour une d'entre elle.
Séance de découverte bien identifiée Oui/non	Séance de découverte bien identifiée car ne se fait pas sur le fichier de l'élève (réservé à l'entrainement). Elle se fait de façon ritualisée et quotidienne sur une feuille ou un cahier de brouillon. C'est une activité décrochée du fichier de l'élève qui peut faire appel à de la manipulation.
Y-a-t-il une institutionnalisation sur la même page ? Présence absence	Absence d'institutionnalisation sur le fichier. Sur le guide pédagogique, des synthèses de la recherche sont proposées mais pas d'institutionnalisation, de trace écrite explicite en s'appuyant éventuellement sur le dico des maths (mais attention tout n'y est pas) Préconisation de *Cap Maths* : - faire des traces écrites collectives affichées dans la classe avec l'aide de l'enseignant - ces traces écrites collectives doivent être ensuite regroupées dans un cahier pour les notions importantes

Figure 3 : l'architecture des séances de découverte de *Cap Maths CE2*.

La seconde étape fût l'analyse *a priori* des séances de découverte comprenant la liste des variables didactiques, le choix retenu pour chaque variable dans la tâche prescrite, les stratégies envisageables et leur analyse, et enfin le ou les savoirs mathématiques en jeu *a priori*, notamment ceux préconisés par les manuels. Nous avons analysé les séances jusqu'au moment de l'institutionnalisation.

Nous avons chacune récolté les données d'un manuel, et analysé celles-ci au chapitre analyse de résultats.

Tâche	Trouver combien de fois *l* est contenue dans *L* sans instrument.
Le type de problème	Problème de recherche d'une quatrième proportionnelle avec recherche du nombre d'unité avec reste.
Illustration	Pas d'illustration puisqu'elle n'est pas sur le fichier.
Modalité	Oral/collectif
Déroulement (d'après le Livre du maitre p.138-139)	L'enseignant annonce explicitement aux élèves qu'ils vont apprendre la division, dès le début de la séquence. Il écrit au tableau, en commençant l'activité préliminaire, « 186 : 25 ? et lit cette opération : « On va calculer 186 divisé par 25. » » *La conséquence de cette explicitation est que les élèves savent d'emblée ce qu'il va falloir faire durant « l'activité préliminaire » (…)*

Figure 4 : extrait de la grille d'analyse *de J'apprends les maths CE2*, RETZ.
Séquence 63 p.92 dans le fichier de l'élève et p.138-139 du Livre du maitre

Dans *J'apprends les maths CE2*, les séances de découverte sont introduites par des « activités préliminaires », décrites dans le guide pédagogique, puis par des « activités sur le fichier ». La description de ces « activités » est très précise mais porte principalement sur « l'activité » de l'enseignant, très peu sur celle des élèves. Il nous a semblé nécessaire de prendre en compte le déroulement proposé par le guide pédagogique pour analyser celles-ci. En effet, il s'agit d'un fonctionnement particulier où la tâche est indissociable de la manière dont elle est mise en place de manière *a priori*. Les élèves n'ont pas une tâche à réaliser seul, les tâches se réalisent collectivement guidées par l'enseignant qui explicite les connaissances très rapidement. Des quatre séquences analysées, une seule aborde un temps de recherche personnel. Le principe de dévolution nécessaire à toute situation a-didactique et à toute situation-problème peut sembler

difficile pour la majorité des élèves, étant donné, que tout se passe à l'oral, seuls les élèves les plus rapides et à l'aise avec le calcul mental pourront s'engager réellement dans la tâche, les autres élèves assisteront à une démonstration menée par leurs camarades ou l'enseignant lui-même.
Une fois l'activité préliminaire faite, les élèves passent donc aux « activités du fichier », qui font partie intégrante de la séance de découverte et qui sont des situations qui reprennent systématiquement la tâche de « l'activité préliminaire » avec des variables didactiques différentes. La plupart du temps, ce sont soit des problèmes d'application, qui à ce moment permettent un temps de recherche, soit des problèmes qui mettent à jour un nouvel aspect de la division (exemple de la séquence 64, avec l'objectif de faire comprendre aux élèves que le reste doit être systématiquement inférieur au diviseur). Il est important de noter que parfois, comme dans la séquence 63, là où il y a le bandeau « J'ai appris », c'est-à-dire l'institutionnalisation, les élèves peuvent faire l'économie de la recherche ; la solution du problème se trouvant dans ce bandeau, c'est-à-dire juste en dessous de la tâche.

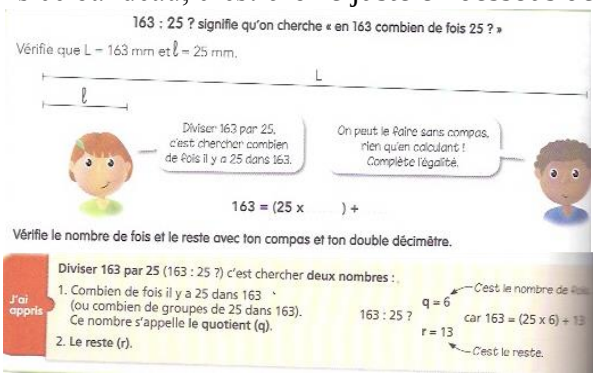


Figure 5 : Séquence 63 « activité de découverte » 1,
(p.92 du fichier de l'élève**,** *J'apprends les maths, CE2)*

Concernant *Cap Maths CE2*, à la différence de *J'apprends les maths CE2,* l'institutionnalisation est toujours construite avec les élèves. Les élèves sont confrontés à des problèmes mis en place par l'enseignant avec un matériel qui permet bien souvent de la manipulation. L'analyse des séances portant sur la division « quotition » (unité 9, séance 3, problème 1 et 2 et Unité 9, séance 4, problème 3) montre, par exemple, que l'enseignant, par la présentation et l'explicitation de la situation à résoudre, permet la première étape nécessaire à la dévolution du problème à l'élève et que le fait d'entrer dans le problème de manière individuelle puis collective permet à l'élève de s'approprier le problème mais aussi de le responsabiliser quant à la résolution effective du problème. La dévolution *a priori* du problème à l'élève semble être présente dans les trois situations proposées d'autant plus que l'enseignant n'intervient pas dans cette phase. Il est en retrait et n'interviendra qu'au moment de la mise en commun et de la validation des réponses pour orienter les discussions sur les stratégies significatives et la validation des réponses par le matériel et le calcul. Les conditions sont réunies pour mettre l'élève dans une posture de chercheur.

V. CONCLUSION

Concernant *Cap Maths CE2*, nous sommes arrivées à la conclusion après analyse que les séances de découverte proposées étaient bien des situations-problèmes. Tous les critères de la situation-problème sont présents. Les élèves sont capables de s'engager dans la tâche, ils ont bien les prérequis mais ne peuvent répondre immédiatement et sont suffisamment en recherche. Ils peuvent vérifier par eux-mêmes leurs réponses, enfin les stratégies disponibles et préconisées par le manuel permettent d'atteindre le savoir mathématique visé.

Après l'analyse de la démarche pédagogique et l'analyse a priori des séquences, il semble apparaitre que les situations proposées par *J'apprends les maths CE2*, ne soient pas des situations-problèmes car elles ne répondent pas à tous les critères évoqués lors de la définition de la situation-problème.

Nous avons pu mettre en évidence que concernant les séances proposées par *J'apprends les maths CE2,* les stratégies disponibles aux élèves sont souvent restreintes. C'est en effet la volonté des auteurs, et d'une manière générale, le rôle du choix des variables didactiques que de contraindre les élèves afin qu'ils utilisent en priorité la stratégie qui doit les amener vers le savoir en jeu. Ici, il y a très peu de place au tâtonnement, aux essais, et à l'élaboration de stratégie personnelle. Soit la stratégie est donnée par l'enseignant, soit par le fichier, et le temps de recherche est quasiment inexistante. La démarche de *J'apprends les maths CE2* est plutôt explicite. L'enseignant a une place très importante dans la séance de découverte. Tout y est présenté, les objectifs d'apprentissage, les stratégies à mettre en œuvre, les procédures de vérification et même parfois les résultats aux problèmes, ce qui nous éloigne des situations a-didactiques où l'élève est dans une posture de chercheur. D'ailleurs, les élèves sont très peu en recherche lors de ces situations.

Ce qui nous permet de dire qu'un des deux manuels étudiés propose des situations qui n'étaient pas des situations-problèmes. Cependant une des limites de cette recherche est la taille de l'échantillon, le nombre de manuels scolaires étudiés, compte tenu du temps imparti à cette recherche, est restreint. En effet, nous n'avons pu étudié que deux manuels, *J'apprends les maths CE2* et *Cap Maths CE2.* Dans l'optique d'un prolongement de cette recherche, il serait intéressant de prolonger l'analyse à d'autres manuels scolaires afin de voir si le fait de ne pas proposer des situations-problèmes lorsqu'on aborde une nouvelle notion, alors même que nous avons montré qu'elles étaient bénéfiques aux apprentissages, et préconisées par les programmes, étaient courant ou pas dans les pratiques des auteurs de manuels scolaires. Il serait intéressant aussi d'observer *a posteriori* ces séances et de récolter des données en classe, c'est-à-dire de les proposées effectivement aux élèves, et de voir les résultats, ainsi que la manière dont sont menées ces séances par les enseignants.

REFERENCES

Bessot, A. (2003). *Une introduction à la théorie des situations didactiques*. Master « Mathématiques, Informatique » de Grenoble 2003-2004), *Cahier du laboratoire Leibnitz,* 91. Repéré à https://hal.archives-ouvertes.fr/hal- 00078794/document

Brousseau, G. (1998 mise à jour 2010). *Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques*. Repéré à de http://guy- brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf

Fenichel N et Pfaff, N. (2005). *Donner du sens aux mathématiques*. Paris : Bordas.

Houssaye, J. (2009). Le triangle pédagogique, ou comment comprendre la situation pédagogique. Dans Houssaye, J. (dir.), *La pédagogie : une encyclopédie pour aujourd'hui* (8°éd., p.13-24). Paris : ESF éditeur.

Mounier, E. et Priolet, M. (2016). La programmation des techniques opératoires dans les manuels scolaires de l'école élémentaire : le cas de l'addition et de la soustraction. *Grand* 98, 5 à 26.

Rogalski J. (2003). « Y a-t-il un pilote dans la classe ? Une analyse de l'activité de l'enseignant comme gestion d'un environnement dynamique ouvert ». *Recherche en didactique des mathématiques*, 23 (3/4), 243-388.

Manuels scolaires

Brissiaud, R., Clerc, P., Lelievre F. & Ouzoulias A. (2010) *J'apprends les maths CE2*. Paris : Retz

Charnay, R., Combier, G., Dussuc, P. & Madier, D. (2011) *Capmaths CE2.* Paris : Hatier.

LE PASSAGE DE LA GÉOMÉTRIE PHYSIQUE À LA GÉOMÉTRIE THÉORIQUE AU CYCLE 3

AMADORI[*] Claire – HAIRON[**] Elodie

Résumé

L'un des objectifs du programme d'enseignement de la géométrie au cycle 3 (élèves âgés de 9 à 11 ans) en France correspond au passage de l'identification perceptive (la reconnaissance par la vue) de figures et de configurations à leurs caractérisations par des propriétés, c'est-à-dire au passage d'une géométrie physique à une géométrie théorique. Nous avons étudié à ce niveau scolaire les pratiques de deux enseignants pour déterminer en quoi elles permettaient aux élèves d'acquérir une méthodologie et un raisonnement adaptés à la pratique de la géométrie.

Mots-clefs : géométrie, enseignement, passage, physique, théorique.

Abstract – One of the objectives of programs of the education of the geometry in the cycle 3 (pupils aged 9-11) in France corresponds in the passage of the perceptive identification (the gratitude by the view) of figures and configurations in their characterizations by properties" or still the passage of the physical geometry to the theoretical geometry. We wanted to study the processes used by the teachers to allow the pupils to acquire a methodology and a reasoning adapted to the practice of the geometry.

Keywords: geometry, education, going through, physical, theoretical.

I. INTRODUCTION

Paul Claudel (1954) a déclaré : « La géométrie n'est pas faite pour être apprise, elle est faite pour être utilisée ». Claire Amadori et moi-même, alors étudiantes fonctionnaires stagiaires en 2016-2017 avons choisi de baser notre thème de recherche sur la géométrie au cycle 3 (élèves âgés de 9 à 11 ans). En nous penchant sur les résultats de l'évaluation CEDRE de 2014 (Arzoumanian & Dalibard, 2015), il nous est apparu que la géométrie posait de nombreuses difficultés aux collégiens (élèves âgés de 11 à 15 ans) : seulement la moitié d'entre eux réussissaient à résoudre un problème de géométrie déductive à une étape et à mettre en œuvre des théorèmes de géométrie dans des cas simples. Nous avons donc souhaité concentrer notre recherche sur l'enseignement de cette discipline en fin d'école (élèves âgés de 10 à 11 ans) pour mieux en comprendre les enjeux.

Nous présentons tout d'abord, dans une partie théorique, les différents types de géométrie en lien avec les programmes français actuels. Ce qui nous amène à envisager différentes questions : Comment un enseignant peut-il amener un élève à raisonner en géométrie ? Quels gestes professionnels sont mis en œuvre ? Quel matériel est utilisé par l'enseignant pour y parvenir ? Pour répondre à ces questions, nous décrivons l'expérimentation mise en œuvre, puis ses résultats et concluons ce texte par quelques perspectives.

II. LES DIFFERENTS TYPES DE GEOMETRIE

Fénichel, Pauvert et Pfaff (2004) expliquent que « dans l'acceptation la plus courante, les figures sont assimilées aux objets géométriques définis par des axiomes et des propriétés. » Dans le plan, une figure peut être considérée comme un ensemble de points de celui-ci, ou encore comme une trace matérielle sur une feuille de papier. D'après Roditi (2014), qui se base sur les travaux de Parzysz, cette dernière proposition est la définition d'un dessin et non d'une figure. Pour lui une figure renvoie à « l'objet théorique représenté […] elle est

[*] Académie de Créteil - France
[**] Académie de Créteil – France – elodie.hairon@gmail.com

composée d'objets géométriques en relation. » (id.). Nous retiendrons cette définition pour la suite de notre texte.

1. Géométrie physique et géométrie théorique

Perrin-Glorian et Godin (2014) définissent la géométrie plane comme « l'étude à différents niveaux des formes planes et des figures qu'on peut tracer sur une surface plane. » (p.28) Ils font la distinction entre deux géométries enseignées à l'école élémentaire : la géométrie physique qui consiste à valider les propriétés des figures avec des instruments et qui engendre des procédures matérielles, et la géométrie théorique, pour laquelle la validation se fait par des démonstrations, qui supposent une manipulation d'énoncés.

Ces mêmes auteurs ont retenu trois étapes pour décrire l'apprentissage de la géométrie : une première correspondant à la reconnaissance perceptive des formes et à l'introduction d'un vocabulaire précis (maternelle), une seconde pour l'identification de propriétés qui peuvent être vérifiées ou produites avec des instruments (cycle 2 et début cycle 3 – élèves âgés de 6 à 9 ans) et une dernière étape qui correspond à la déduction à partir d'axiomes et de théorèmes (fin cycle 3 et cycle 4 – élèves âgés de 10 à 15 ans). Les deux premières étapes font partie de ce que les auteurs définissent comme la géométrie physique et la dernière relève de la géométrie dite théorique. L'étude de la géométrie physique est différente de celle de la géométrie théorique. Pour mieux comprendre le processus d'apprentissage et mieux distinguer ce qui se joue dans l'une ou l'autre de ces deux géométries, nous allons nous intéresser aux différents niveaux de pensée des élèves pour passer d'un type de géométrie à un autre.

2. Les niveaux de pensée de Van Hiele

Afin de préciser nos questions initiales, nous avons repris les travaux de Braconne-Michoux, puisqu'ils correspondent à notre propre questionnement ; pour elle il s'agit de :

> « Expliquer comment un élève peut passer d'une observation très globale des objets géométriques à leur organisation théorique dans l'exercice de la démonstration ou dans la construction d'un raisonnement hypothéticodéductif, et décrire les conditions d'enseignement qui favoriseraient ce passage pour l'élève. » (Briconne-Michoix, 2014, p. 25)

Pour ce faire, elle s'appuie d'abord sur les niveaux de pensée de Van Hiele (1959) que nous rappelons ci-dessous :

- Le premier niveau aussi appelé niveau 0 de pensée est l'identification et la visualisation ; il s'agit de la reconnaissance de l'aspect global des figures.

- Le deuxième niveau de pensée (niveau 1) est celui de l'analyse. Les élèves connaissent alors la liste des propriétés des figures. Ces propriétés sont utilisées pour décrire ce qui est visible et le codage permet d'identifier une figure.

- Le troisième niveau de pensée (niveau 2) correspond à la déduction informelle. L'élève peut organiser de façon hypothético-déductive les propriétés. Il argumente sa pensée.

- Le quatrième niveau de pensée (niveau 3) correspond à la déduction formelle. L'élève maîtrise la distinction entre les définitions, les conditions nécessaires et suffisantes, les réciproques ainsi que la nécessité d'axiomes.

- Le dernier niveau (niveau 4) est celui de la rigueur ; nous ne l'aborderons pas car il concerne des niveaux supérieurs à ceux de l'école élémentaire et du secondaire.

Ces cinq niveaux viennent ainsi préciser le passage entre la géométrie physique et la géométrie théorique. Braconne-Michoux (1998, p.156) précise aussi que :

> « Le but ultime de l'enseignement de la géométrie [...] est d'amener les élèves au niveau de déduction formelle (niveau 3) sans pour autant négliger les niveaux inférieurs. » Une étude a montré qu'à un « cours de géométrie avec démonstrations » situé au niveau 3, seule une minorité d'élèves « ne dépassait guère le niveau 1 et certains [...] ne maitrisaient même pas le niveau [...] 0 ».

Ces constats rejoignent ainsi ceux de l'enquête CEDRE évoquée en introduction. Comme nous nous intéressons aux pratiques des enseignants, ces différents niveaux vont nous permettre de les étudier pour déterminer comment elles peuvent ou non favoriser le passage d'un niveau à l'autre.

III. QUESTIONNEMENT

Salin et Berthelot (1993) font état du fait que l'enseignement de la géométrie se révèle délicat pour les enseignants, et que ceux-ci peuvent prendre des libertés avec le programme quand ils ne sentent pas à l'aise avec cette discipline. Par ailleurs, les points de vue des didacticiens dont nous avons étudié les articles tendent à dire qu'il faut faire évoluer les démarches des enseignants de façon à faciliter le passage de la géométrie physique à la géométrie théorique, par exemple, en sensibilisant les futurs enseignants aux difficultés potentielles dans l'apprentissage de la géométrie en les mettant en conditions (Kuzniak et Rauscher, 2002).

Nous avons ainsi souhaité nous intéresser à la mise en œuvre concrète, en classe, du « passage » de la géométrie physique à la géométrie théorique, c'est-à-dire au « passage » de celui de la lecture simple d'un dessin issu de l'énoncé d'un exercice à l'appréhension et la validation de celui-ci grâce à des propriétés mathématiques. En quelque sorte, nous étudions le franchissement de la limite de la géométrie physique pour accéder au niveau de la géométrie théorique, plus spécifiquement la manière dont un enseignant assure la transition entre un raisonnement qui repose sur l'identification perceptive de figures à un raisonnement qui s'appuie sur leurs caractérisations par des propriétés. Nous avons alors mis en relation ce « passage » avec les niveaux de pensée de Van Hiele, et pour la transition entre la géométrie physique et la géométrie théorique, nous nous sommes concentrées sur le passage entre le niveau 1 et le niveau 2.

En fonction de ces niveaux, nous avons donc souhaité étudier les « gestes didactiques » des enseignants, plus précisément, d'après Bucheton :

> « Les gestes de l'enseignant sont didactiques dès lors qu'ils visent des savoirs, des modes de pensée et d'agir qui dans leur ensemble contribuent au développement cognitif, langagier, social et psycho-affectif de l'élève. Selon cette perspective, la didactique s'intéresse alors : […] aux objets de savoir enseignés et aux gestes d'étude et postures qui en permettent l'appropriation […] aux gestes professionnels spécifiques qui permettent la mise en relation pour les élèves de ce qui précède. » (Bucheton, 2009, p.40),

Pour cette même auteure, les gestes des enseignants sont fortement complexes et « épais » et par conséquent difficiles à « déplier et à décrire » (id.). Pour notre travail, nous chercherons à les décrire en étudiant l'« activité » géométrique des enseignants en perspective de celles des élèves. L'activité est entendue ici au sens de Rogalski (1995), c'est-à-dire qu'elle « est à inférer à partir des traces de réalisation de la tâche ; des observables en cours de réalisation, des questionnements » ; cette activité sera alors mise en perspective des tâches prescrites. Notre questionnement peut donc être formulé de la façon suivante : comment les enseignants procèdent-ils pour favoriser le passage de la géométrie physique à la géométrie théorique au cycle 3 ? A quel niveau de pensée les élèves se situent-ils ? Quels sont les gestes professionnels mis en œuvre pour aider un élève à changer de niveau ?

IV. EXPERIMENTATION

Notre expérimentation est basée sur un entretien avec deux enseignants expérimentés (une dizaine d'années d'expérience) de cycle 3 (CM1/CM2 et CM2 – élèves âgés de 9 à 11 ans) puis sur des observations de séances dans leur classe respective ; afin de pouvoir réaliser une étude comparative des pratiques de ces deux enseignants, nous leur avons proposé de faire une séance à partir de tâches que nous avions conçues et qui pouvaient être traitées dans les deux géométries (physique et théorique) et en mobilisant les niveaux 1 et 2 de pensée de Van Hiele.

Nous avons tout d'abord récolté des informations sur la pratique de ces deux enseignants via un entretien pour connaître leur conception des notions de figures et de dessin, leurs connaissances en géométrie (par exemple : quelle définition ont-ils d'un carré ?) et pour qu'ils nous décrivent quelques éléments de leurs pratiques (déclarées) en géométrie avec leurs classes (quelles sont les difficultés qu'ils peuvent repérer chez leurs élèves en géométrie et comment font-ils pour les pallier ?)

L'observation d'une séance de géométrie menée en classe a été pensée dans le but d'étudier les gestes professionnelles et l'activité géométrique des enseignants et des élèves. Nous avons imaginé trois tâches qui peuvent être résolues dans les niveaux de pensée 1 et 2 de Van Hiele. Ces tâches ont été prescrites dans les classes par les enseignants afin d'étudier les niveaux dans lesquels se situent les élèves et d'analyser si les gestes professionnels de l'enseignant permettent aux élèves de passer d'un niveau à l'autre ou d'un type de géométrie à un autre.

Deux problèmes de construction ont été d'abord proposés et conçus à partir de tâches figurant dans les manuels Petit Phare CM1 (2010) et Cap Maths (2010) : le premier portait sur la construction d'un carré à partir de l'un de ses côtés (Figure 1), le second, avait une consigne similaire, sauf qu'il s'agissait de construire un rectangle. Les constructions du carré et du rectangle demandent de mobiliser leurs propriétés (une identification perceptive étant insuffisante). Au-delà de la réussite à la construction, c'est aussi à la justification de cette dernière que nous nous intéresserons : est-ce que les propriétés du carré seront toutes citées sans hiérarchie (niveau 1) ou est-ce que les élèves et-ou l'enseignant chercheront à les organiser en lien avec les constructions qu'ils font (niveau 2) ?

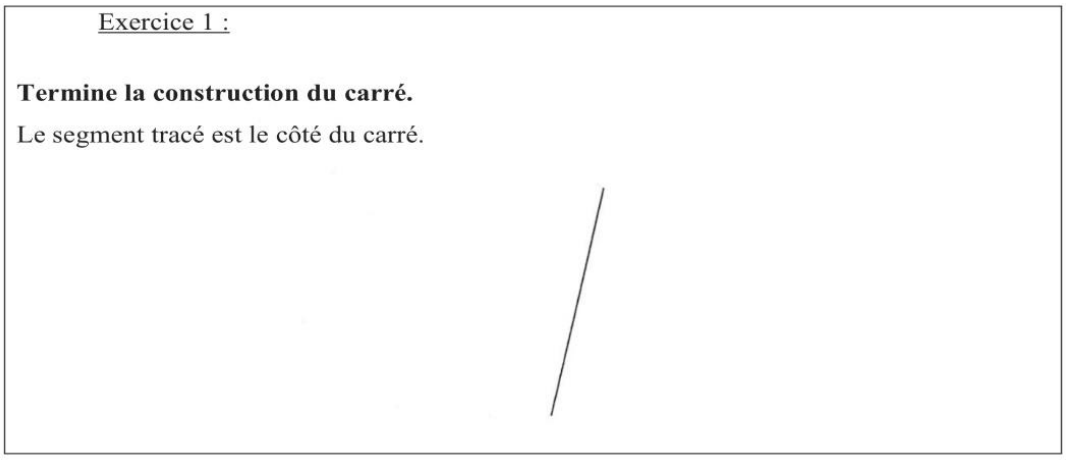
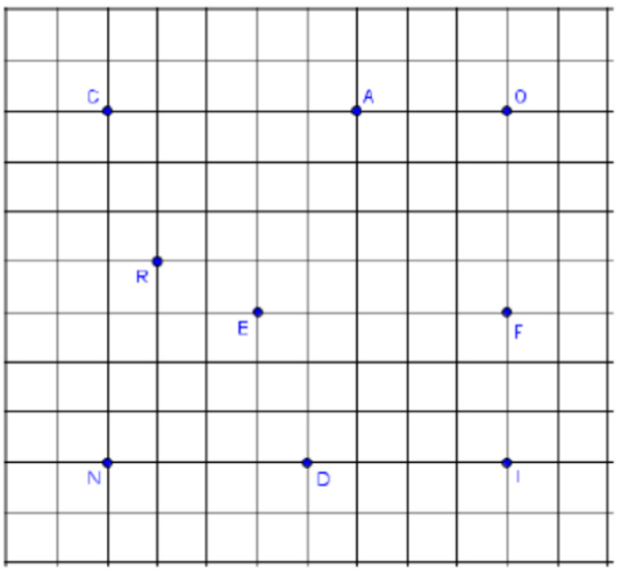


Figure 1 *– Enoncé de l'exercice 1*

La troisième tâche consistait à reconnaître des figures sur papier quadrillé (Figure 2). Dans ce cas, la reconnaissance des figures peut être uniquement perceptive, mais la configuration complexe des points sur le quadrillage rend néanmoins difficile ce type d'identification.

Comme pour les deux tâches précédentes, la justification de la nature des figures peut être menée aux niveaux 1 et 2 selon l'organisation qui est faite ou non des propriétés.



1.Que peux-tu dire du quadrilatère CAFE ?

2. Que peux-tu dire du quadrilatère COIN ?

3. Que peux-tu dire du quadrilatère FARD?

Figure 2 *– Enoncé de l'exercice 2*

Seules les tâches ont été proposées aux deux enseignants, nous ne leur avons pas prescrit de mise en œuvre en classe ni de corrigé possible. Après l'observation de la séance, nous avons fait passer un nouvel entretien à chacun des deux enseignants observés de façon à avoir des précisions sur certains points clés de la séance. Nos questions portaient sur la conception de la séance, leurs attentes, leurs objectifs, mais aussi sur les choix qu'ils avaient opérés durant la séance. Nous leur avons aussi demandé quelles améliorations ils apporteraient et si le choix des exercices leur a paru judicieux.

V. RESULTATS

Le questionnaire, les observations en classe ainsi que les entretiens nous ont permis d'observer d'abord que les enseignants se servent de leurs propres connaissances géométriques pour amener les élèves à progresser dans ce domaine. Cette expérimentation nous a également permis de constater que les enseignants souhaitent que les élèves possèdent le plus de propriétés possibles des figures géométriques. Par exemple, concernant les propriétés du carré, l'énonciation des conditions nécessaires et suffisantes à la résolution de problème ne les satisfont pas, ils souhaitent que les élèves énoncent toutes les propriétés connues de la figure. Nous avons donc pu en déduire que les enseignants de cycle 3 ne peuvent permettre à leurs élèves d'atteindre le niveau 3 de pensée de Van Hiele et qu'ils les maintiennent systématiquement au niveau 2 en leur faisant énoncer, de façon systématique, l'ensemble des propriétés.

Dans les deux séances observées, une partie importante de l'activité des élèves et des enseignants est consacrée à l'utilisation des instruments de géométrie. En effet, afin de construire les figures demandées (tâches 1 et 2), les élèves sont amenés à utiliser des outils comme l'équerre, la règle, le compas (pour le report des longueurs) ; dans la tâche 3, les instruments peuvent aussi être exploités pour s'assurer des propriétés des quadrilatères. Notre expérimentation montre que la manipulation des instruments en géométrie représente une des difficultés majeures de cette discipline et les enseignants font état du fait que cette difficulté peut venir supplanter les apprentissages géométriques qu'ils cherchent à construire. Or, pour

changer de niveau de pensée, la manipulation d'outils doit être acquise afin que l'élève se concentre sur le raisonnement. Les enseignants répondent à cette difficulté en étayant au maximum les élèves en leur rappelant par exemple comment effectuer le report d'une mesure avec un compas ou le traçage d'un angle droit avec une équerre. Souvent, les propriétés sont connues, mais la démonstration est délicate du fait de la manipulation. Les enseignants observés accordent donc une place importante à la réalisation des tracés et donc à l'utilisation des outils.

Nous nous demandions si les tâches que nous avions prescrites seraient exploitées pour permettre à un élève de passer du niveau 1 au niveau 2 de Van Hiele. Nous nous sommes aperçues dans notre expérimentation qu'il était compliqué pour les élèves de parvenir à un résultat satisfaisant sans l'étayage de l'enseignant. Néanmoins, en les amenant à formuler la liste la plus complète possible des propriétés des figures, l'enseignant cherche à amène ses élèves, avec un fort étayage au niveau 2 de Van Hiele. Cependant, le lien entre cette liste de propriétés et les justifications des constructions (exercices 1 et 2) n'est pas toujours fait explicitement.

En résumé, il apparaît clairement que l'utilisation d'outils de mesure et de tracé, tels que l'équerre, la règle graduée, le compas, est primordiale en géométrie d'une part pour réaliser des figures et d'autre part, les outils servent à vérifier des propriétés qui ont été conjecturées auparavant. Les élèves peuvent ainsi affirmer, dans une géométrie qualifiée d' « instrumentée », qu'une figure possède les propriétés citées et en déduire sa nature. Réciproquement, si les élèves connaissent le nature d'une figure, ils doivent pouvoir, si l'on se place au niveau 2 de Van Hiele, rassembler les propriétés qui caractérisent la figure en question et la construire à l'aide des outils. Les enseignants observés sont partis de ce que les élèves maîtrisaient et ont tenté de consolider leurs connaissances tout en les amenant à dépasser le niveau 1 de géométrie (et à certains moments le niveau 0 pour les élèves les plus en difficulté) avec un fort étayage.

VI. CONCLUSION

Les propos et la posture des deux enseignants observés sont naturellement orientés vers la volonté de vouloir faire progresser leurs élèves. Ils ont choisi de faire manipuler les élèves pour leur permettre d'acquérir des automatismes notamment en ce qui concerne l'utilisation des outils de géométrie. Une analyse complémentaire autour des productions des élèves aurait pu être envisagée dans la continuité afin de bien situer le niveau de géométrie dans lequel ils se trouvaient. Ainsi, nous aurions pu mettre en valeur la manière dont un enseignant revient sur les notions pas totalement ou non acquises par les élèves.

Nous nous questionnons encore quant à l'acquisition du quatrième niveau de pensée de Van Hiele qui correspond au passage du niveau 2 au niveau 3 rencontré au cycle 4 ($5^{ème}$, $4^{ème}$ et $3^{ème}$ – élèves âgés de 11 à 15 ans). Comment les enseignants du cycle 4, qui, à la différence de ceux observés, ne sont pas polyvalents, mais spécialistes de leur discipline prennent-ils en charge ce passage entre les niveaux 2 et 3 ? Quelles tâches sont proposées aux élèves ? Avec quelle mise en œuvre ? Autant de questions qui pourraient être investiguées dans le cadre d'une autre recherche sur ce thème.

REFERENCES

Arzoumanian P., Dalibard E. (2015). Mathématiques en fin de collège : une augmentation du pourcentage d'élèves de faible niveau, *Note d'information* de la DEPP, 19.

Bucheton D. (2009). Le développe des gestes professionnels dans l'enseignement français. De Boeck.

Braconne-Michoux A. (2014) Les niveaux de pensée en géométrie de VAN HIELE : de la théorie à l'épreuve de la classe, *Bulletin AMQ*, vol. LIV, n°1.

Braconne-Michoux, A. (1998) La géométrie au collège au travers des niveaux de P.M. Van Hiele, *Bulletin de l'APMEP*, 415, p. 153-161.

Fenichel M., Pauvert M., Pfaff N. (2014). Donner du sens aux mathématiques. Tome 1. Espace et géométrie. Paris : Bordas pédagogie.

Kuzniak A., Rauscher J.-C. (2002). Autour de quelques situations de formation en géométrie pour les professeurs d'école. IUFM d'Alsace. Actes du XXIXème colloque Inter IREM organisé par l'IREM des Pays de la Loire. Repéré à http://www.arpeme.fr/documents/27C678BC216956B50DB2.pdf

Perrin-Glorian M.-J., Godin M. (2014). De la reproduction de figures géométriques vers leur caractérisation, *Math-Ecole*, 222.

Roditi E. (2014). Didactique des mathématiques – Géométrie. Repéré à http://eroditi.free.fr/Enseignement/PE1/DDM-Geo.pdf

Rogalski J. (2004). La didactique professionnelle : une alternative aux approches de « cognition située » et « cognitiviste » en psychologie des acquisitions, *@ctivités*, 1 (2), 103-120.

Salin M.-H., Berthelot R. (1993) L'enseignement de la géométrie à l'école primaire, *Grand N*, 53, 39 à 56.

Les manuels scolaires.

Brault, R., Roques, N. & Ribanier, C. (2010). Petit Phare Mathématiques, cycle 3 CM2. Paris : Hachette.

Dussuc M.-P., Madier D., Combier G. & Charnay R. (2010). Cap Maths Cahier de géométrie et mesure, cycle 3 CM1. Paris : Hatier.

DISPOSITIF DE SOUTIEN INDIVIDUALISE EN MATHEMATIQUES

LEROUX[*] Anne-Julie

Résumé – De plus en plus, les élèves handicapés ou en difficulté d'adaptation ou d'apprentissage sont présents dans les classes ordinaires. Certains parents font appel à un enseignant pour soutenir leur enfant à la maison parallèlement au programme de formation de l'école québécoise pour pallier un manque de temps. Une étude de cas présentant un dispositif d'aide individualisée en mathématiques favorisant le développement du potentiel mathématique de deux élèves handicapés ou en difficulté d'adaptation ou d'apprentissage est décrite.

Mots-clefs : Dispositif, enseignement, mathématiques, didactique, soutien

Abstract – Increasingly, students with handicaps, social maladjustments or learning difficulties are present in ordinary classes. Some parents use a teacher to support their child at home in parallel with the Quebec school training program to compensate for this lack of time. A case study presenting an individualized support system in mathematics favoring the development of the mathematical potential of two students with handicaps, social maladjustments or learning difficulties is described.

Keywords: Device, teaching, mathematics, didactics, support

I. INTRODUCTION

Depuis quelques années, les élèves handicapés ou en difficulté d'adaptation ou d'apprentissage sont davantage présents dans les classes ordinaires au Québec. Comme ces élèves ont des besoins particuliers, ils ont souvent besoin de plus de temps que les autres élèves pour intégrer les contenus. En ce sens, du temps avec l'orthopédagogue ou du temps consacré aux études à la maison est nécessaire pour favoriser leur réussite. Certains parents font appel à une aide supplémentaire pour soutenir leur enfant à la maison puisque ceux-ci ne se sentent pas compétents pour enseigner les mathématiques à leur enfant. Dans le cadre de ce projet, une étude de cas présentant un dispositif d'aide individualisée en mathématiques favorisant le développement du potentiel mathématique de deux élèves handicapés ou en difficulté d'adaptation ou d'apprentissage est décrite.

II. PROBLEMATIQUE

Le Ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur (MEES) du Québec prône une intégration réussie des élèves handicapés ou en difficulté d'adaptation ou d'apprentissage (EHDAA) en classe ordinaire depuis 2008 (MELS, 2008). Cette intégration a pour but de leur faire vivre un processus normal malgré leurs handicaps (MELS, 2008).

La situation actuelle, dans les classes de mathématiques par exemple, démontre que l'intégration de ces élèves est justifiée, car plusieurs réussissent, mais cette intégration engendre quelques problèmes pour d'autres. En suivant le programme d'enseignement des mathématiques, les cours s'enchaînent relativement rapidement et, parfois, le handicap de ces enfants nuit à la bonne intégration des concepts et processus mathématiques dans les délais consignés par le rythme des cours (Tremblay, 2015, p.19). Ainsi, 75 % des élèves présentant un trouble du spectre de l'autisme, présentent un manque d'autonomie (Cappe, Smock & Boujut, 2016). Ainsi, ils ont « besoin d'être au quotidien davantage soutenus et encadrés dans leurs apprentissages » (Cappe et al., 2016, p.77).

Les élèves en difficulté d'adaptation ou d'apprentissage nécessitent souvent plus de temps pour parvenir à atteindre les objectifs. Un suivi avec l'orthopédagogue en parallèle peut être

[*] Université de Sherbrooke, Canada, anne-julie.leroux@usherbrooke.ca

une option suffisante pour plusieurs. Visiblement, dans certains cas, cette aide n'est pas suffisante. Et comme l'enseignant a beaucoup d'élèves, le temps consacré à chacun est souvent limité, bien malgré eux. Ainsi, un soutien à la maison peut être une alternative.

De plus, il est faux de croire qu'on peut apprendre instantanément les mathématiques, du temps est nécessaire pour l'intégration des nouvelles connaissances (de Flandre, 2006). Il est toutefois difficile de trouver du temps supplémentaire sur les heures de classe à travers les nombreux cours au secondaire. Par ailleurs, Lafortune (1992) soulève que certaines difficultés qu'éprouvent les élèves sont de nature affective. Elle va même jusqu'à dire que certains échecs ne sont pas attribuables à un manque d'effort ou de capacité intellectuelle. Évidemment, cela ne justifie pas tous les échecs. Pour un enseignant, il est difficile de créer un lien significatif avec ses 36 élèves. Les élèves handicapés ou en difficulté d'adaptation ou d'apprentissage ont parfois des besoins différents des autres élèves. « Ainsi, plusieurs aménagements sont à envisager pour compenser les difficultés scolaires des élèves autistes » (Cappe et al., 2016, p.79). Un soutien à la maison semble être une solution. Toutefois, au niveau de la recherche, il y a un manque de connaissances sur les effets d'un soutien individualisé en mathématiques parallèlement au programme, sur le développement du potentiel mathématique de l'élève.

Nous cherchons donc à déterminer quelles sont les caractéristiques d'un dispositif de soutien individualisé en mathématiques, parallèle au programme de formation régulier, valorisant le potentiel mathématique des élèves.

L'objectif de la recherche est de décrire le dispositif de soutien utilisé auprès de deux élèves HDAA de deuxième cycle du secondaire valorisant leur potentiel mathématique. Deux questions spécifiques viennent orienter l'objectif général de recherche.

1. Quelles sont les approches pédagogiques et didactiques mises en place à travers le dispositif ?
2. Quelles sont les conditions favorables à la mise en place du dispositif ?

III. CADRE DE REFERENCE

Un dispositif est « une organisation de ressources (humaines, pédagogiques, matérielles, etc.) au service d'une action finalisée. C'est une construction sociale qui, en jouant des contraintes et de la variété des ressources, agence des situations susceptibles d'entrer en résonance avec les dispositions des personnes en formation (Carré, 2009, p.10). »

La théorie des situations (Brousseau, 1970) « modélise les conditions sous lesquelles les êtres humains produisent, communiquent et apprennent les connaissances que nous reconnaissons comme mathématiques » (Brousseau, 2011, p. 2). Selon Brousseau, il existe deux types de situations, les situations mathématiques et les situations didactiques. Les situations mathématiques représentent les conditions minimales pour faire comprendre une notion mathématique à un élève (Brousseau, ibid.). Par exemple, les exercices et les problèmes sont considérés comme des situations mathématiques, alors que les situations didactiques sont basées sur des situations mathématiques où l'intervention d'un enseignant introduisant un enchaînement de conditions est nécessaire pour amener l'élève à comprendre ces situations. De plus, Brousseau (ibid.) aborde deux phénomènes didactiques plus connus à éviter. L'effet Topaze décrit le phénomène où l'enseignant camoufle la réponse dans son discours et l'effet Jourdain apparait lorsque l'enseignant résume un élément savant de la réponse de l'élève dans le but d'éviter l'échec. À l'intérieur de la théorie des situations, Brousseau aborde le concept de contrat didactique, c'est-à-dire les attentes mutuelles de l'enseignant et de l'élève, l'un envers l'autre, qui ne sont souvent pas explicitées. Cette

théorie vient appuyer l'importance du choix des situations mathématiques et des situations didactiques utilisées dans le dispositif de soutien individualisé entre l'intervenant et l'élève en difficulté. Le choix des situations mathématiques et didactiques est important pour permettre le développement du potentiel de l'élève qui s'articule avec le développement des concepts mathématiques en jeu.

Le choix des situations mathématiques et didactiques a pour but de valoriser le potentiel mathématique de ces élèves. Le potentiel mathématique de l'élève s'inscrit à l'intérieur du concept de la zone proximale de développement de Vygotski (ZPD). « Cette approche repose sur une vision commune des mathématiques, comme activité humaine dans laquelle les connaissances se construisent » (Barabé, 2011, p. 23). Le développement du potentiel mathématique s'appuie sur plusieurs principes (Barabé, ibid.) :

1. Plonger l'élève dans des activités mathématiques diversifiées et riches, où il sera appelé à réfléchir, à raisonner, à chercher ;
2. Penser les situations pour que l'élève puisse participer selon ses connaissances « différenciées » ;
3. Travailler avec les forces de l'élève et lui en faire prendre conscience ;
4. Mettre en place des situations qui favorisent les interactions sociales ;
5. Investiguer des domaines peu travaillés avec les élèves en difficulté ;
6. Varier et multiplier les accès au savoir, varier les données ;
7. Penser en termes d'itinéraires cognitifs et non de tâches isolées ;
8. Utiliser une médiation pertinente ;
9. Encourager les connaissances personnelles avant les savoirs homologués.

Les actions posées dans le cadre du dispositif sont orientées en ce sens. Elles ont pour but de développer le potentiel mathématique des élèves.

IV. METHODOLOGIE

1. Description du dispositif

Une étude de cas a été réalisée auprès de deux élèves handicapés ou en difficulté d'adaptation ou d'apprentissage à travers un dispositif de soutien individualisé valorisant leur potentiel mathématique. Elle a permis de faire état de la situation réelle de ces deux élèves du Québec. Le dispositif utilisé mis en place auprès de deux élèves handicapés ou en difficulté d'adaptation ou d'apprentissage consiste en un accompagnement individualisé bihebdomadaire à domicile, parfois plus fréquent lors de périodes plus chargées. Ces rencontres, d'une durée d'environ 60 minutes, ont pour objectif d'encadrer ces élèves dans leur cheminement en mathématiques. Les tâches de l'intervenant sont variées. Une des tâches est d'enseigner les concepts et processus mathématiques qui ne sont pas maîtrisés par ces élèves. Des situations mathématiques et didactiques riches sont proposées aux élèves pour favoriser leur compréhension. Toutefois, le rôle de l'intervenant ne s'arrête pas qu'à l'enseignement des mathématiques. Une grande partie du dispositif consiste à encadrer et à encourager les élèves. Il est important de préciser que cet accompagnement se veut en cohérence avec le milieu scolaire. Or, tout part de ce qui se fait et se passe à l'école. Les interventions réalisées auprès des élèves sont teintées des principes favorisant le développement du potentiel mathématique des élèves. Ces principes ont orienté les interventions préconisées dans le cadre du dispositif. Les élèves ont été plongés dans des activités mathématiques diversifiées et riches, où ils étaient amenés à réfléchir, à raisonner et à chercher. Les forces des élèves ont été mises en avant pour qu'ils en prennent conscience.

2. Description des élèves

1er élève:

Il s'agit d'un élève de 5e secondaire (11e année, 17 ans) inscrit au programme régulier. Il réussit bien, mais il a besoin de mettre beaucoup de temps et d'efforts dans ses études. Cet élève a un trouble déficitaire important de l'attention. Il oublie beaucoup et s'égare souvent dans ses pensées. Son passage au primaire a été plus difficile, il a repris une année pour mieux suivre le rythme. Il est important de dire que cet enfant a été abandonné en bas âge dans son pays d'origine et a été adopté vers l'âge de 15 mois. Il est très anxieux, mais toujours de bonne humeur, très positif quant à son parcours scolaire. Il aime le secondaire. De plus, ses parents sont très présents. Ils lui offrent un très bon soutien académique dans toutes les matières. Par ailleurs, à la maison, il y a plusieurs routines qui sont établies pour l'aider à traverser le quotidien. Ses parents l'encouragent et le valorisent beaucoup. Toutefois, cet élève est très peu autonome dans son développement des connaissances. Il n'a pas le fil conducteur de ce qu'il doit faire, de ce qui s'en vient, de ce dont il aurait besoin. Par contre, il est toujours confiant et a toujours l'impression que tout va bien sans même se questionner sur l'état de ses connaissances.

2e élève:

Le deuxième élève ciblé est aussi en 5e secondaire (11e année, 16 ans). Il est inscrit au programme régulier avec le programme avancé de mathématiques (mathématiques fortes). Cet élève est diagnostiqué avec un trouble du spectre de l'autisme. Il est très intelligent et très compétent en mathématiques lorsqu'il est placé dans de bonnes conditions psychologiques qui sont souvent imprévisibles. Ses parents sont très présents dans son développement et très à l'écoute de ses besoins. Cet élève a des difficultés à anticiper le travail à faire, par exemple, pour la préparation de son aide-mémoire, il ne sait pas ni quand le faire et ni comment s'y prendre. Il ne fait pas tous ses devoirs par lui-même, il a besoin d'une présence pour accomplir les tâches. Il a énormément besoin de validation pour poursuivre la tâche à accomplir.

3. Méthode de cueillette de données

Les instruments de collecte de données utilisés sont un journal de bord, des entrevues semi-dirigées, différentes observations structurées et participantes. Chaque séance d'aide à la maison a été enregistrée sur bande audio.

Comme l'étude porte sur le soutien individualisé en mathématiques parallèlement au programme de formation, les données ont été recueillies lors des rencontres individuelles à la maison. Ces rencontres étaient prévues, en moyenne, à raison de 2 fois par semaine ou plus selon les besoins de l'élève. Il faut savoir que ce dispositif a été mis en place durant l'année 2012-2013 pour le premier élève, il s'agit donc de la 5e année du dispositif alors que pour le second élève, il en est à la 2e année. La collecte de données officielle a eu lieu durant l'année scolaire 2016-2017 et est teintée des faits observés des années antérieures.

V. RESULTATS ET ANALYSES

Le dispositif a pour objectif d'aider les élèves EHDAA qui ont des difficultés en mathématiques. Paradoxalement, certains ne sont pas en difficulté en mathématiques. Le rôle de l'intervenant n'est donc pas que d'enseigner les mathématiques. Son rôle est beaucoup plus orienté vers l'encadrement et la sécurisation des élèves. En ce sens, les approches préconisées sont davantage liées à l'affect bien qu'à plusieurs moments.

Certaines conditions ont été favorables à la mise en place du dispositif. Concernant les parents, le dispositif répond à leurs besoins. Ces derniers ont donné une grande latitude à l'intervenant que ce soit au niveau de la fréquence des rencontres, mais aussi au niveau des interventions réalisées. Ils sont satisfaits du service et ce dispositif a permis de conserver une meilleure relation avec leur enfant. Les conflits durant les périodes de devoirs ont été éliminés. Du côté des élèves, ils ont développé une relation de confiance avec l'intervenant, une confiance face à la tâche. Le dispositif a permis un engagement plus grand des élèves dans la tâche, accompagné d'une attitude beaucoup plus positive. Ce qui a permis de diminuer leur peur face aux mathématiques. Cependant, à certains moments, les élèves sont devenus dépendants d'une validation immédiate.

Pour la société, comme il y a de plus en plus d'élèves en difficulté, le dispositif est un moyen pour soutenir les élèves et leurs parents. Ce dispositif requiert dans un premier temps la communication entre l'enseignant de l'école et l'intervenant à la maison. Dans un deuxième temps, les attentes doivent être communes, une même vision de l'accompagnement est essentielle pour permettre le développement du potentiel de ces élèves.

VI. RETOMBEES ET CONCLUSION

L'intégration des enfants handicapés ou en difficulté d'adaptation ou d'apprentissage dans le système éducatif québécois est de plus en plus privilégiée. De ce fait, il est nécessaire de soutenir ces enfants pour qu'ils puissent réussir. Par conséquent, plusieurs moyens peuvent être utilisés : récupérations, suivis avec l'orthopédagogue, soutien à la maison… Dans le cadre de cette étude de cas, l'intérêt est porté sur le soutien individualisé à la maison puisqu'il est de plus en plus recouru, mais très peu documenté dans la littérature. Il s'agit d'une solution envisageable pour les parents d'enfants handicapés ou en difficulté d'adaptation ou d'apprentissage qui souhaite aider leur enfant. L'intervention individualisée, de façon régulière, auprès des élèves handicapés ou en difficulté d'adaptation ou d'apprentissage nécessitant un soutien supplémentaire devient une solution intéressante pour permettre une approche plus appropriée à ces élèves.

REFERENCES

Barabé, G. (2011). Une étude du développement professionnel par l'intégration dans la pratique d'enseignement d'une approche visant le développement du potentiel mathématique des élèves. Mémoire de maîtrise en éducation, Université de Sherbrooke, Québec.

Brousseau, G. (2011). La théorie des situations didactiques en mathématiques. Éducation et didactique [En ligne], 5(1). Site téléaccessible à l'adresse < http://educationdidactique.revues.org/1005> Consulté le 12 avril 2016.

Cappe, E., Smock, N. et Boujut,E. (2016). Scolarisation des enfants ayant un trouble du spectre de l'autisme et expérience des enseignants : sentiment d'auto-efficacité, stress perçu et soutien social perçu. L'évolution psychiatrique, 81, 73-91.

De Flandre, C. (2006). Vaincre ses peurs des mathématiques. Lyon :Éditions de la Chronique Sociale.

Delforge, C., Le Scanff, C. et Fontayne, P. (2008). L'évaluation des relations parents-enfants. Canadian Journal of Behavioural Science, 40(1), 42-51.

Fortin, M.-F. (2015). Fondements et étapes du processus de recherche (3e éd.). Montréal, Québec: Chenelière Éducation.

Lafortune, L. (1992). Dimension affective en mathématiques. Mont-Royal :Modulo Éditeur.

Gouvernement du Québec (2008). Plan d'action pour soutenir la réussite des élèves handicapés ou en difficulté d'adaptation ou d'apprentissage (EHDAA).Québec : Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport.

Pallascio, R. et Lafortune, L. (2000). Pour une pensée réflexive en éducation. Québec : Presses de l'Université du Québec.

Schmidt, S. (2009). Résultats de recherche, L'intégration des élèves en difficulté dans les classes ordinaires : Y croire avant tout. Programme Actions concertées du gouvernement du Québec.

Tremblay, P. (2015). Les attitudes d'enseignants du secondaire envers la Politique québécoise de l'adaptation scolaire. Revue Canadienne de l'éducation, 38(3), 1-29.

INTRODUCTION DU CONCEPT DE LIMITE EN CLASSE DE PREMIERE SCIENTIFIQUE AU CAMEROUN : UN EXEMPLE D'APPROCHE PAR LES COMPETENCES

NGOUFO* Hyacinthe Noel William

Résumé : L'objet de cette étude porte sur l'enseignement de la limite en classe de première scientifique au Cameroun. L'intérêt d'une telle investigation vient du fait que la présentation des concepts de limite et d'infini, leur place dans notre enseignement, l'intérêt ou non des définitions rigoureuses pour ces notions au lycée sont autant de sujets qui rejaillissent constamment dans les préoccupations pédagogiques et didactiques des enseignants de mathématiques.

Mots-clefs : limite, compétences, enseignement, concept, fonction.

Abstract: The purpose of this study is based on the teaching of the Lower sixth scientific class limit in Cameroon. The interest of such an investigation comes from the fact that the presentation of the concepts of limit and infinity, their place in our teaching, the interest or not of the rigorous definitions for these notions in high school are all subjects that spring constantly in the pedagogical and didactic concerns of mathematics teachers.

Keywords: limit, competencies, teaching, concept, function.

I PARTIE THEORIQUE

1. Analyse conceptuelle

Dans ce travail, nous avons commencé par faire une analyse conceptuelle de la limite et de cette analyse, nous avons dégagé l'origine du concept de limite à travers une enquête épistémologique. Cette origine remonte aux paradoxes du célèbre philosophe grec Zénon dans lesquels il démontre l'impossibilité du mouvement (paradoxe de la dichotomie, Achille et la tortue, Achille lance le javelot…). Par la suite le concept est présent dans la quadrature de la parabole avec Archimède (-287 à -212) (il s'agit d'une méthode de détermination de l'aire A délimitée par la parabole et un segment joignant deux de ces points). Ensuite, suivront les travaux de Cauchy et Gauss où ils recherchent un peu plus de rigueur dans la définition du concept de limite : *lorsque les valeurs successives attribuées à une même variable s'approche indéfiniment d'une valeur fixe de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée limite de tous les autres*. (Résumé des « leçons » données à l'Ecole Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal, 1823). Enfin vient la définition rigoureuse en ε *et* α par l'Allemand Karl Weierstrass au $19^{ième}$ siècle. Par la suite, nous avons recensé quelques obstacles épistémologiques liés au concept :

L'horreur de l'infini : l'obstacle réside dans le fait qu'en admettant l'existence de l'infini, étant donné par exemple qu'un ensemble infini peut être mis en bijection avec l'une de ses parties infinies, alors on aboutit à une contradiction avec la théorie d'Euclide selon laquelle : « le tout n'est pas égale à la partie ».

La nature fictive des entités mathématiques appelées *infinitésimaux.* Au sens de Carnot, une quantité infiniment petite est une quantité qui est considérée comme continuellement décroissante, tellement qu'elle puisse être rendue aussi petite que l'on veut. Comment

* Ecole Normale Supérieure de Yaoundé – Cameroun – h.ngoufo@yahoo.com

comprendre qu'une quantité (nombre positif dans le langage moderne) soit plus petite que toute quantité donnée mais qui n'est pas nulle ?

Le modèle monotone du concept de limite, par exemple, une somme infinie peut être finie. C'est le cas de la série numérique $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ dont la somme vaut $\frac{\pi^2}{6}$. Deux quantités peuvent tendre simultanément vers 0, alors que le rapport « $\frac{0}{0}$ » tend vers une quantité finie.

La transposition numérique des grandeurs géométriques : l'obstacle ici est dans le fait qu'on a du mal à représenter numériquement certaines grandeurs géométriques. Si on considère la grandeur géométrique $\sqrt{2}$, on ne peut pas l'épuiser en l'écrivant numériquement parce que le développement décimal de $\sqrt{2}$ est illimité.

Enfin nous avons dégagé trois points de vues épistémologiques pour dépasser ces obstacles : le point de vue *algébrique* qui porte sur le calcul des limites selon les règles algébriques (Trouche 1996) ; le point de vue *approximation de x* ou *cinématique* : la variable tire la fonction (Bkouche, 1996) et le point de vue *approximation de $f(x)$* : c'est le degré d'approximation que l'on veut au niveau des $f(x)$ qui tire le degré d'approximation de la variable (Bkouche 1996).

2. Difficultés récurrentes des élèves

Dans la suite de ce travail, nous avons identifié chez les élèves quelques conceptions récurrentes liées au concept de limite. Sans prétendre à l'exhaustivité, voici quelques-unes : certains élèves pensent qu'une fonction constante n'a pas de limite puisqu'elle ne varie pas ; la limite d'une fonction n'est déterminée qu'aux bornes de son domaine de définition ; les élèves ne maîtrisent pas les règles opératoires et des théorèmes sur les limites; les écritures du type $0 \times \infty$ utilisées abusivement par certains enseignants créent la confusion chez les élèves à partir du moment où ils ne comprennent pas pourquoi on ne peut pas avoir « $0 \times \infty = 0$ »; les élèves ne comprennent pas pourquoi $\lim_{x \to +\infty} \frac{x-3}{x-2} = 1$ car selon eux, x n'atteindra jamais l'infini; les élèves se représentent l'infini comme un nombre.

3. Problématique

L'analyse conceptuelle sus-évoquée et certaines difficultés récurrentes des élèves nous ont permis de nous rendre compte de la difficulté qu'il y a à introduire le concept de limite en classe de première au Cameroun tant du point de vue épistémologique que des difficultés rencontrées par ceux qui ont déjà suivi un enseignement sur les limites. C'est donc pour cela que nous proposons une approche par les compétences pour l'introduction de ce concept au Cameroun. Pour cela, nous avons formulé la question de recherche suivante : *Quel est l'impact sur les performances scolaires des élèves de l'introduction du concept de limite dans une approche par les compétences ?*

Le problème que nous voulons résoudre ici est celui de l'appropriation du concept de limite, le sens et la signification par les élèves. Le sens étant entendu ici comme l'ensemble des différents schèmes qu'évoque la notion de limite. Ainsi, la thèse que nous défendons ici est que l'approche utilisée jusqu'ici par les enseignants de mathématiques pour l'enseignement de la limite en première ne permet pas une bonne conceptualisation de la notion et son opérationnalité dans l'activité mathématique par l'apprenant. Pour soutenir cette

thèse, nous postulons ici en guise d'hypothèse générale que : *l'introduction du concept de limite par une situation peut permettre une bonne acquisition de par les élèves.* De cette hypothèse, se dégage trois hypothèses de travail dont la première est : *les conceptions que les élèves ont de la limite dans le sens commun se constituent en obstacles dans la pratique*. Pour la seconde : *l'introduction du concept de limite par l'intuition n'est pas suffisante pour la manipulation de cet objet d'enseignement*. Quant à la troisième : *une situation idoine et une prise en charge des élèves peuvent permettre une bonne conceptualisation de la notion de limite.*

4. Cadres théoriques

Nous avons situé ce travail dans trois cadres théoriques dont nous montrons par la même occasion la pertinence du choix. Nous commençons par la théorie des situations didactiques de Guy Brousseau à partir de 1971 qui propose une modélisation du savoir, des situations d'enseignement. Nous donnons dans ce qui suit certains objets développés par cette théorie tout en donnant leur intérêt pour ce travail :

Comme objet, nous avons le *travail du professeur* qui consiste à exposer le savoir et les problèmes dont la résolution mettra en œuvre ce savoir. Pour ce travail, nous commencerons par une situation dont la résolution mettra en œuvre le savoir limite. Elle développe également l'objet *variables didactiques* : ce sont celles dont la modification des valeurs provoque des adaptations, des régulations, des apprentissages et dans le cas de la recherche des solutions d'un problème, des changements de stratégies. Pour ce travail, ce sont la fonction, le réel vers lequel x tendra dans le calcul de la limite, l'intervalle sur lequel nous travaillons. La *situation didactique* quant à elle est celle dans laquelle l'intention d'enseigner est manifeste. Pour ce travail, nous considérons l'activité d'apprentissage comme notre situation didactique. La théorie parle aussi de *situation adidactique* dans laquelle l'intention d'enseigner n'est pas manifeste. Dans le cadre de ce travail, la situation-problème sera notre situation adidactique.

Nous nous situons ensuite dans le cadre de la transposition didactique développée par Yves Chevallard (1985) qui pour lui consiste au travail qui d'un objet de savoir à enseigner fait un objet d'enseignement. Le schéma de la transposition didactique consiste à partir du savoir de référence pour le savoir enseigné en passant par le savoir à enseigner.

Le savoir de référence est le savoir en tant qu'objet d'étude à l'université. Il est accessible sous forme de note de cours. Pour ce travail, nous considérons la définition savante du concept de limite donnée à l'université comme savoir de référence :

Soient $f \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}, X_0 \in \overline{\mathbb{R}}, X_0$ *un point d'accumulation de* $Domf$ et L$\in\overline{\mathbb{R}}$. L est limite de f *en* X_0 *si* $\forall V \in \mathcal{V}(L), \exists \mathcal{O} \in \mathcal{V}(X_0), \forall x \in \mathcal{O}, (x \in Domf \text{ et } x \neq X_0) \Rightarrow \boldsymbol{f(x)} \in$ V. La syntaxe utilisée ici dans la définition formelle est absente au secondaire que ce soit au niveau du savoir à enseigner ou du savoir enseigné. La notion de point d'accumulation est aussi absente au secondaire et c'est d'ailleurs ce qui explique pourquoi les élèves ne savent pas la condition qu'il faut sur un x_0 pour qu'on puisse calculer la limite enx_0. Néanmoins la notion de voisinage est évoquée implicitement à travers la notion d'intervalle au secondaire, bien que l'utilisation ne soit pas la même que dans le savoir de référence.

Le savoir à enseigner est celui précisé dans l'ensemble des textes officiels (programmes, instructions officielles, commentaires, etc.). Pour cette recherche, nous considérons le savoir

en vigueur dans les programmes officiels au Cameroun qui admettent ces équivalences comme définition de la limite d'une fonction :

$\lim_{x\to 0} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} |f(x) - l| = 0$; $\quad \lim_{x\to 0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} |f(x+h) - l| = 0$.

Le savoir enseigné est celui construit par l'enseignant et qu'il mettra en œuvre en classe. Pour ce travail, nous considérons l'interprétation : $\lim_{x\to a} f(x) = b$ signifie que « lorsque x se rapproche de a, $f(x)$ se rapproche de b. Il vient de cette transposition didactique qu'il y a un écart entre le savoir de référence et le savoir enseigné. En effet on part de la définition formelle de l'écriture $\lim_{x\to a} f(x) = b$ à son interprétation en classe de première scientifique au secondaire.

Le troisième cadre est celui de la notion de limite d'une fonction numérique : la définition de la limite que nous retenons ici est celle que nous avons donnée au niveau du savoir de référence. Toutefois nous avons observé ici d'une part que c'est le point de vue *approximation* qui a cours à l'université. D'autre part, d'après les travaux de Bloch et Ghedamsi (2005), à l'université, la validation des résultats s'observe dans le système de preuve de l'analyse, pourtant c'est le cadre intuitif qui sert de validation au secondaire.

5. Recension des écrits

Dans la suite de ce travail, nous avons recensé quelques écrits des auteurs sur les difficultés et obstacles liés à l'enseignement de la limite dont nous donnons la teneur ici et l'intérêt pour cette étude. Certains chercheurs ont travaillé sur les obstacles et difficultés liés à l'enseignement de la limite qui sont : d'ordre épistémologique (Sierspinska 1985, Brousseau 1998) dus aux raisons internes aux mathématiques; d'ordre didactique (CREM 1995, Artigue 1998, Brousseau 1998, Groupe aha 1999) dus aux pratiques d'enseignement peu efficaces ; d'ordre cognitif (Tall, Vinner 1981, Cornu 1991, Dubinsky 1991) dus aux processus de conceptualisation et d'abstraction impliqués et d'ordre métacognitif (Zan 2001, 2002) dus à l'ensemble des attitudes qu'adoptent les élèves dans leur rapport au savoir mathématique.

Dans son article *Apprentissage de la notion de limite*, Cornu (1981) montre en se référant aux travaux de Tall *et* Vinner(1981) que l'activité mathématique ne se résume pas à la mise bout à bout des propositions selon des règles logiques. Un objet mathématique n'est pas mis en jeu uniquement d'après les axiomes ou les propriétés qui le caractérisent. La mathématique professionnelle où l'élève met en jeu à chaque instant des aspects très personnels de la notion mathématique qu'il manipule : il a présent à l'esprit des exemples particuliers, chaque notion déclenche en lui des images et ce sont ces images qui font bien souvent fonctionner l'intuition. Il montre également que ce sont les modèles propres de l'apprenant qui ne sont ni faux, ni justes qui font fonctionner l'activité mathématique chez l'apprenant. Ces modèles propres résultent des mélanges entre modèles spontanés de l'apprenant et la définition mathématique. L'auteur entend ici par modèles spontanés les conceptions du sens commun à propos d'un concept. Les résultats de Cornu nous permettent de construire notre séquence de cours en tenant compte des modèles spontanés des apprenants. Ceci d'autant plus qu'il sera illusoire de penser que la définition mathématique de la limite effacera toutes les conceptions du sens commun.

Dans leur article *Obstacles to student's understanding of the limit*, Abraham Kumsa et al (2017), travaillent sur les obstacles liés au concept de limite et ils ont relevé les obstacles épistémologiques, didactiques, cognitifs et métacognitifs. Ils ont identifié trois sources d'obstacles épistémologiques dans l'enseignement et l'apprentissage de la limite. La première est le développement historique et la formalisation du concept de limite. Ici, ils montrent que le caractère fictif des *infiniment petits* et des *infiniment grands*, l'aspect métaphysique de la limite constituent des obstacles épistémologiques. La seconde parle des concepts utilisés et leur nature duale dans la formalisation de la limite : le concept d'infini avec sa double nature (infini potentiel et infini actuel), le concept de fonction (tantôt vu comme ensemble de valeurs ou alors comme expression analytique) qui selon eux créent des barrières dans la tête des apprenants. La dernière source est la nature duale implicite dans la symbolisation de la limite (dynamique et statique).

Pour les obstacles cognitifs, les auteurs montrent que certaines difficultés observées chez l'apprenant résultent de l'incompatibilité entre le concept image individuel de ce dernier et le concept définition de la limite. Ils montrent que le niveau d'abstraction et de conceptualisation impliqué dans la formalisation de la limite est également source d'obstacle cognitif.

Les auteurs finissent par conclurent que certains choix didactiques de l'enseignant, la manière par laquelle le concept se présente dans les manuels, le gap entre ce qui doit être dit et ce qui est actuellement dit sont autant de sources d'obstacles didactiques. Le travail de ces auteurs nous a permis de nous rendre compte des obstacles liés à l'enseignement de la limite et nous avons utilisé cela pour enrichir notre problématique.

Dans son article *Limites et infini au lycée* l'Equipe POTIERS-NIORT (1993), travaille sur les concepts de limite et d'infini dans leurs aspects historiques et philosophiques, sur leur fonctionnement dans l'enseignement Français depuis 1945 et sur leurs différentes approches par d'autres disciplines telles que la physique, la chimie et l'informatique. Elle (l'équipe) stipule que la notion de limite, bien qu'étant en germe dans les paradoxes de Zénon, dans l'œuvre de Fermat, Newton, Euler ; n'apparait clairement, du moins au sens où on l'entend actuellement que vers les années 1860. Elle soulève également les problèmes dans lesquels l'infini est impliqué : génération des entiers, suite des nombres premiers, sommation des séries et donc problèmes de convergence, comparaison d'ensembles et donc puissances d'ensembles. D'après les auteurs, l'enseignement du concept de limite en classe de première est difficile pour certaines raisons : les définitions de Weierstrass des limites sont difficiles à assimiler par un débutant, leurs énoncés étant complexes puisque contenant deux quantificateurs (non commutables) portant sur une implication. Leur mise en œuvre est des plus délicates, car elle suppose que l'étudiant ait assimilé ce qu'est une condition suffisante (difficulté logique), et que de plus il soit à l'aise dans l'utilisation des techniques de majoration et de minoration élémentaires (difficulté technique).

Notre intérêt pour ce travail vient du fait que qu'il nous a fourni des éléments qui ont orientés notre réflexion sur l'analyse conceptuelle, mais également sur les difficultés qu'il y a à introduire les expressions telles que : « est infiniment petit », « est infiniment grand » au lycée. En effet le problème qui se pose ici est celui de l'ordre de grandeur et nous avons repéré cela lors de l'analyse du manuel de première D.

II PARTIE EXPERIMENTALE

1. Analyse des manuels et observation d'une pratique de classe

Toujours dans l'optique d'apporter quelques éléments de réponse à nos questions de recherche, nous avons analysé le manuel Excellence en mathématiques classe de première D, édité par NMI Education. Nous avons porté notre choix sur ce manuel parce que l'ossature d'une unité didactique ici commence par *prendre un bon départ* : *une ou plusieurs activités sont proposées à l'apprenant dans lesquelles il doit faire face aux difficultés et mobiliser ses connaissances pour répondre aux interrogations*. Ce qui s'inscrit dans la logique de l'approche par les compétences qui met l'accent sur les processus d'apprentissage (l'élève construit son propre savoir en activité).

L'analyse de ce manuel nous permettra d'une part de relever l'écart entre le savoir de référence et le savoir enseigné et d'autre part d'identifier les phénomènes dans les manuels qui peuvent créer des problèmes dans l'enseignement et l'apprentissage de la limite. La recension des écrits sur le sujet nous a montré que certains obstacles liés à l'acquisition de la limite par les apprenants sont de nature didactique. Ce sont ces phénomènes qui vont nous inspirer à construire notre situation afin d'introduire la limite dans une perspective d'approche par les compétences dans l'optique de mesurer son impact sur les performances scolaires des apprenants. Ainsi de l'analyse de ce manuel, il vient que : le langage prédominant est le langage mixte: c'est-à-dire un mélange du langage mathématique et du formalisme logico mathématique. Le vocabulaire utilisé pour exprimer les notions telles que voisinage de $+\infty$, point d'accumulation d'un point est celui du savoir de référence. L'interprétation de l'écriture $\lim_{x\to a} f(x) = b$ est *lorsque x se rapproche de a, $f(x)$ se rapproche de b*. L'approche dite graphique est utilisée pour introduire le concept de limite et les tâches de types algorithmiques sont prépondérantes dans le manuel.

Pour finir avec l'analyse du manuel, nous avons identifié certains phénomènes absents dans le manuel qui peuvent s'ériger en obstacle dans la pratique : la non clarification des expressions telles que : *être aussi grand que l'on veut*, *être aussi petit que l'on souhaite* etc. L'absence de vrais problèmes qui mettraient en relation les calculs d'approximation dans l'optique de donner du sens aux expressions comme *être près de* ou *être aussi grand que l'on souhaite*, etc., préliminaires à celles dont on se sert pour les limites.

Nous avons appuyé l'analyse du manuel par l'observation d'une pratique de classe d'une enseignante du lycée bilingue d'application de la ville de Yaoundé au mois de Mai 2017. De cette pratique, il ressort qu'il y a des similitudes entre la transposition qui est faite dans le manuel de première D analysé et celle qui est faite en salle de classe.

2. Expérimentation et analyse des résultats

Notre expérimentation s'est déroulée en deux phases. Dans la première phase, nous avons passé un questionnaire qui a porté sur quatre exercices construits autour du calcul des limites en première scientifique. Nous l'avons passé le jeudi 20 Avril 2017 aux élèves de première c (17- 18 ans) du lycée bilingue d'application de Yaoundé qui avaient déjà suivi un cours sur les limites. L'analyse *a posteriori* du questionnaire nous permettra de confirmer notre première hypothèse spécifique. Ainsi de cette analyse, il vient que :

Il y a une forte présence chez les apprenants des conceptions du sens commun (limite comme point d'arrêt, limite comme borne infranchissable). Dans l'interprétation de

l'écriture$\lim_{x\to a} f(x) = b$, certains apprenants voient b comme une borne à ne pas franchir. Cette conception de la limite se rapproche plus du sens commun dans la mesure où lorsqu'on parle de limite d'un *champ de maïs* par exemple en société, il s'agit d'une borne à ne pas franchir, ce qui nous permet de rejoindre le point de vue de Cornu lorsqu'il parle de modèles spontanés des apprenants comme obstacle à la connaissance mathématique. D'autres toujours concernant l'interprétation de l'écriture $\lim_{x\to a} f(x) = b$ parle de b *comme point d'arrêt de*$f(x)$. Nous pensons ici qu'il s'agit encore de conception du sens commun. D'ailleurs Cornu a qualifié ce modèle (dans la tête des élèves) de modèle α : la limite est infranchissable. Nous voyons le caractère infranchissable ici dans l'expression *le point d'arrêt de* $f(x)$.

Il y a la présence des obstacles liés à la fonction comme relevait Sierspinska (1985) (fonction rationnelle, polynôme et fonction comportant $sinx$ comme la fonction$x \mapsto \frac{x+sinx}{1+x^2}$). Par exemple, pour le calcul de$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+sinx}{1+x^2}$, certains élèves ont écrit$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+sinx}{1+x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} = 0$. On constate avec cet exemple qu'ils utilisent le résultat du calcul sur les limites des fonctions rationnelles pourtant ils ne sont pas en face d'une fonction rationnelle. On peut donc dire qu'ils ne savent pas ce qu'on entend par fonction rationnelle. C'est donc un obstacle lié à la fonction. Nous pensons qu'il faut revenir sur la définition des fonctions polynômes, rationnelles, trigonométriques etc., lors de l'enseignement sur le calcul des limites en première scientifique.

Il y a la présence du point de vue de Bloch et Ghedamsi (2005) qui stipulait que les élèves du secondaire n'ont pas à prendre en charge le questionnement sur les fonctions ayant des limites ou non. En effet à l'item1 *Réponds par vrai ou faux : toute fonction admet une limite finie ou infinie,* de l'exercice 2 de notre questionnaire, 28 élèves sur 33 élèves interrogés soit un pourcentage 84,84% pensent que la limite d'une fonction existe toujours en un point ou en l'infini. Ce pourcentage est élevé à notre avis parce qu'au lycée, les tâches que les enseignants donnent aux apprenants portent plus sur le calcul des limites et non sur l'éventuelle existence de la limite en un point. Cette pratique installe dans la tête des apprenants la règle implicite selon laquelle la limite d'une fonction existe toujours. Ce constat rejoint donc le point de vue développé par Bloch et Ghedamsi (2005). Nous pensons qu'il est judicieux de considérer ce type de questionnement au lycée pour parfaire la compréhension de la limite chez les élèves.

Il y a la forte présence du modèle implicite selon lequel $\lim_{x\to a} f(x) = b$ signifie que$f(a) = b$.

Cela n'est guère surprenant puisque ce modèle atteste de l'enseignement reçu sur la signification de cette écriture. D'ailleurs l'entretien mené avec l'enseignante du lycée bilingue d'application de Yaoundé le confirme. Toute porte à croire que les conceptions erronées des élèves par rapport à cette signification relèvent de la signification qui est donnée par certains enseignants en classe. Cette interprétation constitue un obstacle à notre avis puisque nous avons signalé dans l'analyse conceptuelle que le point de vue qui a cours au lycée est celui selon lequel *c'est la variable qui tire la fonction*. A partir de ce moment, on ne voit pas l'idée de mouvement dans l'interprétation des élèves. Toutefois ne perdons pas de vu aussi que la plus part des fonctions qu'on leur donne au lycée sont des fonctions continues, au point où, lorsqu'ils calculent la limite en un nombre réel qui appartient au domaine de définition de la fonction, elle se confond avec l'image de ce point par la fonction. Cela les encourage à avoir ce modèle implicite.

Ces résultats vont nous permettre d'apporter quelques éléments de réponses à notre question de recherche. En effet, il sera question pour nous de tenir compte des conceptions du sens commun, des obstacles liés à la fonction et du modèle implicite relevé au dernier tiret lors de la construction et de la conduite de notre situation dans l'optique de mieux mesurer l'impact de l''introduction du concept de limite par une situation sur les performances scolaires des apprenants.

Dans la deuxième phase, nous avons passé notre séquence de cours à 10 élèves de seconde c (16-17 ans) du lycée d'Efoulan à Yaoundé le Lundi 22 Mai 2017. Le but étant d'enseigner cette leçon aux élèves à qui on n'a jamais enseigné le cours sur le calcul des limites. Nous présentons ici la situation-problème avec laquelle nous avons introduit la séquence de cours.

Situation-problème : « Pour financer son développement, un pays décide de contracter une dette : 80000000 FCFA en 2000, 40000000 FCFA plus sa moitié en 2001, 40000000 FCFA plus son tiers en 2002 et ainsi de suite. On considère l'année 2000 comme l'année 0 et on constate que la dette varie en fonction de l'année suivant la loi$f(x) = 40000000(\frac{x+2}{x+1})$. Il décide de ne pas aller en déca de 40000000 FCFA au fur et à mesure qu'il s'endette. Peut-il atteindre un tel objectif s'il s'endette indéfiniment ? »

Après la séquence de cours, nous avons fait une évaluation dont voici les résultats :

Question 1 :

Différentes écritures	Nombre d'élèves qui connaissent la signification	Nombre d'élèves qui ne connaissent pas la signification	Nombre d'élèves qui se sont abstenus
$\lim_{x\to x_0} f(x) = l$	7	3	0
$\lim_{x\to x_{0-}} f(x) = l'$	6	4	0
$\lim_{x\to x_{0+}} f(x) = l'$	5	4	1

Tableau 1

Question 2 :

Différents items	Nombre d'élèves ayant trouvé	Nombre d'élèves ayant raté	Nombre d'élèves qui se sont abstenus
A	6	4	0
B	8	2	0
C	8	2	1

Tableau 2

Pour ce qui est de la question 1 nous attendions pour l'écriture $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ la signification *lorsque x est voisin de x_0 $f(x)$ est également voisin de l* vu que pendant la séquence de cours, nous avons donné cette signification et le sens que nous donnons à *est voisin de* …. Ainsi on entend ici par *x est voisin de a* si la distance entre x et a est très petite.

Les résultats des tableaux 1 et 2 nous montrent que plus de la moitié de l'effectif a donné la signification attendue. Cela montre que lorsque les élèves sont en activité, lorsqu'ils constatent par eux-mêmes certains résultats, cela induit des pourcentages de réussite satisfaisant. Seulement une signification a retenu notre attention ici. Elle a été donnée par 2 élèves en ce qui concerne la deuxième écriture du tableau 1. Pour eux, $lim_{x \to x_0^<} f(x) = l'$ *signifie que lorsqu'on va vers* x_0 *,* $f(x)$ *ne peut pas franchir* l'. Cette signification n'est pas juste : en effet lorsqu'on dit que $f(x)$ est voisin de l' , on entend par là que la distance entre les deux est « réduite ». Distance réduite ne veut pas dire franchissement ni non franchissement de la limite l' . Nous parlons de distance réduite entre guillemets parce ce mot est relatif et on est toujours confronté au problème d'ordre de grandeur. Certaines valeurs de $f(x)$ peuvent dépasser l', mais la distance qui sépare les deux soit toujours « réduite ». Nous pouvons interpréter la présence de cette signification $f(x)$ *ne peut pas franchir* l' par le fait que ces élèves sont restés dans leurs conceptions du sens commun et l'apprentissage ne pouvait résulter que de la modification de leur structure mentale pour qu'ils donnent un sens à leur niveau à la notion.

III. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Les résultats que nous avons obtenus dans ce travail, nous ont permis de comprendre que les obstacles et difficultés liés à l'introduction du concept de limite d'une fonction au lycée sont de nature épistémologique, cognitive et didactique. Pour cette dernière nous avons montré que l'introduction du concept par une situation peut permettre une bonne conceptualisation de la limite. Pour ceux des élèves qui continueront leurs carrières universitaires dans la filière mathématique, ils rencontreront encore le concept de limite d'une fonction ; mais cette fois si sur une autre forme : en tant qu'objet de savoir. On se demande donc si le fait pour un élève d'utiliser le concept de limite au secondaire avant de l'étudier à l'université comme objet théorique n'est pas de nature à créer un écart entre ces deux institutions d'enseignement ? En guise de perspective, nous pouvons approfondir ce travail en nous penchant sur l'étude de la transition entre le lycée et l'université à propos de la notion de limite d'une fonction : cas du Cameroun.

REFERENCES

Bkouche R. (1996). *Point de vue sur l'enseignement de l'analyse : des limites et de la continuité dans l'enseignement-Repères-IREM* 24 ; p.67-76. Pont-à-Mousson

Bloch I. (2005). *Comment le cursus secondaire prépare-t-il les élèves aux études universitaires ? Le cas de l'enseignement de l'analyse en Tunisie*, IUFM d'Aquitaine, Ismène GHEDAMSI, ISEFEC-Tunis

Brousseau (1998). *Théorie des situations didactiques*. La Pensée Sauvage ; Grenoble.

Chevallard Y. (1985). *La transposition didactique-du savoir savant au savoir enseigné*. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Cornu B. (1981). *Apprentissage de la notion de la limite : Modèles spontanés et modèles propres*. Université de Grenoble I.

Cornu B. (1983). *Apprentissage de la notion de limite : conceptions et obstacles*. Thèse, Université Scientifique et Médicale de Grenoble.

Dubinsky E. (1991). *Reflective abstractions in advanced mathematical thinking. In D.* Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95-126). Dordrecht : Kluwer academic publishers.

Maffini A. (2007). *Le concept D'infini et ses rapports avec le temps*. Groupe "Zeroalla zero"- Université de Parma (Italie).

Spierpinska (1985). *Obstacles épistémologiques relatives à la notion de limite*. Recherches en didactique des mathématiques, Vol.6.1. Edition La pensée Sauvage.

LES PRATIQUES DES ENSEIGNANTS DANS LA RÉSOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ A DEUX INCONNUES EN CLASSE DE 3E

OHOUNI AREREY*[1] Larissa

Résumé – Dans notre mémoire, nous avons étudié les pratiques des enseignants accomplissant des tâches de résolution des systèmes d'équations du premier degré à deux inconnues en classe de 3e. L'analyse de leurs pratiques, à partir d'un questionnaire et d'un entretien semi-directif, nous renseigne sur le choix de la méthode de résolution utilisée par ceux-ci, méthode qui n'est pas en conformité avec celles prescrites.

Mots-clefs : Pratiques des enseignants, systèmes d'équations, méthodes de résolution, apprentissage des élèves.

Abstract – We have studied in our research work, teaching methods used by some teachers dealing with systems of equation of the first degree tasks with two unknowns in 3e classes. The analysis of their practices on the basis of a questionnaire along with a semidirective interview has revealed us their choices of the method of resolution used, which is not in accordance with the applied ones.

Keywords: Teaching methods, systems of equation, methods of resolution, students'learning process.

I. INTRODUCTION : CONTEXTE ET PROBLÉMATIQUE

Depuis de nombreuses années, en Côte d'Ivoire, les élèves de 3e (élèves de 15-16 ans) arrivent en 2nde en maîtrisant très peu les méthodes de résolution des systèmes d'équations. Ces erreurs se rencontrent encore pour certains dans les classes supérieures quelquefois nuisant à l'utilisation ou l'installation de nouveaux savoirs sur ce thème.

Par ailleurs, plusieurs auteurs se centrent essentiellement sur des difficultés d'élèves débutants en algèbre mais peu s'intéressent directement à l'activité du professeur sur ce chapitre. Quelques chercheurs comme Altet (2002), Robert (2005) et Coulange (2000), analysent à travers leurs travaux, les pratiques des enseignants sous divers angles.

Cependant, depuis plus d'une vingtaine d'années, les recherches portant sur les pratiques des enseignants ont pris une importance grandissante en didactique des mathématiques. Ainsi, avons-nous choisi d'étudier les pratiques des enseignants dans la résolution des systèmes d'équations du premier degré à deux inconnues en fin de collège.

C'est l'importance des systèmes d'équations au secondaire comme outil de base de l'algèbre linéaire qui a été le principal élément qui nous a amené à nous intéresser à ce thème. Il est par conséquent primordial que l'enseignant réussisse la transmission du savoir relatif à cette notion.

Les questions de recherche que nous nous sommes posées sont les suivantes : quelles sont les méthodes de résolution des systèmes d'équations du premier degré à deux inconnues que les professeurs de 3e enseignent et utilisent ? Quels impacts ont ces pratiques sur les apprentissages mathématiques des élèves ? Quelles sont les contraintes qui pèsent actuellement sur l'activité du professeur de 3e, lorsqu'il envisage la résolution des systèmes d'équations ? Quelles sont les solutions que nous proposons pour améliorer ces pratiques ?

Nous faisons les hypothèses de recherche suivantes : dans le système scolaire ivoirien, les professeurs n'utilisent pas les méthodes en vigueur qui sont la méthode par combinaison, par substitution et la méthode graphique pour la résolution des systèmes d'équations : ils ont leurs

[1] * École Normale Supérieure d'Abidjan - Côte d'ivoire – ohouniarereylarissa@yahoo.fr

propres conceptions, leurs expériences et leurs histoires en tant qu'étudiants qui influencent leurs pratiques. Ils sont contraints par des habitudes sociales ou locales.

II. CADRE THÉORIQUE

En nous inspirant de travaux existants, nous avons été conduite à adopter un regard sur les pratiques des enseignants. Celles-ci se définissent selon Robert (1999) comme un « ensemble des activités de l'enseignant qui aboutissent à ce qu'il met en œuvre en classe ». Le terme « pratique » désigne donc tout ce que fait l'enseignant avant, pendant et après la classe, en tenant compte de ses préparations, de ses conceptions et connaissances en mathématiques et de ses décisions instantanées, sans oublier les contraintes sociales et institutionnelles qui peuvent peser sur lui.

Par ailleurs, comme objet d'enseignement, un système d'équations est un ensemble d'équations utilisant les mêmes variables ou inconnues ; une solution est l'affectation d'une valeur à chacune de ces variables, de telle façon que toutes les équations du système soient satisfaites simultanément.

Cependant, la résolution des systèmes d'équations a connu une évolution dans le temps présentée par le tableau ci-dessous (extrait des principales évolutions de l'enseignement des systèmes d'équations en France selon Coulange, 2000) :

Période	Classique (1902-1959)	Transition (1960-1971)	Réforme (1972-1979)	Contre-réforme (1980-1988)	Contemporaine (1989 à nos jours)
Systèmes d'équations au sein de l'algèbre enseignée					
Résolution algébrique	substitution et élimination ou réduction --- (solution unique)	substitution et addition ou combinaison --- (solution unique)	combinaisons linéaires et substitution --- (3 cas)	combinaison ou addition et substitution --- (3 cas)	substitution et combinaison ou addition --- (solution unique)
Résolution graphique	forme réduite $y = ax + b$	forme réduite $y = ax + b$	Forme cartésienne $ax + by + c = 0$ (visualiser 3 cas)	forme cartésienne $ax + by + c = 0$ et réduite $y = ax + b$ (3 cas)	forme réduite $y = ax + b$ (solution unique)

Tableau 1 *– Évolution de l'enseignement des systèmes d'équations*

Pendant les périodes dites classiques et de transition l'accent est mis sur la résolution algébrique de systèmes d'équations à coefficients numériques admettant une solution unique. Parallèlement, l'étude de la résolution graphique est quasi-inexistante.

La réforme des années 1970 marque l'avènement d'une algèbre moderne dès le début du secondaire. On note que les trois cas de résolution (solution unique, infinité de solutions ou aucune solution) qui ont joué un rôle important dans l'histoire de l'algèbre linéaire (Dorier 1990, Coulange 2000), sont « visualisés graphiquement ».

Pendant la période de contre-réforme, l'accent est mis sur les trois cas de résolution, associés aux trois positions possibles de deux droites dans le plan. Une place plus importante est donnée à la résolution algébrique effective de système.

Au cours de la réforme contemporaine 1989 à nos jours, la résolution algébrique des systèmes à coefficients numériques et à solution unique redevient un enjeu central, qui nourrit de nouveau la résolution de problèmes concrets. La résolution graphique redevient similaire à celle présente avant la réforme des maths modernes avec un passage obligé par les « équations réduites ».

Le programme éducatif ivoirien, au niveau de l'enseignement des systèmes d'équations, n'a pas échappé à ces évolutions. De nos jours, les méthodes en vigueur en classe de 3e, pour la résolution des systèmes d'équations sont : la méthode par combinaison, la méthode par substitution et la méthode graphique. Par ailleurs, une autre méthode d'enseignement, dite « méthode hybride » est développée de plus en plus par les professeurs leur permettant de résoudre plus aisément les systèmes d'équations. Elle consiste à trouver l'une des inconnues par combinaison linéaire et l'autre par substitution comme nous le montrons ci-dessous.

On veut résoudre le système d'équations suivant : $\begin{cases} 2x + 3y + 1 = 0 & (1) \\ 4x - 5y + 2 = 0 & (2) \end{cases}$

Résolution

1ère étape : élimination de x

On multiplie chaque membre de l'équation (1) par 2 on obtient : $4x + 6x + 2 = 0$.

On multiplie chaque membre de l'équation (2) par -1 on obtient : $-4x + 5y - 2 = 0$.

On additionne membre à membre les équations obtenues on obtient : $0 + 11y + 0 = 0$

$$y = 0$$

2e étape : détermination de la valeur de x.

Dans l'équation (1), on remplace y par sa valeur : $2x + 3 \times 0 + 1 = 0$

$$x = -\frac{1}{2}$$

3e étape : vérification :

$$\begin{cases} 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 3 \times 0 + 1 = -1 + 1 = 0 \\ 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - 5 \times 0 + 2 = -2 + 2 = 0 \end{cases}$$

Donc le système a pour solution le couple : $\left(-\frac{1}{2}\ ;\ 0\right)$.

III. MÉTHODOLOGIE DE LA RECHERCHE

L'analyse des pratiques des enseignants s'est faite à partir d'un questionnaire et d'un entretien semi directif.

Voici les questions qui composent le questionnaire :

Q1. Avant l'année scolaire 2016-2017, avez-vous déjà enseigné les systèmes d'équations du premier degré à deux inconnues en 3e ?

Q2. Quelle est votre ancienneté en tant qu'enseignant ?

Q3. Pensez-vous que vos élèves vont développer des aptitudes dans la résolution des systèmes d'équations du premier degré à deux inconnues en fin de collège?

Q4. Pour vous, en tant qu'enseignant, quelles sont les méthodes de résolution des systèmes d'équations du premier degré à deux inconnues ?

Q5. Quelles sont les méthodes de résolution en vigueur en 3e ?

Q6. Quelle méthode préférez-vous ?

Q7. En dehors des méthodes en vigueur, utilisez-vous d'autre méthode de résolution du système d'équations du premier degré à deux inconnues en classe ? Si oui, laquelle et dites pourquoi ?

Q8. Parmi ces méthodes, laquelle est la mieux comprise par vos élèves ?

Q9. En précisant la méthode de votre choix, résoudre le système d'équations (S1) suivant :

$$(S1) : \begin{cases} 3x + 4y - 32 = 0 \\ 7x + 6y - 58 = 0 \end{cases}$$

Nous avons ensuite proposé un entretien semi-directif piloté par les questions suivantes : comment débutez-vous votre enseignement sur les systèmes d'équations du premier degré à deux inconnues ? Pourquoi ? Quel est pour vous l'intérêt des systèmes d'équations en mathématiques ?

Outre le fait d'avoir des renseignements sur les divers « profils » des enseignants interrogés : âge, statut (stagiaires-professeur ou enseignants), les objectifs consistaient à vérifier l'application des méthodes de résolution en vigueur.

La méthode d'analyse a consisté à regrouper les données dans des tableaux selon les « types » de réponses obtenues et les commenter.

La population de cette étude se compose de 30 enseignants de mathématiques dont 20 professeurs de l'enseignement « public », 8 professeurs de l'enseignement « privé » et 2 stagiaires professionnels de l'École Normale Supérieure d'Abidjan (ENS). À cause des grèves répétées des enseignants, à la négligence de certains professeurs et à l'oubli d'autres, nous avons pu recueillir 19 réponses des professeurs au questionnaire et à l'entretien.

IV. RÉSULTATS ET DISCUSSION

1. Présentation et analyse des résultats

Nous faisons apparaître les principaux « types » de réponses obtenues dans les tableaux ci-dessous :

		Professeurs	Pourcentage
Ancienneté	entre 5 et 9 ans	3	16%
	plus de 10 ans	16	84%

Tableau 2 *- Réponses recueillies à la question Q2*

Pour l'ancienneté, nous remarquons que la majorité des professeurs interrogés ont plusieurs années d'expérience.

Types de réponses	Questions	Effectif	Pourcentage

Type A « oui »	*Avant l'année scolaire 2016-2017, avez-vous déjà enseigné les systèmes d'équations du premier degré à deux inconnues en 3e ?*	19 réponses	100%
	Pensez-vous que vos élèves vont développer des aptitudes dans la résolution des systèmes d'équations du premier degré à deux inconnues en fin de collège?	19 réponses	100%
	En dehors des méthodes en vigueur, utilisez-vous d'autre méthode de résolution du système d'équations du premier degré à deux inconnues en classe ? Si oui, laquelle et dites pourquoi ?	14 réponses	74%
Type B « non »	*En dehors des méthodes en vigueur, utilisez-vous d'autre méthode de résolution du système d'équations du premier degré à deux inconnues en classe ? Si oui, laquelle et dites pourquoi ?*	5 réponses	26%

Tableau 3 *- Réponses de type A « oui » et type B « non »*

Les données du tableau 3 révèlent que 100% des professeurs interrogés ont déjà enseigné les systèmes d'équations du premier degré à deux inconnues et pensent que leurs élèves vont développer des aptitudes dans la résolution de ces systèmes en fin de collège. 14 d'entre eux, soit 74% des enseignants, affirment utiliser d'autres méthodes de résolution des systèmes d'équations du premier degré à deux inconnues notamment la méthode dite « hybride », parce qu'elle est rapide et c'est la méthode la mieux comprise par leurs élèves, disent-ils (voir tableau 5). Ce qui n'est pas le cas pour les 5 autres enseignants qui ont donné une réponse de type B à cette question.

Questions	Types de réponses	Effectif	Pourcentage
Pour vous, en tant qu'enseignant, quelles sont les méthodes de résolution des systèmes d'équations du premier degré à deux inconnues ?	combinaison, substitution, graphique, hybride, cramer, inversion de matrice	17 réponses	89%
	combinaison, substitution, graphique	2 réponses	11%
Quelles sont les méthodes de résolution en vigueur en 3e ?	combinaison, substitution, graphique	19 réponses	100%

Tableau 4 *- Réponses recueillies aux questions Q4 et Q5*

À la lecture du tableau 4, les réponses recueillies montrent que la majorité des professeurs (89%) ont une connaissance mathématique sur les méthodes de résolution des systèmes

d'équations tandis que 11% des professeurs n'ont pas assez d'informations à ce sujet. Les 19 professeurs (donc 100%) sont unanimes sur les méthodes de résolution en vigueur en 3e.

Pour ce qui concerne les méthodes en vigueur, les données du tableau 5 révèlent que 18 professeurs (soit 95%) préfèrent la résolution algébrique des systèmes d'équations, et un enseignant (donc 5%) la méthode graphique. Aussi, disent-ils que la méthode par combinaison est comprise par leurs élèves.

Types de réponses		Questions	Effectif	Pourcentage
Type C « algébrique »	combinaison	Méthode préférée	15 réponses	79%
		Mieux comprise par élèves	18 réponses	95%
	substitution	Méthode préférée	3 réponses	16%
		Mieux comprise par élèves	1 réponse	5%
	hybride	Mieux comprise par élèves	14 réponses	100%
Type D « géométrique »	graphique	Méthode préférée	1 réponse	5%

Tableau 5 *- Réponses de type C « algébrique » et type D « géométrique »*

Enfin pour la question Q9, nous avons recueilli 14 productions écrites de professeurs sur les 19 interrogés, en réponse à cet exercice. 79% des enseignants ont utilisé la méthode «hybride» pour résoudre ce système (comme on le voit sur l'exemple suivant) et 21% ont utilisé les méthodes de résolution (algébriques) en vigueur.

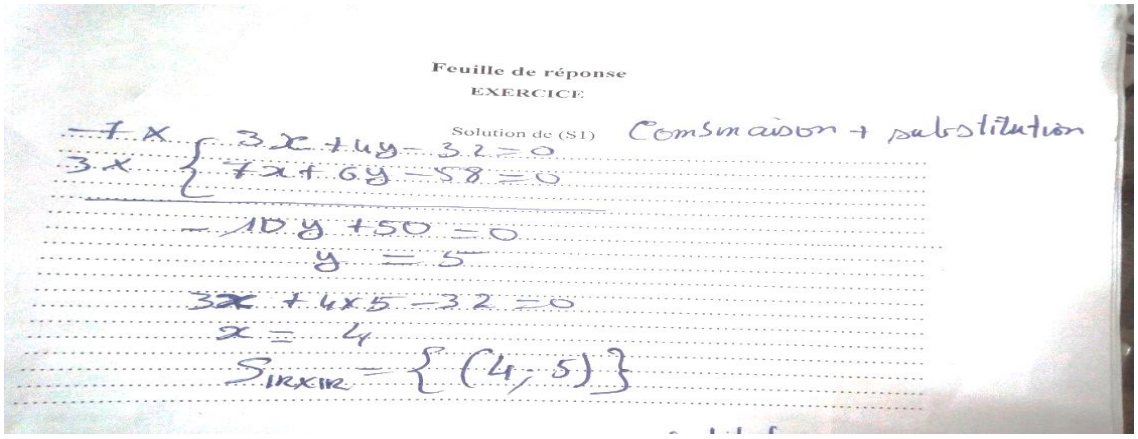


Figure 1*:- Résolution du système (S1) par l'enseignant PC16*

Dans l'entretien que j'ai mené, le professeur interviewé affirme introduire les systèmes d'équation comme outil de résolution de problèmes concrets. Pour justifier ce choix, il évoque la raison suivante : *« Selon l'approche par compétence (APC), il est recommandé à chaque enseignant, pour mieux installer les habiletés en mathématique chez les apprenants, de partir d'une situation de vie courante. Celle-ci à l'avantage de s'appuyer sur le vécu au quotidien de l'élève donc de susciter son intérêt pour la séance d'apprentissage.»*

2. Discussion des résultats

La majorité des professeurs interrogés préfèrent la résolution algébrique des systèmes d'équations. La méthode graphique est peu utilisée par ces derniers (parfois pas) car ils sont confrontés à des difficultés dues au manque d'instruments géométriques chez les élèves. De plus, si elle s'avère suffisamment précise pour déterminer exactement le couple solution unique de la majorité des systèmes car ce sont souvent des couples d'entiers « simples » que le graphique permet d'obtenir précisément, elle manque de précision dans le cas d'un couple de solutions avec des nombres entiers « très grands », des solutions de système à coefficients irrationnels sous forme de racines carrés et pour certaines solutions de couple de nombres rationnels.

74% des professeurs pensent qu'on peut introduire dans l'enseignement d'autres types de méthode telle que la méthode « hybride ». Mais cette méthode n'est pas une méthode d'enseignement préconisée en Côte d'Ivoire. Cependant, elle est la plus utilisée par les professeurs dans la résolution des systèmes d'équations. La démarche méthodologique de cette méthode paraît semblable à celle de la méthode de Gauss (méthode d'enseignement en $1^{ère}$) mais pour des systèmes d'équations très simples. Nous partageons le point de vue de ces enseignants qui souhaitent l'instauration de cette méthode dans le programme en 3^{e}.

V. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Au terme de notre étude, les résultats du questionnaire et des entretiens révèlent que les professeurs connaissent bien les méthodes de résolution en vigueur des systèmes d'équations dans le programme de 3^{e} ; ils les enseignent mais ne les utilisent pas la plupart du temps dans la résolution de ces systèmes. Cependant, la méthode dite « didactique » (méthode hybride) qui n'est pas une méthode à enseigner dans le programme de 3^{e}, est celle la plus utilisée par les enseignants.

Pour approfondir cette étude nous recommandons d'intégrer la méthode hybride dans le programme de 3^{e} ainsi que l'usage des TIC (tels que le logiciel geogebra) pour la résolution graphique des systèmes d'équations. Il faudrait pour cela monter des scénarios d'enseignement de cette notion, les analyser afin d'y apporter des améliorations pour les futurs enseignants.

Par ailleurs, en continuité de cette étude, il serait donc intéressant d'aller observer les pratiques des enseignants dans la résolution des systèmes d'inéquations en classe de 3^{e}.

La performance des élèves dépend de plusieurs facteurs dont le plus important est la formation pédagogique des enseignants. En effet, les enseignants qui ont bénéficié d'une formation à l'Ecole Normale Supérieure disposent de compétences requises au niveau pédagogique et didactique pour conduire efficacement les apprentissages en mathématiques contrairement à leurs collègues recrutés directement dans les universités. De plus, il importe pour les futurs professionnels de l'éducation de se former afin d'être en mesure de préparer l'élève à affronter les défis de la société actuelle.

RÉFÉRENCES

Altet M. (2002) L'analyse plurielle de la pratique enseignante, une démarche de recherche. Revue Française de Pédagogie, 138, 85-93.

Coulange L. (2000) Étude des pratiques du professeur du double point de vue écologique et économique -Cas de l'enseignement des systèmes d'équations et de la mise en équations en classe de Troisième. Thèse de l'Université Joseph Fourier-Grenoble.

Coulange L. (2000) Détermination du rôle d'un professeur de Troisième en situation à l'occasion de l'introduction officielle des systèmes linéaires. In M. Bailleul (éd.), Actes de la dixième École d'Été de didactique des mathématiques, Houlgate 1999, (pp. 60 – 68).

Robert A. (1999) Recherches didactiques sur la formation professionnelle des enseignants de mathématiques du second degré et leurs pratiques en classe. Didaskalia, 15, 123-157.

Robert A. (2005) Des recherches sur les pratiques aux formations d'enseignants de mathématiques du second degré : un point de vue didactique, Annales de didactique et de sciences cognitives, Vol 10, 209-250.

Robert A. (2005) Sur la formation des pratiques des enseignants de mathématiques du second degré, Recherches et Formation n° 50, 75-90.

INTERET DE LA STATISTIQUE DANS L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE EN COTE D'IVOIRE

TIEKOU[*] Zaté Elwis

Résumé – L'importance de la statistique dans l'enseignement secondaire en Côte d'Ivoire est indiscutable aujourd'hui. Cependant son enseignement laisse entrevoir de nombreuses difficultés. Dans ce travail, nous avons pour ambition d'évoquer ces difficultés tant au niveau des apprenants qu'au niveau des enseignants.

Mots-clefs : intérêt, statistique, enseignement secondaire, relation didactique

Abstract – Today, the importance of statistics in secondary school is indisputable. However, its teaching faces many difficulties. Our aim in this present work is to tackle these difficulties both for Mathematics teaching and learners.

Keywords: Interest, statistical, secondary education, didactic relation

I. INTRODUCTION : CONTEXTE ET PROBLEMATIQUE

La nécessité pour un citoyen d'aujourd'hui de comprendre et d'interpréter la statistique qui est présente de plus en plus dans les médias n'est plus à démontrer. Actuellement, il est difficile de participer aux débats sans comprendre et interpréter des données et sans juger de la validité des résultats. C'est pourquoi de nombreux pays, dont la Côte d'Ivoire, ont inséré la statistique dans leurs curricula scolaires sous la discipline des Mathématiques. Ce qui permet aux enseignants de mathématiques d'élargir leurs domaines de compétence.

Ainsi, avons-nous jugé utile de travailler sur ce thème pour deux raisons : d'une part, il est abordé dans pratiquement toutes les classes du secondaire sauf en terminale C, et d'autre part, tous les étudiants en CAP/PL[1] de l'Ecole Normale Supérieure d'Abidjan à la fin de leur formation doivent produire un mémoire dans lequel ils sont appelés à faire de la statistique c'est-à-dire définir une population sur laquelle ils feront des enquêtes, analyseront et interpréteront les résultats.

Pour mieux appréhender ce thème, nous nous sommes posé initialement les questions suivantes :

- La statistique profite-t-elle réellement aux élèves du secondaire ?
- Quels sont les rapports entre les élèves du secondaire et la statistique ? mais aussi entre les enseignants et la statistique ?

Ainsi, les objectifs fixés par notre recherche sont :

- Analyser le contenu du programme dans sa globalité sur l'ensemble du secondaire en statistique dans le programme éducatif ivoirien.
- Etudier l'intérêt de la statistique pour les apprenants et les enseignants.

Pour ce faire, nous avons supposé d'une part que tous les enseignants de mathématiques ont une formation en statistique et d'autre part que les élèves reçoivent effectivement les cours de statistique comme prévu dans le programme.

[*] Ecole Normale Supérieure d'Abidjan – Cote d'Ivoire – tzate01@yahoo.fr

[1] Certificat d'Aptitude Pédagogique du Professeur de Lycée.

II. CADRE THEORIQUE

Dans l'optique d'améliorer le contenu à enseigner en statistique, plusieurs conférences ont eu lieu notamment celle organisée en 2008 à Monterrey au Mexique. Lors de cette dernière, Gail Burrill (USA) et Rolf Biehler (Allemagne) ont rédigé un article (Burril & Biehler, 2013) dans lequel ils organisent les idées statistiques fondamentales autour de sept concepts à savoir : les données, la variable, les distributions, les représentations, les corrélations et associations entre variables, les modèles probabilistes, l'échantillonnage et l'inférence. Et sur la base de ces idées, plusieurs curricula scolaires ont été caractérisés. C'est dans ce cadre que Batenero, Fine et Raoult (2013) ont, dans l'éditorial de la revue Statistique et Enseignement, publié un article dans lequel ressortent deux points communs et essentiels des comparaisons internationales de curriculum : la nécessité que l'enseignement de la statistique contribue à former l'élève en tant que futur citoyen à la littérature numérique et la préoccupation centrale de la formation des enseignants de Mathématiques à la culture statistique.

Pour le premier point, de nombreux auteurs y ont travaillé comme Dutarte (2010) qui a retracé l'évolution de la statistique dans le second degré en France passant du calcul statistique au développement de la pensée statistique et a montré l'apport de l'outil informatique dans les simulations des phénomènes aléatoires permettant une analyse statistique efficiente. Par ailleurs, l'article de Bello et Régnier (2015) a permis de comprendre que ces savoirs doivent revêtir une importance épistémologique mais surtout obéir aux exigences du gouvernement par l'usage des thématiques comme l'inflation, la croissance, l'espérance de vie, le chômage, la pauvreté...

Quant au deuxième point, les travaux de Gattuso et Pannone (2000) lors d'une étude déroulée à l'intérieur d'un projet d'intérêt national « sperimentazione di nueve strategie didatti per l'apprendimento de la statistica » portée sur 91 enseignants de mathématiques en Italie ont montré que plus de 41,80% des enseignants du secondaire n'ont pas reçu de formation en statistique. Et ce constat est confirmé par Rouan et El Idrissi (2014) par une étude sur les enseignants de mathématiques au secondaire au Maroc.

La statistique étant une technique de recueil et d'analyse des données, elle se divise en deux grandes familles : la statistique descriptive dont le but est de décrire ou de résumer les données exhaustives et la statistique inférentielle dont le but est d'effectuer des estimations et des prévisions à partir d'un sous-ensemble de la population. L'importance de la statistique a été montrée pour les élèves, pour les enseignants et même pour l'administration. Aussi quelques domaines d'applications de la statistique ont été cités.

Pour les élèves, la statistique aide à organiser les données et permet de regarder avec sérénité des données à grande échelle. Quant aux enseignants, la statistique leur donne le niveau général de la classe et le degré de son homogénéité. Pour l'administration scolaire, la statistique est un outil de gestion et permet une bonne planification et une prévision sur certaines situations comme par exemple la gestion des effectifs des élèves.

Le thème de la statistique dans le programme éducatif ivoirien se situe dans le domaine « organisation des données » ; il est généralement placé, dans les progressions des enseignants, en fin d'année scolaire et le volume horaire qui lui est consacré est de 141heures par rapport au volume horaire total en mathématiques qui est de 2 145 heures. En comparaison, 626 heures sont consacrées à l'étude des fonctions et 45 heures à l'arithmétique. Ces proportions témoignent que la statistique n'est pas aussi méprisée qu'on pouvait le croire en termes de volume horaire.

Les notions statistiques à enseigner dépendent des objectifs de chaque pays. En Côte d'Ivoire, le programme de la statistique dans l'enseignement secondaire est basé essentiellement sur la statistique descriptive et sur trois types d'outils qui sont :

- des synthèses des observations : tableaux, effectifs, regroupement en classes, pourcentages, fréquences, effectifs cumulés, fréquences cumulées ;
- des représentations : diagrammes en bâtons, diagrammes à bande, diagramme circulaire et semi-circulaire, histogrammes;
- des caractérisations numériques d'une série statistique : caractéristiques de position (moyenne, mode, médiane) et de dispersion (variance, écart-type, écart moyen).

Aussi, ressort-il que la statistique poursuit deux objectifs généraux dans le premier cycle du secondaire, qui sont d'une part initier les apprenants à la lecture des tableaux et à l'utilisation des représentations graphiques et d'autre part faire acquérir aux apprenants quelques notions de la statistique.

Dans le second cycle du secondaire, la statistique poursuit également deux objectifs généraux qui sont : approfondir les notions vues au premier cycle et faire des prévisions.

Le contenu des cours de statistique dans chaque niveau est décliné comme suit :

- en sixième, l'enseignement de la statistique familiarise d'abord l'apprenant au vocabulaire suivant : effectif, effectif total, fréquence et fréquence en pourcentage. Il l'aide ensuite à collecter et à organiser les données sous forme de tableau et enfin l'amène à lire et à interpréter les tableaux statistiques ;
- en cinquième, le vocabulaire est complété par la population, le caractère et la modalité ; l'élève est initié à la lecture et à la représentation de diagrammes à bande et en bâtons et aussi à l'interprétation d'une série statistique ;
- en quatrième, l'enseignement de la statistique initie l'apprenant d'une part à la détermination et l'interprétation des indicateurs essentiels moyenne et mode et d'autre part à la construction et l'interprétation de diagrammes semi-circulaires ;
- en troisième, de nouvelles notions telles qu'effectif cumulé croissant et fréquence cumulée croissante apparaissent ; les élèves apprennent à regrouper des données par classes de même amplitude et à déterminer des nouveaux indicateurs comme la médiane et la classe modale et enfin ils s'initient à la construction et à l'interprétation de diagrammes circulaires et de polygones des effectifs cumulés croissants.

Le programme de la statistique dans le second cycle est fonction de la série selon si elle est scientifique ou littéraire :

- en seconde A, le programme de la troisième est repris avec ajout de la notion d'effectif cumulé décroissant et de la fréquence cumulée décroissante ;
- en seconde C, l'accent est mis sur la détermination des caractéristiques de dispersion (cas d'une variable discrète) et sur la construction de l'histogramme (classe de même amplitude) ;
- en première A, le programme consolide les acquis de la seconde A et complète par l'introduction des caractéristiques de dispersions et par les traitements des données regroupées en classes ;
- en première D et C, le programme de la statistique vise à approfondir l'étude des séries regroupées en classes (non nécessairement de même amplitude) ;
- en terminale A, le programme de la statistique vise à résoudre les problèmes de la vie courante à l'aide des séries statistiques à deux caractères non pondérés. Cependant pour

la prévision, on utilise la méthode des moindres carrés et la méthode de Mayer en Terminale A1 tandis que seule la méthode de Mayer est utilisée en terminale A2 ;
- en terminale D, le programme de la statistique vise à résoudre les problèmes de la vie courante à l'aide des séries statistiques à deux caractères souvent pondérés. La méthode utilisée pour les estimations est celle des moindres carrés ;
- en terminale C, le programme ne confère aucune heure à la statistique.

Il faut souligner que les calculatrices sont autorisées dans tous les niveaux pour les calculs et une innovation en cette année 2018 est l'introduction de l'outil informatique dans les traitements des données avec le logiciel Excel en seconde C.

III. METHODOLOGIE DE LA RECHERCHE

Dans l'intention de confirmer ou infirmer les hypothèses de notre travail qui sont : (H1) tous les enseignants de mathématiques ont une formation en statistique et (H2) les élèves reçoivent effectivement les cours de la statistique comme prévu dans le programme, une enquête a été effectuée dans la ville de Grand-Lahou, localité située au sud de la Côte d'Ivoire à 132 km d'Abidjan. La population cible de cette enquête est l'ensemble des enseignants de mathématiques et l'ensemble des élèves du Lycée moderne Arsène Assouan Usher de Grand-Lahou. La répartition des classes et des informations relatives à l'enseignement de la statistique figurent en Annexe 1.

Pour mener à bien cette enquête, deux instruments de recueil des données ont été utilisés : un questionnaire adressé aux enseignants et un autre adressé aux apprenants. Nous avons essentiellement utilisé des questions fermées, des questions ouvertes et quelques questions à choix multiples. Pour les enseignants, ces questions avaient pour but de chercher d'éventuelles sources de difficultés dans la préparation et la dispensation des cours de la statistique et l'intérêt que ceux-ci portent à la statistique. Quant aux élèves, nous avons cherché les sources de difficultés dans la compréhension du cours, l'intérêt que ceux-ci portent à la statistique et le nombre de fois que ces derniers ont suivi des cours de statistique depuis la classe de 6ème.

Voici quelques questions posées aux enseignants et aux élèves :

$\mathbf{Q^E_1}$[2] : Avez-vous déjà eu des difficultés dans la préparation et dans la dispensation des cours de la statistique ?

$\mathbf{Q^E_2}$: Utilisez-vous la statistique dans votre compte rendu ? Si oui, quelles sont les caractéristiques (position et dispersion) que vous utilisez ? et quelles informations vous renvoient ces caractéristiques ?

$\mathbf{Q^E_3}$: Avez-vous eu une formation en statistique après l'université ?

$\mathbf{Q_{e1}}$[3]: As-tu déjà fait le cours de la statistique depuis ta classe de 6ème ?

$\mathbf{Q_{e2}}$: As-tu eu des difficultés dans la compréhension des cours de la statistique ? Si oui, de quel ordre sont tes difficultés ?

Dans l'impossibilité d'avoir l'avis de tous les élèves, l'enquête a porté sur un effectif de 260 élèves de l'établissement parmi lesquels 177 ont répondu favorablement, soit un taux de participation de 68%. La technique utilisée est la méthode stratifiée qui consiste à choisir au

[2] Questions adressées aux enseignants.
[3] Questions adressées aux élèves

hasard un sous-échantillon dans un groupe : les élèves étant regroupés par groupe (classe ou niveau) il était nécessaire de choisir les sous-échantillons par classe ou par niveau.

L'établissement comptait 15 enseignants de mathématiques dont 2 stagiaires. Sur 15 questionnaires distribués, 13 ont pu être récupérés, soit un taux de participation de 86% pour les enseignants.

IV. RESULTATS ET DISCUSSIONS

1. Les pratiques des enseignants de Côte d'Ivoire en statistiques

Ces questionnaires ont permis de constater que tous les enseignants interrogés sont de sexe masculin, ont au moins un an d'ancienneté et ont déjà dispensé le cours de la statistique. Ils évoquent des difficultés dans la préparation du cours mais surtout dans sa dispensation. Ces difficultés sont liées au manque de documentation, et pour celle existante, ils la jugent inappropriée, surtout aux niveaux faibles des apprenants.

En raison des examens nationaux, les cours de statistique sont impérativement faits par les enseignants dans les classes de troisième et de terminale contrairement aux classes intermédiaires. 23% des enseignants utilisent la statistique en dehors des salles de classe et 84% l'utilisent dans leur compte rendu et la caractéristique la plus utilisée est la moyenne.

Parmi les enseignants interrogés, certains sont issus de l'Ecole Normale Supérieure d'Abidjan (ENS) et révèlent n'avoir pas reçu une formation en statistiques.

A l'unanimité, tous les enseignants affirment l'importance de la statistique mais la divergence se pose au niveau de son emplacement dans la progression. Plus de 54% des enseignants souhaitent voir le cours de la statistique programmé au milieu de l'année scolaire.

2. Le point de vue des élèves sur l'enseignement de la statistique

En nous appuyant sur les différentes réponses de la question Q_{e1}, nous pouvons affirmer que la plupart des élèves des classes de 5ème et de 4ème ne savent rien de la statistique. Et il ressort que tous les apprenants du second cycle ont une fois au moins fait le cours de la statistique notamment en classe de $3^{ème}$. Plus de 64% des apprenants ont rencontré des difficultés dans la compréhension du cours qui sont dues essentiellement aux mauvaises explications des enseignants selon eux et aux formules très compliquées.

3. Relation entre enseignant ou élève et statistique

Quant à la relation enseignant-statistique, il ressort que certains professeurs sont moins outillés dans l'interprétation des paramètres ; néanmoins, ils se dotent de certaines méthodes pour faire comprendre à l'élève la façon de calculer les paramètres de position et de dispersion. Pour calculer par exemple la variance, les enseignants se servent très souvent de cette phrase « la variance est la moyenne des carrés moins le carré de la moyenne » et partant de cette phrase, ils demandent aux élèves de faire un tableau à double entrée contenant x_i, x_i^2 et de faire des sommations par la suite.

Au niveau de la relation entre apprenant et statistique, les données révèlent que la fréquence d'exécution du programme de mathématique rend ce cours « facultatif » pour les élèves. En effet, ce cours étant fréquemment placé en fin d'année scolaire, très souvent après l'arrêt des notes, les élèves, sachant qu'ils ne seront pas évalués, ne manifestent pas d'engouement dans l'apprentissage et témoignent de peu d'intérêt pour ce cours.

V. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Il ressort de notre analyse que la statistique est une nouvelle discipline dont un intérêt grandissant lui a été manifesté dans la réforme du curriculum scolaire en Côte d'Ivoire. Mais sa position dans la progression nous laisse entrevoir que cet intérêt n'est pas encore complètement présent dans l'enseignement actuel, comme nous avons pu l'observer. Cependant il est nécessaire de promouvoir l'enseignement de la statistique et de soutenir les enseignants, en leur offrant des formations ad' hoc tout en continuant d'élaborer des matériels pédagogiques et informatiques adéquats au travail en classe. Souhaitons, pour terminer, une collaboration ouverte entre statisticiens, didacticiens et les concepteurs de programmes et manuels scolaires qui pourrait être favorable à la formation statistique du futur citoyen.

Nous comptons étendre cette étude à toute la Côte d'Ivoire en prenant en compte les établissements secondaires techniques et professionnels et aussi envisageons étudier l'évaluation statistique au secondaire.

REFERENCES

Batenero C., Fine J., Raoult JP. (2013) Le curriculum statistique dans le secondaire : comparaisons internationales. *Revue Statistiques et Enseignement*, 4 (1), p.1-14. http://www.statistique-et-enseignement.fr/

Bello S., et Régnier JC. (2015) Savoirs statistiques et curriculum au Brésil. *CFIES'4 2015 du 21 au 23 janvier 2015-Université de Bordeaux (France)*. http://cfies2015.sfds.asso.fr/

Burril, G., Biehler, R. (2013) Les idées statistiques fondamentales dans le curriculum scolaire. *Revue Statistiques et Enseignement*, 4 (1), p.5-24. http://www.statistique-et-enseignement.fr/

Dutarte P. (2010) Evolutions de la pratique statistique dans l'enseignement du second degré en France. *Revue Statistiques et Enseignement vol 2, n°1, p.31-42*. http://www.statistique-et-enseignement.fr/ojs/

Gattuso L., Pannone M. (2000) Une expérimentation d'enseignement de statistique et les enseignants qui l'on vécue. http:/cirdis.stat.unipg.it

Rouan O., El Idrissi. A (2014) Enseignement de la statistique au secondaire au Maroc. *Revue Statistiques et Enseignement, vol5, n°1, p.53-82* http://www.statistique-et-enseignement.fr/

Vidal A. (2004) Statistique descriptive et inférentielle avec Excel. Rennes : Presses Universitaires de Rennes.

Guide pédagogique et progression de mathématiques 2016-2017

ANNEXE 1

VOLUME HORAIRE CONSACRE A LA STATISTIQUE ET SA POSITION DANS LE PROGRAMME EN COTE D'IVOIRE.

Niveau de classe	**Volume horaire**	**Volume horaire en statistique**	**Pourcentage statistique**	**Nombre de chapitres**	**Position occupée**
6ème	132	8	6,06 %	13	12
5ème	132	7	5,30%	12	11
4ème	132	8	6,06 %	11	10
3ème	132	8	6,06 %	14	11
2A	99	8	8,08%	6	6
$1A_1$	132	16	12,12%	7	6
$TleA_1$	165	20	12,12%	8	6
$1A_2$	99	12	12,12%	7	6
Tle A2	132	14	10,60 %	7	5
2C	165	8	3,55%	15	15
1D	165	9	5,34%	13	13
Tle D	198	12	8,08%	12	10
1C	198	11	5,55%	15	13
Tle C	264	0	0%	16	

QUESTIONNEMENT ENSEIGNANT EN CONTEXTE DE RESOLUTION DE PROBLEMES PAR CALCUL MENTAL

VAN MOORHEM, Anabel[*], avec PROULX, Jérôme[**]

Résumé – Cette communication traite du questionnement dans le cadre d'un enseignement par résolution de problèmes. Le type de questionnement utilisé, simple et axé sur l'exploration des stratégies et compréhensions des élèves, est analysé au niveau de son apport pour l'activité mathématique des élèves.

Mots-clés : Questionnement ; résolution de problèmes ; investigation ; raisonnement ; communauté

Abstract – This paper deals with questioning practices in a teaching through problem-solving project. The type of questioning used, simple and focused on exploring students' strategies and understandings, is analysed and discussed in relation to its impact on the mathematical activity of students.

Keywords: Questioning; problems solving; inquiry; reasoning; community

I. INTRODUCTION

En enseignement des mathématiques, il n'est pas rare d'entendre qu'un bon enseignant doit poser de nombreuses et pertinentes questions à ses élèves. À titre d'exemple, dans une récente publication intitulée *L'art de questionner de façon efficace*, le ministère de l'Éducation de l'Ontario mentionne que de questionner les élèves est une pratique complexe, qui doit être bien pensée, voire planifiée, et réalisée au bon moment. Il insiste auprès des enseignants afin qu'ils élaborent à l'avance de « bonnes questions », qui favoriseront la participation des élèves, stimuleront leurs réflexions, etc., tout en ciblant des contenus précis :

> En écoutant attentivement les idées des élèves et en gardant à l'esprit le résultat d'apprentissage et les grandes idées en mathématiques, on est en mesure de repérer et de développer les idées importantes dans le discours des élèves. En plus de prendre des décisions sur les questions à poser durant les discussions avec les élèves, les enseignants peuvent planifier des questions efficaces lorsqu'ils préparent leurs leçons. Connaître le développement des grandes idées du programme-cadre, lire les diverses ressources pédagogiques et résoudre les problèmes eux-mêmes sont des exemples d'activités qui peuvent soutenir les enseignants dans leur préparation de questions. (MEO, 2011, p. 1)

Le message est clair : questionner est exigeant et l'enseignant se doit de maîtriser cet art avec brio pour faire apprendre les mathématiques à ses élèves. Quel défi ! Et quelle pression mise sur les épaules de l'enseignant ! Comme conseillère pédagogique, qui intervient avec des enseignants de l'élémentaire et du secondaire, je me sens souvent perplexe face à ces messages concernant le questionnement et ce que ceci représente et exige pour les enseignants. D'une certaine façon, je me questionne sur cette notion de questionnement…

Ces interrogations se sont intensifiées lors de ma participation à un projet de recherche mené par J. Proulx axé sur la résolution de problèmes en contexte de calcul mental. En assistant aux séances menées en classe de 5^{e} et 6^{e} année (10-12 ans) et de 2^{e} secondaire (13-14 ans), je me suis rapidement mise à m'intéresser aux questions posées par le chercheur. J'ai été surprise par la nature simple, voire spontanée, des questions posées et par ce qu'elles semblaient provoquer au niveau du travail mathématique chez les élèves. Pour moi, ce type de questionnement mettait fortement en cause les messages habituels autour du questionnement en classe. C'est pour cette raison, et dans le but d'investiguer davantage le processus de questionnement et son apport à l'avancement des mathématiques en classe, que j'ai mené une mini-étude explorant la nature et l'impact du questionnement utilisé par le chercheur. Cette communication offre un aperçu de l'investigation que j'ai menée.

[*] Commission scolaire de la Rivière-du-Nord & UQAM – Qc, Canada – vanmoorhema@csrdn.qc.ca
[**] Laboratoire épistémologie et activité mathématique – UQAM – Qc, Canada – proulx.jerome@uqam.ca

II. CONTEXTE DU PROJET ET QUESTIONS DE RECHERCHE

Le projet de recherche dont il est ici question est axé sur l'étude d'un enseignement des mathématiques par résolution de problèmes en contexte de calcul mental. L'objectif du travail de recherche est, d'abord, de mettre en route cette approche d'enseignement, puis d'étudier son apport didactique, soit la façon qu'elle permet de faire avancer les mathématiques de la classe (voir Proulx, 2018, GT#10 de ce colloque).

La partie du projet qui se déroule à l'élémentaire implique toute l'équipe du 3e cycle de cette école : trois classes de 5e année comptant chacune 27 élèves de 10-11 ans et une classe double de 6e année comptant 52 élèves de 11-12 ans. Les séances durent 50 minutes et se déroulent une fois aux deux semaines, pour chaque classe, sur une bonne partie de l'année scolaire. Le chercheur (J. Proulx) est celui qui mène le travail avec les élèves en proposant des tâches et en animant les séances. L'enseignante régulière de chacun des groupes est présente en classe comme observatrice et intervient à l'occasion dans les discussions. L'intention principale du travail fait avec les élèves est de leur faire résoudre des tâches mathématiques et de discuter des stratégies et compréhensions déployées pour résoudre ces tâches.

Parce que le projet ne veut pas être intrusif, il suit la planification des enseignantes. Les tâches données aux élèves sont choisies avec elles et sont travaillées sous l'angle du calcul mental (tâches accessibles, souvent tirées de cahiers d'exercices). Le déroulement des séances s'apparente à celui proposé par Douady (1994), portant une attention particulière à installer un climat respectueux qui permet le partage et l'écoute des stratégies et solutions entre les élèves : (1) une tâche est écrite au tableau (et/ou dictée oralement) ; (2) les élèves écoutent, réfléchissent et résolvent mentalement la tâche, avec un temps relativement court (15-20 secondes, adaptable) ; (3) au signal, les élèves sont invités à partager et expliquer leurs réponses et stratégies (ils doivent souvent venir à l'avant au tableau pour expliquer) ; (4) les explications des élèves sont notées au tableau (par eux ou par le chercheur) et discutées au sein de la classe ; (5) le chercheur invite les élèves qui ont résolu la tâche différemment (ou qui pensent à la résoudre différemment) à se manifester pour offrir des solutions supplémentaires.

À travers l'observation de ce projet et pour l'investigation actuelle, les questions qui m'ont guidée sont les suivantes : Quel type de questionnement est mis en avant durant ces séances de résolution de problèmes à travers le calcul mental ? Quel est l'apport didactique de ce type de questionnement, soit sur l'avancée des mathématiques en classe durant ces séances ?

III. QUELQUES ORIENTATIONS SUR LE QUESTIONNEMENT

On retrouve dans les écrits divers types de questionnements possibles à utiliser en salle de classe. Ces types de questionnement sont souvent placés à l'intérieur de continuums confrontant deux extrêmes. Par exemple, Nesbitt Vacc (1993) propose un type de continuum, du questionnement factuel au non factuel. Les questions factuelles ont pour intention de vérifier les acquis et la capacité des élèves à bien nommer les objets mathématiques, alors que les questions non factuelles ont pour but de faire ressortir les raisonnements sous-jacents aux mathématiques en jeu. De la même façon, on pourrait voir un autre type de continuum lorsque Bauersfeld (1994) distingue un questionnement plus directif avec l'intention de guider les élèves, en les questionnant d'une façon de plus en plus précise jusqu'à ce qu'ils obtiennent la réponse, d'un autre plus ouvert amenant les élèves à être curieux, à réfléchir, à se questionner, à échanger et à explorer les concepts mathématiques en jeu. Menezes (1998) aborde ce même continuum en distinguant les « questions tests », celles faisant ressortir une réponse

immédiate et quelquefois peu réfléchie, des « questions convergentes », amenant les élèves à discuter plus ouvertement des idées mathématiques, sans vouloir nécessairement les évaluer. Ces continuums font ressortir une variété de dimensions, allant des plus conceptuelles aux plus techniques. Cela dit, bien qu'une majorité des questionnements exploités en classe se retrouvent à différents endroits de ces continuums et non uniquement aux extrêmes, c'est toutefois la dimension conceptuelle qui est développée davantage dans la majorité des écrits.

Dans le cadre d'un *teaching experiment* et au sujet du questionnement lors d'entrevues cliniques, Hunting (1997) mentionne que la nature et le moment d'une question sont essentiels pour permettre l'émergence des raisonnements :

> En général, les questions devraient : être ouvertes pour permettre aux élèves de choisir leur propre façon de répondre, maximiser les opportunités de discussion ou de dialogue afin que les processus de réflexion puissent être révélés, et permettre à l'étudiant et à l'intervieweur de réfléchir à leurs processus de pensée respectifs. (p. 153, traduction libre)

Bien que pertinentes en contexte de *teaching experiment*, ces dimensions peuvent tout autant se rapporter en contexte de salle de classe. En effet, proposer des questions ouvertes qui optimisent les interactions peut susciter la réflexion autant chez les élèves que chez l'enseignant. En ce sens, le programme de formation de l'école québécoise explique que :

> Pour susciter l'engagement de l'élève, l'enseignant doit créer un climat qui permet à l'élève de prendre sa place à l'intérieur de la classe, sa communauté d'apprentissage. […] Il importe aussi de placer l'élève dans des situations qui exigent des justifications ou des réponses à des questions telles que « Pourquoi ? », « Est-ce toujours vrai ? » ou encore « Qu'arrive-t-il lorsque... ? », et ce, dans tous les champs de la mathématique [*sic*.]. Ce questionnement l'incite à raisonner, à s'approprier des savoirs mathématiques, à interagir et à expliquer sa démarche. Il est ainsi encouragé à réfléchir dans et sur l'action, et à faire face à la nouveauté. (MELS, 2006, p. 237)

Ainsi, l'enseignant verra par ses questions à créer un climat de classe propice aux interactions et attendra de ses élèves qu'ils raisonnent, argumentent et s'approprient les concepts mathématiques. Dans cette lignée, le document *Agir autrement en mathématique* (MELS, 2012) formule à partir de diverses recherches des constats sur des pratiques dites efficaces en enseignement. On trouve notamment une explication de la pratique « Échanger, discuter et questionner », qui met en lumière diverses dimensions du questionnement :

> Encourager les élèves à poser des questions et à confronter leur pensée à celle des autres est une pratique efficace. Les échanges en petits groupes ou avec la classe permettent aux élèves de tester leurs idées, d'expliquer leurs solutions, de confronter avec la perspective de l'autre, d'évaluer les différents points de vue, de s'engager dans un échange de pensées et de perspectives et de faire évoluer leur conception, leurs représentations et leurs stratégies. […] Les activités d'échange et de discussion avec les élèves peuvent nécessiter une certaine planification et réflexion. En fonction de son intention (renforcer les acquis, déceler des besoins, établir des liens), l'enseignant doit prévoir un certain nombre de questions et réfléchir aux réponses que ses questions pourraient amener (Lafortune, 2008). Ces activités de discussion et d'échange sont bénéfiques à tous ceux qui y participent, ne serait-ce qu'en raison de l'enrichissement mutuel qui résulte de la circulation de l'information. Cette pratique sert toutefois doublement celui qui est à l'origine du message. L'obligation de faire part de sa compréhension d'une situation ou d'un concept contribue à l'amélioration ou à l'approfondissement de la compréhension. (p. 30)

On insiste ici sur l'importance de créer un climat de classe permettant aux élèves de prendre leur place dans la classe et où l'enseignant propose des contextes demandant des justifications en utilisant des questions telles que « Pourquoi ? », « Est-ce toujours vrai ? » ou « Qu'arrive-t-il lorsque... ? ». Tout ceci, afin d'inciter les élèves à interagir, à raisonner, à réfléchir dans l'action, à s'approprier des savoirs mathématiques, etc. Ces moments d'échanges sont dits importants, car d'eux découle un enrichissement mutuel des idées et stratégies de chacun, dans le but de contribuer au développement de compréhensions mathématiques plus approfondies dans la classe. C'est autour de cette idée que mon investigation et mes analyses se sont centrées, en lien avec mes questions de recherche,

concernant l'apport didactique de ce type de questionnement en classe ; ici en contexte de résolution de problèmes par le calcul mental.

IV. ANALYSE DU QUESTIONNEMENT

J'ai observé toutes les séances du projet et pris des notes de terrain sur chacune d'elles. Dans le but d'aborder la nature du questionnement, j'ai scruté plus en détail ces notes de terrain pour cibler un certain nombre de séances à revisionner, retenant certaines qui sont représentatives du fonctionnement général des séances. Durant ce visionnage, j'ai effectué d'autres observations et pris des notes plus précises en me centrant sur le type de questionnement utilisé par le chercheur et son apport sur l'activité mathématique des élèves.

De façon générale, le type de questions utilisé par le chercheur, à la manière de questions ouvertes, exige le développement de justifications et le déploiement de raisonnements mathématiques chez les élèves. Ces questions sont assez simples – telles que « Pourquoi ? », « Est-ce qu'il y a d'autres façons ? », « Peux-tu m'en dire davantage sur … ? », « Est-ce que vous êtes d'accord … ? », « Qu'est-ce que vous en pensez ? », « Est-ce que ça fonctionne toujours ? » – et posées « dans l'action » en réponse aux propos des élèves. Bien qu'ancrées dans une exploration des mathématiques en jeu, ces questions possèdent aussi un côté générique, non spécifique au contenu et sont utilisées de façon transversale, à tout moment durant les séances : l'insistance sur le développement du sens est alors un enjeu constant des séances. Ces questions les amènent notamment à se positionner, c'est-à-dire à expliquer leur solution et leur validité, en plus d'expliquer pourquoi ils sont en accord ou en désaccord avec les affirmations ou solutions des autres élèves. On voit, comme l'explique Bauersfeld (1994), que ce type de questions force les élèves à réfléchir et à échanger sur les raisonnements et les compréhensions mathématiques déployés. Diverses retombées de ce questionnement sur l'activité des élèves et l'avancée des mathématiques en classe sont présentées dans ce qui suit.

1. Sur le développement de raisonnements et justification mathématiques

Puisque le questionnement utilisé force les explications de la part des élèves, cela les amène à s'engager plus loin qu'un niveau factuel (Nesbitt Vacc, 1993). En bref, on dépasse le fait de donner uniquement une réponse. Ce qui devient important lors des séances n'est plus tant « la bonne réponse » que le raisonnement explicité par les élèves, la discussion qui en découle et les arguments utilisés pour justifier l'accord ou le désaccord avec une affirmation.

Voici un extrait d'une séance qui s'est déroulée dans une classe de 5e année, où on s'intéresse aux critères de divisibilité. La séance démarre avec ces nombres au tableau[1] :

46 81 70 106

C : Lequel/lesquels sont divisibles par 2 ?
E1 : Il y en a 3. Le 46, vu que c'est un nombre pair. Dans le fond, tous les nombres qui finissent par un chiffre pair sont divisibles par 2.
C : Tu veux en dire plus sur ce que c'est un nombre qui finit par un chiffre pair ?
E1 : 0, 2, 4, 6, 8 ce sont des chiffres pairs, ça veut dire que s'ils se retrouvent à la fin d'un nombre, on peut diviser par 2.
C : Donc, toi, tu nous dis le 46, le 70 et le 106. Est-ce que tout le monde est d'accord avec ça ?
E2 : Moi, je dis aussi 81.
C : Tu n'as pas l'air certaine. Pourquoi tu dis que 81 est divisible par 2 ?
E2 : Parce que 9 x 9 = 81
E3 : Je ne suis pas d'accord que 81 est divisible par 2, car si on divise 81 par 2, on va avoir 40 et un autre 40 et le 1, on ne sait pas où le placer. À moins qu'on le sépare…

[1] Les différentes interventions des élèves sont précédées de E1, E2, etc. (pour Élève 1, Élève 2, etc.) et les interventions du chercheur sont précédées de la lettre C (les questions posées par le chercheur sont soulignées).

C : 81 divisé par 2. Bon là, premièrement, ton idée de nombre pair (s'adressant à E1), 81, ça en est pas un, car ça ne se termine pas par…
E3 : Ça donne 40 et demi.
E1 : Mais pour nous, il ne faut pas qu'il reste de reste. Donc, 81, ça fonctionne pas si on le divise en 2, il y a le 1 qui reste et on ne veut pas que ça donne un nombre décimal.
C : Essayez-le sur votre calculatrice. On peut diviser par 2, mais ce qu'E1 nous dit, c'est que pour dire que c'est divisible, il faut que la réponse soit entière. Et toi, tu trouves que 40,5 ce n'est pas entier.
C à E4: Es-tu d'accord avec cela ?
E4 : Oui
C: Pourquoi ?
E4 : Comme E1 a dit, il ne devrait pas y avoir de reste.

Cet extrait offre une illustration de l'apport de ce type de questionnement, de l'avancée et de la nature des réflexions mathématiques en classe. Dans l'exemple, les élèves en viennent à une distinction entre les nombres divisibles par 2 et le fait que tous les nombres peuvent être divisés par 2. Les raisonnements utilisés pour justifier leurs réponses ou pour offrir leurs désaccords face à une explication d'un collègue montrent que ces raisonnements évoluent et se raffinent. Les explications données illustrent que ce type de questions non factuelles, axées sur la justification, participe à l'émergence de raisonnements mathématiques importants chez les élèves, dépassant le fait de donner uniquement une réponse à une question.

2. Sur l'émergence de nouvelles investigations

Les questions du type « Tu veux en dire plus sur … ? », « Est-ce que tout le monde est d'accord avec cela ? » ou encore « Pourquoi ? », en plus de provoquer des réflexions supplémentaires chez les élèves, forcent en retour l'intervenant à être attentif aux explications des élèves afin de pouvoir les questionner à nouveau et approfondir le sens donné aux mathématiques partagées. Ceci a alors pour effet qu'en questionnant les stratégies des élèves, celles-ci deviennent souvent, tel que l'exprime Cobb et al. (1994), le point de départ menant à de nouvelles investigations et de nouveaux « problèmes » à explorer et résoudre. Voici un second extrait de la séance sur les critères de divisibilité par 2, qui illustre comment le questionnement de la stratégie proposée déclenche une investigation supplémentaire :

C : 106 ?
E5 : 53
C : Comment tu sais cela ?
E5 : 50 x 2 = 100 et 3 x 2 = 6
C : Est-ce que quelqu'un peut expliquer comment on fait pour savoir si un nombre est divisible en 2 ?
E5 : Comme E12, si ça finit par 0, 2, 4, 6, 8, ça se divise par deux et ça donne un nombre entier.
C : Mais ici, ce n'est pas cela qu'on fait. On ne fait pas 0, 2, 4, 6, 8. Toi (s'adressant à E5), tu as fait 50 x 2 et 3 x 2.
E5 : On sait que, quand les nombres, ça finit par un de ces chiffres-là, on sait que ça se divise en 2.
E6 : Moi, pour le savoir, si les unités, ça marche avec un nombre, ça va marcher.
C : Dis-m'en plus là-dessus ?
E6 : Si les unités ça marche, ça se divise en deux, on le sait que ça va marcher. Par exemple, avec 46. Je sais que 3 + 3 ça donne 6, moi je suis sûr que les autres nombres, ça va marcher.
C : Comment tu sais ça ? Est-ce que c'est vrai ça ? Si le premier nombre marche, les autres fonctionnent ?
E6 : Ce sont des dizaines, on peut toujours les séparer.
C : Dis-m'en plus là-dessus ?
E6 : Toutes les dizaines, on peut les séparer.
C : On va prendre un nombre… 17 314.
E1 : Le 1 de dizaine de mille, on peut le diviser, car 10 000 ÷ 2 = 5000.
E4 : Même chose avec le 7, c'est 7000. On peut le diviser en 2, ça donne 3500.
E7 : Le 3, c'est 300. 300 divisé en 2 = 150.
C : Et le 10, c'est 5 et 5.

Dans l'extrait précédent, lorsque l'élève E5 répond qu'il a fait 50 x 2 = 100 et 3 x 2 = 6 pour déterminer que 106 est un nombre divisible en 2, ceci ouvre à de nouvelles investigations centrées sur la nature du chiffre à la position des unités. L'échange qui s'en suit permet aux élèves de justifier pourquoi il suffit de regarder ce nombre à la position des unités, et même par la suite de discuter de la parité avec les dizaines, centaines, etc. Le problème initial s'en voit bonifié de sous-investigations supplémentaires, qui approfondissent la résolution de la tâche initiale. Bien que toutes simples, ces questions provoquent des ouvertures dans le curriculum, diraient Remillard et Kaye Geist (2002), qui permettent de creuser diverses dimensions mathématiques en cours d'investigation : une réponse en entraine une autre qui entraine une exploration subséquente, etc., tout ceci se développant en continu (et en contingence) dans un contexte où le sens à donner aux mathématiques est central.

3. Sur l'attitude des élèves et leur reprise du questionnement

Un des impacts de ce type de questions visant l'exploitation du raisonnement mathématique des élèves est qu'il provoque en retour une pratique similaire chez eux. Après quelques séances, les élèves se sont eux-mêmes mis à utiliser ce type de questionnement utilisé par le chercheur (« Pourquoi ? », « Explique-moi comment tu obtiens … ? », etc.) afin de comprendre les raisonnements, stratégies et solutions des autres élèves.

Voici un extrait d'une séance (classe de 5^{e} année) où on cherche à calculer mentalement 12 x 18. Suite à la stratégie de l'élève E3 qui commence par traiter 12 x 12 puis complète avec 6 x 12, l'élève E4 le questionne afin de comprendre d'où provient son 6 x 12 :

E3 : 12 x 12 = 144 et 12 x 6 = 72 et on additionne les 2.
C : Excellent E3, on connait le 12 x 12 et on connait 6 x 12, qui est en plus la moitié de 12 x 12. Donc, j'ai des repères. Je les additionne et ça me donne 216.
E4 : Où il est allé chercher le 6 de 6 x 12 ?
C : Il vient d'où ton 6 E3 ?
E3 : Tu fais le 12 x 12, puis après à partir du 13, tu fais 1, 2, 3, 4, 5, 6 jusqu'à 18.

Dans ce court extrait, on voit l'élève E4 qui demande de justifier la stratégie de E3, témoignant d'*un intérêt à comprendre le raisonnement exprimé par un autre élève* de la classe. Ainsi, offrir une stratégie et une réponse n'est plus suffisant même pour les élèves qui veulent – tout comme le chercheur – comprendre ladite stratégie et réponse. On sent s'installer chez les élèves – à travers les questions du chercheur qui exigent des justifications – que donner un sens et justifier les réponses et stratégies deviennent une nécessité. En bref, on fait des mathématiques pour comprendre, pour leur donner du sens.

4. Sur les erreurs et la formation d'une communauté d'investigation

Un autre apport de ce type de questionnement est la création d'un climat de classe opportun à la richesse des échanges, où l'interaction entre élèves et avec l'enseignant (ici, le chercheur) est centrale : une question n'entraine pas une réponse finale qui ferme l'investigation, mais plutôt l'ouvre à d'autres investigations. Ce climat de classe contribue à la naissance d'une culture de classe, où les élèves s'écoutent attentivement, questionnent ou défient les idées partagées et construisent sur les idées partagées par leurs collègues de classe. À travers l'utilisation de questions simples, mais axées sur l'investigation, les élèves savent qu'il est attendu d'eux qu'ils expliquent leurs stratégies et raisonnements, et explorent ceux des autres pour les comprendre et les valider ; que ce qui soit offert soit adéquat ou erroné. Toujours dans la séance où on cherche à calculer 12 x 18, voici en ce sens un extrait du début de la séance qui témoigne de l'investigation réalisée à la suite d'une réponse erronée.

E1 : Moi, j'ai fait 12 fois 8, ça donne 96. Ensuite j'ai multiplié le 96 fois 10, ça m'a donné 960.

C : Qu'est-ce que vous en pensez ? Très clair comme explication. Donc, la réponse, c'est 960 ?
[Quelques élèves répondent : Oui]
C : Qui pense que c'est 960 ? Qui pense que non ? Est-ce que c'est 960 ?
Ici, on a fait 12 x 8. On a 12 fois le 8 du 18, ensuite on a fait fois 10, car on n'a pas utilisé le 10. Je pense que c'est une stratégie intéressante, il faut juste essayer de voir si elle fonctionne, puis pourquoi elle fonctionne et si elle ne fonctionne pas, pourquoi elle ne fonctionne pas.
Est-ce que quelqu'un pourrait aider à savoir si ça marche ou si ça ne marche pas ?
E2 : Ben… déjà 12 x 12, ça donne 144.
C : Oh c'est un bon point, ça ! Continue donc ce que tu es en train de dire ?
E2 : 12 x 12 donne 144, pis il nous en manque 6 à mettre.
C : Ok, donc là, ce qu'on a, ce n'est pas 12 x 12, mais c'est 12 x 18, donc il en manque 6 parce qu'on l'a fait 12 fois et on voudrait le faire 18 fois.
E2 : Après tu fais 6 fois le 12, donne 60…heu… 72.
C : Et là, ça ensemble (le 144 et le 72), c'est loin de 960, donc ça questionne la réponse 960.

Lorsque l'élève répond 960 et explique son raisonnement, cela permet à l'élève E2 d'exprimer qu'il a un doute quant au résultat 960 en se basant sur certains repères (ex. 12 x 12 = 144). Lorsque l'élève E2 prend la parole, il ne connait pas le résultat de 12 x 18, mais amorce sa réflexion en mentionnant que déjà 12 x 12 donne 144, poursuit avec 12 x 6 qui donne 72, ce qui lui permet de questionner le résultat 960. Ceci ouvre la porte non pas à l'offre d'une « meilleure » réponse, mais bien à une exploration de la réponse considérée erronée (voir Borasi, 1994). Questionner une réponse, qu'elle soit bonne ou non, c'est accepter d'entrer dans une zone de questionnement, non pas pour remplacer le tout par une autre réponse et fermer l'investigation, mais pour entrer en exploration. L'erreur n'est pas ici perçue comme quelque chose de « mal », mais plutôt comme « production mathématique » au même titre que toute autre et doit donc être justifiée et validée. Ces productions représentent en ce sens tout autant d'occasions d'explorer les mathématiques en classe.

Il se forme à travers ceci une mini-communauté de classe, une communauté de validation mathématique (Cobb et al., 1994 ; Lampert, 1990) où le climat de classe, invitant réflexions, explorations et discussions, rend clair que tous les élèves – et pas seulement l'enseignant – ont droit de participer à déterminer si une affirmation a du sens ou non, à en discuter et à lancer de nouvelles questions. Au sein de cette communauté de classe, un courage et une modestie essentiels à l'activité mathématique s'expriment, rendus possibles par le climat de confiance qui s'instaure au fil des séances (tel que l'explique Lampert, 1990). Dans ce contexte, axé sur l'exploration, les élèves en viennent à ne plus craindre d'être jugés et n'ont pas peur d'offrir leurs idées même si elles peuvent être erronées ou partielles : ils explorent, questionnent et se questionnent, etc. Les élèves sont alors amenés à voir que l'activité centrale en mathématiques est d'explorer, se questionner, faire des propositions et en discuter, les justifier, etc., autant avec l'enseignant qu'avec les autres élèves. Tous forment la communauté de classe : on fait les mathématiques ensemble et leur donne du sens ensemble.

V. REMARQUES FINALES ET OUVERTURES

Tel que mentionné, on insiste souvent dans le monde de l'enseignement des mathématiques sur le fait que questionner les élèves est une pratique complexe qui doit être bien réfléchie, planifiée, etc. Or, la nature simple des questions posées par le chercheur dans ce projet illustre que ce type de questionnement « dans l'action » a permis de provoquer beaucoup d'investigations et d'explorations chez les élèves. Les questions posées en cours de séance se distinguent en quelque sorte de ce qui est présenté dans divers documents sur le questionnement, alors qu'elles sont posées « dans le feu de l'action » et sur la base des réponses et explications mathématiques ; et non à partir d'une préparation imposante. Ces questions forcent un raisonnement, exigent une justification constante du rationnel sous-jacent

aux mathématiques. En ce sens, on est davantage sur un questionnement des mathématiques produites en classe, qu'on doit expliquer, comprendre et justifier, que sur des questions préalablement formulées et grandement planifiées. Ce type de questionnement crée un environnement où, justement, on se questionne et on donne un sens aux mathématiques en jeu : on ne fait pas uniquement répondre à des questions, les unes après les autres, on le fait pour donner du sens aux mathématiques. C'est en ce sens que ce type de questionnement participe à la création d'un climat de classe propice à la richesse des échanges et interactions, où ceux-ci jouent un rôle central. Ces interactions en viennent à développer l'esprit critique des élèves, leur capacité à prendre position, voire à changer leur rapport à l'erreur et aux mathématiques elles-mêmes qui en deviennent, tel que souligné, une activité d'exploration dans laquelle on s'engage.

Cette pratique du questionnement insiste sur la dimension compréhension et justification des mathématiques, s'éloignant des besoins axés uniquement sur la (bonne) réponse et entrant sur le développement d'une culture de classe centrée sur l'idée de donner du sens en mathématiques. Ceci mène à considérer toute l'attention pouvant être portée à la richesse des interactions au sein de la communauté de classe, à l'exploration des réponses et idées des élèves et à l'impact de tout ceci sur leur activité mathématique. En questionnant de la sorte, la classe de mathématiques, pourrait-on dire, en est transformée.

RÉFÉRENCES

Bauersfeld, H. (1994). Réflexions sur la formation des maîtres et sur l'enseignement des mathématiques au primaire. *Revue des sciences de l'éducation*, *20*(1), 175-198.

Borasi, R. (1994). Capitalizing on errors as "springboards for inquiry": A reaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(2), 166-208

Cobb, P., Perlwitz, M., & Underwood, D. (1994). Construction individuelle, acculturation mathématique et communauté scolaire. *Revue des sciences de l'éducation*, *20*(1), 41-61.

Douady, R. (1994). Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir. *Repères IREM*-15.

Hunting (1997), Clinical interview methods in mathematics education research and practice, *Journal of Mathematical Behavior*, *16*(2), 145-165.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal*, *27*, 29-63.

Menezes, L. (1998). Conceptions des professeurs et interactions des élèves dans la classe de mathématique. *Actes de la CIEAEM-49* (pp. 180-185). CIEAEM : Setúbal, Portugal.

Ministère de l'Éducation du Québec [MELS]. (2006). *Programme de formation de l'école québécoise*. Gouvernement du Québec : Québec, Canada.

Ministère de l'Éducation du Québec [MELS]. (2012). *Agir autrement en mathématique*. Gouvernement du Québec : Québec, Canada.

Nesbitt Vacc, N. (1993). Questioning in the mathematics classroom. *Arithmetic Teacher, 41*(2), 88-91.

Remillard, J.T., & Kaye Geist, P. (2002). Supporting teachers' professional learning by navigating openings in the curriculum. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5,7-34.

Ministère de l'Éducation de l'Ontario [MEO]. (2011). *L'art de questionner de façon efficace*. Secrétariat de la littératie et de la numératie : Ontario, Canada.

Projet Spécial 2 (SPE2)
Transitions dans l'enseignement des mathématiques

BILAN DU PROJET SPECIAL N°2

TRANSITIONS DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

Responsables

Julie HOROKS[*] – Ouahiba CHERIKH[**] – Analia BERGE[***]

Correspondante CS

Stéphanie BRIDOUX[****]

Le projet spécial n°2, portant sur les transitions dans l'enseignement des mathématiques, a disposé de 3 séances pendant laquelle 5 textes ont été discutés. Les présentations, et les discussions qui les ont suivies, ont été organisées selon le niveau scolaire de la transition : école-collège, collège-lycée ou lycée-enseignement supérieur (université ou classes préparatoires), avec une grande diversité des contenus mathématiques et des cadres théoriques utilisés. La plupart des présentations se sont penchées sur la caractérisation des phénomènes de transition, à travers les difficultés rencontrées par les élèves ou étudiants. La dernière séance de bilan a permis de discuter plus globalement de ces transitions et de tenter de faire des liens entre les outils mobilisés pour leur analyse dans les différents textes.

I. THEMATIQUE ABORDEE DANS LE PROJET SPECIAL

Les transitions dans l'enseignement des mathématiques réfèrent tant aux changements institutionnels et culturels entre différents ordres d'enseignement (par exemple du primaire au secondaire ou du secondaire au supérieur) qu'aux sauts conceptuels qui peuvent se produire à l'intérieur ou non d'un même ordre entre domaines mathématiques (de l'arithmétique à l'algèbre, des nombres naturels aux nombres rationnels, du calcul à l'analyse, de la géométrie perceptive à la géométrie instrumentée ou déductive ...).

1. La question des transitions dans les précédents colloque EMF

Des questions liées aux transitions en mathématiques ont été abordées lors des rencontres internationales EMF depuis 2003 sous différents angles : didactique, institutionnel, culturel, social et épistémologique, tel que documenté dans les synthèses des groupes de travail sur le thème. On retrouve des travaux autour des transitions scolaires en général, par exemple chez Durand-Guerrier (2003); la transition secondaire/postsecondaire a été traitée, entre autres questions liées à l'enseignement des mathématiques au niveau postsecondaire, par Bloch, Tanguay et Kientega (2006) et par Azrou, Tanguay et Vandebrouck (2009). Il a été question du rôle des mathématiques dans les transitions institutionnelles en Gueudet, Khaloufi et Marc

[*] Université Paris Est Créteil – France – julie.horoks@u-pec.fr
[**] USTHB – Algérie – ouahiba_cherikh@yahoo.fr
[***] Université du Québec à Rimouski – Canada – analia_berge@uqar.ca
[****] Université de Mons – Belgique – stephanie.bridoux@umons.ac.be

(2012) et, spécifiquement, les transitions dans l'enseignement des mathématiques ont fait l'objet d'un projet spécial lors du dernier EMF (Vandebrouck, Corriveau et Cherikh, 2015), qui avait en particulier soulevé la question de la formation des enseignants pour mieux tenir compte des problèmes de transitions. Tous ces groupes se sont intéressés, d'une manière ou d'une autre, à la compréhension des difficultés des apprenants et des enseignants lors des transitions et à la recherche de moyens de réduire lesdites difficultés.

2. Les transitions institutionnelles en lien avec le système éducatif de chaque pays

Quelques phénomènes liés aux transitions sont propres aux institutions d'enseignement de chaque pays, et la connaissance du système éducatif est nécessaire pour comprendre ce qui peut se jouer de part et d'autre de la transition. Du point de vue institutionnel, il faudrait alors tenir compte des éléments qui peuvent avoir une influence sur les écarts entre deux ordres tels le découpage réalisé par les programmes scolaires, la présence d'examens de passage (s'il y en a), la comparaison des formations initiales des enseignants des deux ordres différents et la possibilité de mettre en place des dispositifs pour favoriser un travail commun entre eux. Les transitions institutionnelles entraînent nécessairement des questions relatives aux approches d'enseignement, aux visées des institutions, aux rôles des apprenants et des enseignants; mais aussi, comme pour les transitions conceptuelles, à l'évolution des contenus et aux changements de contrat didactique. On pourrait considérer tout changement de contrat didactique, qu'il soit du fait des enseignants ou intrinsèque aux contenus mathématiques, comme une transition potentiellement difficile pour les élèves.

3. Les questions soulevées a priori sur les transitions

Les questions guidant le travail de ce projet spécial, qu'elles soient à visée de recherche ou de formation, pouvaient s'articuler autour de différents axes.

Les contenus mathématiques travaillés sont tout d'abord des éléments clé pour analyser ce qui se passe de part et d'autre d'une transition donnée. Pour une même notion, quelles différences dans les tâches proposées aux élèves et étudiants, et dans les procédures attendues d'eux pour chaque niveau ? Quelles différences par rapport aux justifications, aux définitions et aux représentations déployées ? Quels changements sont ainsi observés dans la façon de faire des mathématiques ?

En ce qui concerne les enseignants, nous pouvons questionner les différences dans les pratiques de part et d'autre de la transition, au-delà des choix de tâches. Qu'est-ce ce qui est laissé à l'initiative des élèves ? De quelle façon leurs connaissances sont-elles évaluées ? Quelle est la place donnée au savoir dans le cours ? Quelles pistes peuvent en découler de la prise en compte de ces différences éventuelles, pour la formation des enseignants tant initiale que continue ?

Enfin, du côté des apprenants, nous pouvons questionner leurs difficultés pour un contenu mathématique particulier et l'évolution de leur rapport aux mathématiques et à leur apprentissage lors des transitions.

La question de la collaboration entre les disciplines et de l'interdisciplinarité faisait partie de la thématique d'EMF2018, et aurait pu nourrir cette réflexion sur la transition. Cependant les propositions de textes faites dans le projet spécial n°2 n'ont concerné que les mathématiques, et n'ont donc pas permis d'aborder ces questions, qui demeurent. L'articulation entre les disciplines peut-elle être utilisée comme un levier pour mieux appréhender les difficultés mises en évidence dans une transition? Cette question paraît spécialement pertinente au niveau de la transition primaire- secondaire, où, dans la plupart des

pays, les enseignements des différentes disciplines, assurés en primaire par la même personne, sont ensuite assurés par des personnes différentes.

II. LES CONTRIBUTIONS DU PROJET SPECIAL N°2

1. La variété des contributions du projet Spécial n°2

Le projet spécial n°2 a reçu 5 contributions qui couvraient l'ensemble des transitions des différents niveaux scolaires, de l'école élémentaire jusqu'à l'université. La diversité de ces contributions est synthétisée dans le tableau 1.

Les thématiques mathématiques abordées pour analyser ces contenus étaient diverses elles aussi : enseignement de la géométrie (transition école-collège ou collège-lycée), des fractions (transition école-collège) ou de notions fonctionnelles (équations de droites entre collège et lycée ou application dans un espace vectoriel entre lycée et classes préparatoires).

Auteurs	Transition	Contenu mathématique	Cadre théorique
Blanquart	Ecole-collège	Géométrie	TSD
Coulange & Train	Ecole-collège	Fractions	TSD
Horoks & Chesnais	Collège-lycée	Équation de droite	Double Approche
Mrabet	Collège-lycée	Géométrie	TAD
Najar	Lycée-enseignement supérieur	Espaces vectoriels	TAD

Tableau 1 *– Contributions du projet spécial n°2*

2. Les données analysées

Ces différentes contributions se sont penchées sur les difficultés des élèves dans ces transitions, sur ces contenus particuliers, à travers différents types de données. Des éléments d'analyse épistémologique, mobilisant des outils spécifiques des contenus considérés (paradigmes géométriques, distinction dessin-figure, taille de l'espace, différents types de géométrie, par exemple, pour les contributions portant sur ce thème), ou d'autres plus transversaux (registres de représentation sémiotiques), sont proposés dans ces contributions.

L'analyse de tests passés par des élèves (sur les équations de droites entre le collège et le lycée en France, sur les notions de d'injection et de surjection dans le contexte des morphismes d'espaces vectoriels de matrices entre le lycée et les classes préparatoires en Tunisie, ou encore sur le théorème de Thalès énoncé avec des distances ou avec des vecteurs en France et en Tunisie) permet de mettre en évidence certaines difficultés des élèves. On peut noter en particulier des lacunes des élèves liées aux niveaux inférieurs de la transition, qui persistent en aval de la transition, sans toujours être retravaillées par l'enseignant. On peut voir aussi des difficultés des élèves ou étudiants à transférer des connaissances acquises, à d'autres contextes non encore abordés, ce qui questionne la disponibilité de ces connaissances.

L'analyse des programmes et manuels permet elle aussi de comparer les enseignements potentiels des deux niveaux d'une transition. Les différentes définitions possibles des objets sont pointées (pour les fractions dans le texte de Coulange & Train) de même que leurs différentes représentations (pour les fonctions et équations de droites dans le texte de Horoks et Chesnais, pour le théorème de Thalès dans le texte de Mrabet), pour signaler des écarts entre les deux niveaux de la transition. La mise en œuvre d'outils pour analyser chaque tâche ainsi que l'ensemble des tâches proposées aux apprenants (*niveaux de fonctionnement des*

connaissances des élèves dans le texte de Horoks & Chesnais, *degré de complétude d'une praxéologie mathématique locale* dans le texte de Najar), ou encore pour caractériser la désignation, symbolique ou discursive, des objets dans différents registres de représentation sémiotique (pour la notion de fonction dans le texte de Horoks & Chesnais, ou les fractions et décimaux, avec les *unités de numération* dans le texte de Coulange & Train), permet une analyse fine des contenus d'enseignement potentiellement proposés, pour pointer des différences, non toujours perçues par les enseignants.

Enfin, l'analyse de séances réelles de classe, à travers des observations ou des vidéos, permet de comparer les enseignements mis en œuvre. L'analyse des interactions entre les enseignants et les élèves, lors de moment de résolution de tâches sur les fractions (dans le texte de Coulange & Train) ou lors de l'institutionnalisation des savoirs (plus ou moins en appui sur les raisonnements des élèves dans le texte de Blanquart-Henry) permet de voir quelles initiatives sont laissées aux élèves sur les tâches proposées (en perspective dans le texte de Horoks & Chesnais), et comment les savoirs mathématiques sont rendus plus ou moins visibles pour les élèves. Des questionnaires adressés aux enseignants de chaque niveau (dans le texte de Mrabet) permettent de voir de quelles façons ceux-ci anticipent les procédures et difficultés de leurs élèves.

3. Les outils construits pour les analyses

Les contributions du projet spécial n°2 ont exposé des outils d'analyse variés, que l'on retrouve utilisés dans plusieurs des textes, et semblent donc pertinents pour analyser les phénomènes de transition entre niveaux scolaires.

Le cadre de travail et les registres de représentation, et leur variété pour certaines notions mathématiques, jouent un rôle important dans les disparités possibles (voire avérées) dans l'enseignement d'une même notion aux deux niveaux de la transition. Les types de tâches proposés aux élèves, dont la variété et la complexité peuvent être décrits avec divers outils (adaptations et niveaux de mise en fonctionnement des connaissances, place du travail de la technique), permettent aussi de rendre compte d'un enrichissement parfois important de ce qui est traité au niveau supérieur de la transition.

La place des connaissances plus anciennes, et le temps passé par le programme, les manuels et les enseignants à reprendre, ou non, les prérequis nécessaires pour aborder de nouvelles notions, a une influence lui aussi dans les difficultés des élèves. La façon dont est rendu visible l'arrière-plan théorique, à travers les définitions données, les justifications attendues, et le discours technologico-théorique de l'enseignant, peut varier fortement d'un niveau à l'autre, avec des statuts différents pour les objets mathématiques considérés et leurs propriétés, des arguments de preuves et de raisonnement et des paradigmes valides ou non à un niveau donné. Enfin, c'est le contrat didactique à chacun des deux niveaux de la transition que cela questionne, et les négociations nécessaires pour les changements de contrat qui interviennent implicitement dans la transition.

III. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Tous les outils d'analyse développés ici sont des moyens pour pointer les éléments qui pourraient poser problèmes aux apprenants et enseignants dans les transitions, pour des niveaux et contenus variés. La question qui reste en suspens à l'issue des travaux du groupe spécial n°2 pour cette édition 2018 d'EMF, est celle de l'utilisation de ces outils comme des leviers pour proposer des solutions à ces problèmes de transition.

Pour une prochaine réunion du projet spécial, de nouvelles questions sont envisagées, en particulier autour de la façon dont les institutions favorisent des ruptures ou continuités dans l'enseignement. Quelle construction du curriculum est réalisée dans nos différents pays ? Quels ajustements nous paraissent nécessaires dans les programmes pour tenir compte de la diversité des points de vue sur un même contenu mathématiques ? Quelle orientation des élèves, avec quelle prise en compte des prérequis, et à quel moment de leur cursus ? Quelle explicitation aux élèves des enjeux des transitions ?

En ce qui concerne les enseignants et leur formation initiale ou continue, il serait intéressant d'envisager des recherches ou compte-rendu d'expérience sur des groupes de travail mis en place pour faciliter ces transitions. L'étude des pratiques ordinaires des enseignants, du contrat didactique qu'ils mettent en place dans leurs classes, compte tenu des contraintes du métier auxquelles ils sont soumis dans chacune de ces institutions, n'a pas été beaucoup développée dans le groupe spécial, malgré l'intérêt que de telles analyses pourraient avoir pour la question des transitions.

Enfin, certaines transitions n'ont pas été évoquées ni explorées par nos recherches : les transitions langagières pour les élèves dont l'enseignement est pratiqué dans deux langues différentes suivant les disciplines, ou encore celles entre enseignement général et formation professionnelle. La question de la transition entre disciplines est peut-être elle aussi à creuser : pour un même contenu enseigné dans différentes disciplines, quelle trans(pos)ition ?

REFERENCES

Azrou, N., Tanguay, D. et Vandebrouck, F. (2010). Synthèse du Thème 7. Enseignement des mathématiques aux niveaux postsecondaire et supérieur. Dans A. Kuzniak, M.

Sokhna (Dir.) Enseignement des mathématiques et développement: enjeux de société et de formation. Actes du 4e colloque Espace Mathématique Francophone. Revue Internationale Francophone, Numéro Spécial, 950-959.

Bloch, I., Kientega, G. et Tanguay, D. (2006). Synthèse du Thème 6. Transition secondaire, post-secondaire en mathématiques. Dans N. Bednarz (Dir.), Actes du 3e colloque international Espace Mathématique Francophone : L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés (CD-ROM). Sherbrooke: Université de Sherbrooke.

Durand-Guerrier, V. (2003). Synthèse du Thème 5. Transitions institutionnelles. Dans H. Samida (Dir.), Actes du 2e colloque international Espace Mathématique Francophone (CD-Rom). Tozeur : Commission Tunisienne pour l'Enseignement des Mathématiques et Association Tunisienne des Sciences Mathématiques.

Gueudet G., Khaloufi F. et Marc V. (2012). Évaluation, compétences et orientation dans les transitions scolaires: rôle des mathématiques. Dans J.-L Dorier. et S. Coutat (Dir), Actes du 5e colloque EMF2012, Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle (en ligne). Genève : Université de Genève.

Vandebrouck F., Corriveau C., Cherikh O. (2015) Transitions dans l'enseignement des mathématiques – Compte rendu du Projet Spécial n°3. In Theis L. (Ed.) Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage – Actes du colloque EMF2015 – Spé3, pp. 963-969.

ANNEXE

LISTE DES TEXTES DU SPE2 PAR ORDRE ALPHABETIQUE DU PREMIER AUTEUR

BLANQUART-HENRY, S.

Quelle institutionnalisation pour une même situation de géométrie en primaire et au collège ?

COULANGE, L. & TRAIN, G.

Enseigner les nombres décimaux et les fractions - transitions (ou ruptures ?) primaire - secondaire

HOROKS, J. & CHESNAIS, A.

Des outils pour analyser la transition collège-lycée en mathématiques

MRABET, S.

L'enseignement de la géométrie dans la transition collège-lycée

NAJAR, R.

Facteurs de complexité des mathématiques supérieures

RAISONNEMENTS GÉOMETRIQUES AU CYCLE 3 LORS DE LA TRANSITION ÉCOLE-COLLÈGE

BLANQUART-HENRY* Sylvie

Résumé – Cette recherche s'appuie sur l'observation d'une même séquence de géométrie plane en classe de CM2 et en classe de sixième. La confrontation des analyses, en Théorie des Situations Didactiques, pour chacune des classes, permettra d'identifier des moyens dont semblent disposer les enseignants pour que les élèves accèdent à l'apprentissage de nouveaux savoirs clairement identifiés et répertoriés, ainsi que les obstacles spécifiques qu'ils peuvent rencontrer. Une des questions de cette recherche est celle de la comparaison entre gestion à l'école et gestion au collège.

Mots-clefs : connaissance, géométrie plane, institutionnalisation, raisonnement.

Abstract – This paper begins with an observation of a same situation in 5th grade and 6th grade classes. In a second part, we analyze the reasoning produced by the pupils and the teacher during the institutionalization phase, within the framework of the theory of didactical situations. The confrontation between analysis in the elementary level and in the second level permits to identify difficulties the teachers meet. It also shows how teachers manage the construction of meaning and knowledge in the classroom.

Keywords: geometry, institutionalization, knowledge, reasoning.

Cette recherche en cours se fait dans le cadre d'un doctorat sous la direction de Catherine Houdement. Après avoir défini le contexte de recherche et notre questionnement initial nous exposerons nos choix théoriques et la problématique puis la méthodologie de recherche pour finir par un bref exemple d'analyse et une modeste conclusion.

I. INTRODUCTION

Ce travail porte sur la reproduction de figures en géométrie plane au cycle 3 (élèves de 9 à 12 ans) qui comprend en France les deux dernières classes de primaire (CM1 et CM2) et la première année de l'enseignement secondaire (6e).

D'un point de vue institutionnel, le programme de juillet 2018[1] précise que les situations proposées aux élèves doivent les amener à passer graduellement d'une géométrie où les objets et leurs propriétés sont contrôlés par la perception à une géométrie placée sous le contrôle des instruments, pour aboutir en fin de cycle à une géométrie dont la validation s'appuie sur l'argumentation et le raisonnement. Gibel (2015), Gibel et Henry-Blanquart (2017) montrent que le jeu sur les contraintes des situations, les variations des supports à dispositions des élèves, les instruments autorisés ou non, peut permettre cette évolution des procédures et de l'enrichissement des connaissances. L'objet de notre recherche actuelle est d'identifier comment, en géométrie plane, des enseignants de cycle 3 intègrent (ou pas) dans l'avancement de leur projet d'enseignement les raisonnements valides ou erronés mis en œuvre explicitement ou implicitement par les élèves.

II. CHOIX THÉORIQUES ET PROBLÉMATIQUE

A l'instar de Brousseau (1998), nous faisons l'hypothèse de la nécessité de phases a-didactiques dans une situation d'enseignement. Le cadre théorique premier de nos recherches est donc naturellement la Théorie des Situations Didactiques pour la conception, mais aussi pour l'analyse des séances, grâce au modèle enrichi de structuration du milieu (Margolinas

* Laboratoire de Didactique André Revuz – France – sylvie.henry@u-bordeaux.fr

[1] BO n° 30 du 26-7-2018

1995). Nous présentons les paradigmes géométriques, les différents types d'espace en géométrie, pour finir par la définition de raisonnement et la description du modèle d'analyse des raisonnements que nous utilisons.

1. Les situations adidactiques

Dans le cadre de la théorie des Situations Didactiques, une situation adidactique est une situation que l'on peut associer à l'enseignement d'une connaissance ou d'un savoir identifié par l'enseignant, qui laisse à l'élève le plus d'initiatives possible et lui permet d'agir, prendre des décisions, de lui-même (Brousseau, 1998). Au sein des situations adidactiques, Brousseau distingue trois fonctions du savoir : action, formulation et validation. Ces fonctions sont caractérisées par des situations correspondantes, qui amènent progressivement les élèves à mettre en œuvre implicitement puis expliciter les connaissances visées.

Lors d'une situation d'action, le sujet adapte ses actions successives en fonction de l'enjeu et des sanctions positives ou négatives que le milieu lui retourne. La situation n'est donc pas statique. Elle évolue dans le temps en fonction des échanges successifs d'informations et d'actions entre le sujet et le milieu. Confronté à un milieu antagoniste, le sujet construit des modèles implicites qui règlent son action, ces modèles étant conscients ou non. (Brousseau, 1972). Pour dépasser le stade de l'action le sujet peut être engagé dans une situation de formulation. Dans les situations de formulation, le sujet explicite ce qui régit ses actions. Cette communication, orale ou écrite, peut-être pour lui-même ou pour un tiers. L'élève est alors amené à énoncer formellement les actions effectuées mais aussi les conditions dans lesquelles il a effectué ces actions (Gibel, 2018). Après confrontation avec le savoir mathématique déjà là, les formulations peuvent acquérir un statut de « vérité » au sens d'un texte mathématique. C'est l'objet des situations de validation. Les élèves vont échanger entre eux, sous le contrôle de l'enseignant, pour élaborer des preuves intellectuelles, des assertions qui pourront être reconnues de tous et qui s'appuient sur des règles communes. Le découpage en situations d'action, de formulation et de validation est une modélisation du fonctionnement des connaissances et non une organisation formelle.

Une situation adidactique s'insère toujours dans une intentionnalité didactique (Margolinas, 2004 ; Schneider & Mercier, 2008). Elle débouche sur une phase d'institutionnalisation au cours de laquelle l'enseignant pointe le savoir visé comme une réponse optimale à la question posée initialement et plus généralement à la classe de problèmes dont cette question est issue (Schneider & Mercier, 2008). Or la gestion de cette phase d'institutionnalisation peut être complexe pour l'enseignant. En effet l'enseignant doit prendre appui sur les raisonnements, les connaissances qu'il perçoit dans les productions des élèves au cours de différentes phases. Il doit choisir lesquels il valorise, lesquels il pointe comme erronés, lesquels il délaisse. Cette complexité nous semble particulièrement forte en géométrie, où les raisonnements et les connaissances sont variés et exprimés sous de multiples registres (verbal, traces graphiques, voire gestes).

2. Le modèle de structuration du milieu

Le modèle de structuration du milieu de Brousseau (1986), modifié par Margolinas (1995) et complété par Bloch (1999) se présente sous forme d'emboitement de situations, repérées par leur « niveau », modélisant les différents rôles de l'élève et de l'enseignant. Chaque *situation* d'un niveau n constitue le *milieu* du niveau immédiatement supérieur $n+1$. Au niveau inférieur ($n=-3$), l'acteur objectif en interaction avec le *milieu matériel* (M-3) définit la *situation objective*. Au niveau ($n=-2$) les rapports effectifs du sujet agissant avec le *milieu objectif* (M-2) constituent la *situation de référence*. Dans le *milieu de référence* (M-

1) le sujet envisage l'action effectuée au niveau précédent pour communiquer des informations sur cette action ou pour débattre de sa validité. L'ensemble des niveaux négatifs correspond aux situations adidactiques, le niveau de base ($n = 0$) étant celui de la situation didactique (Margolinas, 1995).

3. Les paradigmes géométriques selon Houdement & Kuzniak

Houdement & Kuzniak caractérisent trois paradigmes au sein de la géométrie élémentaire enseignée (Houdement & Kuzniak, 1999). Ces trois paradigmes se distinguent par la nature des objets qu'ils étudient, le mode de validation des énoncés, l'organisation des savoirs, le statut accordé au dessin. Les deux premiers, appelés Géométrie Naturelle et Géométrie Axiomatique Naturelle (plus brièvement Géométrie 1 et Géométrie 2) modélisent la géométrie pouvant être enseignée au cycle 3.

En Géométrie 1 (Houdement & Kuzniak, 1999, 2006)). les objets sont des objets matériels, traces graphiques ou virtuelles sur un écran. Ces représentations du monde sensible sont déjà une première modélisation de la réalité (Houdement, 2007). Les savoirs y sont organisés de manière pragmatique pour des raisons didactiques ou fonctionnelles. La validation des énoncés étudiés se fait en relation avec le monde sensible, dont font partie les traces graphiques (réelles ou virtuelles).

Les objets de la Géométrie 2 (Houdement, 2007) sont des objets idéels. Les savoirs sont organisés selon un principe qui leur est extérieur, une axiomatique fondée sur le raisonnement déductif. La validation des énoncés se fait en référence à cette axiomatique au travers de démonstrations. Toutefois cette géométrie garde un lien avec la perception et la réalité car les premiers axiomes fondateurs sont compatibles avec le « perçu » (Houdement & Kuzniak, 2006). Le dessin a dans la Géométrie 2 un double statut : modélisation locale de l'espace sensible ou représentation des objets idéels. Il constitue un support pour le raisonnement, une aide à l'heuristique (Houdement, 2007). C'est ce double statut du dessin qui confère au travail en Géométrie 1 toute son importance pour la Géométrie 2. Les savoirs construits dans ce cadre de la Géométrie 1 ont une fonction pragmatique immédiate, ils permettent aux élèves de résoudre des problèmes dans l'espace sensible, mais ils préparent aussi à la démarche heuristique nécessaire en Géométrie 2.

Dans cette étude les situations proposées aux élèves se placent en Géométrie 1, avec une visée de Géométrie 2, par la double entrée du travail sur les figures et de la relation entre mise en mots des actions et formulation des propriétés. Elle s'appuie sur l'hypothèse de l'effet boosteur de la taille de l'espace pour le travail des figures.

4. Les différents espaces

En effet, selon l'espace avec lequel le sujet est en interaction, celui-ci développe des modèles conceptuels différents : Berthelot et Salin (1992), Brousseau, (2000) considèrent trois types d'espaces : le micro-espace ; le méso-espace et le macro-espace. Dans cette recherche nous nous centrons sur les deux premiers qui correspondent approximativement au *figural space* et *vista space* tels que définis par Montello (1993) : le micro-espace est l'espace des interactions liées à la manipulation des petits objets. Le méso-espace celui des déplacements domestiques.

Quand un sujet travaille dans un micro-espace, il est à l'extérieur de cet espace. Il perçoit l'objet qu'il étudie dans sa globalité. Toutes les positions relatives entre sujet et objet sont possibles car il peut facilement le faire bouger et recueillir des informations exhaustives sur cet objet. Les actions sont peu coûteuses et leurs effets immédiatement perceptibles

(Brousseau et Galvez cités par Berthelot et Salin, 1992). Quand le sujet est confronté à des tâches dans le méso-espace, il est à l'intérieur de l'espace dans lequel il travaille. Il peut s'y déplacer rapidement. Ses déplacements le confrontent à différentes perspectives qui peuvent modifier sa perception des relations spatiales par lesquelles il identifierait le même objet (réduit) dans le micro espace.

Les travaux de Perrin-Glorian & Godin (2014, 2018) ont souligné dans le travail en Géométrie 1 le rôle des instruments sur les connaissances sollicitées : par exemple la donnée d'une seule règle non graduée pour la reproduction de figures amène à conceptualiser l'alignement indépendamment de la longueur. Nous faisons aussi l'hypothèse, que l'approche des figures par les grandeurs (longueurs, angles) sans mesure faciliterait l'entrée dans la Géométrie 2. Ainsi nous associons au travail dans le méso-espace des artefacts qui ne permettent pas le mesurage.

5. Les travaux sur les raisonnements

Notre recherche ne se centre pas uniquement sur les situations de validation ou de preuve mais prend aussi comme objets d'étude les raisonnements produits par les élèves en situation d'action ou de formulation, qu'ils soient valides ou erronés. Nous souhaitons ainsi caractériser les raisonnements destinés à justifier, argumenter, prouver, mais aussi ceux qui guident les décisions dans l'action, orientent les choix, et ce tout au long de l'activité de l'élève en géométrie plane. Cette étude est un préalable au repérage des connaissances que l'enseignant choisit ou non d'institutionnaliser à partir des raisonnements produits par les élèves. Pour cela nous souhaitons écarter de la définition de raisonnement les actions ou formulations reproduites par automatisme ou pour se conformer à une attente supposée de l'enseignant ; nous nous centrons sur les *raisonnement effectifs*. Selon Brousseau & Gibel (2005),un *raisonnement effectif* est un raisonnement qui vérifie les conditions suivantes :

- il peut être explicité de manière même informelle ou partielle par le sujet qui dispose des connaissances nécessaires à son élaboration ;
- il est intentionnel : il est produit par le sujet dans un but déterminé ;
- il modifie de façon positive l'environnement du sujet : il enrichit le milieu avec lequel le sujet interagit par l'apport d'une nouvelle connaissance, réduit une incertitude, permet une action ;
- il est justifié par sa valeur intrinsèque.

Pour conduire nos analyses nous nous appuyons aussi sur le modèle d'analyse des raisonnements de Bloch & Gibel (2011), corrélé à la TSD et structuré autour de trois axes. Un premier axe cherche à définir les fonctions des raisonnements produits par des élèves dans la situation. Dans les situations adidactiques, les raisonnements servent à résoudre le problème sans intervention ni appui de l'enseignant (Gibel, 2015). Les élèves peuvent mettre en œuvre des raisonnements variés (pour choisir un instrument, invalider un tracé …). L'identification des fonctions des raisonnements aide le chercheur à repérer la position des élèves dans les niveaux de milieu. Le deuxième axe détermine, repère et organise les représentations et signes qui seraient des observables des raisonnements. Enfin le troisième axe d'analyse cherche à repérer les connaissances mobilisées par les élèves. Ceci permet de spécifier l'évolution du répertoire didactique au cours de la séquence. Le répertoire didactique est l'ensemble des moyens, connaissances et savoirs que le professeur met en œuvre et pense pouvoir attendre des élèves, suite à son enseignement lors des phases de validation et d'institutionnalisation (Gibel, 2015).

6. Problématique et méthodologie générale

Ces éléments théoriques nous amènent à préciser notre problématique : pour interagir avec les élèves et institutionnaliser des savoirs, comment des enseignants de cycle 3 tiennent-ils compte des raisonnements produits par les élèves dans les phases adidactiques? Nous étudions plus particulièrement cette question pour les situations de reproduction de figures planes dans le méso-espace.

Pour apporter des éléments de réponse à cette problématique, nous procédons à une analyse ascendante. Après une analyse a priori des situations proposées nous identifions les connaissances mises en œuvre, les raisonnements produits par les élèves dans les niveaux adidactiques. Dans un troisième temps nous observons comment ces raisonnements sont pris en compte par l'enseignant lors de ses interventions pour parvenir à institutionnaliser des connaissances et des savoirs.

III. MÉTHODOLOGIE

1. Les données recueillies

Notre recherche se base sur des analyses cliniques d'interactions entre élèves ou entre élèves et enseignant dans des classes de fin d'école primaire et de 6e (élèves de 10 et 11 ans) lors d'un même projet[2] de séquence. Cette séquence, construite par les chercheurs, est constituée de deux situations visant un même savoir, le losange, l'une dans le micro-espace et la « même » dans le méso-espace. Nous utilisons l'expression « duo de situations » : à l'instar du « duo d'artefacts » de Maschietto & Soury-Lavergne (cours de l'école d'été août 2017).

Quinze séances ont été observées dans quatre classes. Le corpus de données brutes comporte les productions d'élèves et l'enregistrement vidéo de toutes les interventions des enseignants lors des phases didactiques ainsi que les enregistrements des actions et échanges au sein de certains groupes d'élèves pendant les phases adidactiques. Un grand nombre de ces données ont été transcrites sous forme de texte, accompagné de photographies.

2. Les situations

La situation dans le micro-espace est une situation de communication qui se déroule sur deux séances. Lors de la première séance, les élèves travaillent par binômes. Deux binômes forment une équipe. Chaque binôme dispose du matériel de géométrie usuel et de feuilles A4. Un losange découpé dans du papier de couleur est attribué par l'enseignant à chaque binôme. Les losanges de chaque équipe sont différents. Chaque binôme doit, à partir d'un message du binôme associé, réussir à construire un losange superposable à celui du binôme. Ni schémas ni dessins ne sont autorisés dans les messages. Les élèves sont disposés afin que les binômes associés ne puissent pas communiquer ni oralement ni visuellement.

La première séance comprend trois phases. Pendant la phase de construction du message, chaque élève est tenu de reproduire individuellement la figure sur une feuille blanche sans utiliser le modèle comme gabarit. Cette phase d'action vise l'élaboration par chaque élève d'un procédé de construction. Puis le binôme se met d'accord sur la procédure et rédige un message écrit destiné au binôme associé. L'enseignant, tel un facteur, le transmet ensuite à l'autre binôme Pendant la seconde phase, les récepteurs tracent une figure superposable au modèle, (dont ils ne disposent pas) à 1 mm près. S'ils jugent que les informations fournies

[2] La même fiche descriptive de la séquence a été fournie aux enseignants de CM et de collège.

sont insuffisantes, ils peuvent poser par écrit une seule question aux émetteurs. Une troisième phase termine la séance : les binômes d'une même équipe sont réunis, les productions sont alors validées ou invalidées par superposition du modèle. La deuxième séance est réservée à la mise en commun collective des procédures et des formulations possibles.

La situation dans le méso-espace est une situation de reproduction de losanges découpés dans un papier résistant et souple, dont les côtés mesurent entre 65 cm et 80 cm. La séance est structurée en trois temps : après une phase de dévolution de l'activité, les élèves sont mis en situation d'action pendant une vingtaine de minutes. Enfin ils sont regroupés pour valider leurs productions et formuler leurs procédures.

Pour la situation d'action, les élèves sont répartis par groupes sous le préau. Chaque groupe se voit attribuer une figure modèle qui ne peut pas être déplacée en dehors d'une zone bien délimitée. La consigne est de reproduire le plus précisément possible cette figure, au sol, dans un espace réservé au tracé. Cet espace de tracé est éloigné de la zone où se trouve le modèle. Ensuite à tour de rôle, chaque groupe expose à l'ensemble de la classe et au professeur comment il a procédé pour effectuer le tracé. Les instruments et outils mis à disposition des élèves sont : ficelle, ciseaux, un tasseau de bois de 2 m environ par groupe, équerres en carton, feutres, craies de différentes couleurs et brosses pour effacer. Deux classes de procédures sont possibles pour effectuer les constructions demandées. La première utilise les propriétés des diagonales d'un losange : sont successivement tracés : une diagonale, la deuxième diagonale perpendiculaire et de même milieu, puis les côtés du losange. La seconde se base sur la décomposition du losange en deux triangles isocèles isométriques de même base. Après le tracé d'une diagonale, un triangle puis un second sont construits.

Les deux situations ont en commun une phase d'action adidactique et en fin de séance, la possibilité par les élèves eux-mêmes de contrôler de la validité de leur production. Ces situations diffèrent essentiellement par la taille de l'espace en jeu, les outils à la disposition des élèves, le mode de formulation des procédures (écrites ou orales). De plus, dans la situation du micro espace les élèves doivent **mesurer** des longueurs pour communiquer toutes les informations utiles à la reproduction de la figure. Dans la situation du méso-espace, il suffit de **reporter** des longueurs. Pour privilégier le recours à des raisonnements mobilisant les propriétés géométriques, nous choisissons de ne pas donner d'instruments de mesure..

IV. BREF APERÇU SUR L'ANALYSE DES RAISONNEMENTS

Voici un exemple lié à notre premier axe d'analyse. Nous avons défini *a priori* les fonctions possibles des raisonnements produits par les élèves dans chacun des niveaux de milieu pour la reproduction de figure en géométrie plane (Gibel & Blanquart-Henry, 2017). Nous nous référons à cette analyse *a priori* pour déterminer les fonctions des raisonnements produits par les élèves dans un très court épisode.

L'épisode choisi concerne la situation dans le méso-espace. Après la phase d'action (reproduction d'un losange sur le sol de la cour), un groupe d'élèves explicite sa procédure à l'enseignant et la classe. Dans l'extrait présenté (Tableau 1) un seul élève intervient. Il vient d'expliquer comment une première diagonale du losange a été tracée et comment son milieu a été repéré en reportant sur un tasseau les longueurs des demi-diagonales du modèle.

Du point de vue des raisonnements :

En (1) l'élève mentionne l'équerre comme instrument de tracé. Il complète son discours en positionnant l'équerre sur le dessin tracé au sol. L'équerre, telle qu'il l'a placée, permet le tracé d'une demi-diagonale perpendiculaire à la diagonale déjà tracée, et d'origine son milieu.

Le raisonnement de l'élève a pour fonction la justification implicite du tracé en lien avec des propriétés de diagonales d'un losange. On se situe ici au niveau M-1 du milieu de référence.

	Texte	Gestes associés
1	J : Et heu …après on s'est aidé, on s'est aidé de l'équerre. Là on s'est aidé de l'équerre et.	*Positionne l'équerre en carton à l'intersection des diagonales.*
2	Et on avait vu qu'il y avait un coin alors on a fait notre droite qu'on avait pas terminée	*Longe du doigt (de la main droite) un côté de l'angle droit de l'équerre.* 
3	Et après avec les marques qu'il y avait sur le tasseau on a pu continuer	*Effectue un geste de la main (gauche)dans le prolongement.*
4	De l'autre côté aussi	*Désigne la deuxième moitié de la grande diagonale.* 
5	Et après on a relié tous les sommets.	*Montre d'un geste circulaire le contour du losange tracé au sol.*

Tableau 1*: formulation de sa procédure par un élève*

En (2) l'élève justifie le tracé par la formulation d'une caractéristique perçue, la perpendicularité des diagonales, puis évoque le tracé d'une ligne. Il emploie le terme « *droite* » mais représente une demi-droite avec la main. Le raisonnement produit a pour fonction d'expliciter et justifier l'organisation du tracé. Il se situe au niveau M-1.

En (3) l'élève mentionne la nécessité d'utiliser un autre instrument, lié aux longueurs. Pour placer un sommet du losange les élèves ont prolongé la demi-droite citée en (2) et reporté la longueur de la demi-diagonale correspondante. Les marques faites sur le tasseau déterminent cette longueur. Le raisonnement produit justifie explicitement l'emploi d'un instrument. Il se situe au niveau M-1.

En (4) l'élève donne à voir un raisonnement qui explicite l'organisation des tâches en lien avec des caractéristiques de la figure, symétrique par rapport à une diagonale, propriété qui reste implicite.

En (5) le raisonnement a pour fonction l'explicitation de l'organisation des tâches.

L'ensemble de l'épisode se situe donc au niveau du milieu de référence M-1. Les formulations et actions de l'élève témoignent de la mise en œuvre implicite des propriétés caractéristiques des losanges pour élaborer et organiser un processus de construction.

V. CONCLUSION

La finalité de notre thèse est d'étudier comment des enseignants de cycle 3 prennent en compte, pour enrichir le répertoire didactique de la classe, les connaissances produites par les élèves dans les phases adidactiques de situations autour de figures géométriques.

Nous avons présenté dans ce texte les éléments théoriques qui nous permettent de construire ces séances et d'étudier les raisonnements produits par les élèves, Ces éléments vont nous permettre de repérer les connaissances que les enseignants de CM et de sixième choisissent ou

non d'institutionnaliser à partir des raisonnements produits par les élèves. Notre travail est en cours, c'est pourquoi nous ne présentons ici qu'un bilan très provisoire. Nous avons déjà observé des variations entre l'enseignant de CM et le professeur de collège concernant la place et le rôle accordés à la validation des productions au cours de la mise en commun.

L'étude plus fine des types de raisonnements produits par les élèves et de leur prise en compte par l'enseignant lors des mises en commun est à poursuivre. Dans cette analyse la nature des artefacts utilisés semble jouer un rôle non négligeable.

REFERENCES

Berthelot, R., & Salin, M. H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire* Thèse de Doctorat. Université Sciences et Technologies-Bordeaux I.

Bloch I. (1999), L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse. *Recherches en Didactique des Mathématiques,*19(2), 135-193.

Brousseau, G. (1972). Processus de mathématisation. La mathématique à l'école élémentaire, 428-457. (A.P.M.E.P., Éd.) Paris.

Brousseau, G.(1986) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 7(2), 33-115.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. & Gibel, P. (2005). Didactical Handling of Students' Reasoning Processes in Problem Solving Situations. *Educational Studies in mathematics*,59, 13-58.

Gibel P. (2015), Mise en œuvre d'un modèle d'analyse des raisonnements en classe de mathématiques à l'école primaire, *Éducation et Didactique* 9-2, 51-72.

Gibel P. (2018), Élaboration et usages d'un modèle multidimensionnel d'analyse des raisonnements en classe de mathématiques. Habilitation à Diriger des Recherches. Université de Pau et des Pays de l'Adour.

Gibel P.& Blanquart-Henry S .(2017). Favoriser l'appropriation des propriétés géométriques des quadrilatères à l'école primaire : étude d'une situation d'apprentissage dans le méso-espace. *Revue des sciences de l'éducation*, 43(1), 37–84.

Houdement, C., & Kuzniak, A. (1999). Un exemple de cadre conceptuel pour létude de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. *Educational Studies in Mathematics, 40*(3), 283-312.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 11, 175-193.

Houdement, C. (2007). À la recherche d'une cohérence entre géométrie de l'école et géométrie du collège. *Repères IREM*, 67, 70‑84

Margolinas M. (1995), Structuration du milieu et apports dans l'analyse a posteriori des situations. *Les débats de didactique des mathématiques (pp.89-102), Grenoble :*Pensée Sauvage

Margolinas, C. (2004). *Points de vue de l'élève et du professeur. Essai de développement de la Théorie des Situations Didactiques.* Université de Provence

Montello, D. R. (1993). Scale and multiple psychologies of space. In *European conference on spatial information theory* 312-321. Springer, Berlin, Heidelberg.

Perrin-Glorian, M.J. & Godin, M. (2014) De la reproduction de figures géométrique avec des instruments vers leur caractérisation par des énoncés. *Math-École*, 222, 23-36.

Perrin-Glorian, M.J. & Godin, M. (2018) Géométrie plane : pour une approche cohérente du début de l'école à la fin du collège. 〈hal-01660837v2〉

Schneider, M., & Mercier, A. (2008). Situation adidactique, situation didactique, situation-problème: circulation de concepts entre théorie didactique et idéologies pour l'enseignement. In *Actes du Colloque «Didactiques: quelles références épistémologiques*.

ENSEIGNER LES NOMBRES DECIMAUX ET LES FRACTIONS

TRANSITIONS (OU RUPTURES ?) PRIMAIRE-SECONDAIRE

COULANGE[*] Lalina – TRAIN[**] Grégory

Résumé – Ce texte se veut une synthèse de résultats de nos recherches actuelles sur l'enseignement et l'apprentissage des décimaux et des fractions dans la transition école collège. Nous abordons des aspects liés aux différents registres de représentations sémiotiques de ces nombres, qui nous semblent des points importants à considérer pour mieux appréhender leur enseignement dans le contexte d'une telle transition.

Mots-clefs : fractions, décimaux, transition (primaire-secondaire), représentations, désignations

Abstract –We synthetize the results of our current research on the teaching and learning of decimal numbers and fractions in the school transition from primary to secondary. We will focus on aspects related to the different registers of semiotic representations related to these numbers. From our viewpoint, these aspects seem to be important in such a school transition.

Keywords: fractions, decimal numbers, transition (primary-secondary), representations, designations

Nous étudions depuis plusieurs années, des phénomènes didactiques liés à l'enseignement et à l'apprentissage des nombres décimaux et des fractions dans la transition primaire-secondaire en prenant appui sur des observations faites sur la durée dans un Lieu d'éducation Associé, l'école primaire Carle Vernet, située dans un quartier prioritaire[1] de la ville de Bordeaux ainsi que dans différents collèges. Nous adoptons une perspective langagière, sémiolinguistique dans l'étude de ces phénomènes didactiques. Nous nous intéressons tout particulièrement aux registres de représentation sémiotique (à la fois discursif, symbolique, iconique …) des décimaux et des fractions (Duval 1993, 1995) et à leur(s) rôle(s) au sein des situations d'enseignement et d'apprentissage que nous observons ou co-construisons dans ce contexte. Nous commencerons par présenter les éléments de ce cadrage théorique, puis nous présenterons une synthèse des résultats de nos recherches, en centrant notre propos sur ce qui nous semble éclairer des questions plus spécifiques de la transition école-collège, qu'il s'agisse de potentielles continuités ou possibles ruptures relativement aux savoirs à enseigner, enseignés ou appris sur les nombres décimaux et les fractions.

I. ENSEIGNEMENT DES NOMBRES DECIMAUX A L'ECOLE ET AU COLLEGE

1. Registres de représentation sémiotique des nombres décimaux

Dans l'enseignement des nombres décimaux, différents registres de représentation sémiotique sont potentiellement à l'œuvre, à la fois :

- *symboliques :* les écritures fractionnaires[2] notamment celles du type $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$; les écritures décimales et les sommes associées à ces écritures
- *discursifs :* faisant intervenir ce que Chambris (2008) ou Tempier (2013) appellent des unités de numération, *dixième, centième et millième*.
- *mixtes* : à l'œuvre par exemple dans des écritures du type *1 unité + 3 dixièmes + 2 centièmes* ou dans des tableaux de numération
- *matériels ou iconiques :* comme un carré constitué de 100 carreaux dont 25 sont grisés.

[*] Lab-E3D, Université de Bordeaux - France – lalina.coulange@u-bordeaux.fr
[**] Lab-E3D, Université de Bordeaux - France – gregory.train@u-bordeaux.fr

[1] Les élèves de cette école sont majoritairement issus de milieux socio-défavorisés.

[2] Signalons qu'en France, les écritures décimales sont introduites après les écritures « fractionnaires – décimales », et ce depuis plusieurs années, ce qui n'est pas le cas dans d'autres pays.

Souvent présents de manière concomitante dans les situations d'enseignement et d'apprentissage des décimaux, ces registres de représentation sémiotique sont également susceptibles d'être évoqués doublement, à la fois à l'oral et à l'écrit. Le concept de désignations doubles voire multiples, associant des désignations liées à des représentations sémiotiques distinctes au même objet, proposé par Duval (1995) permet de rendre compte de ce phénomène. Ainsi lit-on oralement l'écriture symbolique[3] $\frac{25}{100}$ comme *vingt-cinq centièmes*, ce qui permet sa mise en relation avec le registre des unités de numération, au primaire. Cette désignation pourra trouver d'autres formes oralisées au secondaire, *vingt-cinq sur ou divisé par cent,* nous y reviendrons. Pour poursuivre l'investigation de la complexité qui se dessine dans des lectures possibles d'écritures symboliques, notons que ces désignations des nombres, multiples ou associées, symboliques, discursives et autres, sont convoquées dans des contextualisations variées en prise d'appui sur des registres iconiques supports de la construction des nombres. Par exemple, on lit $\frac{25}{100}$ comme *vingt-cinq centièmes*, en référence à des situations qui contextualisent la fraction comme partage d'une unité, au sein desquelles la fraction est représentée sous des formes schématiques ou matérielles.

Nous faisons l'hypothèse que ces désignations multiples d'un même objet, le nombre décimal, dans différents registres de représentations jouent un rôle essentiel dans la conceptualisation de ces nombres. Il nous semble d'autre part, que la manière dont ces modes de désignation orale ou écrit des décimaux se négocient ou se (re)négocient dans la transition primaire-secondaire, tant du point de vue des pratiques langagières d'élèves et d'enseignants que de celui des contenus en jeu, est intéressante à considérer.

2. Doubles désignations, conversions et traitements

Les observations conduites au sein des classes de primaire du LéA ont été l'occasion de rencontrer différents phénomènes à l'œuvre dans les classes et liés aux désignations symboliques et/ou discursives des nombres décimaux.

Les écritures fractionnaires décimales et les sommes liées à de telles écritures sont, de manière récurrente, désignées à la fois par les élèves et les enseignants en ayant recours aux unités de numération dans leur discours oral : $\frac{1}{100}$ est ainsi désigné un centième. Une des fonctionnalités de cette double désignation réside particulièrement dans la mise en œuvre de techniques de comparaison ou de calcul des nombres décimaux, en prise d'appui direct sur des conversions entre unités de numération, du type « dix *centièmes égalent un dixième* ». Ce constat fait écho aux valences sémiotique et instrumentale des unités de numération, caractérisées dans les travaux de Chambris (2008) et de Tempier (2013) sur l'enseignement de la numération décimale. Autrement dit, dans la perspective adoptée dans ce texte, les unités de numération spécifiques des décimaux sont un point d'appui plébiscité dans différents traitements liés aux savoirs à enseigner sur ces nombres à l'école ou au collège.

Dans le même temps, ce jeu de double désignation qui convoque le registre de représentation des unités de numération dans la lecture d'écritures symboliques fractionnaires et qui permet le contrôle de différentes écritures fractionnaires associées à un même nombre décimal, semble parfois manquer d'une forme d'autonomie du côté des élèves. Ainsi, dans les observations conduites à l'école primaire, faut-il, de manière récurrente, attendre l'intervention d'un tiers (celle d'un autre élève ou du professeur) pour régler la question du caractère erroné d'égalités du type $\frac{5}{100} + \frac{5}{100} = \frac{10}{200}$: le recours à une (re)désignation orale de

[3] Ecriture lié au registre symbolique des écritures fractionnaires des nombres décimaux.

l'écriture $\frac{5}{100}$ en *cinq centièmes* permettant alors d'emporter la conviction des « fautifs ». Par ailleurs, ces transformations erronées d'écritures symboliques semblent gagner en importance à l'entrée au collège : comme le montrent des réponses à des évaluations posées à des élèves de sixième que nous suivions en primaire. Ce phénomène pose question : Est-il lié à des modalités de travail spécifiques de la transition école-collège ? Les élèves ont-ils à traiter des écritures symboliques fractionnaires de manière plus autonome et plus « silencieuse » au début du secondaire ?

Malgré des recommandations institutionnelles déjà anciennes en la matière (programmes français de 2002[4]) le registre discursif des unités de numération semble plus difficilement associé à l'écriture décimale des nombres – une fois celle-ci introduite –par les élèves et les enseignants du primaire, comme du secondaire. Ainsi, un nombre écrit sous la forme « 2,58 » est spontanément lu comme « *deux virgule cinquante-huit* » que comme « *deux et cinquante-huit centièmes* » par les élèves et par les enseignants et ce, malgré le fait que ces derniers soient conscients des potentialités des unités de numération[5]. Plus encore, lorsque des formulations en lien avec les unités de numération, visant à justifier diverses techniques (de comparaison, opératoires, etc.) sont convoquées par l'enseignant, une forme de résistance apparaît parfois du côté d'une partie des élèves. Nombre d'entre eux, notamment les plus en difficulté, adhèrent visiblement plus volontiers à la verbalisation d'actions sur l'écrit rendant compte de transformations d'écritures symboliques. Ainsi, quand sous l'insistance de son professeur, un élève de primaire formule la justification de la transformation d'écriture 1,9 en 1,900 (pour le comparer à 1,589) *« car c'est 900 millièmes »* ce qui est pareil que *« 9 dixièmes »,* une majorité d'élèves retiendra d'un tel épisode de classe, l'ajout possible de zéros, privé de la justification pourtant formulée à l'oral dans le registre des unités de numération. Là encore, ce phénomène questionne. Quelle place donner à ce registre des unités de numération ? S'agit-il de veiller à le faire *vivre* davantage, y compris à l'écrit comme le suggèrent les auteurs cités auparavant, ou comme un intermédiaire, nécessaire à la compréhension de l'écriture décimale ? Si oui, comment[6] ?

Dans ce jeu de double désignation, d'autres formes possibles d'associations sont apparues. Celles en lien avec des représentations iconiques, convoquées classiquement dans la construction de la fraction « *partage* », nous sont apparues comme intéressantes à considérer. Ces associations peuvent s'avérer propices pour mettre en relation diverses représentations sémiotiques symboliques des nombres décimaux. En l'espèce, nos observations des pratiques enseignantes, mais également de leurs ressources professionnelles nous conduisent à faire l'hypothèse que si les fractions décimales fondent l'enseignement des nombres décimaux en primaire (en France), il y a par la suite, peu d'occasions de mettre en relation des écritures fractionnaires et des écritures décimales de nombres décimaux. Chesné (2017) rappelle à ce sujet que peu d'élèves français (26,9 %) et encore moins d'élèves issus de zones d'éducation prioritaire (14,9%) arrivent à répondre à la question suivante posée lors d'évaluations nationales à l'entrée au collège de manière satisfaisante :

Parmi ces quatre nombres, deux sont égaux.

Entoure-les 0,25 0,4 1,4 $\frac{1}{4}$

Figure 1 *- Evaluations nationales diagnostiques de 2008 – MEN*

[4] Le document d'application des programmes de primaire de 2002 mettait déjà l'accent sur les unités de numération : «*5,23 se lit 5 et 23 centièmes ou 5 et 2 dixièmes et 3 centièmes. La lecture courante (5 virgule 23) n'est pas exclue mais il s'agit de ne pas la systématiser (...)* » (cycle 3, p. 23)

[5] Rappelons que l'on parle d'enseignants avec qui nous travaillons sur le sujet depuis 4 années, déjà.

[6] Cela passe sans doute par un réinvestissement des unités de numération dans des consignes liées à des tâches proposées aux élèves du LéA, par exemple : « *comparer 45 dixièmes et 440 centièmes* ».

Pourtant, un épisode observé dans une classe de primaire illustre, nous semble-t-il, particulièrement les potentialités qu'offrent des associations entre écritures fractionnaires et décimales dès le primaire. Ainsi, lors de la présentation d'un jeu numérique, un échange collectif orchestré par l'enseignante autour de la figure suivante a permis à certains élèves de l'associer à une représentation de « *25 centièmes* » en l'interprétant comme « *une unité partagée en 100, 25 parts étant grisées* », cette même représentation a permis à d'autres dans le même temps de voir « *un quart* » en l'interprétant comme « *une unité partagée en 4* ». Les conditions semblaient dès lors réunies pour conclure collectivement à l'égalité : $\frac{1}{4} = \frac{25}{100}$, laquelle partage une proximité certaine avec celle évoquée ci-avant : $\frac{1}{4} = 0{,}25$.

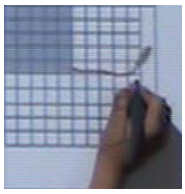


Figure 2 - $\frac{1}{4} = \frac{25}{100}$

Ceci nous conduit à envisager que de telles représentations iconiques pourraient potentiellement conduire à des désignations multiples à même de faciliter la mise en relation d'écritures symboliques (fractionnaires, décimales…) des nombres décimaux, ce dont semble attester des premières expériences conduites au sein du LéA Carle Vernet.

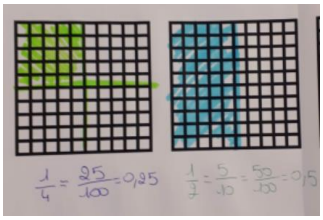


Figure 3 - *production d'un élève – écritures fractionnaires et décimales d'un même nombre*

Nous nous interrogeons sur la possibilité de faire vivre des tâches qui permettraient d'entretenir une telle flexibilité entre différents registres d'écritures symboliques des nombres. Par exemple, la tâche $\frac{1}{4} + 0{,}75$ qui mêle registre symbolique décimal et fractionnaire et pourrait être proposée en lien avec la représentation iconique précédente (voir figure 2). Des tâches du même type ($1{,}23 + \frac{4}{25}$; $1{,}23 + \frac{4}{15}$; …), érigeant les conversions entre registres en ingrédients au cœur de différentes techniques possibles d'additions de nombres permettraient d'entretenir une telle flexibilité. Doublées d'un choix de variables adapté (somme de deux décimaux ; somme d'un décimal et d'un rationnel non décimal ; longueur de la partie décimale, etc.) de telles tâches permettraient dans le même temps d'interroger différentes techniques possibles, leur portée et leur coût ($\frac{27}{3} + 2{,}6$; $\frac{7949}{3125} + 2{,}7$; $283{,}26 + \frac{1677}{5}$; etc.) et en retour d'examiner les spécificités de chacun des registres de représentation symbolique. De telles tâches sont pourtant actuellement rarement envisagées dans l'institution scolaire française, que ce soit au niveau du primaire ou du secondaire.

3. Rôle(s) d'un registre discursif de représentation sémiotique : les unités de numération

Nous avons signalé les potentialités d'un registre de représentation discursif spécifique dans l'enseignement et l'apprentissage des nombres décimaux : celui des unités de numération. De tels constats rejoignent ceux faits par Chambris (2008) et Tempier (2013) dont les travaux

portaient initialement sur l'enseignement et l'apprentissage des nombres entiers mais dont les résultats semblent pouvoir s'étendre aux décimaux, ce qui est d'ailleurs envisagé par ces mêmes auteurs (Chambris 2014 ; Chambris, Tempier & Allard 2017). Toutefois les unités de numération spécifiques des nombres décimaux comportent des spécificités à considérer de près, à même d'interroger les potentialités et les limites de ce registre de représentation discursif des nombres décimaux, à reconsidérer de plus près dans la transition école-collège.

Les unités de numération spécifiques des décimaux (le dixième, le centième et le millième) sont construites en lien avec la fraction *partage* de l'unité à l'école primaire. Une conséquence immédiate est que cette construction est réalisée dans un sens *partage* (*le dixième comme l'unité partagée en dix, le centième comme l'unité partagée en cent ou le dixième partagé en dix…*). Or, il est un constat que nous avons pu faire à de nombreuses reprises : le sens « *groupement* » largement convoqué dans les traitements propres à ce registre discursif peut faire défaut dans des situations d'enseignement et d'apprentissage observées. *Autrement dit, ce n'est pas parce que l'on sait qu'une unité d'ordre n-1 correspond à un partage de l'unité d'ordre n en dix (ou d'une unité d'ordre n+2 en cent), que l'on sait que dix (ou cent) unités d'ordre n-1 peut être convertie en une unité d'ordre n (ou d'ordre n+2)*. Un travail de reconstruction des unités de numération dans le sens *groupement* nécessite une prise en charge explicite. Des relations indirectes entre les unités de numération construites dans le sens *partage* apparaissent problématiques, dès lors qu'elles sont convoquées. Ainsi si le centième a été construit comme *l'unité de référence partagée en cent*, considérer que *dix centièmes égalent à un dixième* représente un saut de complexité important pour les élèves. Ce type de difficultés a notamment surgi dans des tâches de positionnement d'écritures fractionnaires sur une droite graduée : par exemple, placer $\frac{15}{10}$, désigné oralement par *quinze dixièmes*, sur une droite graduée en centièmes nécessite le recours à des relations entre unités de numération qui reposent sur le sens *groupement*. De telles observations, récurrentes dans les classes de primaire du LéA, illustrent des difficultés à (re)construire un sens *groupement* des unités de numération construites dans un sens *partag*e, ce qui peut contribuer à éclairer le tarissement d'usages autonomes des unités de numération par les élèves (voir page 2). C'est également, dès la construction de relations entre unités de numération dans le sens *partage*, l'existence de choix entre des partages possibles à interroger de ce point de vue : par exemple, en ce qui concerne le centième, un partage de dix du dixième ou un partage de cent de l'unité. Remarquons que certaines de nos observations nous conduisent à considérer que la formulation de rapports entre les unités de numération (le centième comme « *dix fois plus petit* » que le dixième ou le dixième comme « *dix fois plus grand* » que le centième) apparaissent comme des leviers possibles, permettant de lever partiellement ces difficultés.

Si comme le signale Chambris (2008, 2010), le registre de représentation des unités de numération peut également nourrir un rapprochement entre des savoirs à enseigner sur la numération décimale et des savoirs à enseigner sur la mesure impliquant le registre des unités de mesure, un tel rapprochement soulève d'assez nombreuses questions, s'agissant des décimaux pour lesquels un tel rapprochement a d'ailleurs pu être décrié par le passé, au regard des confusions sur les décimaux appréhendés comme couples d'entiers. Nous affirmons que le rôle de la virgule dans le registre d'écritures décimales diffère, s'agissant de l'écriture de *nombres décimaux – grandeurs* ou de *nombres décimaux - abstraits*. S'agissant de *nombres décimaux – grandeurs* la virgule a la fonction d'indicateur de l'unité de mesure qui va servir de référence, cette dernière pouvant varier : ce que formule d'ailleurs très bien un élève (*« la virgule elle sert à savoir si on parle de mètres, de décimètres »*) au sein d'une classe de primaire dans laquelle un tel rapprochement a été envisagé dès l'apparition de l'écriture

décimale pour désigner des *nombres décimaux – grandeurs.* (Coulange & Train 2015). Dans le domaine *stricto sensu* de la numération, en revanche, la virgule sert à indiquer comment se situent les chiffres par rapport à une unité de référence, cette dernière étant donnée et immuable (l'unité) : elle devient un marqueur positionnel permettant de *situer* cette unité dans l'écriture décimale d'un nombre. Cette dissymétrie du rôle de la virgule est rendue particulièrement visible dès lors qu'est envisagé de sortir un nombre *versus* une mesure, d'un tableau d'unités de numération *versus* un tableau d'unités de mesure, comme illustré ci-après.

Centaines	Dizaines	Unités	Dixièmes
	2	5	5
1	7	3	4

Quand on *sort* les nombres du tableau, on écrit 25,5 et 173,4– la virgule pallie la « disparition » d'unités de numération dans l'écriture positionnelle

dam	m	dm	cm
	2	5	5
1	7	3	4

Dans 2,55 cm (écriture licite) la virgule désigne l'unité de mesure retenue comme « unité de référence » (unité de mesure)

Figure 4 *- « sortir » un nombre décimal / une mesure d'un tableau de numération / de mesure*

En conclusion, le registre des unités de numération spécifiques des nombres décimaux présente des spécificités fortes. Il est d'une part *voué à disparaître* dans l'écriture positionnelle chiffrée, contrairement à celui des unités de mesure dans l'écriture décimale de *nombres décimaux - grandeur*s. Ce registre est, d'autre part, construit dans un sens *partage* de l'unité. Ainsi a-t-on pu s'interroger sur la pertinence d'une tâche comme *écrire en chiffres* « *13,5 dizaines* », plutôt absente du curriculum (y compris passé) du primaire comme du secondaire, dans laquelle coexistent écriture décimale positionnelle chiffrée et unités de numération. L'analyse d'une telle tâche donne à voir la complexité des techniques à l'œuvre pour l'accomplir dans le registre des unités de numération décimale. Cette complexité tient en particulier au fait que les techniques envisagées convoquent à la fois le traitement du dixième construit comme *partage* de l'unité en 10 et de la dizaine construite comme *groupement* par 10 de l'unité. De telles techniques sous-entendraient notamment que dans une action de *partage*, il s'agirait de partager autre chose que l'unité ou qu'une subdivision[7] de l'unité, ce qui n'est *a priori* abordé que plus tardivement, par exemple, quand on introduit la fraction d'une quantité dans le curriculum scolaire. Pour mieux acter de cette dissymétrie, notons que la tâche « *13,5 décamètres* » est à l'inverse tout à fait envisageable, dans ce même curriculum, ce qui tend à illustrer la différence de traitement d'écritures décimales en lien avec le registre des unités de numération et de celles en lien avec le registre des unités de mesure. Une exception semble toutefois liée à des usages sociaux : il s'agit de « *13,5 millions* » dont il s'agit sans doute d'envisager le traitement un jour dans le contexte scolaire !

Si l'on peut dès lors s'accorder sur les potentialités du registre des unités de numération dans l'enseignement des décimaux, comme étant à même de favoriser une certaine continuité dans la construction plus globale de la numération décimale, et plus particulièrement dans la transition école-collège, on peut aussi s'interroger sur les limites d'un tel projet. Si l'addition et la soustraction posées de nombres décimaux paraissent des lieux privilégiés pour « *faire parler* » les unités de numération et des traitements intrinsèques à ce registre de représentation, il n'en est pas de même pour la multiplication posée, reléguée entre 1995 et 2008 à l'entrée au secondaire en France. L'analyse de discours possibles ou effectivement tenus sur un algorithme posé de la multiplication de deux nombres décimaux illustrent des limites potentielles d'usages d'un tel registre de représentation : un discours justificatif chiffre à chiffre du calcul posé de $56{,}03 \times 8{,}3$ convoquerait inévitablement des relations entre unités de numération (3 dixièmes de 5 dizaines par exemple pour le produit considéré ici) dont le

[7] Le partage d'une subdivision de l'unité a pu été abordé dans la construction d'une unité de numération : quand on construit par exemple le centième comme le dixième du dixième de l'unité.

coût de construction reste à évaluer et *in fine* retomberait sur l'écueil signalé précédemment dans le texte, en lien avec le dixième de la dizaine et d'autres relations du même type. D'autres discours justificatifs sont certes possibles, prenant appui sur la multiplication posée d'un entier par un décimal construite en lien avec l'addition itéré et sur l'effet sur un produit d'un multiplicateur 10, 100 fois plus petit. Ainsi, on pourra entendre que si le multiplicateur était 83, le produit n'aurait en décimales que des centièmes, puisqu'on aurait répété 83 fois le multiplicande 56,03 dont les décimales sont des centièmes[8]. Comme le multiplicateur est 8,3, c'est à dire dix fois plus petit que 83, le produit doit donc avoir des « *unités dix fois plus petites que les centièmes* ». On pourra également entendre que « *multiplier 56,03 × 8,3 ou par 83 dixièmes, c'est prendre 83 fois la dixième partie du multiplicande, c'est à dire multiplier 5,603 par 83…* ». Toutefois ces autres justifications trouvées dans des manuels anciens prennent appui peu ou prou sur la triple égalité $a \times \frac{b}{c} = \frac{a \times b}{c} = \frac{a}{c} \times b$[9] dont la justification ne peut s'accommoder de la seule définition *partage* d'une fraction et engageant plus volontiers un jeu plus subtil de changement de point de vue entre nombre « opérateur » et nombre « grandeur » (Coulange et Train 2017) non sans lien avec une autre acception de la fraction : celle de *quotient.*

C'est pour ces raisons entre autres, que nous faisons l'hypothèse que les nombres décimaux sont à redéfinir comme des « *nombres qui multipliés par 10, 100, 1000 … donnent des nombres entiers* » à l'entrée au collège. Muni d'une telle (re)définition, en s'intéressant encore à $P = 56{,}03 \times 8{,}3$, on a $56{,}03 \times 100 = 5603$ et $8{,}3 \times 10 = 83$ puis $5603 \times 83 = (56{,}03 \times 100) \times (8{,}3 \times 10) = (56{,}03 \times 8{,}3) \times 1000 = P \times 1000$. P est alors par définition le nombre qui multiplié par 1000 donne 5603×83. Une telle définition représente selon nous, une rupture nécessaire qui en recouvre une autre : le passage d'une fraction *partage* enseignée au primaire à une fraction *quotient* enseignée au secondaire, dont nous disons quelques mots ci-après.

II. ENSEIGNEMENT DES FRACTIONS A L'ECOLE ET AU COLLEGE

Depuis plusieurs années déjà (dès 1996 ; cette injonction officielle a été renouvelée en 2016), les programmes français mettent en avant deux acceptions institutionnelles de la fraction :
- La fraction $\frac{a}{b}$ dite *partage* appréhendée comme partage d'une unité – liée à l'action de prendre un b$^{\text{ième}}$ de l'unité (en partageant l'unité en b parts équitable), $\frac{a}{b}$ étant alors « *a fois un* $b^{ième}$ *de l'unité* », étudiée en primaire.

- La fraction $\frac{a}{b}$ dite *quotient* appréhendée comme « *le nombre qui multiplié par b donne a* », étudiée dès l'entrée au secondaire.

La fraction *partage* recouvre de nombreuses potentialités à même d'être étudiées au primaire. Dès son introduction à l'école, il est un fait constaté : les élèves « partagent » l'unité mais aussi (souvent en deux) des subdivisions de l'unité (construisant le quart de l'unité comme la moitié du demi ou le huitième de l'unité). Dans les classes observées, les élèves de primaire semblent d'ailleurs investir des connaissances quotidiennes ou sociales sur « *la moitié* », « *le quart* » et « *le tiers* » d'une unité. Ces connaissances construites en dehors de l'école peuvent se constituer comme autant de points d'appui mais aussi parfois comme des

[8] Notons que la véracité d'une telle affirmation peut à elle seule parfois poser question pour certaines multiplications posées ou non (par exemple s'agissant de 0,5 x 2 = 1)

[9] $56{,}03 \times \frac{83}{10} = \frac{1}{10} \times (56{,}03 \times 83) = \frac{56{,}03}{10} \times 83$

obstacles[10] dans la construction scolaire de la fraction *partage*. Interrogés, avant tout apprentissage organisé en classe, les élèves de primaire que nous suivons sont à même de formuler des réponses en prise d'appui sur l'action (de partage), sans pour autant disposer de garanties sur le retour à la référence, l'unité, ou encore sur les liens existants entre les subdivisions de cette référence.

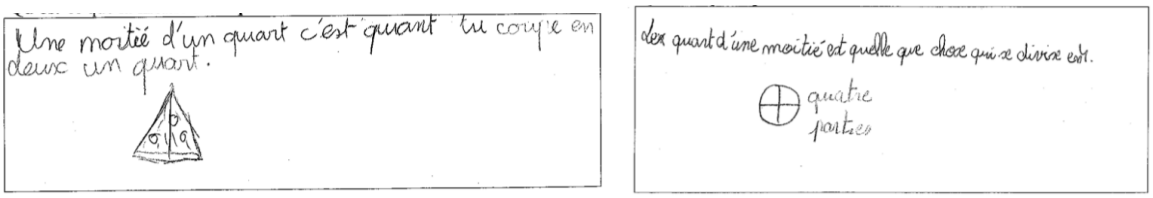


Figure 5 *- Exemples de productions d'élèves en réponse à des questions posées sur la moitié d'un quart ou le quart d'une moitié (en amont de tout enseignement des fractions à l'école)*

Il existe par ailleurs des tensions entre des actions (correspondant au partage de l'unité, de subdivisions de l'unité) et les résultats de ces actions dans les situations d'enseignement et d'apprentissage de la fraction *partage*. Par exemple, dans un contexte lié à la mesure de longueurs, le huitième de l'unité est construit comme la moitié du quart de l'unité (par des actions successives de pliage en deux) et ce n'est que dans un second temps qu'il sera véritablement considéré comme *un huitième* quand on donnera à observer le résultat de l'action qui a permis d'obtenir un partage en huit parts égales. Aussi, si des raisonnements complexes permettant la production d'égalités d'écritures fractionnaires ou de sommes (du type $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$) sont tenus par les élèves, sous certaines conditions, et qu'on partage « plus que l'unité » (des subdivisions de l'unité), la référence à l'unité joue un rôle essentiel dans la production et de validation de tels raisonnements au niveau du primaire.

La fraction *quotient* peine, quant à elle, davantage que la fraction *partage*, à trouver une place dans les savoirs enseignés en France, au niveau du secondaire. Dans les manuels scolaires, il est aisé de constater soit des absences, la fraction *partage* continuant à vivre largement au sein de différentes activités ou exercices, soit des tentatives maladroites d'introduction de cette fraction *quotient* (Coulange & Train 2017). Ces constats invitent à s'interroger plus avant sur cette fraction, souvent construite comme *le* $b^{ième}$ *de a unités* dans le cadre des grandeurs (longueurs ou aires notamment) conformément à des attentes institutionnelles exprimées en ce sens. Cette action de partage de grandeurs, ici étendue à plusieurs unités (au lieu d'une) n'apparaît, nous semble-t-il, pourtant pas si proche qu'elle en a l'air de la définition de la fraction *quotient* telle que formulée ci-avant. Une autre acception de la fraction dans le cadre des grandeurs, matérialisée par la « situation de l'épaisseur des feuilles de papier » (Brousseau & Brousseau 1987, 2005), celle relative à la *commensuration* : « *la fraction n/m est la mesure d'un objet tel qu'il en « sommer » m, égaux pour équivaloir à n unités* » paraît plus proche et conforme de la définition de la fraction quotient. Elle paraît malheureusement une oubliée de l'institution scolaire française. Nous avons adapté une situation ancienne (celle dite « des automates » ou « des robots » trouvée dans un ancien ouvrage ERMEL et reprise par des auteurs variés[11]) en prenant appui sur des matériaux liés à la situation de l'épaisseur des feuilles de papier archivés au sein du Centre de Ressources de Didactique des Mathématiques – *Guy Brousseau*[12]. La ressource ainsi produite[13] (Coulange &

[10] Ainsi des élèves n'éprouvent pas lors d'une séquence observée la nécessité de plier une bande unité, étalon de longueur, pour mesurer la longueur des segments, sachant par ailleurs identifier et qualifier « la moitié » et même « le quart » de cette unité (voir contribution de Coulange et Train - GT6 du colloque).

[11] Que nous avons pris le soin de citer dans Coulange & Train (2017)

[12] http://www.imac.uji.es/CRDM/

Train 2017) nous paraît un support possible en vue d'aménager une vie à la fraction *commensuration* comme un préalable à la fraction *quotient* dont nous persistons à penser qu'elle recouvre des potentialités, comme celle déjà citée relative au produit de décimaux. Le scénario général s'articule autour du déplacement de robots sur une droite graduée en unités et organise l'étude et la caractérisation de la longueur des sauts des robots dans le but de les distinguer. Ce travail permet d'introduire une caractérisation fractionnaire des longueurs de sauts : *une longueur de saut de « 5 unités en 3 sauts » sera désignée* $\frac{5}{3}$. Ainsi, si $\frac{5}{3}$ est la longueur d'un saut, c'est bien que 3 sauts de longueur $\frac{5}{3}$ font 5 unités, se rapprochant ainsi de l'acception *quotient* de la fraction. Nous donnons ci-dessous un aperçu d'un épisode de classe lié à nos premières expérimentations, qui concerne une tâche de comparaison de fractions et qui nous paraît à même d'illustrer plus avant notre propos.

Lors de cet épisode de classe, il s'agit tout d'abord de comparer $\frac{7}{3}$; $\frac{9}{2}$; $\frac{17}{4}$. La technique formulée par un élève est celle de la mise au même dénominateur, technique construite et justifiée dans l'échange par le fait qu'à un même nombre de sauts, le robot ayant le saut le plus grand est celui qui ira le plus loin… *E : je les ai mis tous sur 12 [P : explique un peu] E : 7 sur 3 c'est pareil que 28 sur 12 parce que atteindre 7 en 3 sauts, c'est comme atteindre 28 en 12 sauts.* […] *E : j'ai fait pareil pour 9 sur 2 […] il atteint 36 en 12 sauts […] 9/2 c'est plus grand, il fait des sauts plus grands…* Lors de ce même épisode de classe, toujours en lien avec la comparaison de fractions, une autre technique est proposée par une autre élève pour comparer $\frac{7}{3}$ et $\frac{17}{4}$. Dans un premier temps, l'élève construit l'égalité $\frac{7}{3} = \frac{14}{6}$: *E : comme avec 3, on ne peut pas atteindre 4 en le multipliant, j'ai quand même multiplié par 2, ça fait 6 et j'ai aussi multiplié par deux 7, ça fait 14.* Dans un second temps, elle propose de comparer $\frac{14}{6}$ et $\frac{17}{4}$: *E : avec un plus grand nombre de sauts, on atteint une plus petite longueur, du coup, il est plus petit.* Autrement dit, ici, la technique mise en fonctionnement (et plutôt inédite) revient à dire que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ car $a < c$ et $b > d$. Nous poursuivons actuellement nos expérimentations dans différentes classes afin d'explorer les potentialités d'une telle approche et plus globalement de la fraction *quotient*, telle qu'elle nous parait devoir être mise à l'étude à l'entrée au collège.

III. EN GUISE DE CONCLUSIONS

Ce texte se veut une synthèse d'un certain de nombre de réflexions, abouties ou encore en chantier, et des résultats de nos recherches actuelles sur l'enseignement et l'apprentissage des nombres décimaux et des fractions à l'école et au collège. Ces contenus illustrent nous semble-t-il, assez bien ce qui parfois peut se jouer du point de vue d'une transition institutionnelle entre le primaire et le secondaire en France. Nous avons tenté de dégager d'un part des continuités à aménager à un niveau global, concernant l'enseignement de la numération décimale, en questionnant notamment le rôle du registre sémiotique des unités de numération dans l'enseignement des nombres décimaux. Nous avons également pointé des ruptures qui nous paraissent tout aussi nécessaires dans l'enseignement de nombres comme les fractions et des décimaux dans la transition école – collège.

D'autres questions plus indirectement liées aux contenus mais qui nous paraissent contraindre les situations d'enseignement et d'apprentissage de ces nombres dans cette transition institutionnelle, émergent également. Notamment la question des modes

[13] Disponible sur https://www.researchgate.net/project/Fractions-dans-la-transition-primaire-secondaire

d'interactions entre élèves ou entre élèves et enseignants, à l'oral, à l'écrit plus ou moins typiques d'une institution scolaire ou d'une autre (primaire ou secondaire) et qui participent à la construction ou aux usages de différents registres de représentations sémiotiques des nombres décimaux ou des fractions nous intéresse particulièrement.

Il s'agit peut-être dans certains cas de considérer également une autre transition, celle avec un monde plus extérieur à l'école. Dans le cas présent, s'agissant des fractions et des décimaux, cela peut revêtir une certaine importance, les élèves arrivant visiblement à l'école en ayant déjà rencontré et fréquenté des usages sociaux ou quotidiens du fractionnement de l'unité et de l'écriture décimale. Nous avons donné ci-avant quelques exemples liés à des connaissances d'élèves sur le « quart » ou la « moitié », visiblement présentes en amont de tout enseignement officiel des fractions. Dans une des classes observées au sein du LéA Carle Vernet, un scénario « *à l'envers* » s'est même joué à trois reprises autour de l'écriture décimale, introduite à l'initiative d'un (ou plusieurs) élève(s) sans avoir fait l'objet d'un enseignement préalable, et dont l'enseignante a choisi de construire la signification dans un « après coup »…

REFERENCES

Brousseau G., Brousseau N. (1987) *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*, IREM de Bordeaux.

Brousseau G. et Brousseau N. (2008) Atelier d'ingénierie et d'analyse des processus didactiques Rationnels et décimaux dans l'enseignement obligatoire. In Rouchier A. & Bloch I. (Eds.), *Perspectives en didactique des mathématiques*, La Pensée Sauvage.

Centre de Ressources de Didactique des Mathématiques – *Guy Brousseau*. http://www.imac.uji.es/CRDM/

Chambris C. (2008) Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Evolution de l'enseignement au cours du 20e siècle. Connaissances des élèves actuels. *Thèse de l'Université Paris-Diderot.*

Chambris C. (2010) Relations entre grandeurs, nombres et opérations dans les mathématiques de l'école primaire au 20e siècle : théories et écologie. *Recherches en didactique des mathématiques*. 30(3), 317-366.

Chambris C. (2014) *Contribution à propos de la numération décimale. Contribution aux travaux des groupes d'élaboration des projets de programmes C2, C3 et C4.* MEN.

Chambris C., Tempier F., Allard C. (2017) Un regard sur les nombres à la transition Ecole-Collège, *Repères IREM*, 108, 63-91.

Chesné J-F. (2017) Les évaluations externes des élèves en mathématiques : apports, enjeux et perspectives, In Lebot B. & Vandebrouck F. (Eds.), *Mathématiques en cycle 3 – Actes du colloque*, IREM de Poitiers, 59-72.

Coulange L., Train G. (2017) Continuités et ruptures de l'enseignement des fractions au cycle 3 - Quelles perspectives ? In Lebot B. & Vandebrouck F. (Eds.), *Mathématiques en cycle 3 – Actes du colloque*, IREM de Poitiers, 143-156.

Coulange L., Train G. (2015) *Quelle(s) extension(s) d'un système de numération des nombres entiers aux nombres décimaux ?* XXIIIe colloque de la CORFEM, Nîmes.

Duval R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 5, 37-65.

Duval R. (1994) *Sémiosis et pensée humaine, registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*, Peter Lang.

Tempier F. (2013) La numération décimale de position à l'école primaire : une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource. *Thèse de l'Université Paris Diderot.*

DES OUTILS POUR ANALYSER LA TRANSITION COLLÈGE-LYCÉE EN MATHÉMATIQUES

HOROKS[*] Julie – CHESNAIS[**] Aurélie

Résumé – Nous questionnons les pratiques enseignantes dans l'enseignement d'une même notion mathématique en classes de 3e et 2nde pour comprendre les difficultés des élèves dans la transition entre ces deux classes. Pour cela, nous présentons nos outils d'analyse des contenus, que nous illustrons sur la résolution de problèmes liés à la représentation graphique de fonctions, pour anticiper des différences de pratiques chez les enseignants des deux niveaux.

Mots-clefs : pratiques, activités, transition, registres, fonctions,

Abstract – We analyze teaching practices related to the same mathematical topic, in grades 9 and 10, to understand the possible difficulties for students in the transition between these two classes. To this end, we present our tools to analyze mathematical contents and tasks, which we illustrate on a task involving the graphical representation of functions, and try to anticipate some differences among practices of the teachers at both levels.

Keywords: practices, activity, transition, register, functions

Notre questionnement porte sur la transition, en France, entre le *collège* (élèves de 12 à 15 ans quatre niveaux de classes, le dernier étant la classe de 3e) et le *lycée* (élèves de 15 à 18 ans, trois niveaux, le premier étant la classe de 2nde) dans l'enseignement des mathématiques.

I. LA TRANSITION COLLEGE-LYCEE : UN MOMENT CLE POUR REVELER LES DIFFICULTES DES ELEVES

1. Notre constat de départ

Notre étude repose sur un constat de départ : les difficultés d'élèves de classe de 2nde (15-16 ans) à résoudre certaines tâches sur les fonctions impliquant le registre graphique, alors même que, selon les programmes scolaires actuels en France, ces tâches peuvent être traitées dès la classe de 3e. Nous interrogeons alors l'enseignement d'une même notion de part et d'autre de la transition, pour essayer de comprendre les écarts possibles et éventuels malentendus pour les élèves.

Ainsi, lors d'une réunion d'un groupe d'enseignants de 3e et de 2nde il y a quelques années, une vive discussion avait été engagée autour des difficultés des élèves des deux niveaux à résoudre un même type de tâche : dire si, une fonction étant donnée par sa formule algébrique, un point de coordonnées données appartenait ou non à la courbe représentative de la fonction. Les enseignants de 3e considéraient que cette tâche était très difficile pour leurs élèves, tandis que ceux de 2nde la considéraient comme une tâche simple et qui aurait dû être familière pour leurs élèves, mais qui pourtant leur posait généralement problème.

C'est en effet une tâche qui correspond aux attendus des programmes scolaires des deux niveaux, et qu'on trouve dans les manuels de 3e et de 2nde, mais qui n'est vraisemblablement pas considérée comme complexe en 2nde : elle n'apparaît souvent que de manière relativement « anecdotique », comme application directe de la définition de la courbe représentative d'une fonction. Ainsi, par exemple, dans le manuel Indice 2nde (2009) (p. 37) la réponse corrigée à la question « f est la fonction définie sur [0 ;3] par $f(x)=x^2-x-2$. […] le point A(2,25 ; 0,81) est-il

[*] Laboratoire de Didactique André Revuz – France – julie.horoks@u-pec.fr
[**] Laboratoire LIRDEF – France – aurelie.chesnais@umontpellier.fr

un point de [la courbe représentative de f] ? » est uniquement : « On a f(2,25)=0,8125 ; or 0,8125 ≠0,81. Le point A n'appartient donc pas à la courbe. » Notons que le manuel précise dans une bulle : « pour vérifier si le point de coordonnées (a ;b) appartient à la courbe, on compare b et f(a). »

Pourquoi ces difficultés pour les élèves, au collège comme au lycée ? Quels éléments, dans la transition 3^{e} / 2^{nde}, pour expliquer les différences d'attentes des enseignants des deux niveaux ?

Les moments de transition dans l'enseignement des mathématiques ont déjà été pointés par la recherche comme des moments de rupture, à la fois révélateurs et aggravateurs des difficultés des élèves. Leur étude a pour nous l'objectif de mieux comprendre ces écarts, en questionnant des différences entre les deux niveaux, pour aider les élèves et leurs enseignants à mieux appréhender ces passages.

2. Des pratiques enseignantes différentes de part et d'autre de la transition ?

Nous faisons l'hypothèse, confortée par le cas de la discussion reportée plus haut, que les pratiques des enseignants ne sont pas les mêmes de part et d'autre de ces transitions, mais que ces différences sont ignorées par tous, ou du moins minorées, et, par manque de communication, peu prises en compte dans l'enseignement, bien que ces enseignants aient eu, en France, un recrutement et une formation initiale identiques.

Nos hypothèses sur les apprentissages des élèves guident notre regard sur les pratiques. En nous appuyant sur la théorie de l'activité, élargie au champ de la didactique des mathématiques (Vandebrouck, 2016), nous considérons que les apprentissages des élèves se font, au moins en grande partie, à travers leurs activités mathématiques, elles-mêmes provoquées par les tâches proposées par les enseignants, et par les choix d'organisation de la résolution de ces tâches en classe.

Ces activités ne résultent cependant pas uniquement des intentions de faire apprendre les mathématiques aux élèves, mais sont aussi contraintes par d'autres dimensions du métier d'enseignant. Nous analysons les pratiques enseignantes dans le cadre de la Double Approche didactique et ergonomique des pratiques (Robert & Rogalski, 2002) qui distingue leurs différentes composantes. Ainsi, pour caractériser les pratiques nous prenons en compte non seulement les tâches proposées, et la gestion de leur déroulement en classe (composantes cognitive et médiative des pratiques) mais aussi des composantes externes aux contenus mathématiques, et qui relèvent du public concerné (composante sociale), de l'expérience de l'enseignant (composante personnelle) ou des programmes et instructions officielles (composante institutionnelle).

Pour le problème de transition qui nous intéresse, il est probable que la composante institutionnelle joue un rôle non négligeable, à travers les instructions officielles et en particulier leurs interprétations dans les ressources à la disposition des enseignants. En ce qui concerne le public d'élèves, une orientation est opérée entre la classe de 3^{e} et la classe de 2^{nde} générale, et les élèves les plus en difficulté peuvent être amenés à suivre une autre filière, ce qui amène peut-être les enseignants à penser que les élèves de 2^{nde} générale ont un bon niveau en mathématiques, qui est une matière sélective pour les élèves français. Tout cela a une influence potentielle sur ce que les enseignants choisissent pour leur classe, et donc sur les activités mathématiques qui peuvent en découler pour leurs élèves.

Pour approcher au plus près ces activités, aux deux niveaux de classe concernés, nous cherchons de quelle façon les notions mathématiques y sont mobilisées, et avons besoin pour

cela de mettre en relief les spécificités des contenus mathématiques sous-jacents, pour mieux anticiper les obstacles possibles pour les élèves, et la façon dont les enseignants les prennent ou non en charge.

II. AU CENTRE DE NOS ANALYSES DE LA TRANSITION : LES ACTIVITES MATHEMATIQUES POSSIBLES DES ELEVES

Pour un même contenu mathématique au programme de part et d'autre de la transition, nous nous demandons si les notions proposées sont identiques a priori pour chacune des deux classes, à travers une analyse épistémologique, institutionnelle et didactique des contenus. Nous interrogeons les niveaux de conceptualisation attendus des élèves à chaque niveau, constitués, d'après Robert (2003), par des fondements, explicites ou non, des définitions et théorèmes, modes de raisonnement, démarches, avec un certain niveau de rigueur, et les problèmes que cela permet de résoudre.

Nous présentons dans cette partie nos outils d'analyse des contenus et des tâches. Nous les illustrons sur le thème des fonctions du 1er degré, et plus particulièrement de la résolution de problèmes mettant en jeu leur représentation graphique.

1. Dans les programmes scolaires

Les programmes scolaires nationaux, obligatoires pour toutes les classes de l'enseignement général, nous renseignent en partie sur des potentielles différences dans les contenus enseignés.

Dans les deux cas, en 3e comme en 2nde, le thème des fonctions apparaît en premier dans les programmes[1] et on trouve à la fois l'apprentissage de généralités sur les fonctions (image, antécédent) et l'étude spécifique des fonctions du 1er degré (les seules évoquées en 3e). En 2nde se rajoutent donc d'autres types de fonctions (degré 2 ou homographiques) ainsi que plusieurs définitions et propriétés nouvelles relatives aux fonctions (domaine de définition, sens de variation), amenant par conséquent de nouveaux types de tâches. La définition de fonction n'est pas au programme de 3e, et elle y est présentée comme un *processus de correspondance*, laissant de côté les idées de dépendance ou de covariation des deux grandeurs en jeu (cf. René de Cotret, 1988).

Pour le type de problème qui nous intéresse, si l'ancien programme de 3e, en place jusqu'en 2015, mentionnait explicitement dans les capacités attendues : « *Connaître et utiliser la relation y=ax + b entre les coordonnées (x,y) d'un point M qui est caractéristique de son appartenance à la droite représentative de la fonction linéaire x→ax+b. »,* le programme en vigueur depuis 2016 mentionne uniquement le fait que les élèves « En 3e, […] font le lien entre forme algébrique et représentation graphique [d'une fonction]. » En 2nde, la notion de « courbe représentative » d'une fonction est mentionnée, avec la précision qu'il faut « […] apprendre aux élèves à distinguer la courbe représentative d'une fonction des dessins obtenus avec un traceur de courbe ou comme représentation de quelques données. », mais la caractérisation des points de la courbe par une relation de dépendance entre leurs coordonnées n'est pas mentionnée, et cela reste peu explicite en termes de types de tâches associés. En revanche, dans le domaine « géométrie », les programmes mentionnent la notion d'équation de droite, dont on peut penser qu'elle est précisément associée à la capacité à dire si un point

[1] Pour le cycle 4, incluant la classe de 3ème : http://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?cid_bo=94717
Pour la 2nde : http://cache.media.education.gouv.fr/file/30/52/3/programme_mathematiques_seconde_65523.pdf

appartient à une droite ou non. Le lien avec les fonctions affines est aussi explicitement indiqué : « Droite comme courbe représentative d'une fonction affine. » Il semblerait donc que le type de tâche qui nous intéresse peut légitimement être traité en troisième et en seconde, mais que le degré de précision des programmes ne permet pas d'assurer qu'il le soit, ni de quelle manière. La question est particulièrement vive en 2nde où il existe une grande variété d'organisations possibles d'une progression entre les contenus relevant des généralités sur les fonctions, des fonctions affines et des équations de droites (Cerclé et al., op. cité).

De manière générale, la question de la prise en compte, en 2nde, des connaissances plus anciennes intervenant dans les activités mathématiques mettant en jeu une notion nous paraît importante, ainsi que la reprise ou non de ces acquis, qui n'en sont peut-être pas, par les enseignants.

2. Le caractère outil/objet

Pour comprendre ce que pourraient être les activités des élèves sur les fonctions du 1er degré et leur représentation graphique dans ces deux classes, nous étudions les caractères outil et objet de cette notion, au sens de Douady (1992).

Du côté objet, la fonction n'est pas définie formellement en 3ème, mais on peut noter l'apprentissage d'un vocabulaire et d'un formalisme, et ce dans les différentes représentations possibles des fonctions. La question des registres de représentation sémiotiques (Duval, 1993) est fondamentale ici pour appréhender le concept de fonction, qui se décline dans plusieurs registres dès la classe de 3ème (voire avant) : algébrique (formule de la fonction), graphique (courbe représentative), numérique (programme de calcul, tableau de valeurs), fonctionnel (avec des notations propres aux familles de fonctions) entre autres. Chacun de ces registres rend explicites certaines des propriétés de l'objet représenté, avec des traitements plus ou moins coûteux, un formalisme et un vocabulaire spécifiques, dont la congruence, pour passer d'un registre à l'autre, ne va pas de soi (par exemple : « *la fonction f est positive » et « la courbe représentative de f est au-dessus de l'axe des x »*). Si on considère plus spécifiquement les droites représentatives de fonctions linéaires ou affines, il est pertinent de mentionner aussi le registre géométrique, dans lequel les droites ont des propriétés qui s'expriment encore différemment (position relative de deux droites, droites sécantes, perpendiculaires ou parallèles), et un registre analytique dans lequel les équations de droite rajoutent encore une nouvelle façon d'exprimer la fonction sous-jacente, ce qui n'est vraisemblablement pas clair pour les élèves (Cerclé et al, 2015).

Une autre dimension importante, pointée par Vandebrouck (2016), est l'articulation des différentes perspectives, c'est-à-dire les points de vue spécifiques adoptés dans le travail sur les fonctions, associées ici principalement à leurs propriétés ponctuelles et globales. La perspective ponctuelle, point par point, s'accompagne en particulier de la question de quantification qui l'accompagne, peu présente avant l'entrée au lycée, ce qui n'amène peut-être pas le lien avec la perspective globale. La question du statut de x est attachée aussi au travail entre ponctuel et global, tantôt nombre généralisé, tantôt variable, ou encore inconnue lorsqu'on cherche un point particulier sur une courbe.

Pour donner du sens au concept de fonction, le fait de pouvoir être amené à considérer cet objet dans sa globalité nous paraît pourtant être souhaitable. Or les occasions de le faire ne nous paraissent pas nombreuses (recherche d'extremum, passage de la courbe à la formule, appui sur les propriétés des familles de fonctions, opérations sur les fonctions) et a priori absentes des programmes de 3e. Nous questionnons alors le moyen de donner des raisons d'être aux fonctions au collège, autrement que comme objets d'étude, dans des tâches où des

outils issus de connaissances mathématiques préalables (algèbre, lecture graphique, proportionnalité, programmes de calcul) semblent suffisants pour résoudre.

Du côté outil par conséquent, nous nous demandons quels types de problèmes peuvent motiver l'introduction des fonctions, rendant d'autres procédures de résolution inefficaces. En dehors des problèmes d'optimisation, qui supposent un travail sur les variations de la fonction, il y a peu d'occasions d'en ressentir le besoin, ce qui laisse présager un manque d'activités de découverte réelle des fonctions.

Quelle est la variété et la complexité des tâches proposées aux élèves des deux niveaux ? Quels y sont les registres et les perspectives privilégiés ? Avec quelle articulation, et quelles initiatives pour les élèves ?

3. Les tâches

Nos outils pour analyser les tâches permettent de les catégoriser suivant plusieurs dimensions :

- les différentes connaissances mathématiques qu'elles font mobiliser dans leur résolution (et donc qu'elles font apprendre selon nous), donc ici les propriétés des fonctions ;

- la complexité de cette mobilisation, ou niveaux de fonctionnement (Robert, 1998), suivant que celle-ci se fait en appliquant directement une connaissance mathématique déjà abordée, ou, à l'opposé, nécessite une prise d'initiative pour reconnaître la connaissance à utiliser, et à faire des choix dans son application, que ce soit dans les étapes de la méthode de résolution, le registre pour la représenter, ou encore les autres notions à mobiliser conjointement.

Pour une même connaissance mathématique à mobiliser, on pourrait donc trouver les mêmes tâches en 3^{e} et en 2^{nde}, ou des tâches avec des adaptations différentes (en particulier en ce qui concerne l'articulation des registres), ou bien encore des tâches dont les énoncés sont très différents mêmes s'ils amènent à mobiliser les mêmes connaissances, par exemple des tâches nouvelles en 2nde (ou des tâches de 3ème qui sont abandonnées en 2nde).

Ainsi pour la tâche qui nous intéresse, il nous faut noter des points potentiellement délicats :

- En terme de perspective, on travaille ici sur du ponctuel, même si on questionne l'appartenance à une courbe, qui donne à voir un aspect global de la fonction, avec une équivalence pour tout point M de coordonnées (x;y) (y=f(x) si et seulement si M appartient à la courbe représentative de la fonction f), qui n'est peut-être pas étudiée « dans les deux sens » dans toutes les classes. Il y a probablement une difficulté à percevoir qu'un point de la courbe représentative d'une fonction porte plusieurs informations : ses deux coordonnées mais aussi la relation de co-variation qui existe entre les deux.
- Le fait de poser la question dans le registre graphique, faisant référence à la notion géométrique d'appartenance d'un point à une courbe / une droite, appelant une réponse dans le registre graphique aussi (le point de coordonnées données appartient-il à la courbe ?), ne donne pas d'indication sur le passage obligé par le registre algébrique pour résoudre (le registre graphique seul n'offrant a priori pas une précision suffisante pour y répondre). Le changement de registre n'est a priori pas indiqué, mais peut-être devenu « automatique » si la tâche a été répétée de nombreuses fois. Les élèves de 3ème sont-ils confrontés à une telle adaptation, avec un niveau de fonctionnement

relativement élevé, puisqu'il leur faut choisir, sans indication, le registre le plus approprié ?

4. Les activités possibles des élèves

Les activités mathématiques possibles des élèves en classe sont déterminées non seulement par les énoncés des tâches choisies par les enseignants, mais aussi par les déroulements associés, pendant lesquels les interventions des enseignants peuvent modifier les tâches prescrites, et probablement changer la nature des adaptations qu'elles supposaient a priori, selon le temps et les initiatives laissées aux élèves pour y travailler. Quelle est alors l'influence des contraintes institutionnelles (temps, programme) et de ce que l'enseignant pense que les élèves savent déjà, dans le fait de choisir de leur laisser ou non des initiatives ?

La quantité totale de tâches différentes possibles mobilisant les plus ou moins nombreuses connaissances mathématiques visées, semble beaucoup plus grande en 2nde qu'en 3e, si on étudie les manuels de chaque niveau. Cela nous amène à interroger la possibilité ou non de travailler chacune de manière répétée dans le cadre des horaires alloués à leur enseignement. On peut penser que le fait de proposer ou non des tâches répétitives aux élèves a une influence sur leur capacité à réussir ces tâches à nouveau par la suite, même si une automatisation de certaines tâches n'est pas forcément bénéfique (cf. par exemple Butlen, 2003, en calcul mental ou Dumail 2007 sur la racine carrée).

Qu'est-ce qui est alors proposé aux élèves pour à la fois relier ce grand nombre de tâches (entre elles et par rapport au cours) et pour tirer parti de chaque tâche traitée un petit nombre de fois pour généraliser ? Cela pose la question des proximités organisées par l'enseignant (Robert & Vandebrouck, 2010) entre le général et le contextualisé, et aux initiatives éventuellement laissées aux élèves dans ces proximités.

Cela pose aussi la question de ce qui est évalué par les enseignants, entre les objets du cours et les exercices associés, où les notions visées sont outils ou bien objets. En particulier quelle est la représentativité des tâches de l'évaluation par rapport à celles vues en classe auparavant, sachant que l'écart peut être plus ou moins grand suivant les enseignants (cf. Horoks 2006, Horoks & Pilet, à paraître). La question se pose d'autant que le nombre de types de tâches possibles est plus grand. Ainsi, si les évaluations sont révélatrices des difficultés des élèves, des différences potentielles dans les pratiques évaluatives des enseignants des deux niveaux seraient aussi responsables de ces difficultés.

III. EN CONCLUSION : DES PISTES METHODOLOGIQUES POUR DEBUSQUER DES ECARTS ENTRE 3E ET 2NDE

Pour la suite de notre étude, nous projetons, compte tenu des points soulevés, d'analyser :

- Des manuels de 3e et 2nde, dans les chapitres relatifs à la représentation graphique de fonctions du 1er degré, avec pour objectif de repérer les niveaux de mise en fonctionnement des connaissances mobilisées dans les exercices, et plus particulièrement les adaptations relatives aux registres de représentation des fonctions et équations de droites, et les occasions de rencontrer le concept de fonction dans une perspective globale, pour analyser les activités possibles offertes aux élèves des deux niveaux ;
- Des séances en classe, et en particulier des moments de résolution de tâches avec des choix à faire en ce qui concerne les registres, pour voir quelles initiatives sont laissées

aux élèves, et quel discours est tenu sur les objets de savoirs étudiés, en lien avec les activités mathématiques des élèves.

REFERENCES

Butlen, D., & Charles-Pézard, M. (2007). Conceptualisation en mathématiques et élèves en difficulté. Le calcul mental, entre sens et technique. Grand N, 79. 7-32

Cerclé, V., Chesnais, A., Gosselin, E., Leberre, J., Nyssen, L. (2015). Enjeux de logique et de raisonnement au croisement des cadres et des registres a propos des équations de droites. Colloque CORFEM 11-12 Juin 2015, Nîmes, http://www.univ-irem.fr/exemple/corfem/Actes_2015_06.pdf

De Cotret, S. R. (1988). Une étude sur les représentations graphiques du mouvement comme moyen d'accéder au concept de fonction ou de variable dépendante. *Petit x*, *17*, 5-27.

Douady, R. (1992). Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. *Repères Irem*, 6, 132-158.

Dumail, A. (2007). La racine carrée en troisième, des enseignements aux apprentissages. Mémoire de Master 2. *Cahier de Didirem, 57.*

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. In *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 5(1), 37-65.

Horoks, J., Pilet, J. (à paraître) Analyser les pratiques d'évaluation des enseignants de mathématiques. Dans Gueudet, G. (Eds), *Actes de l'école d'été de didactique des mathématiques, août 2015*, Brest. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Horoks, J. (2006). *Les triangles semblables en classe de seconde: des enseignements aux apprentissages-études de cas* (Thèse de doctorat, Université Paris 7).

Robert, A., & Vandebrouck, F. (2014). Proximités-en-acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves: analyses de séances sur des tâches complexes. Cahiers du Laboratoire de Didactique André Revuz, 10.

Robert, A. (2003). Un point de vue sur les spécificités du travail géométrique des élèves à partir de la classe de quatrième : l'organisation de la connaissance en niveaux de conceptualisation, *Petit x*, 63, 7-29

Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 18(2), 139-190.

Robert, A., & Rogalski, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques: une double approche. *Canadian Journal of Math, Science & Technology Education*, *2*(4), 505-528.

Vandebrouck F. (2016) Activity theory in French Didactic Research, 13th International Congress on Mathematical Education, Conférence invitee, Hamburg, 24 - 31 July 2016

Vandebrouck, F. (2011). Perspectives et domaines de travail pour l'étude des fonctions. In *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, 16, 149-185.

L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE DANS LA TRANSITION COLLÈGE-LYCÉE

MRABET* Slim

Résumé – Dans ce travail, nous tentons d'étudier les choix didactiques faits actuellement dans l'enseignement de la géométrie, et la façon dont les thèmes enseignés sont découpés et répartis, notamment dans la transition collège-lycée. A partir de l'analyse d'un thème spécifique de cette période dans les systèmes d'enseignement tunisien et français, nous nous interrogeons sur les conséquences didactiques de nos choix, sur l'apprentissage des élèves.

Mots-clefs : Transition, géométrie, théorème de Thalès, vecteurs, proportion

Abstract – In this work, we try to study the didactic choices made at present in the teaching of the geometry, and on the way the taught themes are cut and distributed, in particular in the transition college - high school. From the analysis of a specific theme of this period, in the Tunisian and French teaching systems, we wonder about the didactic consequences of the choices which we make, for the learning of the pupils.

Keywords: Transition, geometry, Thales theorem, vectors, proportion

I. INTRODUCTION

Nous partons de la conviction que les choix que nous faisons actuellement dans l'enseignement des mathématiques constituent un moment propice pour analyser des problèmes liés à l'enseignement. Un ensemble d'interrogations s'impose concernant les choix didactiques faits actuellement dans l'enseignement de la géométrie, le lien entre mathématiques et réalité physique, le rapport entre espace mathématique et espace empirique, la répartion des thèmes de géométrie enseignés actuellement et l'évolution dans la construction des connaissances. Sur quel *savoir savant* s'appuie-t-on dans l'enseignement de la géométrie ? Et à quel *savoir enseigné* est-on parvenu ? (Chevallard, 1989)

Plus précisément, on pourra s'interroger sur la façon dont la transition entre diffférentes géométries est négociée dans l'enseignement actuel, et si dans ce passage, il y a un changement dans le statut, le rôle et l'importance de la figure.

Dans le présent travail, nous avons l'ambition de donner quelques éléments de réponse à ces questions, et d'étudier les conséquences qui en découlent sur l'apprentissage des élèves.

I. LES GRANDS DOMAINES DE LA GEOMETRIE

Une étude de certains traités historiques et de l'histoire de l'enseignement des mathématiques en Tunisie ou ailleurs que nous avons menée dans notre thèse de doctorat (Mrabet, 2010) nous a permis de fixer trois grands domaines de la géométrie :

1. La géométrie élémentaire

Les *Eléments* d'Euclide constituent un moment important de l'évolution de la géométrie. Dès l'Antiquité, ils étaient considérés comme un moyen de rompre avec l'appréhension perceptive dominante à ce moment. La géométrie d'Euclide et de ses successeurs est basée sur la mesure des grandeurs géométriques à travers des figures. C'est une science où les figures, situées dans un plan ou dans l'espace, occupent une place centrale. Chez Euclide, les figures apparaissent figées et ne peuvent qu'être découpées, superposées ou reconstruites.

* Université de Carthage – Tunisie – mrabet_slim@yahoo.fr

L'un des principes forts de la géométrie chez Euclide est le principe de l'égalité par superposition. Euclide énonce parmi ses axiomes ce qui suit : "Et les choses qui s'ajustent les unes sur les autres sont égales entre elles.". Cette condition d'égalité qui fait appel au mouvement, celui de la superposition, fixe des critères d'égalité à partir desquels le mouvement des figures n'est plus utile. En effet, la démonstration du premier cas d'égalité des triangles utilise le mouvement à partir du principe de l'égalité par superposition. L'énoncé de ce premier cas d'égalité permet de se débarrasser par la suite du mouvement.

Cette géométrie est également caractérisée par la prédominance du raisonnement qui l'emporte sur l'aspect calculatoire, et l'un de ses objectifs est d'établir des relations entre les figures semblables (du plan ou de l'espace) et des proportions.

2. La géométrie des transformations

A partir de l'idée de déplacement, l'étude des relations entre les figures de l'espace a conduit progressivement à la notion de transformation, qui étudie les figures et surtout les relations entre ces figures.

Nous pouvons dire qu'une différence essentielle entre la géométrie élémentaire et la géométrie des transformations réside dans le changement d'appréhension de la figure : dans la géométrie classique**,** nous regardons les figures comme étant des surfaces et nous les comparons en comparant leurs éléments (angles, côtés), mais ces figures sont statiques. La géométrie des transformations met en avant les droites et les points par rapport aux surfaces et favorise le mouvement et le transfert de propriétés entre des figures. Chasles (1889) définit ce point de vue comme permettant de retrouver les propriétés caractéristiques d'une figure de départ par application d'une transformation :

> « Qu'on prenne une figure quelconque dans l'espace, et l'une de ses propriétés connues ; qu'on applique à cette figure l'un de ces modes de transformations, et qu'on suive les diverses modifications ou transformations qui éprouvent le théorème qui exprime cette propriété, on aura une nouvelle figure et une propriété de cette figure qui correspond à celle de la première » (p. 268).

3. La géométrie analytique

Dans le cadre analytique, la signification des transformations peut être occultée par des propriétés où la puissance du calcul remplace les configurations. Les traités de Choquet (1964) et de Dieudonné (1964) montrent la puissance de l'aspect calculatoire dans la résolution des problèmes de géométrie, qui l'emporte sur le raisonnement sur les figures. Dans son traité, Dieudonné mène une comparaison entre la géométrie basée sur l'algèbre linéaire, proche de la géométrie analytique et la géométrie traditionnelle :

L'algèbre linéaire permet, à partir d'axiomes extrêmement simples, d'avoir des résultats importants par un calcul concis et précis. La géométrie traditionnelle part d'axiomes compliqués. Dans la résolution de problèmes, elle fait un détour pour ramener le problème à un cas d'égalité ou de similitude de triangles.

L'algèbre linéaire retrouve tous les résultats de la géométrie classique rapidement et rigoureusement. Elle peut être enseignée à tous les élèves compte-tenu de la simplicité des notions d'espace vectoriel et d'application linéaire.

Contrairement à sa réputation d'être une science abstraite, les possibilités d'avoir des objets représentables à chaque étape permettent de mettre l'accent sur la pratique des graphiques vu leur importance dans plusieurs domaines. La géométrie traditionnelle ne sert qu'aux futurs professeurs de mathématiques. Ses systèmes sont tellement complexes que l'on

ne peut les enseigner qu'à des spécialistes. Ceci n'est pas la mission de l'enseignement secondaire, puisque les élèves qui seraient des spécialistes ne forment qu'une minorité de l'ensemble total des élèves.

L'algèbre linéaire traite séparément, dès le début, les propriétés de nature « affine » et celles de nature « métrique » ainsi que leurs conséquences. La géométrie traditionnelle a l'inconvénient de mettre au même niveau deux notions de natures différentes : le parallélisme et la perpendicularité.

Le travail de Rauscher (1994) indique que l'enseignement de la géométrie passe par trois stades différents :

- La géométrie d'observation : c'est la géométrie réservée au primaire. Elle se base sur le visuel et sur les mesures effectuées sur les dessins comme moyens de validation et donne donc au dessin le statut de preuve.

- La géométrie de traitement commence en début de collège et constitue réellement la transition entre la géométrie d'observation et la géométrie déductive. Dans cette période, l'élève est initié à distinguer entre les informations qui définissent une situation et celles qui en résultent, et à effectuer le passage d'un registre à l'autre (texte, figure, codages, symboles…).

- La géométrie déductive qui apparaît en fin de collège et prend appui sur le raisonnement déductif. L'élève est appelé à faire l'articulation entre différents registres d'expression mathématique que ce soit à l'écrit ou à l'oral : des allers-retours entre le texte et le dessin.

Le passage à la géométrie basée sur l'algèbre linéaire doit se faire avec prudence: la puissance du calcul vectoriel occulte le rôle des figures et constitue une rupture avec la géométrie enseignée pour plusieurs années.

II. PROGRESSION DANS L'ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE

1. La géométrie au collège

La géométrie d'Euclide nous paraît la plus pertinente pour les élèves du collège, pour les raisons suivantes :

- Il s'agit de permettre aux élèves de déterminer la signification des objets géométriques et de leurs propriétés à partir de la perception sensible, que les géométries analytique et des transformations vont permettre d'expliquer et d'approfondir.

- Elle permet de travailler sur des figures simples, d'étudier les propriétés communes de ces objets, puis progressivement, l'accession de ces propriétés au statut de théorèmes.

- Elle contribue à l'apprentissage de la démonstration par des raisonnements simples.

La construction d'Euclide, qui passe rapidement d'une perception pragmatique à un développement théorique, correspond à l'acquisition des connaissances géométriques chez les élèves du collège, et à l'évolution du descriptif sensible au théorique. Un exemple qui illustre bien ce passage est le premier cas d'égalité des triangles.

Une question se pose : quelle progression cohérente entre la géométrie élémentaire et les transformations ?

On peut chercher au collège une conception de la notion des transformations cohérente avec le cadre euclidien : **on ne considère les transformations que par leur action sur les figures et non pas sur l'espace tout entier.** En particulier, une transformation agit sur les

points situés sur des lignes ou définis par leur intersection, mais pas sur des lignes comme des ensembles de points. Même si les transformations s'appliquent à des points, ceux-ci devraient être considérés comme des objets géométriques faisant partie de figures (comme extrémités de lignes) et non comme constituants élémentaires de figure.

2. La géométrie au lycée

Au lycée, on peut considérer les transformations opérant sur des figures comme une application du plan dans lui-même, qui opère sur des points puis plus généralement et globalement sur des figures

Ce choix est appuyé par le fait que la notion de « fonction » n'apparaît aux élèves qu'en première année du lycée, par les fonctions linéaires et les fonctions affines, et ainsi, on peut passer à l'idée qu'une transformation associe à tout point du plan un point du plan bien déterminé.

La transition collège lycée pourrait être accompagnée d'un changement dans la conception des transformations : l'élève passera d'une transformation opérant sur des figures à une application du plan dans lui-même qui opère sur des points puis plus globalement sur des figures. Ce passage constitue une rupture épistémologique certaine.

III. DISTINCTION : DESSIN-FIGURE EN GEOMETRIE

Le dessin désigne l'objet concrètement tracé sur une feuille de papier alors que la figure appartient au monde de la géométrie dont le dessin n'est qu'une représentation ou encore une matérialisation sur le papier, sur le sable ou sur l'écran de l'ordinateur. Lorsque deux dessins diffèrent par une mobilisation de certaines variables, la non abstraction par l'élève de l'objet théorique auquel renvoient ces dessins peut lui donner l'illusion de l'existence de deux figures différentes (Duval, 1994).

Le changement du statut du dessin vers celui de la figure, qui est une rupture épistémologique, constitue une réelle difficulté dans l'enseignement et l'apprentissage de la démonstration: les élèves ne sont pas prêts à réorganiser leur pensée sur la base des notions abstraites. En même temps, parfois, les enseignants inconcients de cette rupture ne peuvent pas mener un discours explicite pour expliquer ce statut de la figure.

IV. ETUDE D'UN EXEMPLE : LE THEOREME DE THALES

1. Le théorème de Thalès dans l'enseignement tunisien

- Dans l'enseignement tunisien, les trois domaines: géométrie élémentaire, géométrie des transformations et géométrie analytique coexistent au collège et au lycée.

- En 7e et 8e de base[1], utiliser les transformations dans certaines séquences déductives est d'un niveau cognitif élevé pour des enfants de 13 - 14 ans. On pourra remarquer ceci dans certains exemples : les élèves sont plus à l'aise dans l'utilisation du théorème de Thalès appliqué dans un triangle qu'avec l'approche « projection », dans une figure formée de « parallèles et séquentes ».

- En 8e de base, on introduit la symétrie centrale simultanément par ses caractères fonctionnel et global.

[1] Première et deuxième année du collège, élèves de 13 à 14 ans.

- Au lycée, le passage au vectoriel occulte le travail de la géométrie élémentaire, et le recours à la figure est rare.

Pour analyser de près la problématique du passage au vectoriel, nous avons proposé à trois classes de 2ème S (en Tunisie)[2] et à trois classes de 2nde (en France) un test sous deux versions : l'une avec distances, l'autre avec vecteurs. Les deux versions du test proposé ne diffèrent que du point de vue de la forme des énoncés. Les figures étant les mêmes, nous pouvons donc lier les différences éventuelles dans les réponses des élèves à l'influence du type d'énoncé utilisé qui dépend lui-même du programme de chaque pays.

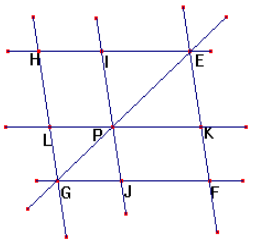
L'objectif principal de ce test est donc de répondre aux interrogations suivantes : existe-t-il une rupture chez les élèves, entre les deux formes possibles du théorème de Thalès. Ce théorème, le plus souvent rencontré dans sa présentation utilisant des distances, est-il reconnu dans les situations vectorielles ?

Énoncé 1 (test B, avec distances)

Dans la figure ci-contre, EFGH est un parallélogramme,

les droites (KL) et (FG) sont parallèles, les droites

(IJ) et (EF) sont parallèles.



Le point P est tel que EP = 3/5 EG

1) Exprimer EP à l'aide de PG

2) Trouver un réel m tel que PI = m PJ

3) Montrer que PK = m PL

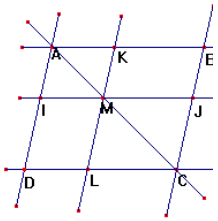
4) En déduire que les droites (IK) et (JL) sont parallèles.

Énoncé 2 (test A, avec vecteurs)

Dans la figure ci-contre, ABCD est

un parallélogramme, les droites (KL) et (BC) sont

parallèles, les droites (IJ) et (AB) sont parallèles.



Le point M est tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$

2) Trouver un réel a tel que $\overrightarrow{MI} = a\overrightarrow{MJ}$

3) Montrer que $\overrightarrow{MK} = a\overrightarrow{ML}$

4) En déduire que les droites (IK) et (JL) sont parallèles.

Précisons d'abord le choix des moments de la passation des tests. Nous avons fait en sorte de neutraliser autant que possible l'effet des thèmes de géométrie que les élèves ont étudiés durant l'année du test et les années précédentes. Pour que les élèves soient dans des conditions aussi proches que possible, nous avons choisi de placer ce test après les leçons sur le théorème de Thalès et les vecteurs, qui diffèrent en quelques points dans les deux systèmes, et avant l'introduction de l'homothétie et du barycentre. Pour les classes tunisiennes le test a été fait au mois de février 2007, les classes françaises un mois après.

[2] 2ème année du lycée, élèves de 14 à 15 ans.

Consultons les entretiens que nous avons tenus avec les enseignants des classes visitées dans le but d'éclairer les pistes que les élèves pourraient suivre dans leurs réponses, auxquels nous avions posé la question suivante :

« Est-ce que vous vous attendez à une (ou à des) différence(s) dans la manière de résoudre les exercices du test A et du test B ? Si oui, préciser laquelle (lesquelles), si non, préciser ce qui vous fait penser qu'il n'y a pas de différence ».

Les remarques suivantes apparaissent à travers leurs réponses :

- Tous les enseignants (des deux pays) ont prévu que les élèves réussiraient plus facilement la version « distance », la version « vecteur » risquant de les désorienter.

- Les enseignants tunisiens pensent qu'il serait difficile aux élèves de reconnaître une situation de Thalès utilisant les vecteurs, et qu'ils s'engageront dans un calcul vectoriel en utilisant la relation de Chasles. Un enseignant précise que : Il leur est difficile d'appliquer le théorème de Thalès avec des parallélogrammes. La version « vecteur » sera complètement ratée. Chez les élèves, le théorème de Thalès ne sera pas reconnu avec les vecteurs ».

Un enseignant français fait la même remarque et ajoute qu'en l'absence d'un énoncé vectoriel du théorème de Thalès, les élèves ne seront pas en mesure de produire des démonstrations commodes et rigoureuses.

Une deuxième question a été posée aux enseignants :

« Quelles procédures, propriétés utilisées, difficultés et erreurs, attendez-vous dans chacune des deux versions du test ? »

Dans leurs réponses, les enseignants tunisiens prévoient des erreurs dans la version « distance » dans le choix des rapports (rapports faux) dus à un mauvais choix de figure. Ils prévoient aussi beaucoup de non réponses dans la version vectorielle.

Les deux enseignants français s'accordent autour d'une même idée : dans la version vectorielle, certains élèves peuvent donner des démonstrations hybrides où ils mêlent les calculs avec distances et avec vecteurs. Certains types d'erreurs dans ce sens sont cités comme exemple : l'utilisation de la colinéarité des vecteurs, avec des justifications de type Thalès classique, ou des égalités de type : un vecteur = un nombre.

L'un de ces deux enseignants prévoit deux types de réponses :

- Le passage à Thalès classique par l'utilisation des critères de : direction, sens et norme.

- Une utilisation intuitive et non justifiée de Thalès vectoriel.

2. Les résultats du tetst obtenus :

Des points communs

- L'énoncé Thalès-vectoriel n'est pas disponible chez les élèves. Pour les élèves tunisiens ou français, cet énoncé n'est pas cité dans les programmes comme objet d'enseignement. Dans le manuel tunisien[3] de 2ème S, une petite place lui est accordée.

- Dans les deux pays, la version « distance » permet d'avoir un taux de réussite plus élevé que la version vecteur. Avec les vecteurs, les élèves font plus d'erreurs de types divers.

- L'intuition chez quelques élèves tunisiens et français leur a permis d'« inventer » le Thalès-vectoriel sans mettre la réponse sous le titre du « théorème de Thalès ».

[3] En Tunisie, il existe un seul manuel scolaire officiel pour chaque niveau.

- Dans la version « distance », les élèves font des tentatives de passage des écritures « linéaires » aux rapports de distances, mais ils se confrontent à un passage auquel ils ne se sont pas habitués, avec deux écritures littérales : l'une de type $\mathrm{AM} = k\mathrm{AB}$, l'autre de type $\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}} = k$. Remarquons que dans les manuels tunisiens ou français, les écritures sous forme de proportion sont les plus fréquentes dans les applications liées au théorème de Thalès. Nous pensons, avec Cousin-Fauconnet (1995), qu'il faudrait initier les élèves, dans l'apprentissage du théorème de Thalès, à passer de l'écriture de type $\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}} = k$ à l'écriture de type $\mathrm{AM} = k\mathrm{AB}$ dans le but de les préparer à l'arrivée des vecteurs.

Des points de différence

- En Tunisie, dans la version « vecteur », beaucoup d'élèves ne donnent pas de réponse. Certains élèves tentent de donner une réponse et s'engagent dans un calcul vectoriel en utilisant la relation de Chasles, sans reconnaître qu'il s'agit d'une situation de Thalès. Ils font des erreurs de type : produit ou quotient de deux vecteurs

- En France, les élèves tentent de donner une réponse dans la version « vecteur » et font des erreurs de types divers. Ils utilisent rarement le calcul vectoriel à la place du théorème de Thalès et font surtout des erreurs dans le passage des proportions à l'écriture linéaire. La forme vectorielle du théorème de Thalès permet de passer d'une égalité du produit d'un vecteur par un réel à une égalité analogue en considérant les vecteurs images par projection, se réduit chez les élèves à retrouver à partir d'une écriture de type $\mathrm{AM} = k\mathrm{AB}$, déduite de l'énoncé, une écriture de type $\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}} = k$ qui leur est plus familière.

V. CONCLUSION

Dans les systèmes tunisien et français, le passage de la géométrie classique à la géométrie vectorielle est supposé comme allant de soi. Avec l'arrivée des vecteurs, l'algébrisation de la géométrie rend peu utile le recours à la figure et aux théorèmes importants du collège dont celui sur le théorème de Thalès sous sa forme classique. La transition entre deux domaines de la géométrie: la géométrie ponctuelle et la géométrie vectorielle est passée sous silence. L'exemple du théorème de Thalès a montré l'insuffisance des connaissances que les élèves ont dans sa version classique pour traiter des situations qui relèvent du vectoriel. Ceci nous renvoie à la question plus générale : en 1ère S, le terrain est-il bien préparé pour l'arrivée des vecteurs ? Comment est négocié le passage de la géométrie classique, qui domine au collège, au cadre vectoriel ? Avec ses différentes approches, il nous semble que le théorème de Thalès est un outil propice pour assurer cette transition.

REFERENCES

Chasles M. (1889), *Aperçu historique des méthodes en géométrie*, ed. Gauthier- Villars, Paris.

Chevallard Y. (1989), Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel. Acte du Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique, n° 108, Université Joseph Fourier-Grenoble I.

Choquet G. (1964), L'enseignement de la géométrie, Hermann, Paris.

Cousin-Fauconnet A. (1995), Enseigner la géométrie au collège, Armand Colin.

Dieudonné J. (1964), Algèbre linéaire et géométrie élémentaire, Hermann.

Duval R. (1994), Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. Repère-IREM n°7. Topiques édition. Pont – à – Mousson.

Euclide, Les œuvres d'Euclide. Traduites littéralement par F. Peyrard. Nouveau tirage argumenté d'une importante introduction par M. Jean Itard. Librairie Scientifique et Technologique Albert Blanchard. Paris, 1993.

Mrabet S. (2010), « Le théorème de Thalès dans l'enseignement tunisien : conceptions et pratiques des élèves, pratiques des enseignants », Thèse de doctorat, Université Virtuelle de Tunis, Université Paris Diderot (Paris 7).

Rauscher J.C. (1994), Les enjeux de l'enseignement de la géométrie au début du collège et leur prise en compte par les professeurs in 20 ans de didactique des mathématiques en France, Editions la Pensée Sauvage

FACTEURS DE COMPLEXITÉ DES MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES

NAJAR* Ridha

Résumé – Dans cet article, nous étudions l'effet des changements qui se produisent en mathématiques lors du passage du secondaire au supérieur. L'analyse des réponses d'étudiants entrant à l'université à un test d'évaluation, fait état de difficultés persistantes et d'obstacles dans la mise en œuvre des connaissances apprises. L'article envisage de caractériser ces difficultés et de déterminer les besoins d'apprentissage pouvant les atténuer.

Mots-clefs : rupture, abstraction, formalisme, praxéologie mathématique.

Abstract – In this article, we study the effect of the changes that occur in mathematics during the transition from high school to university. The analysis of the responses of students entering the university to an evaluation test, reveals persistent difficulties and obstacles in the use of the knowledge learned. The paper considers characterizing these difficulties and identifying learning needs that can mitigate them.

Keywords: rupture, abstraction, formalism, mathematical praxeology.

I. INTRODUCTION

Les mathématiques enseignées dans les filières scientifiques spécialisées du supérieur ont toutes les caractéristiques des mathématiques savantes : concepts abstraits, raisonnement logique, développement axiomatique et formel. Les étudiants poursuivant leurs études dans ces filières sont généralement « choqués » par ce changement brutal de la discipline par rapport à ce qu'ils se sont habitués à voir et à étudier avant en mathématiques. Malgré leurs efforts pour acquérir les nouveaux modes de travail et réussir cette « nouvelle » matière, beaucoup d'étudiants, attachés à « des façons de faire » et à des habitudes longuement apprises au secondaire, se trouvent désarmés devant cette transition brutale. Cette situation nous conduit à nous interroger sur les facteurs à l'origine de la complexité des mathématiques supérieures, et sur les besoins d'apprentissage en résultant.

II. PROBLEMATIQUE ET CADRE THEORIQUE

Nous considérons que la complexité des mathématiques enseignées n'y est pas intrinsèque, elle décrit plutôt le rapport de compréhension de l'apprenant vis-à-vis la discipline. Ce rapport se trouve étroitement lié à la formation institutionnelle préalable, qui détermine, pour une bonne part, les possibilités de réussite de l'étudiant dans la matière. Ce faisant, nous adoptons l'approche anthropologique (Chevallard 1998) pour chercher ce qui, dans les choix institutionnels d'enseignement se trouve à l'origine de la complexité des mathématiques enseignées au supérieur. Des recherches antérieures ont ciblé trois composantes particulières des mathématiques supérieures qui pourraient engendrer cette complexité : la nature abstraite des objets mathématiques (Chin et Tall 2002), le formalisme mis en œuvre dans les énoncés mathématiques (Dorier 1997, Durand-Guerrier V. Arsac G. 2003), et les praxéologies mathématiques composant ces énoncés (Bosch 2004). La première composante renvoie au mode de construction axiomatique et formel des objets mathématiques, le formalisme se réfère au langage symbolique et aux règles de logique utilisés dans les développements mathématiques, quant à la troisième composante, elle concerne la complétion des praxéologies mathématiques construites, leur possibilité d'intégration, ainsi que les rôles joués par leurs composantes (tâches, techniques, technologies, théories).

* Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue – Canada – ridha.najar@uqat.ca

Concernant cette troisième composante, Bosch, Fonseca et Gascon (2004) expliquent les difficultés en mathématiques qui surgissent à l'entrée de l'université par le fait que les praxéologies mathématiques (PM) enseignées au secondaire sont généralement ponctuelles, rigides et peu coordonnées entre elles, ce qui rend difficile à l'université, voire empêche les étudiants, de travailler sur les praxéologies mathématiques locales (PML), ou régionales, relativement complètes enseignées. Pour justifier ce point de vue, les auteurs postulent l'existence d'indicateurs caractéristiques du degré de complétude d'une PML, que nous résumons dans les points suivants :

i_1) Intégration des types de tâches composant la PML, soit par un discours technologique, soit par le développement successif des techniques associées.

i_2) Existence de techniques alternatives associées aux types de tâches des PML et présence d'éléments technologiques permettant de questionner ces techniques et d'effectuer un choix approprié parmi plusieurs techniques pour réaliser une tâche donnée.

i_3) Indépendance des techniques par rapport aux objets ostensifs et importance du choix et de la gestion des ostensifs dans la réalisation de la tâche donnée.

i_4) Existence de techniques réversibles permettant de résoudre une tâche et la tâche inverse.

i_5) Possibilité d'interpréter le fonctionnement des données et/ou des techniques.

i_6) Existence de tâches mathématiques ouvertes, où les données, les inconnues et/ou le mode de raisonnement à adopter ne sont pas préétablis ou indiqués.

i_7) Incidence des éléments technologiques associés aux PML sur la pratique mathématique, comme la génération de nouveaux types de tâches et de techniques (par le biais, entre autres moyens, d'un changement de cadre de travail ou de système de représentation sémiotique).

Utilisant ces indicateurs, nous avons étudié dans (Najar 2015) les rapports aux notions ensemblistes fonctionnelles des institutions enseignement secondaire (ES) et première année des classes préparatoires scientifiques (CPS1) en Tunisie. Cette étude fait état d'une rupture et de dysfonctionnement institutionnels lors du passage de ES aux CPS1. Elle montre que dans les CPS1, l'environnement praxéologique relatif à l'enseignement des notions ensemblistes fonctionnelles est dominé par des PML relativement complètes, et que le savoir en jeu fonctionne essentiellement au niveau formel-structural. D'un autre côté, dans ES, l'étude montre que le fonctionnement des connaissances dans le topos des élèves est de niveau technique-procédural et que l'environnement praxéologique est dominé par des PM ponctuelles (PMP) et isolées, dont la mise en œuvre est axée essentiellement sur le bloc pratico-technique, et dont le matériel technologique joue un rôle négligeable dans le travail donné aux élèves. Cette situation semble être à l'origine de difficultés et d'obstacles d'apprentissage pour les étudiants entrant en CPS1. Notre travail dans cet article envisage de caractériser ces difficultés et de voir s'il y a un rapport entre ces difficultés et les choix d'enseignement dans les institutions ES et CPS1.

III. METHODOLOGIE

Pour répondre à notre questionnement, nous analysons les réponses de deux classes d'étudiants des CPS1 à un exercice extrait d'un test d'évaluation. Notons que dans les CPS1, les mathématiques constituent la matière d'enseignement de base[1], et les étudiants sont généralement fortement investis dans le projet de formation de leur institution. Cela suppose une limite de l'effet des caractéristiques personnelles des étudiants (p. ex., manque de travail ou d'intérêt pour la matière) et permettra, de ce fait, de différencier ce qui relève réellement

[1] Les étudiants font 12 heures de mathématiques par semaine durant toute l'année universitaire.

des choix et des contenus d'enseignement, de ce qui relèverait d'apprentissages normalement attendus des étudiants, mais non réalisés.

Nous situant dans ce contexte, notre travail comprend deux parties. Dans la première, nous réalisons une analyse a priori de l'exercice du test pour décrire les caractéristiques des mathématiques enseignées. Cette analyse se fera par rapport aux trois facteurs présentés dans le cadre théorique : nature des objets mathématiques en jeu, langage formel à mettre en œuvre et complétude des PM intervenant dans la réalisation des tâches. Dans la deuxième partie, nous analysons les réponses des étudiants aux questions de l'exercice, en vue d'identifier, parmi les caractéristiques déterminées dans la première partie, les facteurs de complexité qui sont à l'origine des difficultés qu'éprouvent les étudiants.

IV. TEST D'EVALUATION

Le test est soumis à 43 étudiants des CPS1. Il entre dans le cadre d'une évaluation sommative ordinaire donnée dans le courant du deuxième trimestre de l'année universitaire. Durant la période qui a précédé le test, les étudiants ont étudié dans le cours d'algèbre les thèmes sur : les ensembles et les applications, les structures algébriques, les espaces vectoriels et les applications linéaires, les espaces vectoriels de dimensions finies et les matrices. De ce fait, les étudiants sont supposés être familiarisés avec les notions en jeu dans le test ainsi qu'avec les types de tâches donnés.

1. Analyse a priori

L'analyse a priori vise à caractériser les mathématiques enseignées dans les CPSI. Nous nous référons pour cela aux trois facteurs décrits dans le paragraphe III : la nature des objets mathématiques en jeu, la complétion des PM intervenant dans la résolution et le formalisme à mettre en œuvre pour la réalisation des tâches données.

L'exercice porte sur les notions d'injection et de surjection dans le contexte des morphismes d'espaces vectoriels de matrices. Nous nous limitons dans cette analyse à la question 3-b. Toutefois, dans notre conclusion, nous tenons compte des réponses des étudiants à toutes les questions de l'exercice.

L'exercice : On désigne par $M_n(\mathbb{C})$ *l'espace vectoriel sur* $\mathbb{C}$ *des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes. Soit A une matrice de* $M_n(\mathbb{C})$ *et considérons l'application*

$f_A : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$

$M \longmapsto AM - MA$

1) Montrer que f_A *est une application linéaire.*

2) En déduire que l'ensemble F des matrices M de $M_n(\mathbb{C})$ *vérifiant MA = AM est un sous-espace vectoriel de* $M_n(\mathbb{C})$.

3) a- Calculer $f_A(I_n)$*, où* I_n *désigne la matrice unité de* $M_n(\mathbb{C})$.

b- Existe-t-il des matrices A de $M_n(\mathbb{C})$ *telles que* f_A *soit injective?*

c- Existe-t-il des matrices A de $M_n(\mathbb{C})$ *telles que* f_A *soit surjective?*

L'exercice étudie des propriétés d'une application f_A paramétrée à l'aide d'une matrice *A*. La distinction entre les statuts du paramètre *A* et de la variable *M* est essentielle pour répondre aux questions de l'exercice. Les questions 1 et 2 sont fermées et peuvent être considérées comme routinières dans les CPS1. De même pour la question de calcul 3-a. Les questions 3-b et 3-c sont ouvertes et sont susceptibles de diverses formulations dont dépend le choix des techniques de résolution. La question 3-b fait intervenir les notions de matrice, d'application

linéaire entre espaces vectoriels, et d'injection. Il s'agit de trois notions abstraites, définies et étudiées dans les CPS1 de façon axiomatique formelle.

Pour étudier la complétion des PM intervenant dans la résolution, nous utilisons les indicateurs (ind.) i_1 à i_7 formulés dans II.

La question est ouverte (ind. i_6). Plusieurs techniques sont possibles pour répondre à la question (ind. i_2), selon que le résolveur choisit de travailler dans le cadre linéaire ou ensembliste. Toutefois, la réalisation de la tâche est supposée facilitée par la réponse à la question 3-a [$f_A(I_n) = 0_n$] qui suggère implicitement le travail dans le cadre linéaire. Nous présentons deux techniques de résolution possibles :

Technique 1 : travail dans le cadre linéaire :

D'après 3-a, $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$: $f_A(I_n) = 0_n$. Donc, $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$, $Ker f_A \neq \{0_n\}$. f_A est donc non injective, quelle que soit la matrice A de $M_n(\mathbb{C})$.

Cette technique requiert de tenir compte du contexte de l'exercice et d'utiliser une caractéristique de l'injection pour les applications linéaires (ind. i_7), de faire le lien entre les questions 1, 3-a et 3-b, d'interpréter le calcul $f_A(I_n) = 0_n$ en termes de noyau (ind. i_5), et d'utiliser la négation logique d'une proposition (pour non injective) (ind. i_4).

Technique 2 : travail dans le cadre ensembliste.

La résolution peut se faire de plusieurs manières, selon la caractéristique ensembliste choisie pour l'injection. Une façon de procéder est :

[f_A est injective] $\Leftrightarrow$ [Pour tous M et N dans $M_n(\mathbb{C})$, $f_A(M) = f_A(N) \Longrightarrow M = N$] (1)

On peut ensuite poursuivre de plusieurs façons :

1. Remarquer que $f_A(0_n) = f_A(I_n) = 0_n$ avec $0_n \neq I_n$, et ceci pour toute matrice A de $M_n(\mathbb{C})$. On en déduit que, quelle que soit la matrice A de $M_n(\mathbb{C})$, f_A n'est pas injective.

2. Traiter la question dans le cas général. (1) devient alors :

f_A est injective $\Leftrightarrow$[Pour tous M et N dans $M_n(\mathbb{C})$, $A(M-N) = (M-N)A \Longrightarrow M = N$] (2)

On remarque ensuite que (2) peut toujours se réaliser sans que l'on ait nécessairement, $M = N$. Il suffit de considérer M quelconque dans $M_n(\mathbb{C})$ et $N = M - I_n$.

Cette technique demande d'abord d'adapter la caractéristique ensembliste de l'injection au cas de l'application f_A (ind. i_5). Pour cela, il faut distinguer entre le statut de la matrice A d'une part et celui de M et N d'autre part, il faut traiter convenablement le calcul matriciel et bien gérer les connecteurs et les quantificateurs logiques en jeu (ind. i_3). Il faut ensuite savoir résoudre le problème d'existence des matrices M et N vérifiant (1) et utiliser la négation logique d'une proposition (pour non injective) (ind. i_4).

Cela dit, d'autres techniques sont également possibles dans le cadre ensembliste. Dans tous les cas, la réponse à cette question demande de fixer un cadre de travail, de bien comprendre la fonctionnalité des données de l'exercice, de choisir une technique appropriée au cadre de travail choisi et de mobiliser les savoirs appropriés que requièrent la technique et le cadre choisis. Il est important également de bien gérer le symbolisme et les notions de logique en jeu. Tous ces facteurs font que la PM associée à la tâche intègre autour de la notion d'injection plusieurs PMP (ind. i_1). Il s'agit des PMP relatives aux notions : application injective, application linéaire, noyau d'une application linéaire, calcul matriciel, équation matricielle, quantificateurs et connecteurs logiques.

Nous considérons pour cela que la PM associée à la tâche donnée est de niveau local. La présence des indicateurs i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6 et i_7 montre que cette praxéologie est d'un bon degré de complétude. Nous remarquons par ailleurs que le choix de la technique 1, qui est attendue des étudiants, fera preuve d'une certaine expertise au niveau du choix de la stratégie de résolution. Par contre, le choix d'une technique utilisant le cadre ensembliste montre des

difficultés au niveau stratégique, vu que le travail dans ce cadre néglige le contexte de l'exercice, et omet la mise en relation de ses différentes données.

Finalement, pour ce qui est du formalisme à mettre en œuvre dans la résolution, il est évident que la réponse à la question 3-b met en œuvre un lange formel assez développé et requiert une bonne maitrise de ce langage et l'appropriation du sens qu'il porte.

Notons à cet égard que l'étude des rapports institutionnels aux notions ensemblistes fonctionnelles dans ES (Najar 2015) a révélé que les tâches données aux élèves à propos de ces notions sont essentiellement rigides et stéréotypées. Elles sont construites de manière à ce que leurs techniques de réalisation ne fassent pas appel au matériel théorique sous-jacent et de façon à ce que les élèves soient capables de reproduire ces techniques sans avoir besoin de mettre en œuvre le matériel technologique associé, ou de connaitre le sens et les règles d'usage du symbolisme manipulé. Cet état mène souvent les élèves de ES à développer des mécanismes de travail peu réfléchi à propos desdites notions.

2. Analyse des productions des étudiants

Cette analyse vise l'identification et la caractérisation des difficultés qu'éprouvent les étudiants dans leur travail. Nous déterminons en conséquence ce qui constitue, pour les étudiants, la complexité des mathématiques enseignées. Nous nous référons pour ce faire aux trois composantes de la complexité pointées dans II.

Pour la question 3-b, sur 43 copies, nous dénombrons 23 réponses correctes, 17 réponses fausses et 3 copies sans réponses (soit un taux d'échec de 47 %).

Sur les 23 réponses correctes, il y a 16 étudiants qui ont donné des solutions précises et convenablement rédigées. Pour les 7 autres solutions, nous notons un certain implicite ou non-conformité dans la rédaction, notamment à propos de l'usage des éléments de logique.

Concernant les 17 réponses fausses, 4 étudiants n'ont pas réussi à exprimer correctement la propriété d'injectivité dans le contexte de l'exercice. Les 13 autres étudiants sont arrivés à formuler convenablement l'injectivité de f_A, soit en termes de noyau, soit dans le cadre ensembliste. Nous commentons ci-après deux exemples de réponses fausses représentant les erreurs et les difficultés les plus fréquentes constatées chez les étudiants.

Exemple 1

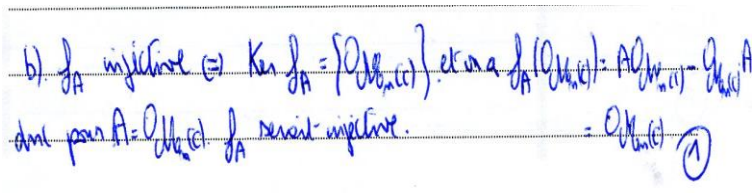


Figure 1 *– Production 1*

Dans cette réponse, l'étudiant exprime convenablement l'injectivité de f_A en termes de noyau et calcule $f_A(0_n)$, mais ne cherche pas si $Kerf_A$ contient des éléments autres que 0_n. Il semble confondre entre le fait que $Kerf_A$ contient 0_n et se réduit à 0_n. Dans sa conclusion, l'étudiant attribue à 0_n, valeur particulière de la variable *M*, le statut du paramètre *A*. Il y a là difficulté dans l'appropriation du sens de la caractérisation de l'injection énoncée et également dans le traitement du formalisme qui en a découlé.

Exemple 2

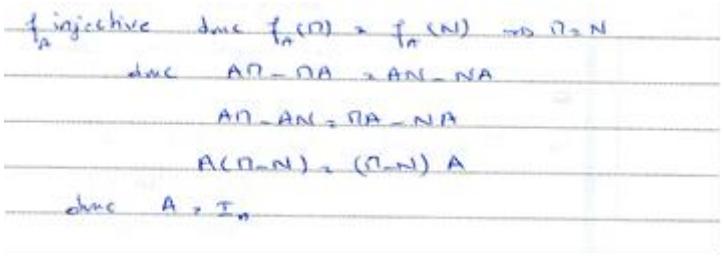


Figure 2 *– Production 2*

L'étudiant ici utilise une caractérisation ensembliste de l'injection et emploie le mot «donc» à la place d'un connecteur logique. Après avoir reformulé l'égalité fonctionnelle $f_A(M) = f_A(N)$ par l'égalité matricielle $A(M-N) = (M-N)A$, l'étudiant ne réussit pas à terminer son travail convenablement. Il se limite à donner un cas de matrice A pour lequel l'égalité $A(M-N) = (M-N)A$ est vérifiée pour tous M et N dans $M_n(\mathbb{C})$, alors qu'il devrait chercher la (ou les) matrice(s) A pour lesquelles l'égalité $A(M-N) = (M-N)A$ n'ait lieu que si $M = N$. La quantification des matrices dans la formulation de « f_A injective » de départ (absente dans le travail de l'étudiant) est essentielle pour la réalisation de la tâche. N'ayant pas tenu compte de cette quantification a, semble-t-il, induit l'étudiant dans des confusions pour connaitre ce qu'il doit chercher exactement. À la fin, l'étudiant ne précise pas si pour $A = I_n$, f_A est injective ou non!

3. Commentaire pour les réponses à la question 3-b

Notons tout d'abord que le taux d'échec de 47 % pour cette question est significatif. C'est que la technique 1 de résolution est supposée accessible pour les étudiants des CPS1. D'un autre côté, nous remarquons que la majorité des étudiants dont les réponses étaient erronées (13 sur 17) ont réussi à formuler convenablement le problème de l'injectivité de f_A, soit dans le cadre linéaire, soit dans le cadre ensembliste. Les difficultés éprouvées se sont produites lors du traitement avec la formulation donnée, elles se situent essentiellement dans les points suivants : appropriation du sens porté par les énoncés formels, confusion entre les statuts des matrices en jeu, traitement avec une application, une équation ou un ensemble paramétré, difficultés dans l'usage des éléments de logique.

D'un autre côté, considérant le choix de la technique de résolution (pour les réponses correctes, comme pour les réponses fausses), nous dénombrons 22 étudiants sur 43 (soit plus que la moitié) qui ne sont pas arrivés à tirer profit de la réponse à la question 3-a et effectuer une déduction. Ceci pourrait s'expliquer par des difficultés dans la mise en relation des données de l'exercice et une tendance à travailler la question de façon isolée. Autrement dit, une tendance à travailler au niveau ponctuel des praxéologies mathématiques (application de la définition de l'injection dans le cadre ensembliste).

4. Constats quant aux réponses des étudiants aux autres questions de l'exercice

En regardant les réponses des étudiants aux autres questions de l'exercice, nous constatons que les trois premières questions (fermées ou de calcul), dont les techniques de résolution consistent à des applications directes de définitions, de propriétés ou de calcul simple, sont les mieux réussies par les étudiants (taux de réussite respectifs de 100%, 77% et 98%). Les échecs dans la question 2 sont dus principalement à des difficultés à traiter avec l'ensemble paramétré F pour montrer que F est stable pour les opérations de l'espace vectoriel $M_n(\mathbb{C})$. Nous notons également, pour cette question, que 16 étudiants sur 43 (soit 37%) n'ont pas réussi à remarquer que F est le noyau de l'application linéaire et d'en déduire le résultat,

comme le suggère la question. Ces étudiants ont plutôt utilisé une caractéristique générale des sous-espaces vectoriels.

La question 3-c, quant à elle est la moins réussie dans l'exercice (79 % d'échec). Dans les réponses erronées (49 %), tous les étudiants ont travaillé dans le cadre ensembliste et la plupart d'entre eux ont réussi à donner une formulation correcte de la surjection dans le contexte de la tâche, mais ils se sont heurtés à des difficultés lors du traitement de l'équation paramétrique $f_A(M) = M'$, résultante de cette formulation. La complexité de la tâche découle notamment des nuances entre les statuts des matrices *A, M* et *M'* en jeu et des confusions entre notions contiguës (surjection/application, ensemble image/ensemble d'arrivée, matrice *A*/matrice de l'application linéaire f_A).

D'un autre côté, le fait de travailler dans le cadre ensembliste et de répondre à la question sans tenir compte de la réponse à la question 3-b[2], confirme le constat établit dans la question 3-b à propos de la tendance des étudiants à travailler au niveau ponctuel des praxéologies mathématiques.

V. CONCLUSION

L'analyse des réponses des étudiants aux différentes questions de l'exercice fait état, en premier lieu, d'une bonne connaissance, par la majorité des étudiants, des énoncés mathématiques caractérisant les notions intervenant dans les questions, et d'une possibilité de reformuler ces énoncés dans le contexte de l'exercice. Le tableau 1 donne, pour chacune desdites notions, le nombre de formulations données par les étudiants, selon qu'elles sont conformes ou erronées.

Questions	**Notions**	**Formulations conformes (sur 43)**	**Formulations erronées (sur 43)**
1	Application linéaire	43 (100 %)	0
2	Sous-espace vectoriel	39 (91 %)	4 (9 %)
3-b	Injection	37 (86 %)	6 (14 %)
3-c	Surjection	28 (64 %)	15 (36 %)

Tableau 1 *– Conformité des formulations fournies par les étudiants*

Ces résultats pourraient s'interpréter par une maitrise, de la part des étudiants, des énoncés mathématiques enseignées et une aptitude à les reformuler dans des situations particulières. Nous considérons ceci comme preuve quant à l'aptitude des étudiants à traiter avec les notions mathématiques abstraites. Toutefois, pour beaucoup d'étudiants, la mise en œuvre des formulations données n'était pas toujours évidente. Les difficultés constatées concernent essentiellement l'appropriation du sens porté par ces formulations et la gestion du symbolisme qui y est impliqué. D'un autre côté, notre analyse révèle une tendance chez plusieurs étudiants (même pour ceux dont les réponses sont correctes) de travailler chaque question de façon isolée, sans prendre en compte les possibilités de déduction présentes dans

[2] La réponse attendue à cette question consiste à remarquer que f_A est une application linéaire entre deux espaces vectoriels de même dimension finie. Dans ce cas, les notions d'injection et de surjection sont équivalentes et la réponse à cette question découle immédiatement de la réponse à la question précédente. Soit que, f_A n'est pas surjective, quelle que soit la matrice *A* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

l'exercice. Ceci pourrait s'interpréter comme une certaine disposition chez les étudiants à travailler au niveau ponctuel des praxéologies mathématiques disponibles et en même temps une difficulté à mettre en intégration les PM ponctuelles et à travailler de façon autonome avec des PM locales.

Il résulte de ces constatations que parmi les trois caractéristiques des mathématiques supérieures pointées dans II, ce sont surtout celles qui concernent la gestion du formalisme mathématique et le travail avec des PM locales, qui constituent principalement la complexité des mathématiques chez les étudiants entrant à l'université. A notre avis, deux facteurs contribuent à l'installation de ces difficultés, le premier concerne les choix d'enseignement des mathématiques dans les institutions ES et CPS1, quant au deuxième, il se rapporte aux connaissances qualifiées par certains auteurs de pratiques et opératoires.

En ce qui concerne le premier facteur, l'étude faite dans (Najar 2015) montre que dans ES, l'environnement praxéologique relatif au travail des notions ensemblistes fonctionnelles se caractérise par une prédominance de PM ponctuelles isolées, dont l'intervention se limite le plus souvent au niveau pratico-technique et dont la plupart des tâches associées sont routinières, de techniques de réalisation rigides et stéréotypées. Dans CPS1, en revanche, l'enseignement des mathématiques est dominé par des praxéologies mathématiques locales relativement complètes (comme le montre l'exercice donné dans le test analysé) et le fonctionnement du savoir dans le topos des étudiants se rapproche, en ce qui concerne les méthodes et le formalisme mis en œuvre, à celui qui est le sien dans les développements théoriques des thèmes d'étude. En même temps, il y a dans CPS1 une sous-estimation quant au travail d'ordre technique et une négligence quant à la mise en œuvre des PMPs dans les tâches données aux étudiants. Par ailleurs, plusieurs chercheurs (Dorier 1997 ; Bosch et Chevallard 1999 ; Durand-Guerrier & Arsac 2003…) considèrent que les questions touchant à l'abstraction et au formalisme mathématiques sont à l'origine de multiples ruptures entre le secondaire et le supérieur, conduisant à des difficultés résistantes chez les élèves et les étudiants. La faible sensibilité des enseignants universitaires quant à l'importance qu'il faut accorder dans l'enseignement au langage symbolique ajoute à ces difficultés. Ils considèrent, généralement, que l'appropriation du sens du symbolisme mathématique et des règles qui régissent son choix et sa manipulation est naturelle et va de soi dès que les notions et objets qui y sont engagés sont convenablement explicités, ce que réfutent plusieurs recherches. Selon Bosch et Chevallard (1999),

> La méprise qui consiste à supposer que la perception des ostensifs serait naturelle – c'est-à-dire non construite – explique dans une large mesure ce que la théorie des situations a mis en évidence sous le nom de stratégies didactiques d'ostension. On désigne par ce terme la pratique d'enseignement où le professeur se limite à montrer aux élèves un objet ostensif en croyant qu'il se créera spontanément un rapport adéquat à cet ostensif et, surtout, aux non-ostensifs auxquels il est censé renvoyer (Bosch & Chevallard, 1999, p. 92).

Pour ce qui concerne le deuxième facteur, il soulève le problème des apprentissages liés à la pratique des mathématiques, que les apprenants ne semblent pas pouvoir acquérir par des efforts personnels et pour lesquelles des actions didactiques semblent être nécessaires. Dans l'objectif de décrire ces besoins d'apprentissage et prouver leur nécessité pour la réussite des apprenants, Castela (2008) distingue au niveau de la technologie de toute PM intervenant dans un problème deux composantes, respectivement théorique et pratique. La composante théorique assure la validité de la technique utilisée, quant à la composante pratique, elle correspond à des savoirs très ancrés dans l'expérience, permettant de choisir, de mettre en œuvre et de piloter la technique. Pour Castela, ces connaissances d'ordre pratique sont dotées d'une légitimité mathématique (par référence à l'activité du mathématicien) et se trouvent implicitement reconnues par l'institution éducative, vu que leur nécessité se manifeste dans

les tâches d'évaluation et c'est leur absence qui est institutionnellement évoquée comme facteur d'échec. Néanmoins, l'institution reste muette à propos de ces apprentissages, et n'organise aucun système didactique visant explicitement à permettre leur apprentissage.

Nous considérons que la difficulté remarquée chez les étudiants des CPS1 à mettre en intégration les PM ponctuelles et à travailler de façon autonome avec des PM locales, s'explique par des insuffisances de connaissances d'ordre pratique telles que définies par Castela.

L'ensemble des facteurs que nous venons de citer, expliquent, en quelque sorte, la rupture institutionnelle lors du passage de ES aux CPS1. Les résultats d'analyse du test montrent que les étudiants des CPS1 ont de la difficulté à dépasser cette rupture de façon autonome et semblent avoir du mal à s'adapter aux changements qui se produisent lors du passage du secondaire au supérieur. Ces étudiants, se trouvent, semble-t-il, encore influencés par la culture mathématique du secondaire.

En guise de conclusion, notre recherche confirme l'importance du travail à mener au niveau de l'enseignement sur le langage formel, sur les connaissances d'ordre pratique ainsi qu'à l'égard de l'intégration et de la complétion des praxéologies mathématiques en jeu dans les contenus d'enseignement. Ce rôle doit être pris en charge par l'institution par le biais d'organisations didactiques et mathématiques adaptées.

REFERENCES

Bosch M., Chevallard Y. (1999) La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. Recherches en didactiques des mathématiques 19 (1) 77–124.

Bosch M., Fonseca C. Gascon J. (2004) Incompletitud de las organizaciones matematicas locales en las instituciones escolares. *Recherches en didactiques des mathématiques* 24 (2/3), 205–250. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Castela C. (2008) Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'enseignement. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 28 (2), 135-182. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard Y. (1998) Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. *Actes de l'université d'été de la Rochelle* (Juillet 1998), 91–118.

Chin E. T., Tall D. (2002) *Mathematical proof as formal procept in advanced mathematical thinking*. http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2002l-formal-procept.pdf

Dorier J.-L. (Eds.) (1997) *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Durand-Guerrier V. Arsac G. (2003) Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Le cas de l'analyse. Quelles implications didactiques ? Recherches en Didactique des Mathématiques 23(3) 295–342.

Najar R. (2015) A propos de l'enseignement de la théorie des ensembles : les choix institutionnels dans la transition secondaire/supérieur en Tunisie. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 35 (2), 141- 182. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Projet Spécial 3 (SPE3)
Évaluation

BILAN DU GROUPE SPÉCIAL N°3

EVALUATION

Responsables

SAYAC[*] Nathalie – FAGNANT[**] Annick – GUEYE[***] Babacar

Correspondant CS

CIAKE Fidèle

Dans le bilan du projet spécial n°4 de EMF 2015 à Alger, les responsables[1] de ce groupe spécial avaient conclu sur l'intérêt qu'il y aurait à développer, parallèlement aux études sur les évaluations externes nationales et internationales, des recherches portant sur l'évaluation des apprentissages dans le quotidien de la classe de mathématiques. Le projet spécial n°3 de EMF 2018 à Cergy-Pontoise a eu l'ambition de traiter, en partie, cette thématique puisque dans son appel à communication, « l'évaluation *des* apprentissages dans le quotidien de la classe de mathématiques » était une des orientations retenues pour cette nouvelle rencontre, en complément de celles sur « les évaluations externes nationales et internationales » et « l'évaluation comme moyen de régulation de l'enseignement, *au service de* l'apprentissage».

Il y a déjà 15 ans, Brookhart (2003) estimait que la difficulté principale des didacticiens pour penser les questions d'évaluation était qu'il n'existait pas de "théorie de la mesure en évaluation de classe" véritablement conçue pour penser et concevoir une évaluation au service des apprentissages des élèves prenant en compte les contenus mathématiques des évaluations proposées en classe, dans la réalité des pratiques ordinaires des enseignants. Ce constat reste aujourd'hui valable, même si ces dernières années, l'évaluation des apprentissages des élèves est devenue une question centrale pour un certain nombre de chercheur-e-s en didactiques des mathématiques de la sphère francophone[2]. Récemment, un réseau thématique clairement orienté sur le lien entre évaluation et didactique (EVADIDA[3]) a vu le jour au sein de l'ADMEE-Europe (Association pour le Développement de Méthodes d'Évaluation en Éducation). Des projets de recherche d'envergure ont été initiés récemment par des chercheurs soucieux de prendre en compte la question des contenus mathématiques dans l'évaluation : ASSIST-ME (Assess Inquiry in Science, Technology and Mathematics Education) autour de nouveaux dispositifs s'appuyant sur des démarches d'investigations pour développer l'évaluation formative en sciences, mathématiques et technologie, FasMed (Formative Assessment in Science and Mathematics Education) traitant des apports des technologies dans le processus d'évaluation formative et le projet ANR NéoPraEval (Nouveaux Outils pour de nouvelles PRAtiques d'EVALuation et d'enseignement des

[*] LDAR, Université-Paris-Est-Créteil – France – nathalie.sayac@u-pec.fr
[**] Université de Liège – Belgique – afagnant@uliege.be
[***] Université Cheikh Anta Diop – Sénégal– babacar1.gueye@ucad.edu.sn

[1] Éric RODITI, Caroline BARDINI et Claire VAUGELADE BERG

[2] Dans la sphère anglophone, cette problématique est depuis longtemps investie par les chercheur·e·s dans la continuité des travaux de Black et Wiliam (2009).

[3] http://www.admee.org/index.php/reseaux/evadida

mathématiques[4]) qui s'intéresse à la validité et à l'extension d'outils d'évaluation existants, mais aussi aux pratiques évaluatives d'enseignants en mathématiques (primaire et secondaire). Le cadre didactique de l'évaluation et de ses pratiques en mathématiques développé dans sa note de synthèse par Nathalie Sayac (2017) participe également de cet intérêt relativement nouveau des didacticiens pour cette problématique et on peut s'en réjouir.

Les communications autour des pratiques évaluatives des enseignants présentées lors de cette rencontre ont concerné divers niveaux d'enseignement et divers domaines mathématiques. La communication de Julia Pilet, Brigitte Grugeon-Allys, Françoise Chenevotot et Julie Horoks a porté sur un dispositif spécifique de formation à l'évaluation en algèbre élémentaire (PACAL) proposé dans l'académie de Créteil (France). L'objectif du dispositif présenté (texte proposé pour les actes en GT1) vise à mettre en relation des pratiques enseignantes et les apprentissages des élèves au collège en prenant appui sur des évaluations proposées par les chercheurs, sur des résultats de recherche autour de l'apprentissage de l'algèbre de l'évaluation et de l'intégration de ressources en classe (Horoks & Pilet, 2015).

La communication de Nathalie Sayac, Nadine Grapin, Aline Blanchouin et Eric Mounier (voir aussi le texte de ces auteurs présenté dans les actes en GT1). a également concerné la formation à l'évaluation d'enseignants, mais cette fois à l'école primaire. Les chercheurs ont présenté comment, à partir de leurs travaux, ils ont conçu et mis en œuvre un dispositif spécifique visant à enrichir la logique évaluative (Sayac, 2017) des professeurs des écoles engagés dans un dispositif spécifique de formation-recherche (LéA EvalNumC2) A partir de la présentation par les chercheurs d'outils didactiques (facteurs de complexité et liste de tâches dans le domaine des nombres entiers) et de tâches évaluatives validées d'un point de vue épistémo et psycho-didactique (Grugeon-Allys & Grapin, 2018), les professeurs ont élaboré collectivement des tests et des grilles d'évaluation qu'ils ont utilisés dans leur classe.

Au-delà du fait que ces communications ont rendu compte de travaux sur les pratiques évaluatives d'enseignants en mathématiques, elles ont montré l'intérêt d'un travail collaboratif entre chercheurs et praticiens pour agir sur les pratiques d'évaluation en classe, au plus près des problématiques de terrain.

La troisième communication autour de cette orientation a concerné une recherche élaborée au sein du réseau RE.S.E.I.D.A[5]. La recherche présentée vise à étudier la construction et le renforcement des inégalités scolaires au regard des pratiques d'évaluation de professeur·es des écoles dans deux disciplines (Mathématiques et Sciences) et deux pays (Suisse et France). Pour étudier dans quelle mesure les différents épisodes évaluatifs proposés par les deux professeurs participant actuellement à la recherche pourraient contribuer à la production d'inégalités scolaires, l'approche didactique de l'évaluation (Sayac, 2017) est convoquée. La démarche clinique d'orientation psychanalytique portée par Ployé (2016) et brièvement exposée lors de la présentation, permet d'étudier de manière complémentaire ces épisodes évaluatifs, en recherchant les scénarios imaginaires inconsciemment à l'œuvre lors de ces moments spécifiques.

Les autres communications du SPE3 se sont centrées sur l'évaluation dans le cadre de la résolution de problèmes pour deux d'entre elles et sur l'évaluation en numération pour la troisième. Situant son étude dans le canton de Genève où a été créé un cours intitulé « démarches mathématiques et scientifiques » à destination d'élèves de 13-14 ans, Maud Chanudet a montré comment un travail axé sur la construction d'une grille critériée

[4] Pour des informations plus précises, voir sur le site : http://www.ldar.univ-paris-diderot.fr/page/praeval
[5] REcherches sur la Socialisation, l'Enseignement, les Inégalités et les Différenciations dans les Apprentissages.

d'évaluation permet de repenser les attentes curriculaires en termes de résolution de problèmes mathématiques. Tout en appuyant ses propos sur une analyse fine des résultats observés auprès de 500 élèves ayant eu à résoudre un même problème de généralisation algébrique, son exposé a non seulement permis de mettre en lumière les compétences et difficultés des élèves face à ce problème singulier, mais aussi d'ouvrir plusieurs axes de réflexions pour des recherches futures. Parmi ceux-ci, nous retiendrons la problématique de l'évaluation de la résolution de problèmes lorsque celle-ci devient un objectif d'apprentissage spécifique, mais aussi le potentiel offert par une réflexion axée sur la construction et l'analyse d'une grille d'évaluation critériée comme outil de développement professionnel des enseignants.

La communication proposée par Annick Fagnant et Amélie Auquière s'ancre également dans la problématique de l'évaluation des productions d'élèves en résolution de problèmes, mais elle aborde cette fois ce questionnement sous un angle assez particulier, en s'appuyant sur ce que les auteurs qualifient de « problèmes problématiques » dans la littérature de recherche, essentiellement anglo-saxonne (Verschaffel, Greer & De Corte, 2000). Les « problèmes problématiques » sont des problèmes pour lesquels l'application d'une opération arithmétique appuyée sur les données de l'énoncé pose question à partir du moment où des connaissances réalistes liées à la situation sont prises en considération. Face à ce type de problèmes, l'évaluation des productions d'élèves place l'évaluateur en situation de « dissonance cognitive » puisque l'enjeu n'est pas de repérer les démarches mathématiquement correctes, ni de chercher à comprendre les erreurs de raisonnement mathématique, mais bien de rechercher des « traces » de réalisme. S'appuyant sur les premiers résultats d'une étude basée sur l'impact des illustrations qui accompagnent les problèmes, les auteures ont cherché à montrer les difficultés rencontrées pour passer d'une « correction » classique à un « codage » des réponses selon leur caractère réaliste ou non réaliste.

La dernière communication de l'atelier avait la forme d'un poster présenté par Helena Orsana, Anne Lafay er Aryann Blondin. L'objectif poursuivi par les chercheuses est de développer et de valider un outil permettant de mesurer la connaissance des élèves de la numération à valeur positionnelle en début de scolarité primaire. Partant du constat que de nombreuses tâches scolaires classiques permettent une résolution correcte par simple reproduction de procédures montrées par l'enseignant, elles ont développé des tâches « originales », très éloignées des tâches scolaires classiques et ayant pour but d'évaluer la compréhension profonde des symboles numériques. La présentation du poster a permis de découvrir les fondements scientifiques sur lesquels ces tâches originales sont ancrées, ainsi que les premiers résultats permettant une validation de l'outil auprès d'un public de jeunes québécois anglophones.

La diversité des communications présentées dans le SPE3 de la session 2018 de EMF a de nouveau témoigné du fait que l'évaluation des apprentissages mathématiques des élèves, que ce soit dans le primaire, le secondaire ou le supérieur, est une problématique centrale pour comprendre ce qui se joue, du point de vue des apprentissages, en mathématiques. Plusieurs communications ont aussi pu montrer en quoi, un travail collaboratif mené avec des enseignants au départ de questions d'évaluation semble constituer un outil puissant de développement professionnel. Quelles sont les tâches d'évaluation qui permettent réellement de cerner les enjeux d'apprentissage visés, quelles grilles d'évaluation développer en fonction des objectifs poursuivis ou encore, comment faire évoluer les pratiques d'évaluation… sont autant d'éléments de discussion qui ont pu être esquissés au travers de ce SPE3.

Au-delà des questions didactiques qu'elle soulève et qui méritent d'être explorées comme nous l'avons fait dans le SP3, nous avons pu réaliser à quel point l'évaluation dépend également des cultures des pays dans lesquels elle est considérée. Les différentes approches culturelles et scientifiques selon les pays d'origine des chercheurs et des participants ont ainsi rendu les échanges encore plus riches. C'est une perspective qui mérite d'être davantage explorée. Nous espérons que la prochaine session d'EMF permettra de le faire et que, plus globalement, la thématique de l'évaluation y trouvera une place égale à celle qui lui est accordée hors de la sphère francophone.

REFERENCES

Black, P. J., & Wiliam, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. *Educational Assessment, Evaluation and Accountability, 21*(1), 5–31.

Brookhart, S. M. (2003). Developing measurement theory for classroom assessment purposes and uses. *Educational measurement: Issues and practice*, *22*(4), 5-12.

Grugeon-Allys, B. & Grapin, N. (2018). Approches psychométrique et didactique de la validité d'une évaluation externe en mathématiques : quelles complémentarités ? Quelles divergences ? *Mesure et Evaluation en Education*, 41-2, p.37-66.

Horoks J. & Pilet J. (2015). Etudier et faire évoluer les pratiques d'évaluation des enseignants de mathématiques en algèbre au collège dans le cadre d'un Léa. In Theis, L. (Ed.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage*, Actes du 6e colloque Espace Mathématique Francophone (EMF 2015 – GT9, 10-14 octobre 2015) (pp. 791–804). Alger, Algérie : Faculté de Mathématiques.

Sayac, N. (2017). *Approche didactique pour l'évaluation et ses pratiques en mathématiques : enjeux d'apprentissages et de formation*. Note de synthèse pour le diplôme d'Habilitation à diriger des recherches, soutenue à l'université Paris Diderot, le 29 novembre. https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01723752

Ployé, A. (2016). *Les enseignants aux prises avec l'étrangeté : approche clinique de l'inclusion des élèves handicapés au collège* (Doctoral dissertation, Paris 8).

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). Making sense of word problems. Lisse, *The Netherlands: Swets & Zeitlinger*.

ANNEXE

LISTE DES TEXTES DU SPE3 PAR ORDRE ALPHABETIQUE DU PREMIER AUTEUR

CHANUDET, M.

Quelques résultats concernant les compétences en résolution de problèmes d'élèves évalués sur un même problème et à l'aide d'une même grille d'évaluation

FAGNANT, A. & AUQUIERE, A.

Impact des illustrations accompagnant les problèmes problématiques : focus sur le codage des réponses

SAYAC, N. & GRAPIN, N. BLANCHOUIN, A. & MOUNIER, E.

Étude des pratiques évaluatives de professeurs des écoles dans le cadre d'un LéA

SAYAC, N., PLOYE, A., MARLOT, C., DELARUE-BRETON, C. & DUCREY, M.

Évaluation et inégalités scolaires : étude exploratoire en mathématiques et en sciences, en France et en Suisse.

AFFICHES

OSANA, H. P., LAFAY, A. & BLONDIN, A.

Picpvt, une tache d'évaluation de la compréhension de la double représentation des symboles dans les nombres : validation chez des enfants de 1ère année de primaire

QUELQUES RESULTATS CONCERNANT LES COMPETENCES EN RESOLUTION DE PROBLEMES D'ELEVES EVALUES SUR UN MEME PROBLEME ET A L'AIDE D'UNE MEME GRILLE D'EVALUATION

CHANUDET[*] Maud

Résumé – Nous présentons quelques résultats d'une étude qui s'intéresse à l'évaluation des compétences des élèves en résolution de problèmes mathématiques. Nous analysons les résultats de près de 500 élèves de 13-14 ans ayant à résoudre le même problème et étant évalués à partir des mêmes critères afin de répondre aux questions suivantes : Quels critères d'évaluation sont majoritairement validés/invalidés par les élèves ? A partir de leurs résultats, peut-on identifier différents profils d'élèves ?

Mots-clefs : évaluation, résolution de problèmes, compétences, critères d'évaluation, profil d'élèves

Abstract – We present some results of a study that focuses on students' mathematics problem solving competencies. We analyse the results of almost 500 students aged 13-14 who have to solve the same problem and who are assessed about the same grid of criteria, in order to answer to the following questions: what assessment criteria are mainly validated by students? Thanks to their results, is it possible to identify different students' profiles?

Keywords: assessment, problem solving, competencies, assessment criteria, students' profile

Nous présentons quelques résultats d'une étude qui s'intéresse à l'évaluation des compétences des élèves en résolution de problèmes. Cette étude s'inscrit dans une recherche doctorale qui questionne en particulier les pratiques évaluatives des enseignants dans le cadre d'un enseignement centré sur la résolution de problèmes.

I. CONTEXTE DE L'ETUDE

En Suisse romande, la résolution de problèmes est au cœur de l'enseignement des mathématiques et ce à tous les niveaux scolaires, que ce soit comme un *moyen* ou comme un *objectif* d'apprentissage (CIIP, 2010). Pour mettre en avant cette dimension importante de l'activité mathématique, a été créé dans le canton de Genève où est menée l'étude que nous présentons, un cours intitulé « démarches mathématiques et scientifiques » (DMS). Dispensé à raison d'une période de 45 minutes par semaine à des élèves de 13-14 ans, ce cours est centré exclusivement sur la résolution de problèmes mathématiques. Il donne par ailleurs lieu à une évaluation certificative indépendante du cours de mathématiques ordinaire et les directives officielles font reposer cette évaluation sur le dispositif de la narration de recherche (Bonafé et al., 2002). On sait cependant qu'évaluer les compétences des élèves en résolution de problèmes est complexe.

Ainsi, afin d'homogénéiser à la fois entre enseignants et entre cycles d'orientation[1] les attendus, et de proposer un outil aux enseignants pour évaluer leurs élèves, nous avons travaillé en 2015-2016 avec deux enseignantes du cours de DMS au sein d'une commission chargée de développer une grille d'évaluation des narrations de recherche dans le contexte de ce cours. Nous nous sommes pour cela appuyées sur une grille existante, issue des travaux de l'équipe genevoise impliquée dans le projet européen PRIMAS[2] et avons fait évolué cette grille en fonction des retours des enseignantes membres de la commission qui l'ont utilisé pendant une année dans leur classe, et de certains résultats de recherche (caractère scientifique

[*] Université de Genève – Suisse - maud.chanudet@unige.ch

[1] Etablissements accueillant les élèves de 12 à 15 ans. Equivalents des collèges en France.

[2] Promoting inquiry-based learning in mathematics and science at both primary and secondary levels across Europe. Site du projet disponible à : http://www.primas-project.eu

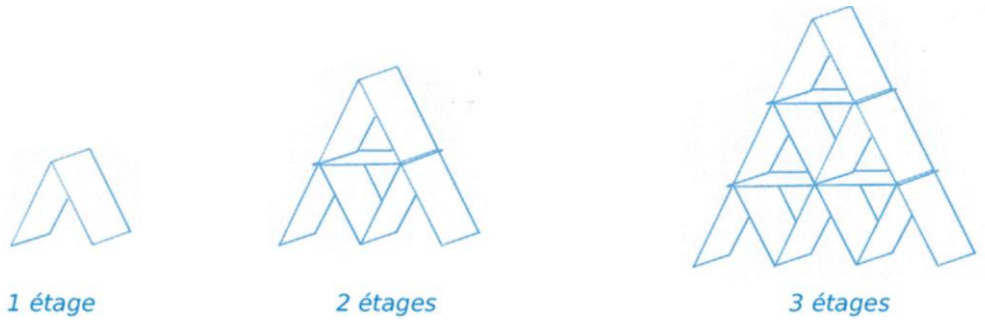
d'une démarche de type essais-conjecture-test-preuve reposant sur l'articulation entre les phases, importance de la phase d'essais et de sa dialectique avec les autres phases par exemple (Hersant, 2010)). La grille à laquelle la commission a abouti (tableau 1) est organisée autour de cinq dimensions (présentation, narration, modélisation, recherche et technique) déclinées en différents critères (texte compréhensible, narration pertinente et narration complète pour la dimension narration par exemple). Elle vise à donner aux enseignants des orientations communes quant aux points de vue à adopter sur les productions des élèves.

Dimensions	Critères
Présentation	La présentation est soignée.
Narration	Le texte est compréhensible. La narration est pertinente (centrée sur la résolution du problème). Chaque étape de la recherche est décrite de façon structurée (elle est introduite, développée et conclue). La narration est complète (toutes les étapes sont présentes). Les étapes sont présentées dans l'ordre chronologique.
Modélisation	L'élève s'est approprié le problème : reformulation, traduction en langage mathématique, schématisation, etc. Les outils, concepts mathématiques et stratégies utilisés sont pertinents.
Recherche	Une méthode de résolution est mise en œuvre, des pistes de résolution sont dégagées. Les essais sont cohérents avec le problème et visent à faire ressortir les régularités (commencent par des cas simples, sont suffisamment nombreux et variés, etc.). L'absence d'essais n'est pas pénalisée, si une conjecture valide a été trouvée et testée. Les éléments qui ont permis d'énoncer chaque conjecture sont identifiables (explications, texte souligné, code couleur, etc.) ; en particulier, s'il y en a, le lien avec les essais est exprimé. Une conjecture valide ou un nombre suffisant de conjectures non valides, est énoncé. Toute conjecture est testée et la démarche aboutit, soit à une preuve (qui la valide définitivement), soit à un contre-exemple (qui l'invalide), soit à des tests suffisamment nombreux et variés (qui ne permettent pas de l'invalider). Chaque conjecture fait l'objet d'une conclusion cohérente avec la démarche décrite au point précédent. A l'issue de ses recherches, l'élève exprime une conclusion (solution au problème, réponses partielles au problème, etc.) cohérente avec le problème et les recherches qu'il/elle a effectuées.
Technique	Les outils et concepts mathématiques sont utilisés correctement. Les codes, notations, symboles, qui ne font pas partie du problème, sont définis.

Tableau 1 *– Grille d'évaluation des narrations élaborée par la commission.*

Afin de diffuser cet outil auprès des enseignants, nous avons co-animé une formation continue obligatoire à laquelle a participé la quasi-totalité des enseignants dispensant ce cours cette année-là. Cette formation s'est déroulée sur deux demi-journées, l'une en novembre 2016, l'autre en mars 2017. La première demi-journée a été consacrée à la présentation de la grille d'évaluation et à une première prise en main de cet outil. Entre les deux demi-journées, les enseignants ont proposé dans leur classe un même problème et ont utilisé la grille d'évaluation présentée ci-dessus pour évaluer leurs élèves sur ce problème.

Le problème est celui dit « des châteaux de cartes » dont l'énoncé est le suivant[3] : *Pour construire un château de cartes à un étage, il faut 2 cartes. Pour un château de cartes à deux étages, il faut 7 cartes. Et pour un château de cartes à trois étages, il faut 15 cartes. Combien faut-il de cartes pour construire un château à 7 étages ? A 30 étages ? A 100 étages ?*



II. METHODOLOGIE

Nous nous appuyons sur les données recueillies dans le cadre de cette formation pour mener une étude à grande échelle concernant les compétences des élèves en résolution de problèmes. La nécessité de pouvoir analyser un grand nombre de données (les productions de 494 élèves) nous a amené à définir un dispositif très contrôlé (un problème et des critères d'évaluation communs), cohérent avec les contraintes institutionnelles, afin de nous permettre de dégager des tendances générales.

Nous avons recueilli les résultats des élèves par le biais d'un sondage en ligne[4]. Chaque enseignant a ainsi évalué les productions de ses élèves en se prononçant sur la validation ou l'invalidation de chacun des critères de la grille. Il s'agissait dans le sondage de cocher la case correspondant au critère lorsque l'enseignant le considérait comme validé, et de ne pas la cocher lorsqu'il le considérait comme non validé. Afin de rendre les données exploitables par un logiciel d'analyse statistique, nous avons ensuite traduit cela sous forme d'une valeur numérique, respectivement 1 ou 0, pour chacun des critères et chacun des élèves[5].

Les compétences des élèves nous sont donc données à voir par le biais des évaluations que font les enseignants des narrations de recherche des élèves. Il pourrait nous être reproché, dans un souci d'objectivité, que les évaluations sur lesquelles nous nous appuyons pour analyser les compétences des élèves ne sont pas valides parce que établies par différents évaluateurs. Aussi aurions-nous pu faire le choix de demander aux enseignants de nous transmettre les productions brutes de leurs élèves puis procéder nous-même à l'évaluation de ces productions. Or le nombre très important de données à recueillir aurait rendu ce travail extrêmement long et fastidieux. De plus, les études docimologiques montrent que malgré l'unicité de l'évaluateur, des biais (effet de contraste entre copies, effet de l'ordre de correction, par exemple (Leclercq, Nicaise, & Demeuse, 2013)) apparaissent lors de l'évaluation, qui plus est lorsque le nombre de productions à évaluer est aussi conséquent. Enfin, il nous semble légitime de nous appuyer sur les évaluations produites par les enseignants ne serait-ce que parce qu'elles constituent le principal moyen d'accès aux apprentissages des élèves. C'est par elles que sont reconnus institutionnellement les apprentissages des élèves.

[3] Ce problème est proposé dans le manuel de Sesamath 3e et disponible à l'adresse suivante : http://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/diapo.php?atome=48667&ordre=1

[4] Le sondage est hébergé sur le site de Limesurvey, https://www.limesurvey.org/fr/

[5] Nous analysons les données de ce sondage à l'aide du logiciel d'analyse statistique SPSS.

III. QUESTIONS DE RECHERCHE

Nous nous intéressons d'une part aux résultats des élèves relativement au référentiel d'évaluation commun et au problème proposé, d'autre part aux potentiels profils d'élèves que ces résultats peuvent nous permettre d'identifier. Les questions auxquelles nous souhaitons répondre ici sont plus précisément :

- Quels critères d'évaluation les enseignants du cours de DMS valident/invalident-ils majoritairement relativement aux productions des élèves sur le problème dit des châteaux de cartes et ce, en milieu d'année scolaire ?
- A partir de leurs résultats, peut-on identifier différents profils d'élèves ?

IV. RESULTATS ET INTERPRETATION

1. Compétences des élèves

En considérant 0 et 1 comme une note attribuée par l'enseignant à la production de l'élève relativement à un critère donné, et en calculant la moyenne pour ce critère, nous obtenons à la fois une note moyenne, mais aussi la proportion d'élèves pour lesquels le critère a été considéré comme validé. Le pourcentage des productions d'élèves pour lesquelles un critère a été validé est récapitulé dans le tableau 2.

Dimension	Critères	Taux
Présentation	La présentation est soignée.	81%
Narration	Le texte est compréhensible.	80%
	La narration est pertinente. Chaque étape de la recherche est décrite de façon structurée.	73%
	La narration est complète. Les étapes sont présentées dans l'ordre chronologique.	54%
Modélisation	L'élève s'est approprié le problème : reformulation, traduction en langue mathématique, schématisation, etc.	88%
	Les outils, concepts mathématiques et stratégies utilisés sont pertinents.	81%
Recherche	Une méthode de résolution est mise en œuvre, des pistes de résolution sont dégagées.	91%
	Les essais sont cohérents avec le problème et visent à faire ressortir les régularités. L'absence d'essais n'est pas pénalisée, si une conjecture valide a été trouvée et testée.	73%
	Les éléments qui ont permis d'énoncer chaque conjecture sont identifiables ; en particulier, s'il y en a, le lien avec les essais est exprimé.	51%
	Une conjecture valide ou un nombre suffisant de conjectures non valides, est énoncé.	57%
	Toute conjecture est testée et la démarche aboutit, soit à une preuve, soit à un contre-exemple, soit à des tests suffisamment nombreux et variés.	28%
	Chaque conjecture fait l'objet d'une conclusion cohérente avec la démarche décrite au point précédent.	43%
	A l'issue de ses recherches, l'élève exprime une conclusion cohérente avec le problème et les recherches qu'il/elle a effectuées.	64%
Technique	Les outils et concepts mathématiques sont utilisés correctement.	71%
	Les codes, notations, symboles utilisés, qui ne font pas partie du problème, sont définis.	83%

Tableau 2 - *Tableau de synthèse des moyennes de validation des critères dans les productions d'élèves.*

Nous voyons que certains critères sont validés pour une large majorité de productions (plus de 70% des élèves) : tout d'abord ceux en lien avec les dimensions « modélisation » et « technique », mais aussi la mise en œuvre d'une méthode de résolution, la recherche de régularités à partir des essais effectués, le soin, la pertinence de la narration et le fait que les narrations des élèves soient compréhensibles.

A l'inverse, un seul critère est validé pour moins de 30% des productions d'élèves. Il s'agit du critère relatif à la nécessité de tester, prouver chaque conjecture émise. Nous avons noté lors de l'analyse a priori de cette activité que la preuve validant la formule obtenue par les élèves était difficilement accessible à ce niveau scolaire. L'énoncé complet de ce critère met cependant bien en avant le fait que lorsque la preuve n'est pas accessible pour les élèves, ces derniers peuvent tester leur conjecture sur des exemples pour montrer qu'elle n'est pas invalidée par ces exemples, ce qui était une démarche attendue dans ce problème. Le faible pourcentage de productions d'élèves pour lesquels ce critère a été validé ne s'explique donc pas seulement par le choix du problème proposé mais illustre selon nous les difficultés rencontrées par un grand nombre d'élèves.

Tous les autres critères (les éléments qui ont permis d'énoncer chaque conjecture sont identifiables ; une conjecture valide ou un nombre suffisant de conjectures non valides est énoncé ; chaque conjecture fait l'objet d'une conclusion cohérente avec la démarche décrite au point précédent ; à l'issue de ses recherches, l'élève exprime une conclusion cohérente avec le problème et les recherches qu'il/elle a effectuées ; ainsi que le caractère complet et chronologique de la narration) sont validés pour environ la moitié des productions d'élèves. Cela illustre le fait qu'un nombre important d'élèves ne maitrisent pas encore ces aspects de la recherche et de la narration associée à cette recherche.

En synthèse, sur le problème des châteaux de cartes, les élèves sont peu nombreux à avoir des difficultés pour s'approprier le problème ou se lancer dans la recherche, ce qui était prévisible au vu du problème proposé. Les élèves peuvent en effet facilement se lancer dans la recherche en comptant sur les schémas le nombre de cartes nécessaires, pour de faibles nombres d'étages. Sur l'aspect narratif, ils produisent majoritairement des textes compréhensibles et pertinents mais qui ne relatent pas toujours de manière complète et chronologique leur recherche. Ils mobilisent par ailleurs en général des concepts et des outils mathématiques pertinents par rapport au problème et les utilisent correctement. Concernant la dimension « recherche », ils font des essais pertinents et cherchent à en faire ressortir des régularités. Néanmoins, les éléments en lien avec la notion de conjecture mettent en difficulté un plus grand nombre d'élèves. Les conjectures font peu souvent l'objet d'une recherche de validation ou d'invalidation, elles ne sont pas toujours mises en lien avec ce qui a permis d'aboutir à celles-ci, elles ne sont pas toujours en nombre suffisant et ne font souvent pas l'objet d'une conclusion. Ce sont donc le caractère complet et chronologique de la narration ainsi que la dimension « recherche » qui posent le plus de difficultés aux élèves.

Ces analyses nous donnent des résultats globaux concernant les critères majoritairement validés et invalidés par les enseignants dans les productions d'élèves. Nous en venons à nous demander s'il est possible de caractériser plus finement les productions des élèves et ainsi déterminer des profils d'élèves.

2. Profils d'élèves

Nous cherchons à déterminer l'existence de profils d'élèves relativement à la résolution de ce problème. Nous recourrons pour cela à une analyse dite *en clusters*. Cette classification d'individus en un certain nombre de sous-groupes homogènes permet de faire apparaitre une potentielle structure dans des données. Nous travaillons avec un regroupement des élèves en

fonction de leurs résultats sur ce problème, sur chacun des quinze critères de la grille. Chaque élève est donc représenté par un vecteur de dimension 15. La distance entre les élèves est estimée en fonction du carré de la distance euclidienne les séparant. L'analyse en clusters vise à regrouper les élèves en sous-groupes de proximité. Suite à de premières analyses, nous choisissons de travailler avec un regroupement en neuf clusters. Nous souhaitons en effet avoir un nombre de clusters suffisant pour identifier différents profils d'élèves, mais pas trop important pour ne pas réduire le nombre d'individus constituant chaque groupe à des valeurs négligeables, et ainsi rendre trop peu représentatifs les profils identifiés.

Nous choisissons ainsi une analyse en clusters qui regroupe les 494 élèves évalués en neuf sous-groupes homogènes. Trois sous-groupes sont constitués de moins de 10 individus. Nous décidons de ne pas les conserver par souci de représentativité. Les sous-groupes restants ne sont cependant pas non plus homogènes en termes de nombre d'individus concernés. En effet, tandis qu'un sous-groupe est constitué de 377 individus, les autres ne sont pas formés de plus de 41 individus. Pour caractériser chaque sous-groupe, nous considérons la moyenne obtenue à chacun des critères de la grille. Nous analysons et comparons ces moyennes à celles obtenues en considérant l'ensemble des élèves.

Le premier sous-groupe est constitué de 377 élèves. Avec 76.3% des élèves évalués c'est le sous-groupe le plus important. Ce sont des élèves qui suivent les tendances générales observées précédemment. Les moyennes des élèves de ce sous-groupe sont légèrement supérieures à celles obtenues en considérant tous les élèves, et ce pour chaque critère. Ils réussissent globalement bien et seuls quelques critères les mettent en échec. Leurs difficultés se concentrent sur la dimension « recherche » et sur le fait qu'ils n'expliquent pas toujours en détails comment ils en sont arrivés à formuler une conjecture, qu'ils ne tentent pas assez de tester et prouver leurs conjectures, et qu'ils ne concluent pas chaque étape liée à une conjecture. Nous donnons ci-dessous un extrait de production d'un élève ayant ce profil (figure 1).

Les élèves constituant le deuxième sous-groupe sont au nombre de 41 (8.3% des élèves évalués). Ces élèves rendent un travail qui n'est pas soigné. Ils éprouvent des difficultés concernant l'aspect « narration » : leurs narrations ne sont ni pertinentes et ni complètes, et pas toujours compréhensibles. Ils éprouvent par ailleurs des difficultés quant à la dimension « recherche » : sur le fait de trouver une conjecture valide ou d'en proposer un nombre suffisant, de chercher à prouver ces conjectures et de conclure (à propos de leurs conjectures et de leur recherche). Ils maitrisent cependant très bien la dimension « technique ». Ce sont donc principalement les compétences en lien avec la dimension « narration » et les éléments de recherche et de validation de conjectures qui leur posent problème.

Le troisième sous-groupe réunit 24 élèves (4.9% des élèves évalués). Ces élèves produisent des narrations pertinentes et compréhensibles mais qui ne sont pas complètes. Ils ont quelques difficultés à mobiliser des outils pertinents par rapport au problème. Toute la partie relative à une démarche scientifique de la dimension « recherche » leur pose problème (les phases d'essais, de conjecture et de preuve). Ils présentent enfin des difficultés importantes quant à la dimension « technique ». Ces élèves ont de bonnes compétences sur la forme de la narration, mais présentent par ailleurs des difficultés dans presque toutes les dimensions évaluées et en particulier dans les dimensions « recherche » et « technique ».

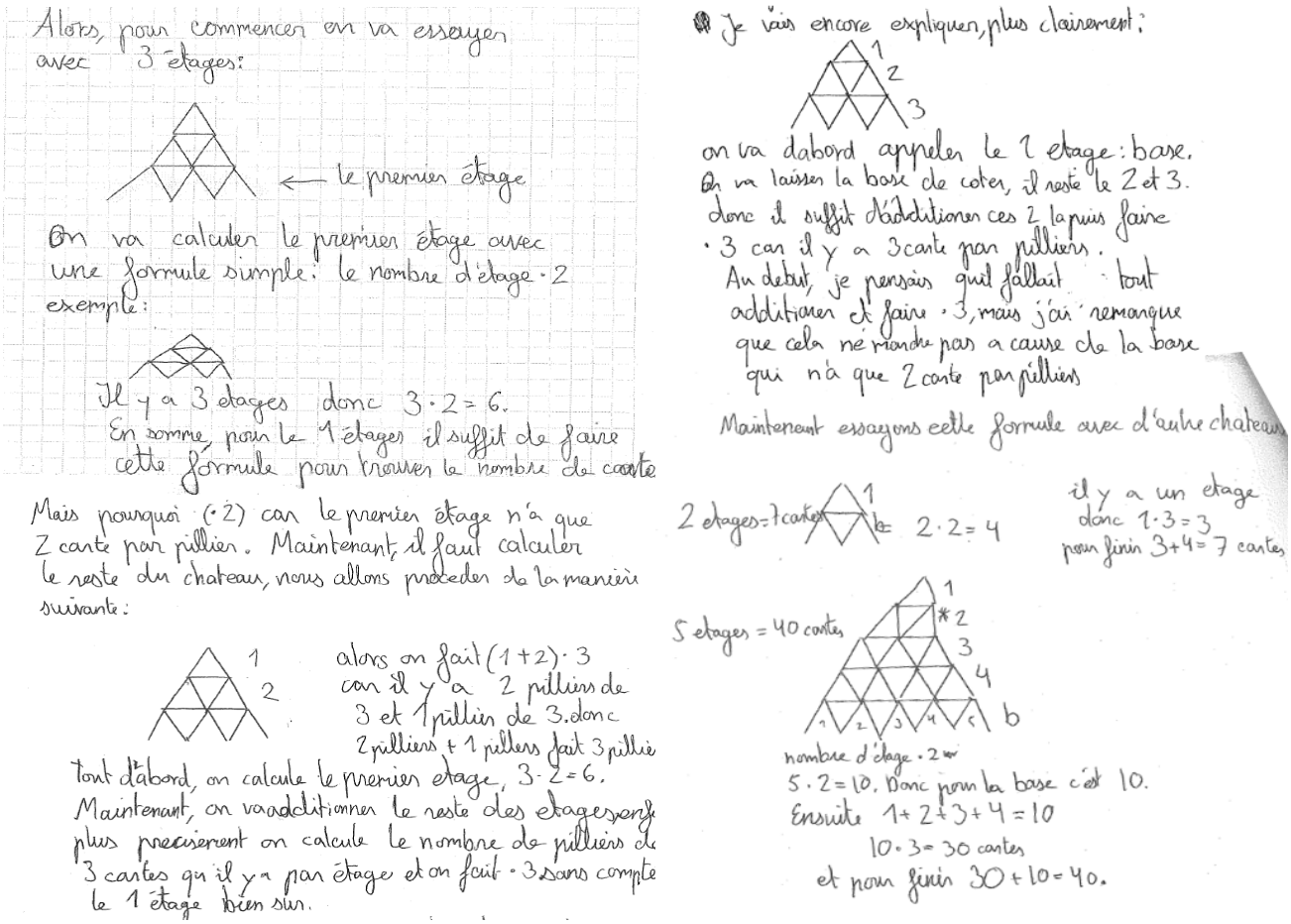


Figure 1 *– Extrait d'une production d'élève présentant le profil 1*

Le quatrième sous-groupe est constitué de 19 élèves (3.8% des élèves évalués). Ces élèves ont des difficultés concernant la dimension « narration », sur la mobilisation d'outils mathématiques pertinents par rapport au problème, sur la dimension « recherche » et en particulier tout ce qui touche au triplet essais-conjecture-test-preuve. Ils pensent cependant davantage que la moyenne à conclure leur recherche. Ces élèves présentent donc des difficultés importantes sur la dimension « narration » et sur l'adoption d'une démarche scientifique.

Les élèves constituant le cinquième sous-groupe sont au nombre de 12 (2.4% des élèves évalués). Ces élèves rédigent des narrations pertinentes et compréhensibles mais non complètes. Ils ont des difficultés à mobiliser des outils pertinents par rapport au problème. Ils se lancent cependant sur des pistes de recherche et font des essais cohérents. Ils arrivent à trouver une conjecture valide ou ils en testent un nombre suffisant mais ne donnent pas d'explication de ce qui leur a permis d'énoncer leur(s) conjecture(s), ne cherchent pas à la/les prouver, et ne concluent pas leur recherche. Ils ont enfin des difficultés quant à la partie « technique », en particulier en ce qui concerne la mise en œuvre de concepts et d'outils mathématiques. Ce sont donc des élèves qui réussissent bien relativement à la forme de la narration et à la phase « essais » de la démarche scientifique. Ils présentent cependant des difficultés à mobiliser des outils pertinents, à justifier leur conjecture et à chercher à les prouver, tout comme quant à la maitrise des outils et concepts mathématiques utilisés.

Le sixième et dernier sous-groupe est constitué de 11 élèves (2.2% des élèves évalués). Ces élèves présentent des difficultés importantes concernant tous les aspects de la dimension « narration ». Bien que s'étant appropriés le problème, ils ne se lancent pas sur la recherche

de pistes de résolution, ils ne mobilisent pas des outils pertinents pour tenter de résoudre le problème. Ils ont aussi des difficultés concernant le fait de trouver une conjecture valide ou d'en proposer un nombre suffisant, de chercher à les prouver et de conclure leur recherche. Ils présentent enfin des difficultés sur les deux aspects relatifs à la dimension « technique ». Ces élèves présentent donc des difficultés importantes sur toutes les dimensions évaluées.

En synthèse, le profil largement majoritaire est donc celui d'un élève qui réussit globalement bien et qui présentent des difficultés en lien avec la dimension « recherche » (le fait qu'il n'explique pas assez en détails ce qui l'a amené à formuler une conjecture, qu'il ne tente pas suffisamment de tester/prouver ses conjectures et qu'il ne conclut pas chaque étape liée à une conjecture). Pour les cinq autres profils identifiés, il nous semble intéressant de noter que tous partagent des difficultés concernant le caractère complet de la narration, la mobilisation d'outils pertinents par rapport au problème et le fait de chercher à tester/prouver les conjectures. Le seul élément validé pour tous les profils est celui relatif à l'appropriation du problème. Tous les autres critères, une majorité donc, amènent à des divergences ; ils sont maitrisés par certains, posent des difficultés à d'autres.

V. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Cette étude à large échelle permet de mettre en lumière les compétences et les difficultés rencontrées par les élèves en lien avec la résolution de problèmes lorsque celle-ci devient un objectif d'apprentissage pour elle-même et que l'évaluation s'organise autour du dispositif de la narration de recherche. Les compétences et difficultés des élèves nous sont données à voir par le biais des évaluations que font les enseignants des productions des élèves relativement à un problème donné. Ces évaluations constituent selon nous un matériau riche pour établir, à un moment donné, un bilan des compétences d'un grand nombre d'élèves. Il nous semblerait intéressant de compléter cette étude effectuée à un niveau macro par une étude plus fine des compétences mises en œuvre par quelques élèves lors de la résolution de tels problèmes. Nous n'avons de plus présenté ici qu'une partie de la recherche qui nous a amené par ailleurs à interroger l'influence des critères pour lesquels les élèves rencontrent des difficultés sur la note qui leur est attribuée et sur leur réussite à la tâche ; à analyser de potentielles corrélations entre les quinze critères de la grille ; et à chercher à savoir si certains critères d'évaluation amènent à d'avantage de divergence d'interprétation entre enseignants que d'autres. Ces autres résultats ont été présentés lors du colloque EMF2018.

REFERENCES

Bonafé F., Sauter M., Chevallier A., Combes M.-C., Deville A., Dray L., Robert J.-P. (2002) Les narrations de recherche du primaire au Lycée. *Brochure APMEP*, 151.

Conférences Intercantonale de l'Instruction publique de la Suisse romande et du Tessin. (2010) Plan Etudes Roman 3e cycle, Mathématiques et sciences de la nature. Sciences humaines et sociale. Consulté à l'adresse http://www.plandetudes.ch

Hersant M. (2010) *Empirisme et rationalité au cycle 3, vers la preuve en mathématiques*. Mémoire complémentaire pour l'Habilitation à diriger des recherches, Université de Nantes.

Leclercq D., Nicaise J., Demeuse M. (2013) Docimologie critique: des difficultés de noter des copies et d'attribuer des notes aux élèves. In M. Demeuse, *Introduction aux théories et aux méthodes de la mesure en sciences psychologiques et en sciences de l'éducation* (pp. 273‑292). Les éditions de l'Université de Liège.

IMPACT DES ILLUSTRATIONS ACCOMPAGNANT LES PROBLEMES PROBLEMATIQUES : FOCUS SUR LE CODAGE DES REPONSES

FAGNANT[*] Annick –AUQUIERE[**] Amélie

Résumé – En prolongement des travaux menés par Dewolf et al. (2017), la présente étude vise à évaluer l'impact de trois types d'illustrations sur la proportion de réponses réalistes produites par des élèves de 10-12 ans face à des problèmes problématiques. Cet article se centre sur une analyse exploratoire portant sur l'établissement du codage des réponses en « réalistes » *vs* « non réalistes ». Les productions d'élèves mettent en lumière la diversité des réponses produites et la difficulté de ce codage.

Mots-clefs : Evaluation, Problème problématique, Illustration, Réponse réaliste, Réponse non réaliste

Abstract – Following the work conducted by Dewolf et al. (2017), the present study intends to assess the impact of three types of illustrations on the proportion of realistic reactions produced by 10-12 years' old pupils confronted with problematic problems. This paper focuses on an exploratory analysis aiming at establishing the coding between "realistic" or "non realistic" reactions. Pupils productions highlight the diversity of the answers and the difficulty of this coding.

Keywords: Assessment, Problematic problem, Illustration, Realistic Reaction, Non-realistic Reaction

I. INTRODUCTION

En France, au début des années 1980, plusieurs études ont montré que la plupart des élèves fournissent une réponse numérique précise face à des problèmes pourtant insensés, comme le célèbre problème de « l'âge du capitaine » : « *Il y a 26 chèvres et 10 moutons sur le bateau. Quel est l'âge du capitaine ?* » (voir Baruk, 1985). Un autre exemple connu provient d'une étude américaine dans laquelle le problème suivant est soumis à des élèves de 13 ans : « *Un bus de l'armée peut contenir 36 soldats. Si 1128 soldats doivent être conduits en bus à leur site d'entraînement, combien faudra-t-il de bus ?* ». Seuls 23% des élèves fournissent la réponse attendue (32 bus). Les autres n'interprètent pas correctement le résultat et proposent « 31 reste 12 », « 31,33 » ou « 31 » (Verschaffel, Greer & De Corte, 2000). Ces résultats étonnants peuvent sans doute en partie s'expliquer par une rupture du « contrat didactique » (Brousseau, 1990) dans la mesure où les problèmes proposés vont à l'encontre des « normes socio-mathématiques » (Yackel & Cobb, 1996) établies dans les classes, mais ils questionnent néanmoins sur ce qui peut conduire les élèves à procéder de cette façon. Ils questionnent aussi quant aux pratiques de classe qui conduisent les élèves à penser que le « contrat » est de répondre coûte que coûte à tout problème proposé en classe (comme dans le 1er exemple) ou à négliger d'interpréter la solution obtenue de façon réaliste (comme dans le 2e exemple).

Ces questionnements ont conduit les chercheurs à étudier de manière assez systématique ce phénomène de « perte de sens » (Van Dooren, Verschaffel, Greer, De Bock, & Crahay, 2015 ; Verschaffel & De Corte, 2008), ainsi que les « présupposés » qui les sous-tendent et les éléments pouvant être à l'origine de ces présupposés (Depaepe, De Corte, & Verschaffel, 2015). De nombreuses études ont aussi tenté de voir dans quelle mesure les élèves utilisaient leurs connaissances de la vie réelle pour résoudre ce type de problèmes (que les auteurs qualifient de « problématiques ») et quel est l'impact de certaines consignes ou conditions de passation de l'évaluation sur la propension des élèves à produire des réactions réalistes (Dewolf, Van Dooren, Ev Cimen, & Verschaffel, 2014 ; Dewolf, Van Dooren & Verschaffel, 2017 ; Mellone, Verschaffel, & Van Dooren, 2017). Parmi ces divers éléments, c'est à l'impact des illustrations accompagnant les problèmes que notre étude s'intéresse.

[*] Université de Liège – Belgique – afagnant@uliege.be
[**] Université de Liège – Belgique – amelie.auquiere@uliege.be

Dans le cadre de cet article, après avoir présenté le cadrage théorique permettant de cibler la problématique et avoir expliqué le dispositif de recherche établi, c'est à une analyse exploratoire portant sur l'établissement du codage en réponses « réalistes » *vs* « non réalistes » que nous allons nous intéresser. Un focus sur cette étape nous a en effet semblé constituer une porte d'entrée intéressante pour ce *SPE* centré sur l'évaluation.

II. CADRAGE THEORIQUE ET PROBLEMATIQUE DE RECHERCHE

Les deux études pionnières dans ce domaine ont été réalisées dans les années 1990 en Irlande du Nord et en Communauté flamande de Belgique. Elles ont été reproduites dans de nombreux pays et aboutissent toujours à des résultats assez similaires (voir Verschaffel et al., 2000 pour une synthèse). Dans l'étude de Verschaffel, De Corte et Lasure (1994), menée en 5e année primaire (*grade 5*), un test papier-crayon composé de 10 paires de problèmes a été proposé aux élèves. Chaque paire d'items est composée d'un « problème standard », qui peut être résolu par l'application directe d'une opération, et d'un « problème problématique » pour lequel la simple application d'une opération pose question à partir du moment où des connaissances réalistes liées à la situation sont prises en considération.

Le tableau 1 présente trois paires de problèmes et des exemples de réponses réalistes (assorties de la proportion observée) pour les problèmes problématiques.

Problèmes standards	**Problèmes problématiques** RR = réponses faisant appel à des considérations réalistes	
Steve a acheté 5 planches de 2 m chacune. Combien de planches de 1 m peut-il faire à partir de ces planches ?	Steve a acheté 4 planches de 2,5 m chacune. Combien de planches de 1 m peut-il faire à partir de ces planches ?	**RR : 14%** - *Ex. Steve peut faire 8 planches (ou 10, mais avec de la bonne colle !).*
Un bateau navigue à une vitesse moyenne de 45 km/h. Combien de temps lui faudra-t-il pour parcourir 180 km ?	John court le 100 m en 15 secondes. Combien de temps lui faudra-t-il pour parcourir un km ?	**RR : 3%** - *Ex. Certainement plus de 150 secondes.*
Christophe fait une balade. Il marche 8 km durant la matinée et 15 km durant l'après-midi. Combien de km a-t-il marché en tout ?	Bruce et Alice vont à la même école. Bruce habite à 17 km de l'école et Alice à 8 km de l'école. Quelle est la distance entre la maison de Bruce et la maison d'Alice.	**RR : 5%** - *Ex. La réponse doit se situer entre 9 et 25 km.*

Tableau 1 – *Exemples de problèmes standards et problématiques, ainsi que de réponses réalistes associées* (d'après l'étude de Verschaffel et al., 1994, voir aussi Verschaffel et al., 2000)

Les élèves produisent très peu de réponses réalistes. Ils ont tendance à appliquer « envers et contre tout » des opérations arithmétiques en vue de fournir des réponses numériques précises à tous les problèmes proposés, ce que les auteurs qualifient de « réactions non réalistes » (Verschaffel et al., 2000). L'extrait suivant explicite la distinction entre réponses « réalistes » (RR) *vs* « non réalistes » (NR) face aux problèmes problématiques (P-items).

> A reaction was scored as a NR when it was the result of a straightforward execution of the mathematical operation, without any further comment about the problematic nature of the problem or real-life consideration that might jeopardize the appropriateness of the executed operation(s). In contrast, when the answer—a precise numerical answer, an answer indicating some kind of estimation, or an answer stating that the problem is unsolvable—was the result of the use of real-world knowledge related to the realistic modelling issue involved in the P-item, it was considered as a RR. Also when a pupil gave a straightforward non-realistic answer but made an additional comment that contained a trace of a realistic consideration about the modelling issue involved in the P-item, it was considered as a RR (Dewolf et al., 2017, p. 337).

Plusieurs études ont tenté d'amener les élèves à construire un « modèle de situation » plus riche (c.-à-d. prenant en compte des connaissances de la vie réelle et visant à diminuer la tendance à répondre de façon non réaliste) en « manipulant » différentes conditions de passation. Ainsi, certaines ont introduit les problèmes en proposant un *avertissement* visant à attirer l'attention des élèves quant au fait que le test contenait certains problèmes un peu particuliers ; d'autres ont proposé une tâche préalable invitant les élèves à *reformuler* et à enrichir le problème (seul ou en duo) et d'autres encore ont *accompagné les problèmes d'illustrations* ayant pour objectif d'enrichir les éléments concrets pris en compte dans la construction du modèle de situation (Dewolf et al., 2014, 2017 ; Mellone et al., 2017).

Dans une première étude, Dewolf et al. (2014) ont proposé des problèmes problématiques à des élèves de 5e primaire (*grade 5*) selon quatre conditions de passation : problèmes accompagnés d'un *avertissement*, problèmes accompagnés d'une *illustration*, problèmes accompagnés de ces deux types d'indice et problèmes seuls. Contrairement à leurs attentes, aucun des deux types d'indice n'a d'effet, tout comme d'ailleurs la combinaison de ceux-ci.

Prolongeant ces travaux et émettant l'hypothèse que les illustrations utilisées n'étaient pas suffisamment significatives, Dewolf et al. (2017) ont alors comparé l'effet de trois types d'illustrations en soumettant 7 items problématiques à 288 élèves de 5e et 6e années primaires (*grades 5-6*). S'appuyant sur la typologie d'Elia et Philippou (2004), ils décrivent les illustrations retenues dans leur étude comme étant "*représentationnelles*" au sens où elles décrivent un contexte réaliste et représentent certains éléments de contenu évoqués dans le problème *(≠ décoratives*), qu'elles n'orientent pas la stratégie de résolution (≠ *organisationnelles*) et qu'elles ne contiennent pas de données essentielles pour résoudre le problème (≠ *informationnelles*). Ce qui distingue alors les trois modalités comparées, c'est que le premier type d'illustrations représente simplement le contexte dans lequel se situent les problèmes (comme dans l'étude de 2014) alors que les deux autres contiennent un élément supplémentaire, ciblé sur la particularité de la situation d'un point de vue réaliste. Dans la troisième modalité, cet élément est mis en évidence en couleur (voir figure 1 pour un exemple des trois types d'illustration). Afin d'éviter un effet-classe, les trois types d'illustrations sont distribués aléatoirement au sein de chaque classe et ce sont les résultats globaux (toutes classes confondues) qui sont comparés par les auteurs. Dans chacune des conditions, les élèves reçoivent aussi deux avertissements visant à attirer leur attention sur le fait que certains problèmes sont un peu particuliers et les invitant à regarder attentivement les illustrations.

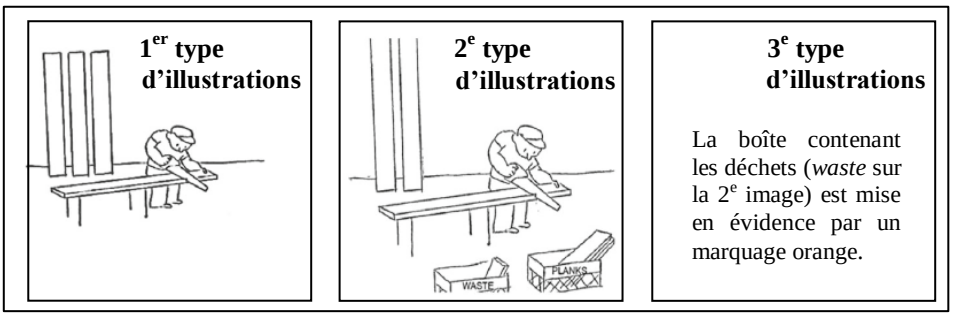


Figure 1 *– Les illustrations utilisées dans l'étude de Dewolf et al. (2017, p. 343) face au problème des planches dont l'énoncé est repris dans le tableau 1*

Les résultats obtenus par les chercheurs sont globalement décevants : les élèves produisent en moyenne seulement 23,7% de RR et il n'y a pas de différences significatives en fonction des trois conditions expérimentales. Les deux nouveaux types d'aide visuelle n'apportent donc aucune plus-value substantielle alors qu'ils visaient pourtant à mettre en exergue un élément-clé du problème, si l'on considère celui-ci d'un point de vue réaliste.

Parmi les hypothèses évoquées par les auteurs pour expliquer ces résultats, les présupposés (ou croyances) des élèves relatifs, non seulement à la résolution de problèmes en général, mais aussi au rôle et à l'importance des illustrations accompagnant les problèmes ont retenu notre attention. Ils estiment que les illustrations ont pu être sous-évaluées par les élèves qui ont pu les considérer comme purement décoratives et donc les ignorer ou les analyser très superficiellement. En effet, même si les auteurs les considèrent comme « *représentationnelles* » (au sens où elles évoquent un contexte réaliste), elles pourraient tout autant être considérées comme « *décoratives* » dans la typologie d'Elia et Philippou (2004) si elles accompagnaient un problème standard. En prolongement de l'étude de Dewolf et al. (2017), notre étude cherche à évaluer l'effet de la présence d'illustrations « *informationnelles* » qui, en présentant les données numériques de l'énoncé au sein même des illustrations (et uniquement dans celles-ci), vont contraindre les élèves à les prendre en compte pour résoudre le problème.

III. DISPOSITIF DE RECHERCHE ET QUESTIONNEMENT PREALABLE

Le dispositif expérimental mis en place est tout à fait parallèle à celui de l'étude précitée : nous avons utilisé les 7 mêmes problèmes problématiques ; le double *avertissement* a été donné à tous les élèves et trois types d'illustrations ont été répartis aléatoirement dans chaque classe. C'est au niveau des types d'illustrations utilisés que se situe la différence majeure : les deux premiers types correspondent à ceux utilisés par les chercheurs flamands (voir figure 1) et le troisième type transforme le type 2 en retirant les données du texte de l'énoncé pour les placer sur le dessin (voir figure 2).

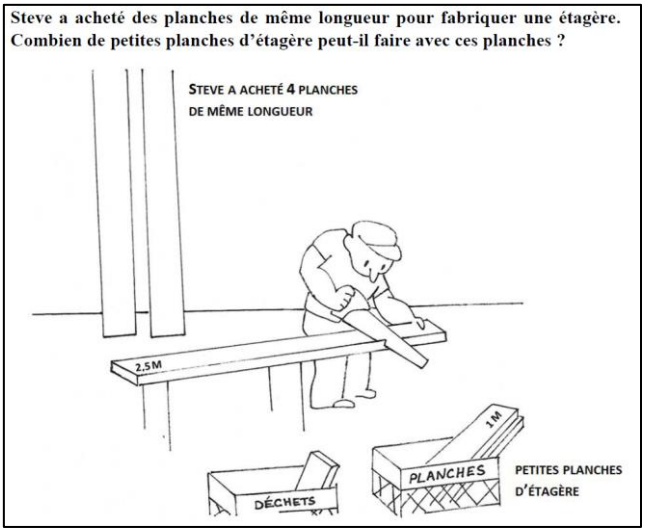


Figure 2 *– Exemple d'illustration informationnelle utilisée dans notre étude pour le problème des planches*

Dans ce cas, l'élève ne peut pas se contenter de lire le texte et de jeter (ou pas) un rapide coup d'œil sur l'illustration. Il est obligé de prendre en compte celle-ci pour y retirer les données utiles à la résolution du problème. L'hypothèse que nous formulons est alors que la contrainte de prise en compte de l'illustration impactera positivement la production de réponses réalistes. Autrement dit, nous faisons l'hypothèse que les *illustrations informationnelles* conduiront les élèves à plus de réalisme que les *illustrations représentationnelles*.

Pour tenter de vérifier cette hypothèse, le test a été soumis à un échantillon de près de 500 élèves provenant d'une vingtaine de classes de 5^{e}-6^{e} années primaires (*grades 5-6*) situées en

Belgique francophone. Les données ont été récoltées dans le cadre de travaux pratiques proposés à des étudiants inscrits au master en Sciences de l'Education dans notre institution.

Dans les différentes études centrées sur cette thématique, les auteurs catégorisent l'ensemble des réponses produites par les élèves en deux catégories (RR *vs* NR) auxquelles s'ajoutent les (rares) omissions. Le pourcentage de RR est alors calculé sur la somme des réponses produites. Par exemple, dans l'étude de Dewolf et al. (2017) dans laquelle 288 élèves ont répondu chacun à 7 problèmes *(ce qui conduit à 2016 réponses possibles)*, les auteurs précisent que "*The percentage of RRs was calculated on a total of 2008 trials (since eight items were not solved). Across all conditions, only 23.8 % of the reactions was scored as realistic*" (p. 342). Bien que les explications et les exemples fournis dans les articles semblent clairs, la diversité des productions produites par les élèves face à ces problèmes soulève un certain nombre de questionnements quant au codage dichotomique en RR *vs* NR. Dans le cadre de cet article, c'est sur cette étape préalable à la vérification de l'hypothèse susmentionnée que nous allons nous focaliser, en proposant une analyse exploratoire centrée sur le problème des planches.

IV. QUELQUES EXEMPLES ISSUS D'UNE ANALYSE EXPLORATOIRE

En vue de réaliser une première analyse exploratoire, les étudiants qui ont recueilli les données ont été invités à les coder en 6 catégories : (1) réponse réaliste attendue (RR) ; (2) réponse non réaliste attendue (NR) ; (3) réponse non réaliste attendue, mais avec erreur technique (ET) ; (4) hésitation quant au caractère réaliste (RR/NR ?) ; (5) autres réponses (AR) et (6) omission (OM). C'est parce que nous avions anticipé quelques difficultés de codage que nous avions prévu ces catégories « RR/NR ? » et « AR ». En demandant aux codeurs de ne coder comme « RR » ou « NR » que les éléments correspondant « au plus près » aux réponses que nous avions pu anticiper grâce aux écrits antérieurs, nous cherchions à limiter les erreurs de codage. Nous avions aussi prévu un fichier partagé où les étudiants pouvaient introduire une réponse d'élève pour demander un avis sur son codage et ce, dans le but d'uniformiser le codage de certaines réponses posant question. Procéder avec ces codes multiples devait aussi permettre d'avoir une vue d'ensemble des données, avant de procéder nous-mêmes à un recodage « calibré » mettant en place diverses techniques en vue d'assurer sa fiabilité.

En codant ainsi tous les problèmes, nous nous attendions à obtenir une majorité de codes « RR » et « NR », traduisant les deux types de réponses attendus (les « ET » traduisant également des « NR », que nous pourrons d'emblée regrouper avec les autres). Les premières données « brutes » montrent que la réalité est toute autre : elles mettent en exergue la diversité des productions d'élèves et la difficulté de coder leurs réponses de façon dichotomique.

Dans le **problème des planches**, le premier codage brut des données conduit à identifier 14,7% de « RR », 36,5% de « NR » (incluant quelques « ET ») ; 0,6% de « RR/NR ? » ; 41% d'autres réponses et 7,3% d'omission. Que cache chacun de ces codes ?

Au niveau des **codes « RR »**, on rencontre des réponses « 8 planches » (avec ou sans indication des unités et avec ou sans trace du calcul effectué) et des réponses évoquant explicitement le caractère problématique lié à la construction de 10 planches (par ex. « *Avec toutes les planches ça fait 8 planches de 1m et il reste 4 morceaux de bois de 0,5 ; si on les recolle ça fait 2 planches de plus = 10 planches* »).

Les **codes « NR »** traduisent des réactions consistant à proposer comme réponse « 10 planches » (avec ou sans unité et/ou trace du calcul), sans que cette réponse soit accompagnée de la moindre indication de la difficulté que pourrait rencontrer le menuisier avec ses

« restes » d'un demi-mètre. Dans ces deux cas, il n'y a pas d'ambiguïté possible, si l'on se réfère aux explications données par les auteurs. Par contre, la réponse « *Pas clair parce que 4 planches de 2,5 m ok mais une à 1 m c'est pas possible* » est plus complexe à interpréter dans la mesure où l'on ne sait pas si l'élève cible bien où se situe la difficulté, ni même s'il a compris qu'on pouvait sans problème couper deux planches de 1 m au départ d'une planche de 2,5 m. Fait-il preuve d'un certain réalisme ou fait-il (simplement) preuve d'une incompréhension du problème ? Pour cette réponse, qui avait été partagée dans le fichier commun, le code provisoirement proposé est le **code « RR/NR ? »** indiquant la difficulté du positionnement dichotomique.

Les **codes « AR »** recouvrent une grande diversité. De façon clairement non-représentative (et non-exhaustive) et avec pour seule intention (à ce stade) d'illustrer la diversité des productions d'élèves codées « AR », la figure 3 en propose quatre exemples.

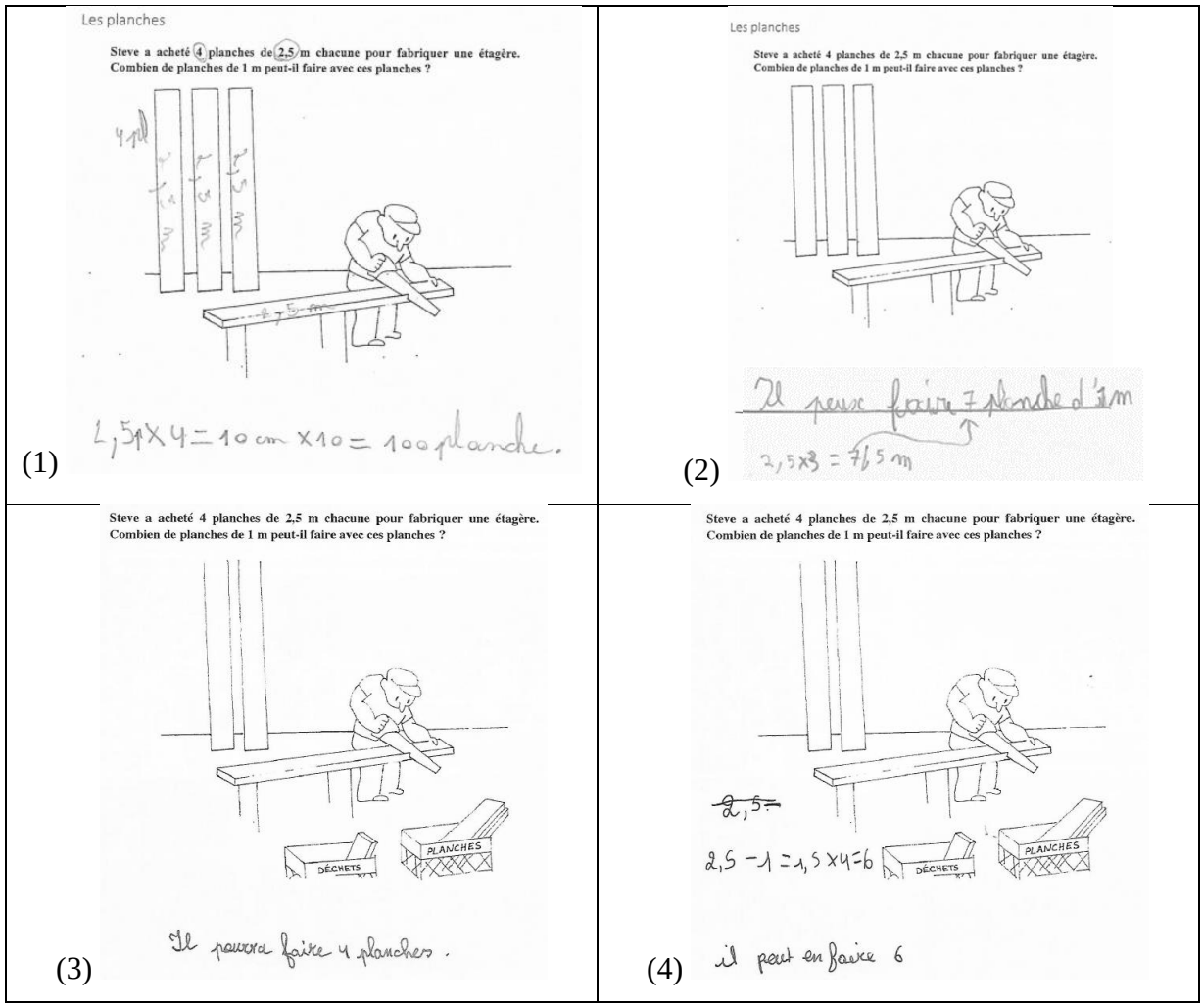


Figure 3 *– Quatre exemples de réponses codées « AR » (autres réponses) face au problème des planches*

Dans le premier cas (1), l'élève met en œuvre la démarche non réaliste attendue, mais il poursuit ensuite les calculs, sans doute parce qu'il s'embrouille dans les unités entre les centimètres et les mètres. *A priori*, ce type de réponse pourra être recodé comme « NR », dans la même logique que les réponses de type « 10 planches ». Dans le deuxième cas (2), l'élève a sans doute pris en compte l'illustration *représentationnelle* pour considérer uniquement les 3 planches posées contre le mur plutôt que les 4 planches indiquées dans l'énoncé. Son calcul « 2,5x3 » s'apparente à la démarche non réaliste attendue, mais le conduit à une réponse

décimale (7,5 m et non 10 m). On pourrait penser qu'il répond ensuite de façon réaliste puisqu'il répond « 7 planches » (et non 7,5 planches), mais cette réponse nécessiterait tout de même de coller ensemble deux planches de 0,5 mètre, difficulté qu'il n'évoque nullement. Doit-on alors considérer sa réponse comme « réaliste » (puisqu'il procède à un arrondi) ou comme non réaliste (puisqu'il ne cerne pas le cœur de ce problème et « colle » – mathématiquement seulement – les restes de ses planches) ? La réponse « 4 planches » (3) traduit une « rupture » avec le « contrat didactique » classique (fournir comme réponse une donnée de l'énoncé étant rarement attendu en classe) et est possible en situation réelle (comme toute réponse proposant un nombre entier égal ou inférieur à 8). On pourrait alors penser qu'il est logique de la coder comme « RR ». Dans le dernier exemple (4), la démarche est peu compréhensible (l'élève retire-t-il 1 mètre parce qu'il voit qu'il y a des restes ?) et la réponse « 6 planches » n'est pas réaliste (même si elle est inférieure à 8) puisqu'elle découle de l'opération « 4x1,5=6 » qui correspond en réalité à la même logique que la « NR » conduisant à la réponse « 10 ». *A priori*, cette production est donc plutôt non réaliste. Un dernier exemple pour terminer et illustrer encore une autre difficulté rencontrée : comment considérer une réponse du type « *Pas clair ! On ne dit pas combien de mètre fait l'étagère* » ?

V. CONCLUSION PROVISOIRE ET DISCUSSION

Depuis de nombreuses années, des chercheurs s'intéressent aux réactions des élèves face à des problèmes qualifiés de *problématiques* dans la mesure où ils ne peuvent pas être résolus par la simple application d'une opération réalisée au départ des données de l'énoncé, du moins si l'on prend en considération des connaissances réalistes liées à la situation. Dans cet article, nous avons présenté les premières étapes d'une recherche visant à analyser l'impact d'*illustrations informationnelles* sur le caractère réaliste des réponses fournies par les élèves. Nous avons illustré les premiers résultats bruts au départ d'un problème classiquement utilisé dans ces études (les planches). Celui-ci présente la particularité de pouvoir être résolu par une réponse numérique précise, ce qui n'est pas le cas de la plupart des problèmes problématiques proposés dans ces études (voir exemples dans le tableau 1). On pourrait discuter longuement du choix des problèmes eux-mêmes ou des illustrations qui les accompagnent (pourquoi le menuisier commence-t-il par découper « un reste » plutôt qu'une planche de 1 m ?), mais ce n'est pas l'objet qui a retenu notre attention ici.

Cette analyse exploratoire ne nous permet évidemment pas encore d'apporter une conclusion quant à l'impact des *illustrations informationnelles*, mais les premiers résultats (non présentés ici), issus du codage brut, montrent une légère tendance en faveur de notre hypothèse. Ainsi, on note une faible augmentation des réponses réalistes attendues et une diminution des réponses non réalistes. Comme l'ont montré des études antérieures, quand elles sont utilisées face à des problèmes standards, les *illustrations informationnelles* complexifient la résolution du problème (Berends & Van Lieshout, 2009 ; Elia, 2009 ; Elia et al., 2007). Puisque notre objectif était d'empêcher les élèves de se précipiter dans la production d'une réponse non réaliste, nous pensions qu'elles pourraient s'avérer fonctionnelles face aux problèmes problématiques. Toutefois, la diminution des NR, qui entraîne une augmentation des réponses « autres » (AR) face à certains problèmes, pourrait aussi traduire un accroissement de la difficulté, engendré par la présence d'illustrations. Les élèves commettraient ainsi d'autres types d'erreurs que les NR attendues, mais sans pour autant fournir davantage de RR. Evidemment, il ne s'agit à ce stade que d'une hypothèse interprétative qui devra être vérifiée lors du recodage des réponses pour l'ensemble des problèmes.

Les éléments présentés ici sont centrés sur un problème spécifique, mais les difficultés de codage se sont révélées présentes pour tous les problèmes de l'étude. A ce stade, l'analyse exploratoire réalisée questionne la pertinence de vouloir classer toutes les réponses de façon dichotomique en « RR » *vs* « NR », comme c'est le cas dans les études antérieures. En nous centrant sur l'étape de codage, nous avons voulu mettre à jour la diversité des productions d'élèves et les difficultés d'interprétation de certaines réponses. Cette étape constitue un enjeu central des recherches visant à évaluer l'impact de certaines variables sur les réponses produites par les élèves dans un test, enjeu qui nous semble pourtant insuffisamment développé dans de nombreux travaux.

REFERENCES

Baruk, S. (1985). *L'âge du capitaine : de l'erreur en mathématiques*. Paris : Seuil.

Berends, I.E., & van Lieshout, E.C.D.M. (2009). The effect of illustrations in arithmetic problem-solving: Effects of increased cognitive load. *Learning and Instruction, 19,* 345-353.

Brousseau, G. (1990). Le contrat didactique : Le milieu. *Recherches en Didactique des mathématiques, 9,* 308-336.

Depaepe, F., De Corte, E., & Verschaffel, L. (2015). Students' non-realistic mathematical modeling as a drawback of teachers' beliefs about and approaches to word problem solving. In B. Pepin & B. Roesken-Winter (Eds.). *From beliefs to dynamic affect systems in mathematics education.* Springer: Advance in mathematics education.

Dewolf, T., Van Dooren, W., Ev Cimen, E., & Verschaffel, L. (2014). The impact of illustrations and warnings on solving mathematical word problems realistically. *The Journal of Experimental Education, 82*(1), 103-120.

Dewolf, T., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2017). Can visual aids in representational illustrations help pupils to solve mathematical world problems more reastically? *European Journal of Psychology of Education, 32,* 335-351.

Elia, I. (2009) L'utilisation d'images dans la résolution de problèmes additifs: quel type d'images et quel rôle ? *Annales de Didactiques et des Sciences cognitives, 14*, 5-29.

Elia, I., Gagatsis, A., & Demetriou, A. (2007). The effects of different modes of representations on the solution of one-step additive problems. *Learning and Instruction, 17,* 658-672.

Elia, I., & Philippou, G. (2004). The functions of pictures in problem solving. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 2, pp. 327–334). Bergen, Norway: University College.

Mellone, M., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2017). The effect of rewording and dyadic interactions on realistic reasoning in solving word problems. *The Journal of Mathematical Behavior, 46*, 1-12.

Van Dooren, W., Verschaffel, L., Greer, B., De Bock, D., & Crahay, M. (2015). La modélisation et la résolution de problèmes d'application. In M. Crahay & M. Dutrevis (Eds), *Psychologie des apprentissages scolaires* (pp. 199-220). Bruxelles: De Boeck.

Verschaffel, L., & De Corte, E. (2008). La modélisation et la résolution des problèmes d'application : de l'analyse à l'utilisation efficace. In M. Crahay, L. Verschaffel, E. De Corte & J. Grégoire (Eds.). *Enseignement et apprentissage des mathématiques. Que disent les recherches psychopédagogiques ?* (153-176). Bruxelles : De Boeck.

Verschaffel, L., De Corte, E., & Lasure, S. (1994). Realistic considerations in mathematical modelling of school arithmetic word problems. *Learning and Instruction, 4,* 273-294.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Lisse, The Netherlands : Swets & Zeitlinger.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458-477.

ÉTUDE DES PRATIQUES ÉVALUATIVES DE PROFESSEURS DES ÉCOLES DANS LE CADRE D'UN LEA

SAYAC[*] Nathalie – GRAPIN[**] Nadine – BLANCHOUIN[***] Aline – MOUNIER Eric[****]

Résumé – Afin d'étudier les pratiques évaluatives des professeur·e·s en mathématiques, Sayac (2017) a développé un cadre d'analyse didactique reposant sur deux axes, l'un focalisé sur les épisodes évaluatifs proposés aux élèves et l'autre structuré par la "logique évaluative" des professeur·e·s. Nous montrons, dans cette communication, la façon dont ce cadre est employé pour étudier les pratiques évaluatives en mathématiques de professeur·e·s des écoles engagé·e·s dans une recherche collaborative au sein d'un LEA.

Mots-clefs : pratiques évaluatives, épisode évaluatif, jugement évaluatif, logique évaluative.

Abstract – To study the assessment practices of the teachers in mathematics, Sayac (2017) developed a frame of didactic analysis basing on two axes, the one focused on the evaluative episodes proposed to the pupils and the other one structured by the "evaluative logic" of the teacher. We show, in this communication, the way this frame is used to study the assessment practices of teachers engaged in a collaborative research within a LEA ("AeP" at. FIE).

Keywords: assessment practices, evaluative episode, evaluative judgement, evaluative logic.

I. INTRODUCTION

En France, les LéA (Lieux d'Etude Associés) sont « définis dans le programme scientifique de l'IFÉ (Institut français de l'éducation) comme des lieux à enjeux d'éducation, rassemblant un questionnement des acteurs et actrices, l'implication d'une équipe de recherche, le soutien du pilotage de l'établissement, et la construction conjointe d'un projet dans la durée. »[1]. La recherche que nous présentons est menée actuellement dans un LéA, qui a débuté en juin 2016 et concerne les classes de cycle 2 (élèves âgés de 6 à 9 ans, grade 1 à grade 3) de quatre écoles de Montreuil (Seine-Saint-Denis, France). En tout, une vingtaine de professeur·e·s des écoles (PE) de CP (Cours Préparatoire, grade 1), de CE1 (Cours élémentaire 1re année, grade 2) et de CE2 (Cours élémentaire 2ème année, grade 3) ainsi que quatre enseignant·e·s-chercheur·e·s (les auteur·e·s de ce texte de présentation) sont impliqué·e·s dans des actions de recherche et de formation. Notre intervention dans le Projet Spécial 3 de EMF 2018 concerne plus particulièrement un des axes de ce LéA, celui portant sur l'étude des pratiques évaluatives en mathématiques de professeur·e·s enseignant en CE1 et CE2. Nous allons décrire dans un premier temps le contexte dans lequel cette recherche est menée, puis le cadre théorique qui est utilisé pour étudier les pratiques évaluatives. Nous présentons ensuite la problématique qui en émerge dans la continuité de l'orientation du SP3 du colloque EMF2018. Les résultats issus de la première année du LéA, ainsi que ceux qui seront produits à la date du colloque, seront présentés lors de notre intervention à EMF2018.

[*] LDAR, Université-Paris-Est-Créteil – France – nathalie.sayac@u-pec.fr
[**] LDAR, Université-Paris-Est-Créteil – France – nadine.grapin@u-pec.fr
[***] CREAD, Université de Rennes – France – aline.blanchouin@u-pec.fr

[****] LDAR, Université-Paris-Est-Créteil – France – eric.mounier@u-pec.fr

[1] http://ife.ens-lyon.fr/lea

II. ELEMENTS DE CONTEXTE DE LA RECHERCHE

La zone d'éducation prioritaire où s'inscrivent les actions du LéA travaille depuis quelques années sur les questions d'évaluation. L'objectif de créer des outils communs d'évaluation en collaboration avec des chercheur·e·s intéresse l'équipe de circonscription et les PE engagé·e·s dans le LéA car il permet d'asseoir leurs décisions collectives sur un cadre théorique et de faire évoluer leurs représentations et leurs propositions pédagogiques en mathématiques. Les élèves des écoles primaires où est implanté le LéA présentent de nombreuses difficultés en numération, qui perdurent et se retrouvent en fin de collège. Ce constat coïncide avec les résultats des évaluations nationales CEDRE 2008 - 2014 en mathématiques (Dalibard & Pastor 2014).

D'un autre côté, les pratiques évaluatives des professeur·e·s sont reconnues comme complexes et dépendant de différents paramètres externes (injonctions ministérielles, projets d'école, attentes des parents, etc.) et internes (hétérogénéité, absentéisme, etc.). Ces pratiques sont hétérogènes et les évaluations proposées sont surtout sommatives avec des tâches mathématiques peu complexes et peu exploitées dans une perspective d'apprentissage (rapport IGEN 2013, Sayac, 2016).

Par ailleurs, l'activité d'évaluation des apprentissages mathématiques peut être également étudiée en prenant en compte le quotidien de la journée de classe. Ce registre d'activité de l'enseignant polyvalent est marqué par des compromis opératoires pour tenir la multi prescription « à faire apprendre et à évaluer » dans toutes les disciplines. Il est également le fruit de coûts cognitifs mais aussi socio-affectifs, matériels et temporels engagés (Blanchouin 2015) pour de tels moments de classe.

Des recherches menées en didactique des mathématiques au cycle 2 (Mounier 2017, pour le CP) montrent l'hétérogénéité des connaissances des élèves en numération, mais ne donnent pas une vue de l'ensemble du champ conceptuel du nombre et des opérations. La méthodologie d'analyse de la validité et le modèle d'analyse des connaissances numériques des élèves de fin d'école développés par Grapin (2015) répondent à ce manque et permettent de concevoir des évaluations diagnostiques avec une visée formative.

Pour compléter les éléments de ce contexte, il convient de préciser que l'évaluation est une question vive faisant l'objet de nombreuses recommandations institutionnelles depuis la promulgation, en France, de la loi sur la refondation de l'école de juillet 2013 (programmes, instructions officielles, circulaires de rentrée).

III. L'ETUDE DES PRATIQUES EVALUATIVES DES PE

1. Cadre de la recherche

Le cadre didactique de l'évaluation proposé par Sayac (2017) vise à étudier et analyser l'évaluation et ses pratiques, en Mathématiques. Il émane du constat que l'approche scientifique développée en Sciences de l'éducation pour étudier les questions d'évaluation (externe, de classe, de pratiques, etc.) n'est pas suffisante quand des contenus mathématiques sont en jeu, mais que l'approche didactique ne l'est pas non plus quand elle ne prend pas en compte des résultats cruciaux développés en sciences de l'éducation. Ce cadre a été conçu pour penser et analyser les "faits évaluatifs" (Chevallard & Feldmann, 1986) en conjuguant savoirs scientifiques en évaluation (dans la diversité des champs scientifiques concernés) et savoirs didactiques. Il prend en compte à la fois des contenus disciplinaires et des réalités

professionnelles permettant de définir une nouvelle approche scientifique de l'évaluation, d'orientation didactique et volontairement ancrée dans la réalité des pratiques en classe.

Ce cadre didactique de l'évaluation ne retient pas une entrée par les différentes fonctions[2] de l'évaluation pour étudier les pratiques d'évaluation en mathématiques, mais plutôt une entrée par l'analyse de la gestion de la relation entre le contrat didactique et le milieu de l'étude. La notion d'*épisode évaluatif* y est centrale et permet d'appréhender les pratiques d'évaluation en mathématiques sous toutes ses formes, au-delà de ses fonctions usuellement définies. Dans ce cadre c'est l'étude des différents épisodes évaluatifs proposés au cours d'une séquence d'enseignement, en fonction du moment où ils sont proposés, du contenu des tâches évaluatives proposées, de leur gestion et du contrat didactique qui s'y rattache (*contrat didactique en évaluation*) qui permettent de caractériser l'activité d'évaluation de l'enseignant·e. Cette activité est pilotée par une « logique évaluative » appréhendée à partir d'indicateurs retenus pour permettre de décrire cette logique personnelle, notamment par la façon dont les professeur·e·s conçoivent et élaborent les différents épisodes évaluatifs qui ponctuent l'étude d'un savoir mathématique (ressources utilisées, documents évaluatifs, méthodes), le *jugement professionnel et didactique en évaluation* de l'enseignant·e et la notation adoptée. Ce jugement professionnel et didactique en évaluation s'appuie sur les travaux développés en Sciences de l'éducation sur le jugement professionnel en évaluation (Mottier Lopez & Allal, 2008), mais il est spécifié aux mathématiques et intègre des notions développées en didactique des mathématiques telle que la vigilance didactique (Pézard, 2010). Il dépend des connaissances mathématiques et didactiques, des savoirs des professeur·e·s sur l'évaluation – l'*assessment literacy* (Webb, 2002 ; White, 2009), mais aussi de facteurs individuels (croyances et représentations sur les apprentissages, sur l'évaluation, expériences évaluatives). Le jugement professionnel et didactique en évaluation des professeur·e·s est activé dès lors qu'ils ou elles doivent émettre un avis sur l'état des connaissances mathématiques de leurs élèves, articuler les différents moments de l'étude entre eux (notamment intégrer les épisodes évaluatifs aux autres moments de l'étude) et gérer les épisodes évaluatifs de manière à favoriser les apprentissages de leurs élèves. Ce cadre articule deux axes d'analyse des pratiques d'évaluation en mathématiques, un axe focalisé sur les épisodes évaluatifs proposés aux élèves et un axe structuré par la "logique évaluative" des professeur·e·s.

2. Enjeux de la recherche globale

La recherche menée au sein du LéA comporte plusieurs axes qui visent à étudier l'évaluation des apprentissages mathématiques au cycle 2 à travers des entrées spécifiques comme l'usage de tests externes pour élargir l'horizon évaluatif de professeur·e·s et éprouver une ressource développée par un·e chercheur·e, l'étude des pratiques d'évaluation de professeur·e·s enseignant dans les différents niveaux de classe du cycle 2, mais aussi la place de l'évaluation en mathématiques parmi les autres disciplines scolaires que les professeur·e·s des écoles doivent évaluer.

L'évaluation externe (axe 1) permet d'étudier la robustesse d'une ressource (axe 2) et sert également d'outil pour enrichir les pratiques d'évaluation des PE (axes 3 et 4) :

[2] diagnostique, sommative, certificative, formative.

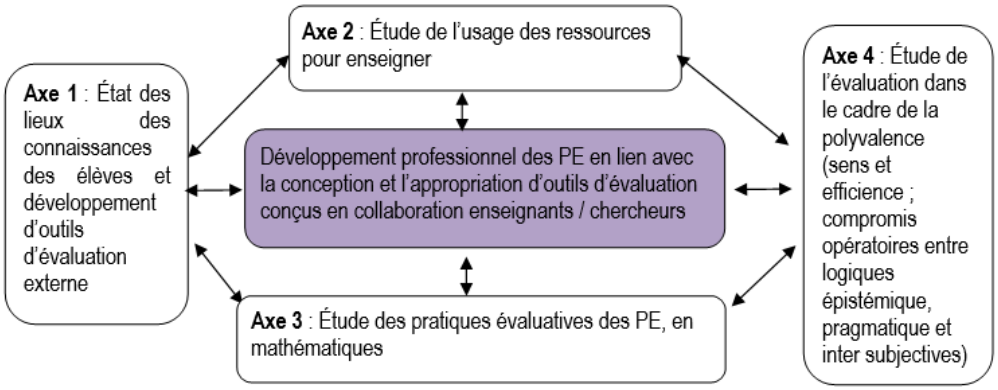


Figure 1 *– Articulation des différents axes de recherche du LéA EvalNumC2*

Axe 1 : Des évaluations conçues par les chercheur·e·s ont lieu en juin, chaque année, afin de réaliser un suivi de cohorte et de pouvoir utiliser les résultats comme outil de formation. Elles évolueront et seront exploitées par les PE pour concevoir des dispositifs de différenciation.

Axe 2 : Une ressource commune en CP (Mounier 2010) est fournie à un collectif de PE ; ils tiennent un carnet de bord rendant compte des apprentissages sur l'année et co-construisent collectivement des outils d'évaluation.

Axe 3 : Les PE s'approprient un outil permettant de définir différents niveaux de complexité et de compétences d'une tâche mathématique (Sayac & Grapin 2015) ; ils et elles conçoivent collectivement des outils d'évaluation en exploitant cet outil et en intégrant une dimension formative à leurs évaluations.

Axe 4 : Parmi les PE de CP n'utilisant pas la ressource, un collectif de travail (Blanchouin 2015) est mis en place autour du réel de leur activité d'évaluation dans toutes les disciplines.

Ces axes de recherche dessinent ainsi trois collectifs différents (Tableau 1).

	Collectif 1 (axe 1 et 2) **Les PE des classes de CP avec une même ressource**	**Collectif 2 (axe 4)** **5 PE de CP**	**Collectif 3 (axe 3)** **10 PE de CE1-CE2**
Année 1	**Chercheurs : EM–NG** Concevoir des outils d'évaluation en mathématiques avec des PE utilisant une même ressource	**Chercheur : AB** Repérer les compromis opératoires au cœur de la programmation au quotidien des plages d'évaluation	**Chercheur : NS** Concevoir des évaluations en mathématiques à l'aide d'un outil issu de la didactique
Mai-juin 2017	Dresser un état des connaissances des élèves et de la continuité des apprentissages sur le cycle 2 à partir d'une évaluation externe		
Année 2	**Chercheurs : EM-NG+AB** Utiliser les outils conçus en année 1 et la dynamique du collectif à des fins de développement professionnel et de résultats scientifiques.	**Chercheurs : AB + EM** Approfondir les différents types de plages d'évaluation qui seront mises en évidence en année 1	**Chercheurs : NS + NG** Co-construire des outils pour développer le jugement professionnel et didactique en évaluation.
Mai-juin 2018	Exploiter les outils d'évaluation développés par les PE et les chercheurs pour étudier la progressivité des apprentissages des élèves du CP au CE1, du CE1 au CE2		

Tableau 1 *– Programmation des objectifs de développement professionnel pour les collectifs constitués en prenant en compte les objectifs de recherche (axes 1 à 4)*

Les collectifs sont amenés à évoluer au fil du temps selon les niveaux de classe où enseignent les PE ; des temps de mise en commun des travaux réalisés sont prévus en fin d'année. Les pratiques évaluatives des PE sont étudiées dans chacun des collectifs avec des méthodologies et des cadres différents ; pour cette présentation, seuls les travaux réalisés dans l'axe 3 (collectif 3), en lien avec des tests produits dans l'axe 1 seront présentés.

IV. METHODOLOGIE ET RESULTATS

1. Fonctionnement des collectifs, méthodologie et recueil de données

De façon générale, les différentes actions de formation proposées aux PE engagés dans le collectif afin de faire évoluer leur pratique évaluative en mathématique se sont inscrites dans le cadre d'une recherche collaborative (Desgagné & Bednarz, 2005) favorisant un engagement contractualisé des chercheur·e·s et des enseignant·e·s autour des enjeux de développement professionnel (pour les PE) et d'étude des pratiques évaluatives en mathématiques et de leur évolution (pour les chercheures) dans le cadre didactique adopté (Sayac, 2017).

Pour étudier les différents épisodes évaluatifs proposés par les professeur·e·s engagé·e·s dans cette recherche collaborative ainsi que la logique évaluative qui les pilote, plusieurs activités sont programmées : une réflexion autour de l'évaluation des apprentissages des élèves en mathématiques étayée par des résultats de la recherche (en sciences de l'éducation et en didactique des mathématiques), une mise en commun des pratiques de chacun·e et l'élaboration collective de tests. Les productions des élèves à ces tests seront étudiées dans le but de mieux comprendre les enjeux de l'évaluation, notamment du point de vue de l'activité mathématique des élèves. Des outils au service de la régulation des apprentissages en mathématiques seront également co-construits par les praticien·ne·s et les chercheures et expérimentés dans les classes.

Première année : 2016-2017

Le collectif de l'axe 3 était composé d'enseignants de CE1 et CE2 non volontaires. Les séances, d'une durée totale de 18h et réparties mensuellement ont été programmées pour d'une part permettre aux chercheures d'étudier les pratiques évaluatives en mathématiques des PE engagé·e·s dans le collectif et d'autre part développer professionnellement l'activité d'évaluation de ces PE. Elles ont visé l'appropriation par les professeur·e·s d'un outil d'analyse de tâches mathématiques développé dans le cadre d'une recherche sur des évaluations externes en mathématiques (Sayac & Grapin, 2015), mais aussi l'élaboration d'évaluations communes qui ont été passées dans les différentes classes et l'étude des productions des élèves à ces évaluations.

Les séances de formation ont été enregistrées de façon audio, certaines retranscrites afin de garder trace des propos des différents acteurs ; les PE ont été invités à fournir aux chercheures les évaluations qu'ils proposent à leurs élèves en fin de séquence ainsi que les productions de leurs élèves à celle qu'ils on co-construit. Des premiers éléments relatifs à la logique évaluative des PE ont ainsi pu être dégagés. Par exemple, les textes évaluatifs proposés aux élèves ont permis de décrire les tâches évaluant, selon le PE, un savoir mathématique donné et les discussions menées lors d'une séance du LéA entre PE et chercheurs amènent à préciser les ressources utilisées pour concevoir ces évaluations et les notations qui sont adoptées.

Deuxième année : 2017-2018

A la différence de la première année du LéA, nous avons convenu de ne travailler qu'avec des PE volontaires. Premiers résultats (année 2016-2017). Durant la première année, les PE du collectif étant non volontaires, leur engagement dans la collaboration avec les chercheures a été moindre ; en particulier, il a été difficile de recueillir leurs textes évaluatifs. Néanmoins, certaines caractéristiques des pratiques évaluatives des enseignant·e·s de notre échantillon ont pu être décrites.

Du point de vue de la « logique évaluative » des PE :

- Les pratiques d'évaluation des PE semblent très « traditionnelles » et très normatives.
- La pratique évaluative des PE est très individuelle et solitaire.
- Il semblerait que les PE estiment que les apprentissages doivent être évalués « par bouts », qu'il faut « séparer les connaissances à évaluer ». Cette vision « compartimentée » des mathématiques pilote leurs choix et l'organisation de leur enseignement.
- Les PE rencontrent des difficultés liées aux écarts entre « ce que les élèves savent » et ce qu'ils ou elles répondent aux évaluations.
- En ce qui concerne les ressources pour concevoir leurs évaluations, les PE ont largement évoqué Internet ou des manuels, en « bricolant » et « piochant » ici et là, en adaptant les contenus à leurs élèves et « à leur sauce ».
- Leur notation s'adapte à leurs élèves et visent à les encourager.
- Les PE semblent considérer que les élèves doivent être toujours guidé·e·s et accompagné·e·s pour réussir. Certain·e·s d'entre eux considèrent que les élèves ne sont pas capables de gérer les difficultés inhérentes à certaines tâches mathématiques, ils ou elles cherchent donc à tout prix à les éviter.
- Les PE ne peuvent concevoir l'erreur comme autre chose que comme un élément négatif pour l'élève (et pour eux ?).

Du point de vue des contenus mathématiques :

- Les tâches de dénombrement de collections ne sont plus proposées à partir du CE1 car les PE estiment que cette compétence est acquise.
- Concernant la résolution de problèmes, les PE estiment que les difficultés des élèves sont principalement dues à des problèmes de lecture. Peu d'analyse didactique des problèmes a été trouvée dans le discours des PE.
- Les items de lecture/écriture des nombres sont très nombreux dans les évaluations proposées, souvent au détriment d'autres types de tâches et pas toujours de manière pertinente.

Il convient également de noter que l'utilisation de l'outil « facteur de complexité » pour concevoir des tests a été l'occasion de faire émerger certaines représentations comme : prouver que l'on sait, c'est réussir une tâche difficile ou ne pas tomber dans un piège.

Les données recueillies au cours de l'année 2017-18 ne sont pas encore toutes traitées, mais les premières séances menées avec le nouveau collectif permettent d'envisager la production de résultats prometteurs qui seront présentés et discutés dans le cadre du SPE3 afin de d'enrichir les débats autour de la problématique spécifique de ce groupe.

V. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Si le cadre didactique de l'évaluation développé par Sayac (2017) est actuellement utilisé pour analyser les pratiques évaluatives des PE du collectif de l'axe 3, nous envisageons en 2018-2019 non seulement de l'exploiter pour étudier les pratiques évaluatives des PE des

autres collectifs mais aussi de comparer les résultats qu'il permet de produire avec ceux émanant d'une autre approche (celle utilisée par Blanchouin (2015) dans le cadre de l'axe 4 et du collectif 2).

Jusqu'alors le travail mené sur les pratiques évaluatives des PE a été fait à partir de textes d'évaluation (ceux qu'ils produisent pour leurs élèves et ceux conçus par les chercheures) mais sans réelle observation de leurs pratiques en classe. C'est une perspective de travail que nous envisageons pour l'année prochaine afin de décrire plus précisément les pratiques évaluatives des enseignants tout en poursuivant l'exploitation du cadre didactique de l'évaluation tel qu'il a été défini.

REFERENCES

Blanchouin, A. (2015). La journée de classe de l'enseignant polyvalent du primaire : étude sur une année scolaire du cours d'action quotidien en cours préparatoire. Thèse de doctorat. Université Paris 13, Paris.

Desgagné, S., & Bednarz, N. (2005). Médiation entre recherche et pratique en éducation : faire de la recherche «avec» plutôt que «sur» les praticiens. *Revue des sciences de l'éducation*, *31*(2), 245-258.

Chevallard, Y., & Feldmann, S. (1986). *Pour une analyse didactique de l'évaluation*. IREM d'Aix-Marseille.

Grapin, N. (2015). *Étude de la validité de dispositifs d'évaluation et conception d'un modèle d'analyse multidimensionnelle des connaissances numériques des élèves de fin d'école.* Thèse de doctorat. Université Paris-Diderot, Paris.

Mottier Lopez, L., & Allal, L. (2008). Le jugement professionnel en évaluation: un acte cognitif et une pratique sociale située. *Revue suisse de sciences de l'éducation*, *30*(3), 465-482.

Mounier E. (2017) Nouveaux outils d'analyse des procédures de dénombrement pour explorer leur lien avec la numération écrite chiffrée et la numération parlée. *Recherches en didactique des mathématiques* 36(3), 347-396.

Mounier, E. (2010). *Une analyse de l'enseignement de la numération au CP. Vers de nouvelles pistes.* Thèse de doctorat. Université Paris-Diderot, Paris.

Pézard, M. (2010). Installer la paix scolaire, exercer une vigilance didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *30*(2), 197-261.

Sayac, N. (2016). Nature et diversité des tâches mathématiques proposées en évaluation sommative par des professeurs des écoles, en France *In Actes du XXVIIIème Colloque de l'ADMEE- Lisbonne-13-15 janvier 2016.*

Sayac N., & Grapin N. (2015). Évaluation externe et didactique des mathématiques : un regard croisé nécessaire et constructif, *Recherche en didactique des mathématiques*, 101-126.

Sayac, N. (2017). *Approche didactique pour l'évaluation et ses pratiques en mathématiques : enjeux d'apprentissages et de formation*. Note de synthèse pour le diplôme d'Habilitation à diriger des recherches soutenue à l'université Paris Diderot, le 29 novembre.

Webb, N. (2002, April). Assessment literacy in a standards-based urban education setting. In *annual meeting of the American Educational Research Association, New Orleans*.

White, E. (2009). Student perspectives of peer assessment for learning in a public speaking course. *Asian EFL Journal*, *33*(1), 1-36.

Rapport IGEN 2013 (2013) La notation et l'évaluation des élèves éclairées par des comparaisons internationales. *Rapport n°2013-072.*

ÉVALUATION ET INÉGALITÉS SCOLAIRES : ÉTUDE EXPLORATOIRE EN MATHÉMATIQUES ET EN SCIENCES, EN FRANCE ET EN SUISSE

SAYAC[*] Nathalie – PLOYE[**] Alexandre - MARLOT[***] Corinne – DELARUE-BRETON[****] Catherine – DUCREY[*****]Mylène

Résumé – Les différents rapports nationaux ou internationaux font régulièrement état, pour la France, du lien existant entre inégalités sociales et inégalités scolaires. Dans le cadre du réseau RESEIDA, une recherche portant sur la construction et le renforcement des inégalités scolaires (ou d'apprentissage) au regard des pratiques d'évaluation de professeur·es des écoles dans 2 disciplines (Mathématiques et Sciences) a été initiée dans 2 pays (Suisse et France), à partir d'un cadre didactique de l'évaluation récemment développé (Sayac, 2017). Nous rendrons compte des premiers résultats de cette recherche lors du colloque EMF2018.
Mots-clefs : inégalités scolaires, pratiques évaluatives, Mathématiques, Sciences, école

Abstract – Various national or international reports regularly state, for France, the link existing between social inequalities and school disparities. It is this link that we wish to study within the framework of a research led with in RE.SEIDA on teacher's assessment practices in 2 disciplines (Mathematics and Sciences) and in 2 countries (Switzerland and France) from a didactic frame of the assessment recently developed (Sayac, on 2017).
Keywords: school disparities, assessment practices, Mathematics, Sciences, primary school.

I. EVALUATION & INEGALITES SCOLAIRES

1. Contexte de la recherche

Les questions d'inégalités scolaires et d'évaluation ont souvent été traitées suivant le schéma récurrent de la mise à jour d'inégalités par le biais d'évaluations qui permettent d'en rendre compte. Ainsi, les évaluations internationales PISA, TIMSS, PIRLS et les évaluations nationales CEDRE ont régulièrement témoigné d'inégalités scolaires en France.

Par ailleurs, de nombreux travaux, notamment ceux réalisés dans le cadre de RE.S.E.I.D.A[1] (Bautier & Rayou, 2009 ; Rochex & Crinon, 2011 ; Delarue-Breton, 2012a ; Coulange, 2013 ; Chesnais, 2014), ont montré que les pratiques enseignantes pouvaient parfois être génératrices d'inégalités scolaires, avec des conséquences encore plus prégnantes dans les établissements de l'éducation prioritaire.
Si l'on considère que les pratiques d'évaluation sont des activités spécifiques (Roditi, 2011) ou singulières (Sayac, 2017) des pratiques enseignantes, il est pertinent de se demander en quoi les pratiques d'évaluation peuvent être elles-mêmes génératrices d'inégalités scolaires. L'évaluation n'est plus dès lors considérée comme révélatrice de ces inégalités, mais comme contribuant potentiellement à les accroitre. La notion de coconstruction des inégalités (Bautier & Rayou, 2009 ; Rochex & Crinon, 2011 ; Delarue-Breton, 2012a), qui invite à considérer ces inégalités scolaires comme le reflet des inégalités sociales, amène à les penser comme le produit d'une rencontre entre deux types de facteurs qui ne peuvent être pensés séparément :

*LDAR, Université-Paris-Est-Créteil – France – nathalie.sayac@u-pec.fr
** CIRCEFT, Université Paris 8 – France – alexandre.ploye@u-pec.fr
*** UER MS – HEP canton de Vaud – Suisse – corinne.marlot@hepl.ch
**** Laboratoire Dynamique du langage in situ, Université de Rouen Normandie – catherine.delarue-breton@univ-rouen.fr
***** UER MS – HEP canton de Vaud – Suisse – mylene.ducrey@hepl.ch
[1] Recherches sur la Socialisation, l'Enseignement, les Inégalités et les Différenciations dans les Apprentissages.

des facteurs familiaux, quand les modes de socialisation familiale prédisposent différemment les élèves aux apprentissages littératiés scolaires, et des pratiques pédagogiques, qui ne prennent pas en compte ces différents modes de socialisation, ou qui les prennent en compte de manière contreproductive, à travers certaines formes de différenciation pédagogique par exemple.

Dans cette perspective, une recherche à visée compréhensive a été initiée au sein de RE.S.E.I.D.A afin de traiter cette question selon une focale didactique, mais aussi à partir d'approches scientifiques complémentaires (sciences du langage, approches clinique, sociologique), indispensables pour relever ce défi. Cette recherche vise à étudier les pratiques évaluatives et les discours qui les accompagnent dans deux disciplines (Mathématiques et Sciences), chez les professeur·es du primaire de deux pays (France et Suisse) pour identifier des facteurs potentiels d'inégalités scolaires.

2. Cadre théorique de la recherche

Le cadre didactique de l'évaluation proposé par Sayac (2017) vise à étudier et analyser l'évaluation et ses pratiques, en Mathématiques. Il émane du constat que l'approche scientifique développée en Sciences de l'éducation pour étudier les questions d'évaluation (externe, de classe, de pratiques, etc.) n'est pas suffisante quand des contenus mathématiques sont en jeu, mais que l'approche didactique ne l'est pas non plus quand elle ne prend pas en compte des résultats cruciaux développés en sciences de l'éducation. Ce cadre a été conçu pour penser et analyser les "faits évaluatifs" (Chevallard & Feldmann, 1986) en conjuguant savoirs scientifiques en évaluation (dans la diversité des champs scientifiques concernés) et savoirs didactiques. Il prend en compte à la fois des contenus disciplinaires et des réalités professionnelles permettant de définir une nouvelle approche scientifique de l'évaluation, d'orientation didactique et volontairement ancrée dans la réalité des pratiques en classe.

Ce cadre didactique de l'évaluation ne retient pas une entrée par les différentes fonctions[2] de l'évaluation pour étudier les pratiques d'évaluation en mathématiques, mais plutôt une entrée par l'analyse de la gestion de la relation entre le contrat didactique et le milieu de l'étude. La notion d'*épisode évaluatif* y est centrale et permet d'appréhender les pratiques d'évaluation en mathématiques sous toutes ses formes, au-delà de ses fonctions usuellement définies. Dans ce cadre c'est l'étude des différents épisodes évaluatifs proposés au cours d'une séquence d'enseignement, en fonction du moment où ils sont proposés, du contenu des tâches évaluatives proposées, de leur gestion et du contrat didactique qui s'y rattache (*contrat didactique en évaluation*) qui permet de caractériser l'activité d'évaluation de l'enseignant·e. Cette activité est pilotée par une « logique évaluative » appréhendée à partir d'indicateurs retenus pour permettre de décrire cette logique personnelle, notamment par la façon dont les professeur·es conçoivent et mettent en œuvre les différents épisodes évaluatifs qui ponctuent l'étude d'un savoir mathématique (ressources utilisées, documents évaluatifs, méthodes), comment s'élabore progressivement le *jugement professionnel et didactique en évaluation* et la notation qui est adoptée. Ce jugement professionnel et didactique en évaluation s'appuie sur les travaux développés en Sciences de l'éducation sur le jugement professionnel en évaluation (Mottier Lopez & Allal, 2008), mais il est spécifié aux mathématiques et intègre des notions développées en didactique des mathématiques telle que la vigilance didactique (Pézard, 2010). Il dépend des connaissances mathématiques et didactiques, des savoirs des professeur·es sur l'évaluation – l'*assessment literacy* (Webb, 2002 ; White, 2009), mais aussi de facteurs individuels (croyances et représentations sur les apprentissages, sur l'évaluation,

[2] diagnostique, sommative, certificative, formative.

expériences évaluatives). Le jugement professionnel et didactique en évaluation des professeur·es est activé dès lors qu'ils ou elles doivent émettre un avis sur l'état des connaissances mathématiques de leurs élèves, articuler les différents moments de l'étude entre eux (notamment intégrer les épisodes évaluatifs aux autres moments de l'étude) ainsi que les épisodes évaluatifs de manière à favoriser les apprentissages de leurs élèves. Ce cadre articule deux axes d'analyse des pratiques d'évaluation en mathématiques, un axe focalisé sur les épisodes évaluatifs proposés aux élèves et un axe structuré par la "logique évaluative" des professeur·es.

L'originalité de la recherche dont nous décrivons le cadre ici est de se fonder dans une logique d'approche co-disciplinaire des phénomènes observés (Blanchard-Laville, 2000). A ce titre, et en regard notamment de l'hypothèse selon laquelle des facteurs individuels doivent être pris en compte pour comprendre la logique évaluative d'un enseignant, nous proposons d'élargir notre cadre théorique en mobilisant une approche clinique d'orientation psychanalytique en sciences de l'éducation. Nous admettons en effet comme postulat que l'agir enseignant en évaluation, au-delà (ou en-deçà) des coordonnées didactiques que nous venons de décrire, est aux prises avec la dimension inconsciente du moi professionnel. En effet, l'enseignant est d'abord un sujet dont l'activité de pensée et d'action échappe à sa complète maîtrise. Nous faisons l'hypothèse que les scénarios didactiques qui président à l'organisation d'une séance et plus particulièrement à ses épisodes évaluatifs, sont articulés à des scénarios imaginaires, inconscients qui s'actualisent sur la scène pédagogique. Nous appuyant sur le travail de Claudine Blanchard-Laville (2001), nous considérons en effet que dans la dimension latente de la gestion des épisodes évaluatifs par l'enseignant se donne à entendre cliniquement ce qu'elle nomme son transfert didactique et son rapport au savoir. En ce sens, de même qu'un scénario didactique et ses différents épisodes, dont les épisodes évaluatifs, sont toujours dynamiques, susceptibles de modifications, d'ajustements, etc. ; ils sont également psychodynamiques : les processus inconscients sourdement à l'œuvre procèdent eux-aussi à leur lot de remaniements, de réajustements du scénario dans l'action, avant l'action et dans l'après-coup de l'action, comme si sur la scène didactique se déployaient en même temps deux écritures du scénario didactique : l'une, consciente, que l'on peut saisir avec les outils méthodologiques et théoriques de la didactique ; l'autre, inconsciente et échappant en partie au sujet, que l'on peut essayer de dévoiler avec les outils méthodologiques et théoriques de la démarche clinique d'orientation psychanalytique.

3. Enjeux de la recherche

Cette recherche poursuit des enjeux de nature différente.

Le premier enjeu est de nature théorique. Il vise à éprouver les potentialités et les limites de ce cadre construit en mathématiques et en France. Pour ce faire, nous avons choisi d'engager une analyse comparative, dans une autre discipline, en Sciences et dans un autre pays, la Suisse (romande)[3] pour lequel le plan d'étude en sciences (PER[4] 2012) se trouve être tout à fait comparable au programme français : mêmes contenus notionnels et mêmes préconisations pour ce qui est de la mise en œuvre de la démarche scientifique. En effet, un point aveugle dans l'enseignement des sciences réside justement dans les pratiques d'évaluation de la démarche d'investigation scientifique.

Pour autant, l'enjeu principal est de produire des connaissances sur les pratiques d'évaluation, selon une entrée didactique qui met la focale sur les conditions de construction

[3] Et plus précisément le canton de Vaud.
[4] Plan d'études romand.

des savoirs en jeu. Il s'agit (1) de repérer et d'analyser les différents épisodes évaluatifs pouvant advenir lors de séances programmées dans des séquences dans chacune des deux disciplines, et (2) d'étudier la logique évaluative qui préside à l'élaboration des dispositifs mis en place par les enseignant·es concerné·es par cette étude. C'est en effet notamment à travers l'étude des interactions langagières qui accompagnent ces dispositifs que l'on envisage de trianguler les analyses, dans la mesure où celle-ci nous permettrait de déduire les effets éventuellement différenciateurs produits par les dispositifs mis en place, effets qui se distinguent des enjeux annoncés ou explicités a posteriori par les enseignant·es.

4. L'évaluation en sciences à l'école primaire

Dans la plupart des cas, on assiste en Sciences à une évaluation de connaissances notionnelles sous forme de texte à trous, de schémas à compléter ou de QCM, qui ne prend pas en compte les compétences que mobilise la mise en œuvre de la démarche d'investigation (Rapport IGEN[5] 2013). De plus, et de manière générale, l'accent est mis trop fortement sur la maîtrise des langages spécifiques à la science et pas suffisamment sur la capacité des élèves à argumenter dans le sens attendu par la démarche d'investigation (Marlot & Morge, 2016). Du coup, les élèves qui obtiennent les meilleurs résultats sont aussi les élèves qui maîtrisent le mieux l'usage et la production des écrits (scientifiques), ce qui peut se révéler comme une source importante d'inégalité scolaire. En revanche, les niveaux de raisonnement, selon les opérations cognitives qu'ils impliquent (modéliser, schématiser, déduire, comparer, associer, reconnaître, reconstituer, caractériser, distinguer ….) sont peu investis et peu évalués.

5. L'évaluation en mathématiques à l'école primaire

Une recherche actuellement menée sur les pratiques évaluatives des professeur·es des écoles en mathématiques (EvalNumC2) dans un REP+[6] de l'académie de Créteil, montre que les professeur·es enseignant dans ce REP+ ont fortement tendance à évaluer les apprentissages de leurs élèves en mathématiques de manière binaire (réussi ou non), au risque d'enfermer les élèves les plus en difficulté dans une fatalité scolaire qui ne les aide pas à progresser, mais aussi à réduire très nettement leurs exigences au niveau des connaissances et compétences évaluées afin de ne pas mettre leurs élèves « en échec ». Ces résultats coïncident avec ceux menés par des chercheur·es qui avaient montré que les professeur·es enseignant en Éducation prioritaire avaient fortement tendance à réduire leurs exigences au niveau de ce qu'ils ou elles proposent à leurs élèves ou bien à privilégier des logiques de socialisation ou de projet aux logiques d'apprentissages dans des contextes d'éducation prioritaire (Glorian-Perrin, Butlen & al., Coulange, Chesnais). Par ailleurs, une étude antérieure ayant porté sur l'étude des stratégies que développent les élèves de fin d'école primaire pour répondre à des QCM en mathématiques (Sayac & Grapin, 2015) avait déjà révélé un phénomène inquiétant : les élèves les plus en difficulté sont aussi ceux qui sont parfois les plus assuré·es de leurs bonnes réponses alors qu'elles ne le sont pas. L'ignorance ignorée de Gilles (1996) pourrait donc être un des facteurs qui accentue les inégalités scolaires en mathématiques.

[5] Inspection générale de l'éducation nationale

[6] REP + : Réseau d'Éducation Prioritaire de rang 1 ; ces réseaux regroupent des établissements scolaires primaires et secondaires (collèges) qui bénéficient d'aménagements visant à mieux accompagner la formation continue des enseignant·e·s et le travail en équipe, notamment.

II. METHODOLOGIE DE LA RECHERCHE

1. Étude exploratoire

Dans une visée exploratoire, nous avons convenu de commencer par étudier les pratiques évaluatives et les discours qui les accompagnent d'un nombre restreint de professeur·es (2 en Suisse et 2 en France), sur un même niveau de classe (CM2/8H), dans les deux disciplines scolaires qui nous intéressent (Sciences et Mathématiques), chacun des professeurs enseignant les mathématiques et les sciences. En Mathématiques, la séquence devra comprendre au moins une séance de résolution de problèmes pour permettre une éventuelle comparaison avec la démarche d'investigation scientifique en Sciences.

Il s'agira, conformément aux enjeux que nous avons définis, de repérer et d'analyser les différents épisodes évaluatifs pouvant advenir lors des séances étudiées dans chacune des deux disciplines, ainsi que la manière dont s'élabore le jugement évaluatif. Ce dernier dépend des connaissances disciplinaires et didactiques des professeur·es et peut donc être différent selon les deux disciplines. Il sera particulièrement intéressant à étudier dans le contexte de cette recherche.

Le croisement et l'analyse des données qui seront récoltées dans les deux disciplines et dans les deux pays permettront de mettre en exergue les spécificités disciplinaires et culturelles des pratiques évaluatives des professeur·es qui participeront à cette étude française et suisse. Les résultats de cette étude exploratoire seront utilisés pour programmer une étude de plus grande envergure autour de la même problématique.

2. Méthodologie envisagée

En France, cette recherche s'appuiera sur le terrain du LéA EvalNumC2 (REP+ de Montreuil, académie de Créteil) codirigé par N. Sayac, N. Grapin et E. Mounier. Ce projet de recherche-formation (2016-2019) qui porte sur l'évaluation des apprentissages numériques au cycle 2 comprend également des actions de formation à destination des professeur·es du cycle 3, cycle correspond au niveau de classe que nous avons retenu.

En Suisse, la notion de zone d'éducation prioritaire n'existe pas et les établissements veillent à maintenir une certaine mixité sociale en regroupant des secteurs relativement contrastés en termes d'origine socio-professionnelle, bien que ces données ne soient pas accessibles aux chercheurs.

De fait, notre étude n'envisage pas de comparer des classes favorisées *vs* des classes défavorisées. Notre intention, dans la suite des travaux de RESEIDA sur les pratiques différenciatrices, est de traiter des inégalités scolaires liées aux pratiques d'évaluation, et donc de nous intéresser aux élèves d'une même classe. Le but est de comprendre le rôle des épisodes évaluatifs dans la construction du jugement évaluatif du professeur par la saisie de ce qui fait signe, mais aussi de ce qui n'est pas pris en considération et pour quel(s) élèves(s).

Afin d'étudier la mise en œuvre des différents épisodes évaluatifs par les professeur·es en mathématiques et en sciences, les séances constitutives des séquences retenues seront filmées. Les différents épisodes évaluatifs proposés par les professeur·es lors de ces séances seront identifiés et analysés à partir du cadre proposé (Sayac, 2017), mais nous avons également convenu d'étudier comment ils s'inscrivent dans la séquence à laquelle ils se rattachent et quel discours les accompagne. L'étude des discours pédagogiques au sein des classes, qui seront enregistrés et transcrits, visera d'une part à identifier les conceptions susceptibles

d'être véhiculées par les pratiques évaluatives des professeur·es, d'autre part à mieux comprendre comment s'organisent les différents épisodes évaluatifs, et quelle logique dispositive (Delarue-Breton, 2012b) les sous-tend. L'analyse clinique d'un entretien non-directif conduit auprès des enseignants concernés à partir d'une consigne simple ayant l'évaluation pour mot clé, complète le dispositif méthodologique. Nous pensons ainsi pouvoir éclairer la problématique des inégalités scolaires potentiellement véhiculée par le processus évaluatif.

Nous souhaitons également récolter différents types de données, en complément des vidéos :

- Des données biographiques et professionnelles des professeur·es, indispensables pour investiguer la dimension personnelle de leur pratique évaluative.
- La ou les évaluations données par l'enseignant·e, autour d'une séquence en Mathématiques et en Sciences pour étudier les différentes tâches les constituant.
- Les exercices donnés en classe ou en devoirs au cours des séquences retenues pour explorer les questions de continuité et ruptures entre les tâches proposées lors des séquences d'apprentissage et les évaluations qui s'y rattachent.
- Un entretien type think-aloud avec chaque professeur·e afin de clarifier d'éventuels questionnements issus de l'analyse des tâches préalablement réalisée et à appréhender les jugements professionnels et didactiques des professeur·es, dans les deux disciplines.

III. CONCLUSION

Cette recherche n'est actuellement qu'en cours de programmation et aucun résultat n'a encore été produit, mais les enjeux qu'elle vise et l'ambition qu'elle affiche nous amènent à penser qu'elle s'inscrit pleinement dans la thématique du colloque EMF 2018 qui souhaite faire le pont entre des disciplines scientifiques, dans le cadre du groupe spécial « évaluation ».

Lors de ce colloque, la recherche aura avancé et des premiers résultats pourront être présentés et discutés afin de permettre d'enrichir les débats autour de la problématique de ce projet spécial SP3.

RÉFÉRENCES

Beillerot, J. (2000). Le rapport au savoir. Dans Mosconi N., Beillerot J., Blanchard-Laville C. (dir), *Formes et formations du rapport au savoir*, Paris, L'Harmattan, 2000, p.39-57

Blanchard-Laville, C. (1997). L'enseignant et la transmission dans l'espace psychique de la classe. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 17(3), 151-176.

Blanchard-Laville, C. (2000). De la codisciplinarité en sciences de l'éducation. *Revue française de pédagogie, 132*, 55-66

Blanchard-Laville, C. (2001). *Les enseignants entre plaisir et souffrance*, Paris, PUF.

Blanchard-Laville, C., Chaussecourte, P., Hatchuel, F., & Pechberty, B. (2005). Recherches cliniques d'orientation psychanalytique dans le champ de l'éducation et de la formation. *Revue française de pédagogie, 151*(1), 111-162.

Butlen, D., Charles-Pézard, M., & Masselot, P. (2011). Deux dimensions de l'activité du professeur exerçant dans des classes de milieux défavorisés : installer la paix scolaire, exercer une vigilance didactique. In *Colloque international INRP, 16, 17 et 18 mars 2011. Le travail enseignant au XXIe siècle Perspectives croisées : didactiques et didactique professionnelle*.

Charles-Pézard, M. (2010). Installer la paix scolaire, exercer une vigilance didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *30*(2), 197-261.

Chesnais, A. (2014). Différenciation dans le processus d'enseignement-apprentissage en mathématiques en éducation prioritaire et ailleurs. *Revue française de Pédagogie*, 176(3), 63-73.

Chevallard, Y., & Feldmann, S. (1986). *Pour une analyse didactique de l'évaluation*. IREM d'Aix-Marseille.

Coulange L. (2013) Débuter en collège ZEP : quelles pratiques enseignantes ? Un zoom sur deux professeurs de mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 32(3), 361-408.

Delarue-Breton, C. (2012a). Discours scolaire et paradoxe. Louvain : Academia-L'Harmattan.

Delarue-Breton, C. (2012b). Dispositifs et logique dispositive : perception des enjeux et inégalités scolaires. Dans M.-L. Élalouf, A. Robert, A. Belhadjin & M.-F. Bishop (dir.), *Les didactiques en question: état des lieux et perspectives pour la recherche et la formation* (p. 120-130). Bruxelles : De Boeck Université.

Direction de l'Évaluation, de la Prospective et de la Performance (2014). Grande stabilité des acquis en sciences en fin d'école depuis 2007. Note d'information. N°27. Juillet 2014.

Gilles, J-L. (1996) Utilisation des degrés de certitude et normes de réalisme en situa- tion d'examen et d'auto-estimation à FA.P.S.E. - ULG*, Colloque de l'ADMEE-EURO- PE «Dix années de travaux de recherche en évaluation»*.

Inspection Générale de l'Éducation Nationale (2013). L'évaluation des enseignants. Rapport - n° 2013-035, avril.

Marlot, C. & Morge, L. (2016) *L'investigation scientifique et technologique : comprendre les difficultés de mise en œuvre pour mieux les réduire* (Marlot, C. & Morge, L. dir.). Collection Paedeia. Presses Universitaire de Rennes. Rennes : France.

Mottier Lopez, L., & Allal, L. (2008). Le jugement professionnel en évaluation: un acte cognitif et une pratique sociale située. *Revue suisse de sciences de l'éducation*, *30*(3), 465-482.

Perrin-Glorian, M-J. (1997), Que nous apprennent les élèves en difficulté en mathématiques ?. *Repères-IREM, 29,* 43-66.

OCDE (2016). PISA2015. Résultats à la loupe. https://www.oecd.org/pisa/pisa-2015-results-in-focus-FR.pdf

Rayou, P., & Bautier, É. (2009). *Les inégalités d'apprentissage: programmes, pratiques et malentendus scolaires*. Presses universitaires de France.

Rochex, J. Y., & Crinon, J. (2011). La construction des inégalités scolaires. *Au cœur des pratiques et des dispositifs d'enseignement. Rennes: Presses universitaires de Rennes*, 173-198.

Roditi, E. (2011). *Recherches sur les pratiques enseignantes en mathématiques: apports d'une intégration de diverses approches et perspectives*, Note de synthèse pour l'Habilitation à Diriger des Recherches, Université René Descartes.

Sayac, N. (2017). *Approche didactique pour l'évaluation et ses pratiques en mathématiques : enjeux d'apprentissages et de formation*. Note de synthèse pour le diplôme d'Habilitation à diriger des recherches soutenue à l'université Paris Diderot, le 29 novembre.

Sayac, N., & Grapin, N. (2015). Évaluation externe et didactique des mathématiques: un regard croisé nécessaire et constructif, *Recherche en didactique des mathématiques,* 35(1), 101-126.

Webb, N. (2002, April). Assessment literacy in a standards-based urban education setting. In *annual meeting of the American Educational Research Association, New Orleans.*

White, E. (2009). Are you assessment literate? Some fundamental questions regarding effective classroom-based assessment. *On CUE journal*, *3*(1), 3-25.

PicPVT, UNE TACHE D'EVALUATION DE LA COMPREHENSION DE LA DOUBLE REPRESENTATION DES SYMBOLES DANS LES NOMBRES : VALIDATION CHEZ DES ENFANTS DE 1E ANNEE DE PRIMAIRE

OSANA[*] Helena Patricia – LAFAY[**] Anne – BLONDIN[***] Aryann

Résumé – L'objectif de l'étude est de valider la tâche PicPVT avec un groupe de 123 enfants québécois anglophones de 1e année de primaire. L'enfant doit juger si la représentation picturale correspond à la valeur du chiffre souligné d'un nombre. Les analyses montrent une bonne validité divergente ainsi qu'une bonne cohérence interne. De futures études devront poursuivre l'effort de validation.

Mots-clefs : numération, valeur positionnelle, double représentation, validation, psychométrie

Abstract – The goal of the present study is to validate the PicPVT with a group of 123 anglophone first-grade students. The task requires the child to determine whether a pictorial representation of quantity correctly matches an underlined digit in a written numeral. Analyses demonstrate good divergent validity and internal consistency. Future research is needed to further establish the task's psychometric properties.

Keywords: numeration, place value, dual representation, validity, psychometrics

I. INTRODUCTION

L'objectif de notre recherche est de concevoir une mesure valide et fidèle sur la connaissance de la numération à valeur positionnelle (NVP) dans les premières années de scolarité. La NVP a deux principes clés : (a) la position d'un chiffre dans un nombre détermine sa valeur et (b) la valeur du nombre est déterminée en additionnant les valeurs représentées par chaque chiffre. Les enseignants utilisent une variété de tâches pour évaluer la connaissance numérique, mais nous avons constaté que les enfants peuvent reproduire des procédures montrées par l'enseignant (par exemple, "ce 6 signifie six groupes de dix") sans posséder une vraie compréhension conceptuelle de la NVP.

Notre recherche se base sur les théories du développement du symbole chez l'enfant (Uttal et Yuan, 2014). Pour utiliser une entité comme un symbole, l'enfant doit le voir comme un objet à part entière avec ses qualités physiques et perceptuelles aussi bien que comme *l'autre chose* qu'il représente. Par exemple, le chiffre 6 dans le nombre 62 est un objet à part entière, mais il représente aussi 60 comme une quantité abstraite. Nous visons donc à développer des tâches qui évaluent cette compréhension que l'enfant a de la nature double des symboles numériques (DeLoache, 1995 ; Uttal et al., 2006). Nous présentons une telle tâche et faisons un rapport sur sa validité en regard d'une batterie de tâches sur la connaissance de la NVP généralement utilisées en classe.

II. MÉTHODE

Un groupe de 123 enfants scolarisés en 1e année du primaire (équivalent CP) au Québec en école anglophone a réalisé la tâche PicPVT (Figure 1) ainsi que six autres tâches visant l'évaluation de la compréhension et de l'utilisation de la NVP. Les autres tâches demandent d'indiquer la valeur d'un chiffre souligné dans un nombre (tâche Règles conventionnelles de la valeur positionnelle, RCVP, Figure 2), de déterminer le nombre qui vient directement avant ou après un autre nombre (tâche Avant-après, Figure 3), de répondre aux problèmes d'addition basés sur la NVP (tâche Addition, Figure 4), de produire le plus grand ou le plus

[*] Université Concordia – Canada – helena.osana@concordia.ca
[**] Université Concordia – Canada – anne.lafay@concordia.ca
[***] Université Concordia – Canada – aryann.blondin@concordia.ca

petit nombre avec des chiffres donnés individuellement (tâche Faire-un-nombre, Figure 5), de choisir l'image d'une quantité représentée par des blocs qui correspond à un nombre en forme symbolique (tâche Matching, Figure 6) et de choisir le plus grand ou le plus petit nombre d'une paire (tâche Comparer, Figure 7). L'évaluation s'effectuait de manière individuelle avec un(e) assistant de recherche. Chaque session durait entre 30 et 45 minutes. Le score était de 1 point pour une bonne réponse et 0 point pour une réponse erronée. Le score total pour chaque tâche était converti en pourcentage.

La tâche PicPVT vise l'évaluation de la compréhension de la double représentation des nombres et de la valeur positionnelle des symboles dans les nombres. L'enfant doit juger si la représentation picturale (càd, en points) correspond (ou non) à la valeur attribuable au chiffre souligné d'un nombre. Le score moyen est la variable dépendante.

Parmi les 20 items de la tâche PicPVT, 9 items exigent une réponse positive de l'enfant (Figure 1a) alors que les 11 autres exigent une réponse négative de l'enfant (Figure 1b). Parmi ces 20 items, 7 sont des nombres à deux chiffres alors 13 sont des nombres à trois chiffres.

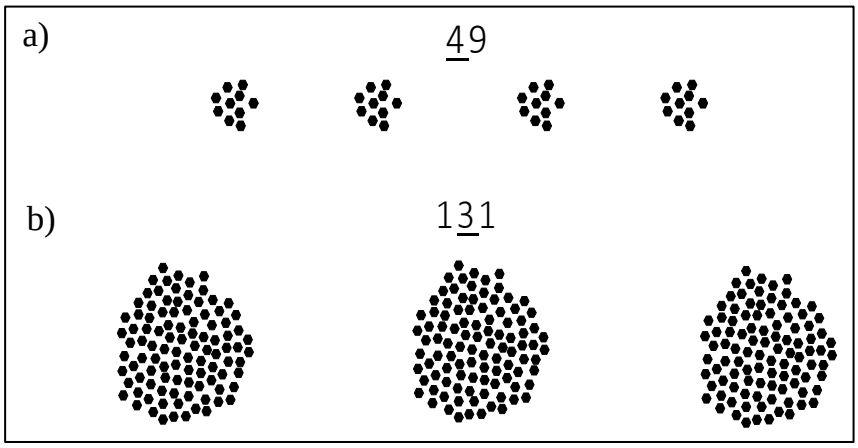


Figure 1 *– Tâche PicPVT. a) Item qui exige une réponse positive de l'enfant, centré sur la connaissance de la dizaine dans un nombre à deux chiffres. b) Item qui exige une réponse négative de l'enfant, centré sur la connaissance de la dizaine dans un nombre à trois chiffres.*

Qu'est-ce que cela signifie [pointer le chiffre souligné] ?							
1)	6<u>5</u>	**4)**	1<u>4</u>6	**7)**	37<u>8</u>	**10)**	<u>2</u>3
2)	16<u>4</u>	**5)**	<u>4</u>36	**8)**	2<u>5</u>1	**11)**	<u>2</u>18
3)	<u>3</u>21	**6)**	2<u>7</u>	**9)**	<u>1</u>88	**12)**	3<u>5</u>

Figure 2 *– Tâche Règles conventionnelles de la valeur positionnelle, RCVP.*

Quel nombre vient immédiatement après 39 ?
Quel nombre vient immédiatement après 109 ?
Quel nombre vient immédiatement avant 30 ?
Quel nombre vient immédiatement avant 50 ?

Figure 3 *– Tâche Avant-après.*

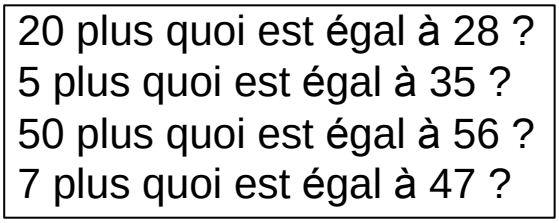


Figure 4 *– Tâche Addition.*

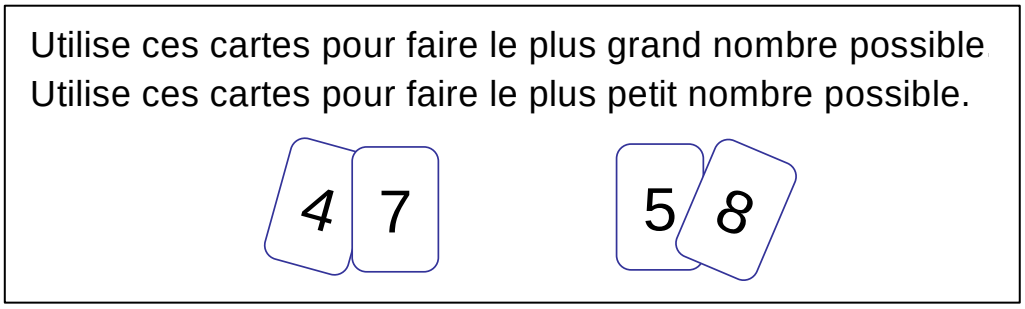


Figure 5 *– Tâche Faire-un-nombre. Deux items.*

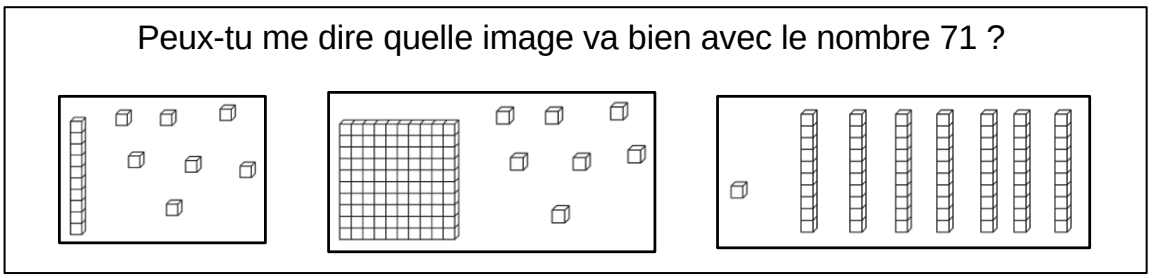


Figure 6 *– Tâche Matching. Un item.*

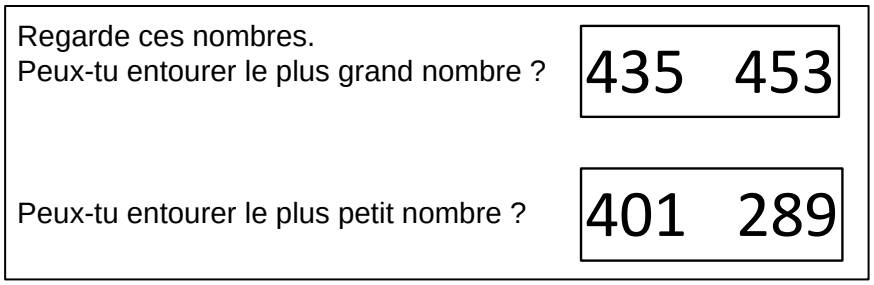


Figure 7 *– Tâche Comparer. Deux items.*

III. ANALYSES ET RÉSULTATS

Le pourcentage moyen pour chaque tâche est présenté dans la Figure 8. Une analyse de la validité divergente a été réalisée. Pour cela, des analyses de corrélations ont montré que la tâche PicPVT n'était corrélée à aucune tâche classique habituellement utilisée en classe, exceptée la tâche Addition (voir Table 1).

L'analyse de la fidélité, et plus exactement de la cohérence interne de la tâche, a été réalisée. L'analyse de l'alpha de Cronbach a révélé un bon indice de cohérence interne (alpha de Cronbach = .747).

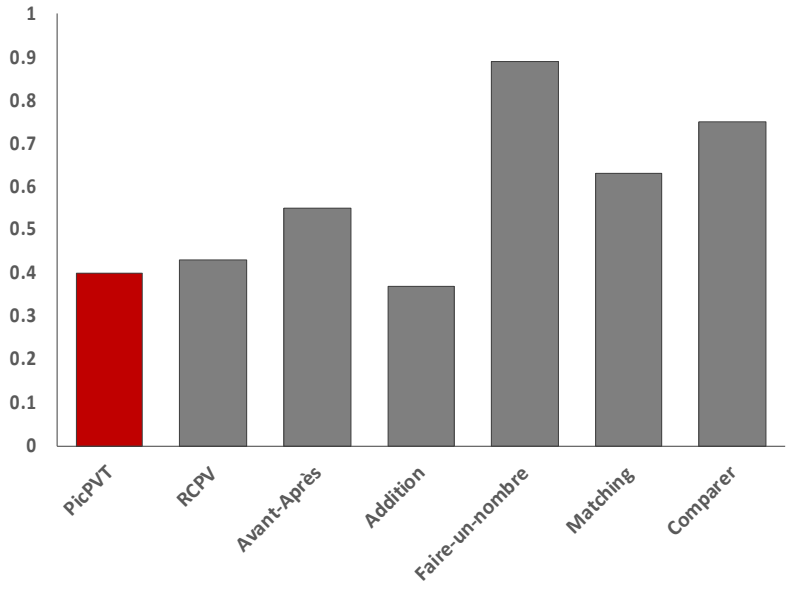


Figure 8 *– Pourcentage moyen par tâche.*

Table 1. Corrélations entre les mesures de valeur positionnelle

Tâches	1	2	3	4	5	6	7
PicPVT (1)	--	.13	.16	.35**	.08	.10	.08
RCPV (2)		--	.32**	.46**	.23*	.22*	.002
Avant-après (3)			--	.41**	.29**	.40**	.24**
Addition (4)				--	.20*	.37**	.11
Faire-un-nombre (5)					--	.28**	.22*
Matching (6)						--	.26**
Comparer (7)							--

*$p < .05$, **$p < .01$

IV. CONCLUSION

La tâche PicPVT présente une bonne validité de contenu, une bonne validité divergente et une bonne cohérence interne. Les tâches PicPVT et Addition pourraient être corrélées en regard de la forte implication de la double représentation dans chacune d'elles. Les résultats suggèrent donc les enfants font appel à leur compréhension de la NVP pour réussir la tâche Addition, tandis que les autres tâches nécessitent davantage l'application de connaissances procédurales enseignées à l'école. De futures recherches devront poursuivre l'effort de validation en évaluant les autres propriétés psychométriques de la tâche PicPVT.

REFERENCES

DeLoache, J. S. (1995). Early understanding and use of symbols: The model model. *Current Directions in Psychological Science, 4*(4), 109-113.

Uttal, D. H., Liu, L. L., & DeLoache, J. S. (2006). Concreteness and symbolic development. In L. Balter & C. S. Tamis-LeMonda (Eds.), *Child psychology: A handbook of contemporary issues* (2nd ed.) (pp. 167-184). Philadelphia, PA: Psychology Press.

Uttal, D. H., & Yuan, L. (2014). Using symbols: Developmental perspectives. *WIREs Cognitive Science, 5*, 295-304.

Projet Spécial 4 (SPE4)
Travail collaboratif

BILAN DU PROJET SPECIAL N°4

TRAVAIL COLLABORATIF

Responsables

MANGIANTE-ORSOLA[*] Christine – MARCHAND[**] Patricia – ROMO-VAZQUEZ*** Avenilde

Correspondant CS

THIES[*] Laurent

I. INTRODUCTION

1. A l'origine du choix de cette thématique

Qu'il soit question de l'enseignement des mathématiques ou de toute autre discipline, de production ou de mutualisation de ressources, de formation ou de projets de recherche, l'intérêt du travail au sein de collectifs semble faire consensus. Travailler ensemble permet de relever de nouveaux défis (Sadovsky, Itzcovich, Quaranta, Becerril, & García, 2016), de mieux s'adapter aux mutations de la profession ou encore d'aller plus loin en se confrontant à d'autres points de vue (Jaworski, 2005; Roditi, 2015). Si le travail au sein de collectifs nourrit depuis toujours la recherche, on ne peut que constater que des recherches-actions aux recherches collaboratives en passant par les communautés de pratiques ou encore les Lesson Study, les types de dispositifs se sont diversifiés (Anadòn, 2007 ; Fisher, 2001 ; Miyakawa & Winsløw, 2009) et de nouvelles questions pour la recherche ont émergé.
C'est pourquoi, ce Projet Spécial proposait d'ouvrir un questionnement sur ce thème organisé selon les deux grands axes de travail suivants :

- Quels sont les outils d'analyse à notre disposition (cadres théoriques, concepts, méthodes) pour caractériser les dispositifs intégrant le travail collaboratif et questionner certains choix d'ordre méthodologique ?
- Quels sont les apports et les limites du travail collaboratif ?

2. Présentation générale des contributions et des modalités de travail

Nous avons reçu six contributions venant de différents pays (France, Québec, Mexique) et se répartissant de manière équilibrée entre les deux axes de travail présentés dans le texte de présentation du projet.

Nous avons fait de choix de prévoir une séance introductive afin de présenter plus en détails la thématique, la diversité des types de travail collaboratif et la multiplicité des questions pouvant être posées. Nous avons principalement pris appui sur trois références : le cours de Roditi, E. & Trgalova, J. (2016) à la 18e École d'Été de Didactique des Mathématiques de l'ARDM, le texte d'une conférence donnée par Losego, P. (2017) lors de journées de rencontre du réseau des LéA organisé par l'IFE et enfin, un ouvrage de Bednarz (2013) sur la recherche collaborative et la pratique enseignante.

[*] ESPE LNF-Laboratoire Mathématiques de Lens – France – christine.mangiant@espe-lnf.fr
[**] Université de Sherbrooke – Canada – patricia.marchand@usherbrooke.ca
[*] Institution – Pays – email

Ces références nous ont permis de proposer un premier aperçu de la manière dont le travail collaboratif pouvait être investi. En effet, actuellement et depuis une trentaine d'années, plusieurs groupes s'insèrent dans ce courant, mais chacun à leur façon, selon des finalités différentes, des engagements et des statuts variés des enseignants, des chercheurs et avec un relation recherche-formation pouvant être également à différents niveaux. En ce sens, nous avons repris le tableau produit par Roditi & Trgalova (2016) auquel nous avons ajouté le groupe du CIRADE (centre interdisciplinaire de recherche sur l'apprentissage et le développement en éducation) affilié à l'UQAM (université du Québec à Montréal) qui a aussi historiquement joué un rôle dans le développement de la recherche collaborative.

	IREM	LéA	CoI	Inquiry c.	CIRADE
Finalité de la recherche	Développement et diffusion de pratiques innovantes	Construction de connaissances et évolution des pratiques	Conception d'un environnement informatique et construction de connaissances	Évolution des pratiques et construction de connaissances	Coconstruction de savoirs (double vraisemblance)
Engagement des enseignants	Individuel	Membre de collectif d'établissement	Représentant d'une CoP	Groupes d'enseignants d'établissement (au moins 3)	Groupes homogènes ou non d'intervenants
Statut des enseignants	Praticien réflexif devenant « chercheur »	Praticien réflexif	Co-concepteur	Praticien réflexif, co-apprenant	Praticien réflexif et co-concepteur
Statut des chercheurs	Chercheur et formateur	Chercheur	Co-concepteur et chercheur	Chercheur, formateur, co-apprenant	Chercheur, formateur et co-concepteur
Relation recherche-formation	Forte	Plus ou moins forte, selon les collectifs	Faible	Faible	Faible

Figure 1 : Tableau issu de Roditi, E. & Trgalova, J. (2016) auquel nous avons ajouté une colonne (à droite)

De plus, en cohérence avec la thématique abordée, nous avons choisi de mettre en place des modalités de travail collaboratif dans le but de mieux associer la trentaine (voire quarantaine) de participants présents à ce « projet spécial ». Après chaque présentation, nous leur avons proposé des temps d'échanges visant à faire émerger des mots-clés et les questions à poser à (ou aux) intervenant(s). Ces mots-clés et questions étaient visibles de tous et par conséquent chacun pouvait s'y référer afin d'alimenter la réflexion commune. De plus, le (ou les) intervenant(s) pouvait(ent) s'y référer pour approfondir les échanges avec le groupe selon leurs questionnements. Lors de la dernière séance, les mêmes modalités ont été reprises afin de produire un bilan du projet qui soit le fruit d'un travail collectif.

II. RETOUR SUR LES CONTRIBUTIONS ET SUR LES PRINCIPALES QUESTIONS ABORDEES

1. *Des contributions qui ont permis d'aborder des questions portant sur les cadres théoriques et la construction du collectif*

Mireille Saboya et Mélanie Tremblay, dont les travaux s'inscrivent dans le modèle de recherche collaborative développé principalement par Desgagné et Bednarz, ont apporté un éclairage sur le critère de double vraisemblance à travers deux exemples en lien avec le rôle joué par certains acteurs se situant à l'interface de la recherche et de l'enseignement (une chercheuse stagiaire). Les questions posées par les participants ont permis non seulement de

clarifier certaines notions issues de ce cadre théorique (Qu'est ce qui est co-construit ? Quelle est la nature de la co-construction ? La double vraisemblance de quoi ? Qu'est ce qui est « négocié » ?) mais aussi d'interroger la démarche collaborative (La démarche contient-elle nécessairement une co-construction, une coopération, une co-production ? Quelle est sa finalité ?). Cela a permis au groupe de discuter des conditions favorables à construction du collectif et notamment de l'équilibre à trouver entre enseignants et chercheurs.

La contribution de Sophie RENÉ de COTRET et de Valériane PASSARO a permis de poursuivre le questionnement mais dans un autre contexte, celui d'un projet de recherche-action collaborative pour la formation continue en mathématiques au secondaire. La construction du collectif ne va pas de soi. Ici, le projet visait à faire évoluer les regards des participants sur l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques par l'entremise d'un projet collaboratif de création d'activités visant, elles-mêmes, à provoquer des changements de regards chez les élèves. La nécessité d'une certaine confiance mutuelle entre les membres du collectif, de la prise en compte des besoins des enseignants ou encore de produire ensemble des activités pour l'enseignement a été souligné par l'intervenante. Les participants ont aussi relevé le rôle joué par une demande faite aux enseignants participant au projet : ceux-ci devaient présenter leur travail dans un colloque professionnel et le travail mené dans cette perspective est apparue une étape essentielle à la formation, en favorisant la dévolution.

2. Des contributions qui interrogent le fonctionnement du collectif

Le travail présenté par Mireille Morellato vise à décrire les pratiques de collaboration entre des professeurs des écoles et des chercheurs en didactique lors de la mise à l'essai d'un dispositif de recherche et d'enseignement, l'ingénierie didactique coopérative en mathématiques « ACE-Arithmécole ». Ainsi, il s'agit d'analyser la relation qu'entretiennent des professeurs et des chercheurs dans une ingénierie didactique coopérative et plus précisément le rôle du dialogue d'ingénierie dans le travail collaboratif. La présence de « mouvements » entre différentes « sphères » (différents collectifs) est venue alimenter la discussion entre les participants. Il a été question du rôle passif ou actif de l'observateur en classe, sur la manière dont un vocabulaire commun pouvait se construire entre enseignants et chercheurs et des rôles respectifs de chacun des acteurs dans la conception initiale des ressources proposées au collectif.

L'intervention de Christine Mangiante a permis d'aborder à nouveau la question du fonctionnement du collectif mais dans un autre contexte, celui de l'enseignement de la géométrie. La présence, au sein du collectif présenté, de formateurs chargés de classes (enseignants maîtres formateurs) c'est-à-dire d'acteurs qui se situent à l'interface de la recherche et de l'enseignement a permis d'aborder de nouvelles questions qui ont alimenté ensuite les débats : comment au sein d'un espace interinstitutionnels, les différents acteurs se positionnent-ils au regard de leur statut et interagissent au sein de ce dispositif de travail ? Et quelles sont les conditions penser pour créer un arrière-plan commun tout en laissant aux enseignants la possibilité d'y adhérer ou pas ? D'autres questions plus pointues ont également été adressées du type : comment interpréter le fait que les enseignants acceptent sans discussion la proposition du chercheur ? Pouvons-nous ici parler de collaboration ou de formation ? Et, quel est le rôle des chercheurs dans une telle ingenierie de formation ?

3. Des contributions qui ont permis de mettre en perspective les autres projets de travail collaboratif

Enfin, deux contributions prenant appui sur des projets différents de par la composition de leur collectif ont permis de mettre en perspective les projets précédemment présentés.

Avenilde Romo-Vázquez a présenté un projet de travail collaboratif qui associe ingénieurs experts en traitement de signal, didacticiens de mathématiques et neurologues[1]. Contrairement aux autres projets, l'objectif visé ici ne porte pas sur l'apprentissage des mathématiques. En effet, cette recherche en cours vise à analyser l'activité cérébrale associée à la réalisation de tâches mathématiques par des futurs ingénieurs. Ainsi, la place de la didactique n'étant pas la même au sein de ce collectif, il apparait intéressant de questionner comment peuvent s'articuler différentes disciplines (ici neurosciences et didactique) au sein d'un collectif. Les débats ont porté sur la nature de la collaboration au sein de ce projet, sur les apports de cette collaboration pour les didacticiens et plus généralement sur les apports de la neurologie pour la didactique.

Dans leur contribution, Maria Trigueros et María Dolores Lozano s'intéressent, elles aussi, à un projet mené dans l'enseignement supérieur et associant deux disciplines. Il s'agit d'une collaboration associant didacticiens des mathématiques et enseignants en mathématiques à l'université qui cherche à développer de nouvelles façons d'enseigner l'algèbre linéaire à des étudiants de première année. Les auteurs utilisent la notion d'énactivisme pour étudier la relation entre travail collaboratif et le processus de changement dans les pratiques des enseignants. Là encore, suite à cette présentation, certains des échanges ont porté sur les interactions entre les disciplines, sur les échanges entre didacticiens et mathématiciens, ce que soit au moment du choix du thème de la collaboration, de la conception des situations ou encore au moment de l'analyse des effets du travail mené au sein du collectif.

III. BILAN ET PERSPECTIVES

Au terme du travail mené au sein de ce « projet spécial », les participants ont dégagé des éléments de bilan qu'ils ont mis en regard avec des pistes de travail à envisager pour un éventuel prochain « groupe spécial » sur la même thématique.

Tous les participants étaient d'accord pour souligner la diversité des types de travail collaboratif présentés et l'éclairage apporté aux questions posées grâce à cette richesse. Cela a permis à chacun de mettre en perspective ses propres modes de collaboration. La production d'un tableau ou graphique pour situer chaque présentation par rapport à un type de collaboration est une piste à privilégier (il serait ainsi possible de compléter le tableau présenté en figure 1). Cela pourrait constituer un outil d'analyse commun à enrichir sur plusieurs colloques EMF, comme un fil rouge d'une rencontre à l'autre.

Un autre point qui a retenu l'attention des participants, c'est la présence de mouvements, de tensions, de complémentarités et donc d'une certaine dynamique au sein des collectifs. Cette dynamique serait à questionner en termes de hiérarchie des acteurs et/ou des disciplines et il conviendrait aussi d'étudier plus avant le rôle et la place des personnes situées à l'interface de « sphères ». Ainsi, la « dynamique du collaboration » pourrait devenir un objet commun que chacun pourrait chercher à questionner à travers différents projets de travail collaboratif afin à terme de pouvoir débattre sur différents outils ou modèles pertinents pour étudier cette dynamique.

[1] Liste des auteurs

Enfin, nous pourrions considérer le travail mené lors de ce colloque comme une première réflexion sur la place de la didactique des mathématiques dans les différents types de dispositifs de travail collaboratif. Une perspective de travail consisterait à approfondir la réflexion sur la place de la didactique des mathématiques dans les différents types de travail collaboratif - car cette place n'est pas nécessairement « surplombante » - en lien avec les différents cadres théoriques de référence et sans oublier de mentionner en arrière-plan les apprentissages des élèves (arrière-plan un peu trop absent parfois de nos échanges selon certains participants).

REFERENCES

Anadón, M. (2007). *La recherche participative. Multiples regards*. Québec : Presses de l'Université du Québec.

Bednarz, N. (2013). *Recherche collaborative et pratique enseignante. Regarder ensemble autrement.* Paris : L'Harmattan.

Fischer, G. (2001). Communities of Interest: Learning through the Interaction of Multiple Knowledge Systems. IRIS 24, Norway.

Jaworski, B. (2005). Learning communities in mathematics: creating an inquiry community between teachers and didacticians. *Research in Mathematics Education*, *7*(1), 101-119.

Losego, P. (2017). Les collaborations entre chercheurs et enseignants en trois questions, Rencontre nationale des LéA, IFE, Lyon

Miyakawa, T. & Winsløw, C. (2009). Un dispositif japonais pour le travail en équipe d'enseignants : Etude collective d'une leçon. *Education et Didactique*, *3*(1), 77-90.

Roditi, E. (2015). Recherches sur les pratiques enseignantes et relations chercheurs praticiens. Carrefours de l'éducation, 39, 55-68.

Roditi, E. & Trgalova, J. (2016). Collectifs de professeurs et de chercheurs. In Y. Matheron et. al. (Eds). *Enjeux et débats en didactique des mathématiques* (pp. 183-202). Grenoble : La pensée sauvage.

Sadovsky, P., Itzcovich, H., Quaranta, M.E., Becerril, M.M., & García, P. (2016). Tensiones y desafíos en la construcción de un trabajo colaborativo entre docentes e investigadores en didáctica de la matemática. *Educación Matemática*, *28*(3), 9-29.

ANNEXE

LISTE DES TEXTES DU SPE4 PAR ORDRE ALPHABETIQUE DU PREMIER AUTEUR

LARA-MELGOZA, R., MORALES-MORENO, L. F., ROMO-VÁZQUEZ, A., ROMO-VÁZQUEZ, R. & VÉLEZ-PÉREZ, H.

Analyse de l'activité cérébrale associée à la réalisation des tâches mathématiques : une étude faisant intervenir trois disciplines

MANGIANTE-ORSOLA C.

Etude d'un dispositif de travail collaboratif visant la conception d'une ressource pour l'enseignement de la géométrie

MORELLATO M.

Quelle relation entretiennent des professeurs et des chercheurs dans une ingénierie didactique coopérative ? Le rôle du dialogue d'ingénierie dans le travail collaboratif

SABOYA M., TREMBLAY M.

Recherches collaborative en action : un éclairage sur le critère de double vraisemblance

TRIGUEROS M., LOZANO M.-D.

Collaboration entre enseignants à l'université et émergence d'idées

AFFICHES

RENE DE COTRET S., PASSARO V.

J'avais jamais vu ça comme ça avant ! Un projet de recherche-action collaborative pour la formation continue en mathématiques au secondaire

ANALYSE DE L'ACTIVITE CEREBRALE ASSOCIEE A LA REALISATION DES TÂCHES MATHEMATIQUES : UNE ETUDE FAISANT INTERVENIR TROIS DISCIPLINES

LARA-MELGOZA[*] Rodrigo – MORALES-MORENO[**] Lorena F., ROMO-VÁZQUEZ[***] Avenilde ROMO-VÁZQUEZ[****] Rebeca et VÉLEZ-PÉREZ Hugo[*****]

Résumé – Dans cette communication nous présentons une recherche en cours dont l'objectif est d'analyser l'activité cérébrale associée à la réalisation de tâches mathématiques par des futurs ingénieurs. L'enregistrement de l'activité cérébrale a été fait avec des électroencéphalographies (EEG) avant et après une intervention didactique. Il s'agit d'un travail collaboratif entre ingénieurs experts en traitement de signal, des didacticiens de mathématiques et des neurologues.

Mots-clefs : Activité mathématique, étude de connectivité, activité cérébrale, apprentissage, futurs ingénieurs

Abstract – This work presents a research in process about the analysis of the brain activity associated with the performance of mathematical tasks by future engineers. The brain activity was recorded using an electroencephalograph (EEG) before and after didactic mathematical training. This research is the result of the collaboration of expert Engineers in Digital Signal Processing, Researchers in Mathematics Education and Neurology specialists.

Keywords: Mathematical activity, brain connectivity, cerebral activity, learning, engineers students

I. ANALYSE DE L'ACTIVITE CEREBRALE CHEZ LES ETUDIANTS UNIVERSITAIRES

Ces dernières années le champ de la neuroscience a eu un grand développement, particulièrement en ce qui concerne les études sur le fonctionnement du cerveau. Cependant, il n'y a pas encore un rapport solide entre les études du cerveau, son évolution et l'apprentissage. Selon Radford et André (2009), le premier article qui a abordé les implications pédagogiques issues des études en neurosciences a été publié dans la revue, *Brain, Mind and Education* en 2007. Dans ce travail, les auteurs signalent trois grands apports des études en neurosciences concernant l'éducation : 1) aider à comprendre la nature de la pensée, 2) élargir l'entendement sur le développement conceptuel et 3) son rapport avec le contexte culturel aussi comme les connaissances sur les problèmes particuliers comme la dyslexie.

Des travaux récents (Stringer et Tommerdahl, 2015) cherchent à générer des modèles prédictifs de la capacité pour apprendre d'un sujet. Pour cela, ils utilisent des méthodes de traitement des données à grande échelle (*big data*). Les auteurs signalent que des travaux longitudinaux en neurosciences ont abouti à ce qu'ils appellent des analyses potentielles de l'enfant, en utilisant encéphalographie EEG et potentiels évoqués relatifs (ERP). Plusieurs travaux se sont consacrés à l'habilité générale de l'intelligence chez des étudiants à l'université, en analysant le lobe frontal, connu comme le responsable de fonctions cognitives complexes (Pluck, Ruales-Chieruzi, Paucar-Guerra, Andrade-Guimaraes, & Trueba, 2016). Pour cela, ils ont appliqué le test de QI et un autre ensemble de tests permettant d'analyser les fonctions exécutives. Ces études nous ont amenés à développer une recherche novatrice

[*]Instituto Politécnico Nacional et Universidad Autónoma de Baja California – Mexique – rodrigo.lara@uabc.edu.mx
[**]Université de Guadalajara – Mexique – fery.93@hotmail.com
[***]Instituto Politécnico Nacional – Mexique– aromov@ipn.mx
[****]Universidad de Guadalajara – Mexique – rebeca.romovazquez@gmail.com
[*****]Universidad de Guadalajara – Mexique – hugo.velezperez@gmail.com

concernant l'analyse de l'activité cérébrale associée à la réalisation des tâches mathématiques par étudiants universitaires. Pour cela, nous avons intégré une équipe de recherche composée de didacticiens de mathématiques, d'ingénieurs experts en traitement de signaux et de neurologues. Nous nous proposons d'analyser ici le travail collaboratif qui a eu lieu ainsi que les premiers résultats issus de cette recherche. Pour ce faire, nous allons considérer deux grandes étapes de l'étude : l'encadrement et le développement.

II. L'ENCADREMENT DE L'ETUDE : PREMIERS RAPPORTS ENTRE TROIS DISCIPLINES

La méthodologie suivie a été déterminée par les neurologues, experts de l'étude de l'activité cérébrale : produire un pré-test, « un entrainement » et un post-test permet d'analyser l'apprentissage (Figure 1). Les ingénieurs experts en traitement de signaux doivent assurer l'enregistrement de l'activité cérébrale et traiter les signaux obtenus pour avoir des « fenêtres » permettant d'analyser cette activité ; ils choisissent l'encéphalographie comme méthode d'enregistrement. Les didacticiens sont chargés de choisir les types des tâches mathématiques qui seront proposés chez des étudiants à l'université dans l'entrainaient et pourtant de concevoir les deux tests.

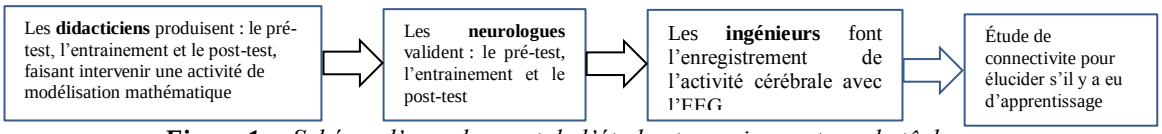


Figure 1 *– Schéma d'encadrement de l'étude et premier partage de tâches*

Ce premier partage de tâches nous montre comment la conception des tests et de l'entrainement est l'activité au cœur de ce projet. Les didacticiens ont l'expertise pour concevoir et conduire l'intervention didactique, ici appelée « l'entrainement », mais pas celle nécessaire pour concevoir les tests. Par contre, les neurologues sont experts dans la conception de tests mais ils ne maitrisent pas les mathématiques enseignées à l'université. Cela demande donc d'un travail collaboratif. Toute l'équipe s'est réunie pour déterminer les caractéristiques des tests et le sujet mathématique autour duquel l'étude serait faite. L'équipe a choisi de concevoir une activité de modélisation mathématique relevant de la pratique des ingénieurs, encadrée dans le paradigme du questionnement du monde (dimension didactique) et ainsi réaliser l'étude de connectivité (dimension de l'ingénierie et de la neuroscience), comme nous précisons dans ce qui suit.

1. *La dimension didactique : modélisation mathématique pour la formation des futurs ingénieurs*

Au sein de la théorie anthropologique du didactique un nouveau paradigme d'enseignement a été proposé « le questionnement du monde » (Chevallard, 2013) qui est basé sur l'étude des questions « cruciales » ouvertes, de recherche et pertinentes dans la formation des citoyens, à la place des concepts. Dans différentes recherches menées au CICATA-IPN, en tant que didacticiens participant à cette étude, nous nous sommes proposés de faire vivre ce paradigme dans l'enseignement supérieur et en particulier dans la formation des futurs ingénieurs. Pour ce faire, nous avons analysé des contextes de l'ingénieur, sciences de l'ingénieur et pratiques professionnelles (Romo, 2014 et Echavarraía, 2016), en identifiant des questions abordées par les ingénieurs – « cruciales » ou importants pour les futurs ingénieurs- et en concevant des Parcours d'Étude et de Recherche (PER). Par exemple, nous

avons analysé la méthode de Séparation Aveugle des Sources[1] (BSS par ses sigles en anglais) dont un modèle matriciel est utilisé pour séparer des mélanges de signaux sans connaître ni les signaux, ni la manière dont ils se sont mélangés (Vázquez, Romo, Romo-Vázquez et Trigueros, 2016). Il s'agit d'un type de modélisation mathématique connu comme modélisation inverse, peu ou nullement abordée dans l'enseignent mathématique universitaire. Des questions cruciales ont été identifiées : Comment séparer un mélange de signaux audio ou électro-physiologiques ? Comment séparer des signaux cérébraux de signaux non cérébraux ? De la même manière, nous avons analysé un modèle mathématique faisant intervenir une équation différentielle associée au fonctionnement d'un stimulateur cardiaque (Siero-González et Romo-Vázquez, 2017). Des questions ont été identifiées : Comment peut-on concevoir un stimulateur cardiaque ? Est-il possible de proposer un stimulateur cardiaque plus économique que ceux qui existent sur le marché ? D'autres contextes ont été étudiés : l'analyse de structures (Echavarría, 2016), l'utilisation de modèles linéaires et d'éléments statistiques dans l'industrie automobile (Aldape, 2016) et l'usage du diagramme de Pareto dans une brasserie (Tolentino-Olivera, 2015).

En ayant ce petit répertoire de modèles mathématiques utilisés par les ingénieurs, les didacticiens ont décidé de choisir pour cette étude le diagramme de Pareto, car il est hautement utilisé dans l'industrie et il est le moins complexe. Ainsi, les didacticiens ont conçu un entrainement pour apprendre aux étudiants à utiliser le principe de Pareto. Il s'agissait donc de partir de questions qui se posent dans le contexte du travail en industrie pour mieux penser la formation et ainsi donner un sens pratique à cet enseignement. La dimension de l'ingénierie et de la neuroscience : l'étude de connectivité

L'encéphalographie (EEG) est la méthode la plus largement utilisée pour enregistrer l'activité cérébrale. Parmi ces avantages, nous pouvons signaler que c'est le premier test médical demandé pour diagnostiquer une pathologie cérébrale, la méthode la plus connue et la plus économique, avec une très bonne résolution temporaire (de l'ordre de la milliseconde) et elle est non invasive car celle-ci est effectuée par l'intermédiaire d'électrodes placées au contact du cuir chevelu. Actuellement, il est reconnu que les processus cérébraux (cognitifs, motrices ou pathologiques) enregistrés sur le cuir chevelu sont le produit de l'interaction de différentes populations neuronales associées. Dès l'optique du traitement des signaux ces interactions peuvent être étudiées comme des synchronisations (connexions) ou des désynchronisations (déconnexions) des régions cérébrales. La connectivité cérébrale (*brain connectivity*) est vue comme la communication entre différentes régions cérébrales et est acceptée tant par les communautés médicales comme scientifiques. Les ingénieurs et les neurologues sont les responsables de cette étude. Et particulièrement, les ingénieurs ont enregistré l'activité cérébrale et ont traité les signaux pour avoir les fenêtres que les neurologues ont interprété.

III. CONTEXTE EXPERIMENTAL ET METHODOLOGIE

L'étude s'est développée à l'Universidad de Guadalajara, deuxième université en importance par le numéro d'étudiants, au Mexique. L'étude a débuté avec 25 étudiants, futurs ingénieurs, des différentes filières qui étaient en troisième année d'une formation d'entre 8 et 9 semestres. Ces étudiants étaient volontaires et ont accepté de répondre au test de QI, deux tests associés à un « entrainement » qui comportait deux sessions de deux heures chacune et

[1] C'est une méthode utilisée par les ingénieurs pour séparer des mélanges de signaux de différente nature. Elle est utilisée par exemple pour mieux diagnostiquer l'épilepsie en séparant les signaux cérébraux des signaux non cérébraux, produits par le cœur ou les os.

un travail chez eux estimé de deux à trois heures. Ce sont seulement 10 étudiants qui ont terminé cette étude qui s'est déroulée selon trois grandes phases :

1) Conception et application d'un pré-test et enregistrement de l'activité cérébrale associée
2) L'entrainement : mise en place des activités didactiques avec les futurs ingénieurs
3) Conception et application d'un post-test et enregistrement de l'activité cérébrale associée

1. *Conception et application de tests pour enregistrer l'activité cérébrale des futurs ingénieurs*

Pour enregistrer l'activité cérébrale lors de la réalisation des tâches mathématiques, les étudiants ne doivent pas bouger car cela produit de l'activité musculaire, qui empêche d'enregistrer correctement l'activité cérébrale avec l'EEG. Les tests doivent donc être une série des questions à choix multiples demandant un temps maximal de réponse de dix minutes (ce qui évite la fatigue) ; la réponse choisie est communiquée en cliquant une fois sur le clavier. Les questions de test ont été conçues en relevant de l'étude d'une brasserie (Tolentino, 2015) qui montre l'utilisation du principe de Pareto : « environ 80% des effets sont produits par le 20 % de causes » et dont la basse mathématique est la distribution de Pareto.

Les deux tests, conçus par les didacticiens, gardent une grande similitude, c'est qui permet de comparer le temps de réponse des étudiants et la connectivité avant et après l'entrainement. Les tests ont deux parties : 2 questions de préparation et 18 questions au choix multiple relevant d'une même praxéologie, celle du Principe du Pareto. Les deux premières questions permettent aux étudiants de se familiariser avec le système de réponse selon trois étapes : 1) Lire et trouver la réponse ; 2) Cliquer la barre espace de l'ordinateur pour afficher le répertoire des réponses et en choisir une, et 3) Cliquer pour enregistrer la réponse choisie dans un délai maximal de dix secondes.

Une fois la première version du pré-test terminée nous l'avons proposée à une dizaine d'enseignants de mathématiques, aux ingénieurs et aussi aux neurologues. Cela a permis d'avoir une validation expérimentale. Le post-test a été conçu de la même manière. Pour illustrer le type de questions comportant les tests et la façon de les présenter aux étudiants, nous montrons ci-après le contexte et la question 2 du pré-test :

> Vous faites partie d'une équipe d'experts de la « Brasserie Cuauhtémoc » qui analyse les problèmes affectant la production. A partir d'une première étude, vous savez que le temps-mort dans différentes lignes de production est la source la plus importante de ces problèmes. Dans les questions suivantes vous trouverez des tableaux et de graphes qui représentent le temps-mort en les analysant vous trouverez la réponse adéquate.
> 2. Choisissez le couple des lignes de production qui en les réglant permettent de minimiser le temps mort dans la section A.

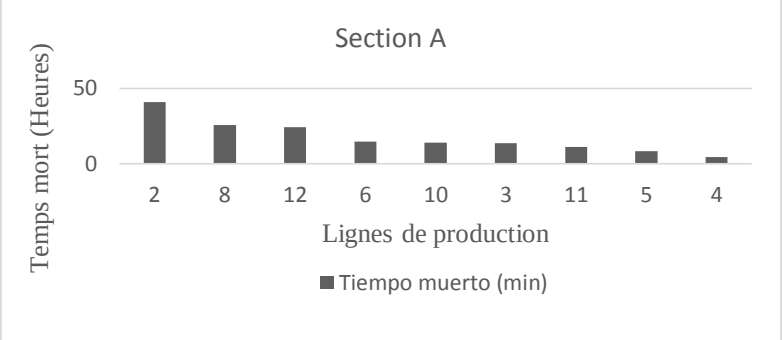


Figure 2 *– Graphe du temps-mort sur les lignes de production*

La question et le graphe (Figure 2) s'affichent sur l'écran de l'ordinateur au même temps, mais pas les réponses. Les futurs ingénieurs peuvent lire et réfléchir sur la question le temps souhaité. Dans ce cas, ils doivent repérer que les lignes 2 et 8 sont les plus problématiques et

← Lignes 2 et 4	↓ Lignes 2 et 8	→ Lignes 6 et 10	↑ Lignes 8 et 12

que les régler est la solution plus efficace pour cette industrie. Organiser les données de cette manière comporte la première étape du Principe du Pareto : déterminer l'importance des causes à partir de leur fréquence. Une fois que les étudiants sont prêts pour répondre, ils cliquent sur la barre espace de l'ordinateur et réponses à choix s'affichent comme on peut le voir ci-après :

Figure 3 *– Quatre choix s'affichent pour la question 2*

À ce moment-là, les étudiants peuvent regarder la question et les réponses (figures 2 et 3), une fois qu'ils décident de répondre, cliquent sur la barre espace de l'ordinateur et à nouveau les réponses s'affichent mais pas la question (figure 4). La réponse choisie doit être cliquée dans un temps maximal de 10 secondes.

← Lignes 2 et 4
↓ Lignes 2 et 8
→ Lignes 6 et 10
↑ Lignes 8 et 12

Figure 4 *– Dernier écran montrant les réponses à choix multiples*

L'enregistrement de l'activité cérébrale s'est fait pendant la réalisation de deux tests avec un EEG, tous les étudiants portaient un casque avec 20 électrodes. La façon de faire passer le test (figure 5), a été déterminé par les neurologues.



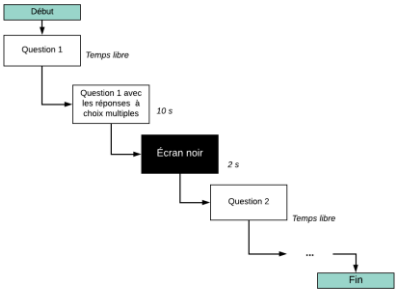


Figure 5 *– Enregistrement de l'activité cérébrale*

2. L'entrainement

L'entrainement, conçu par les didacticiens, s'est réalisé en une semaine, au début de mai 2017 à l'Universidad de Guadalajara. Il y a eu deux séances en présentiel et un travail entre les deux que les étudiants ont réalisé chez eux. Lors de la première session, nous avons proposé le PER « Aqua Purific » inspiré d'une situation industrielle réelle et qui est la suivante :

> L'entreprise Aqua Purific a une production annuelle d'un million de litres de l'eau purifié, qui sont mises en bouteilles de verre. Elle a six lignes pour embouteiller le produit, le responsable de la sécurité de la plante a besoin d'un plan stratégique pour réduire les accidents. Cela, car le coût de maintenance des lignes de production est assez élevé. L'entreprise a un budget limité ce qui ne permet pas de maintenir toutes les lignes au même temps. Dans l'objectif de produire une première analyse des défauts, il a demandé à son personnel d'enregistrer les défauts dans chacune des lignes ; le rapport sous forme de tableau apparaît ci-après :

Lignes	Fréquence de défauts
Ligne 1	47
Ligne 2	98
Ligne 3	36
Ligne 4	71
Ligne 5	15
Ligne 6	41

***Tableau 1**- Fréquence de défauts dans les lignes de production*

De même, le rapport de défauts de toutes les lignes sous forme de tableau est ci-après :

Type des défauts	Fréquence	L1	L2	L3	L 4	L 5	L 6
Réglage	59	11	11	9	13	6	9
Qualité	7	1	3	1	1	0	1
Manque d'aide visuelle	4	1	2	0	1	0	0
Manque de propreté	12	0	6	2	3	0	1
Manque des pièces ou pièces rompues	55	2	15	12	16	3	7
Fuites (huile, de l'eau, de l'air, etc.)	62	1	35	2	14	3	7
Outils en mauvais état ou pas adéquates	2	0	1	0	0	1	0
Parties électriques abîmés ou obsolètes	17	3	3	3	2	0	6
Parties mécaniques abîmes ou obsolètes	80	27	20	3	20	0	10
Risque de rester coincé	1	1	0	0	0	0	0
Risque de frapper contre des objets ou d'être frappé	7	0	2	2	1	1	1
Bruit pas normal	2	0	0	1	0	1	0

***Tableau 2**- Types de défauts et sa fréquence dans les lignes de production*

De plus, deux tableaux montrant les fréquences de défauts par ligne ont été fournis. Les étudiants se sont organisés en équipes pour construire un plan d'action pour l'entreprise, lui permettant d'utiliser le budget, de manière optimale. La version finale du plan d'action a été envoyée par courriel, 5 jours après la première séance. Dans la deuxième séance chaque équipe a montré son plan d'action et tout le groupe a « construit » le principe du Pareto pour « justifier » et garantir à l'entreprise que le plan d'action proposé était le plus optimal. Dans la figures 6 et 7 nous pouvons voir comme le diagramme de Pareto permet rapidement de décider la ligne qui a le plus de défauts et le pourcentage de perturbation. Cela peut se voir en faisant la Courbe de Lorenz (en bleu) associée à l'échelle (0-100) qui apparaît à la droite.



***Figure 6** – Analyse de la ligne 5*



***Figure 7** – Analyse de la ligne 1*

Ensuite, nous avons proposé une dizaine des situations semblables. On pourrait dire que le PER Aqua Purific était une activité ouverte qui a motivé l'étude du Principe du Pareto, tandis que les dix tâches correspondaient à un travail sur la technique, définie dans la TAD comme un moment du processus d'étude associé à produire ou reproduire une praxéologie. Ce choix didactique a été fait car le PER a permis d'aborder la question : comment peut-on utiliser un budget « limité » de manière optimale pour régler la plupart de défauts dans les lignes de production ? Les équipes d'étudiants ont travaillé de manière libre, en explorant les données disponibles et en proposant différentes solutions basées principalement sur l'intuition, « il faut régler les fuites car ça met en danger l'entreprise » sans prendre en compte la fréquence de défauts. Seulement, une de quatre équipes a proposé une solution qui a été validée en comparant différentes propositions. C'est dans une mise en commun que nous avons construit le principe de Pareto. Une analyse des parcours suivis par ces équipes en termes de la dialectique questions-réponse est en cours. Proposer ensuite dix tâches qui demandaient d'utiliser ce principe, a permis de travailler la technique : identifier les défauts qui ont la fréquence plus élevée et décider en rapport au budget disponible la solution optimale. Les dix tâches étaient proposées en contextes différents dans le but de faire travailler cette technique et d'être capable de la mettre en place dans peu de temps.

IV. PREMIERS RESULTATS

Les premiers résultats de ce projet sont associés à l'étude de connectivité. Premièrement, nous pouvons noter (figure 8) que tous les étudiants (repéré par un S, comme « Sujet » suivi d'un numéro) ont réduit leur temps de réponse (temps de réponse relevé avant l'entrainement indiqué en bleu et en rouge pour celui relevé après l'entrainement), ce qui tend à montrer que les sujets ont appris.

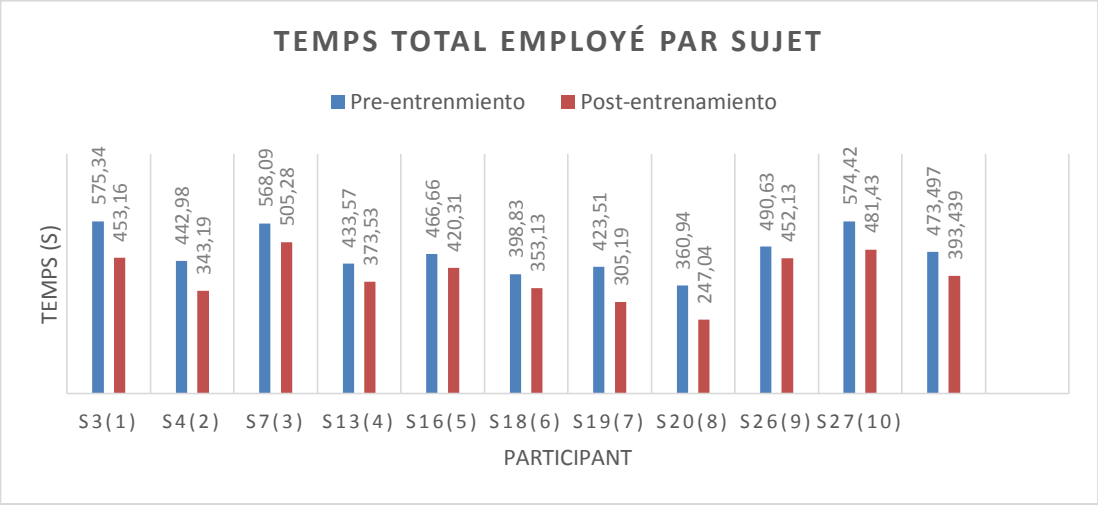


Figure 8 *– Tableau montrant le temps de réponse dans le pré et post test*

Le résultat le plus important concerne l'analyse de fréquence (dans la bande delta) que nous avons appelée fenêtre 3 et qui correspond à l'activité des étudiants une seconde avant de cliquer sur la réponse choisie (figure 9). Nous supposons que juste à ce moment, le sujet est dans le processus de « travailler / réfléchir » avant de répondre. Cette fenêtre est obtenue à partir de la moyenne de cinq fenêtres de réponses correctes des dix sujets. C'est à dire la moyenne de 50 fenêtres. C'est un résultat « préliminaire » mais a priori il est possible de voir la charge d'énergie (en rouge) de manière plus importante avant l'entrainement qu'après.

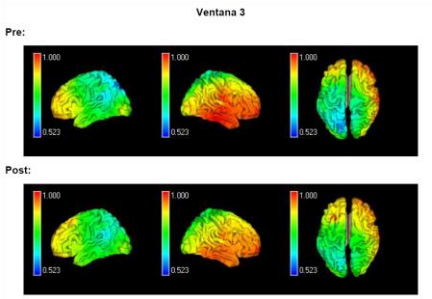


Figure 9 *– Activité cérébrale des étudiants dans la fenêtre 3*

D'autres analyses doivent être faites pour mieux comprendre cette activité cérébrale et ses implications pour l'enseignement de mathématiques chez les futurs ingénieurs.

V. UN TRAVAIL COLLABORATIF OBJET D'UNE PREMIERE ANALYSE

Dans ce projet, nous avons réuni trois équipes de recherche : des ingénieurs experts dans le traitement de signaux, des didacticiens de mathématiques et de neurologues. Nous avons aussi travaillé avec des enseignants de mathématiques, avec de futurs ingénieurs et des étudiants en master et en thèse des différentes disciplines. Chaque équipe a mené un type de travail différent, les ingénieurs ont été responsables de l'enregistrement de l'activité cérébrale et de l'étude de connectivité. Les neurologues ont analysé la pertinence des tests, ils ont proposé d'étudier la bande delta et ont fait une première analyse de la fenêtre 3 (figure 9). Les didacticiens de mathématiques ont conçu le tests et l'entrainement sur le principe de Pareto. Cet entrainement a demandé de concevoir un PER et un ensemble de tâches permettant une maitrise de la technique pour faire face à des tâches dans un temps très court. Les trois équipes semblent avoir des tâches précises et propres à leur expertise, mais un langage de « base » s'est établi pour pouvoir communiquer à propos des besoins et des savoirs. La manière dont ce langage s'est créé et comment il a favorisé une communication efficace ainsi que les différents niveaux d'interactions n'ont pas encore été l'objet d'étude. Mais nous sommes conscients qu'un projet de ce type a besoin d'un travail collaboratif efficace.

REFERENCES

Aldape, J.O. (2016). Estudio antropológico de una práctica de metrología en una empresa automotriz y su potencialidad como base de diseños didácticos. (Tesis de maestría). CICATA-IPN, Ciudad de México, México.

Chevallard, Y. (2013). Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a Favor de un Contraparadigma Emergente. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2(2), 161 -182. doi: 1 0.4471 /redimat.201 3.26

Echavarría, L.A. (2016). Diseño de dispositivos didácticos de investigación para formación de ingenieros: El caso de creación de herramientas computacionales. (Tesis de maestría). CICATA-IPN, Ciudad de México, México.

Pluck, G., Ruales-Chieruzzi, C., Paucar-Guerra, E., Andrade-Guimaraes, M.V., Trueba, A.F. (2016). Separate contributions of general intelligence and right prefrontal neurocognitive functions to academic achievement at university level. *Trends in Neuroscience and Education. 5*(4), pp. 178-185. Doi: 10.1016/j.tine.2016.07.002

Radford, L. y André, M. (2009*).* Cerebro, cognición y matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 12*(2), 215-250.

Siero, L. y Romo-Vázquez, A. (2017). Didactic Sequences Teaching Mathematics for engineers with focus on Differential Equations. En M.S. Ramírez y M. A. Domínguez

(Eds.). Driving STEM Learning with Educational Technologies. IGI Global. pp.121-151. DOI: 10.4018/978-1-5225-2026-9.ch007

Stringer, S. Tommerdahl, J**.** (2015). Building bridges between Neuroscience, Cognition and Education with predictive modeling. *Mind, Brain and Education*. *9*(2), 121-126. Doi: 10.1111/mbe.12076

Tolentino (2015). Uso del principio de Pareto en la industria cervecera y su posible vinculación con la enseñanza de las matemáticas. (Tesis de maestría). CICATA-IPN, Ciudad de México, México.

Vázquez, R., Romo-Vázquez, A., Romo-Vázquez, R. y Trigueros, M. (2016). Una reflexión sobre el rol de las matemáticas en la formación de ingenieros. *Educación Matemática, 28*(2), 31-57.

ETUDE D'UN DISPOSITIF DE TRAVAIL COLLABORATIF VISANT LA CONCEPTION D'UNE RESSOURCE POUR L'ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE

MANGIANTE-ORSOLA[*] Christine

Résumé – Cet article propose d'interroger la dimension collaborative d'un projet de production d'une ressource pour l'enseignement de la géométrie porté par une équipe pluricatégorielle (chercheurs, conseillers pédagogiques, enseignants maîtres formateurs). Notre intention est d'interroger à travers l'analyse d'un moment d'échange comment les différents acteurs se positionnent au regard de leur statut et interagissent au sein de notre dispositif de travail.

Mots-clefs : travail collaboratif, ressource, géométrie, processus de conception, dispositif de travail

Abstract – This article proposes to question the collaborative dimension of a production project of a resource on teaching geometry carried by a multi-categorical team (researchers, pedagogical advisors, teacher trainers). Our intention is to interrogate, through the analysis of a moment of exchange, how the different actors position themselves in terms of their status and interact within our work system.

Keywords: collaborative work, resource, geometry, design process, work device

I. INTRODUCTION

Notre travail s'inscrit dans la continuité d'une recherche sur l'enseignement de la géométrie qui a débutée il y a une quinzaine d'année à l'IUFM Nord-Pas-de-Calais (Perrin-Glorian, Godin, 2014). Notre questionnement est double : d'une part continuer à étudier la possibilité d'une approche de la géométrie pour l'école primaire adaptée au développement cognitif des élèves et permettant de développer les concepts sur lesquels pourra s'appuyer la géométrie théorique au collège, d'autre part étudier les conditions de diffusion de cette approche dans l'enseignement ordinaire et de l'enrichissement des pratiques enseignantes que cela suppose (Mangiante-Orsola, Perrin-Glorian, 2016a, 2016b). Depuis septembre 2014, nous développons cette étude dans le cadre d'un LéA (Lieu d'éducation Associé à l'IFE[1]) situé dans la circonscription de Valenciennes-Denain dont l'inspecteur a participé à certaines étapes de la recherche précédente. Notre projet est porté par une équipe composée de deux chercheurs, d'un inspecteur de l'éducation nationale (IEN), de trois conseillers pédagogiques de circonscription (CPC), de trois enseignants maîtres formateurs (EMF)[2] qui s'est élargie lors des deux premières années à un groupe d'une quinzaine d'enseignants de la circonscription bénéficiant d'heures de formation continue et volontaires pour participer à l'expérimentation de situations en classe en vue de la conception d'une ressource.

Notre démarche est celle d'une ingénierie didactique pour le développement de ressources et la formation (IDD, Perrin-Glorian, 2011). Cette démarche propose de penser les rapports entre recherche et enseignement non de façon descendante, comme une transmission de la recherche vers l'enseignement mais comme une adaptation aux pratiques ordinaires, beaucoup plus dialectique entre ces deux pôles, tout en restant dans le cadre de l'ingénierie didactique (Brousseau, 2013). L'IDD suppose explicitement deux niveaux de questionnement pour tenter de prendre davantage en compte les pratiques ordinaires des enseignants : l'un pour tester la validité théorique des situations, c'est-à-dire leur capacité à produire les connaissances attendues, et dégager les choix fondamentaux de l'ingénierie, l'autre pour étudier

[*] Laboratoire de Mathématiques de Lens-Université d'Artois – France – christine.mangiante@espe-lnf.fr

[1] Institut Français de l'Education

[2] Les chercheurs sont (ou ont été) formateurs. Parmi les formateurs de terrain, certains sont chargés de classe (les EMF) et d'autres non (les CPC).

l'adaptabilité des situations dans l'enseignement ordinaire et leurs conditions de vie en relation avec les pratiques des enseignants et leurs perspectives d'évolution.

Ces deux niveaux ne sont pas chronologiques : au moment du travail sur le premier niveau, on essaie d'anticiper le deuxième niveau et dans le travail au deuxième niveau, on remet aussi en question le premier niveau. Le schéma ci-dessous (figure 1) présente de manière succincte la démarche d'IDD : les deux flèches correspondent aux deux niveaux de questionnement, l'aspect cyclique du schéma traduit le lien entre ces deux niveaux, le tout étant situé à l'interface de la recherche et de l'enseignement ordinaire.

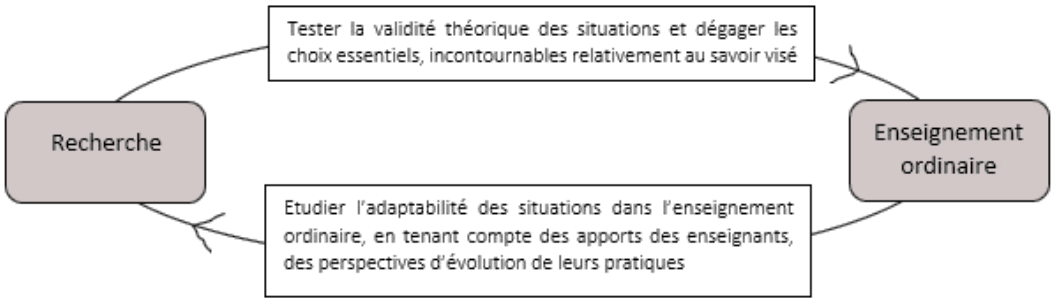


Figure 1 *– Deux niveaux de questionnement dans la démarche d'IDD*

Dès le début de notre projet, nous avons fait l'hypothèse que la prise en compte du point de vue des enseignants serait facilitée par les EMF et CPC qui ont une meilleure connaissance du terrain que les chercheurs (ne serait-ce que parce qu'ils y ont plus facilement accès). Mais, comment ce groupe facilite-t-il la prise en compte du point de vue des enseignants par les chercheurs (et du point de vue des chercheurs par les enseignants) ?

Dans une première partie, nous présentons comment les dispositifs de travail et de recherche se sont peu à peu mis en place autour de cette équipe pluricatégorielle. Puis, à travers l'analyse de la transcription d'une séance de travail, nous questionnerons dans une deuxième partie comment certains des différents acteurs se positionnent au regard de leur statut et interagissent au sein de notre dispositif.

II. MISE EN PLACE D'UN DISPOSITIF COLLABORATIF POUR UNE INGENIERIE DIDACTIQUE DE DEVELOPPEMENT

1. Des objectifs différents à organiser autour d'un projet commun

Lorsque nous avons commencé à travailler avec l'équipe de circonscription de Valenciennes Denain, nous avions une même finalité autour de laquelle nous rassembler : concevoir et évaluer des ressources pour l'enseignement de la géométrie au cycle 3. Néanmoins au-delà de ce projet commun, nous avions des objectifs différents. En effet, à nos questions de recherche (interroger les conditions de diffusion dans l'enseignement ordinaire de situations conçues en prenant appui sur les hypothèses issues de la recherche) sont venues se greffer des préoccupations émanant de l'équipe de la circonscription (qui peuvent se résumer par la volonté de dynamiser l'enseignement de la géométrie dans la circonscription).

A ce moment-là, la manière dont ces différentes préoccupations émanant d'acteurs aux statuts différents pouvaient cohabiter, s'articuler, s'organiser n'était pas définie avec précision. Nous ne savions pas non plus précisément quelles modalités de travail allaient pouvoir nous permettre de produire ensemble cette ressource. Ainsi, même si la démarche

générale était fixée (celle de l'IDD), il nous restait à préciser comment nous pouvions la mettre en œuvre dans le cadre précis de notre dispositif de travail.

2. Un espace de travail interinstitutionnel

Au cours de l'année précédant notre entrée dans le réseau des LéA, des séances ont été testées dans les classes des maîtres formateurs et d'enseignants associés au projet mais l'accompagnement mis en place dans le cadre de la formation continue s'est révélé insuffisant (certains enseignants dénaturaient la situation proposée). Cela nous a néanmoins permis d'apprendre à travailler ensemble, ce qui est loin d'être négligeable, car cela nous a permis de « construire le collectif ». De plus, cela nous a laissé le temps d'approfondir en tant que chercheurs certaines questions d'ordre méthodologiques (par exemple, comment penser l'articulation entre dispositif de travail et dispositif de recherche ?).

Cela nous a néanmoins permis d'apprendre à travailler ensemble - ce qui est loin d'être négligeable - et cela nous a laissé le temps d'approfondir en tant que chercheurs certaines questions d'ordre méthodologiques : par exemple, comment penser l'articulation entre dispositif de travail et dispositif de recherche ?

Suite à cette première étape, nous avons précisé les modalités de travail et le processus de conception de la ressource (figure 2). L'équipe restreinte aux chercheurs et formateurs de terrain pilote ensemble le dispositif, élabore des versions provisoires de la ressource que les enseignants maîtres formateurs testent eux-mêmes dans leur classe avant d'en proposer une version revue aux enseignants du groupe élargi dans le cadre de la formation continue. Ces derniers testent à leur tour dans leur classe les situations proposées dans la ressource mais ils sont accompagnés de la préparation à la mise en œuvre par les formateurs de terrain. Ainsi, la conception des ressources rédigées par les formateurs est organisée selon des boucles itératives (il s'agit de penser ensemble, mettre en œuvre, analyser, repenser, remettre en œuvre, ré-analyser…) de façon à produire des séquences d'enseignement adaptées, utiles et diffusables dans l'enseignement ordinaire. Le travail mené au sein du groupe restreint est collaboratif, celui mené au sein du groupe élargi l'est aussi à certains moments dans la mesure où les enseignants sont amenés à proposer des suggestions de modification de la ressource mais à d'autres moments il s'agit essentiellement de formation.

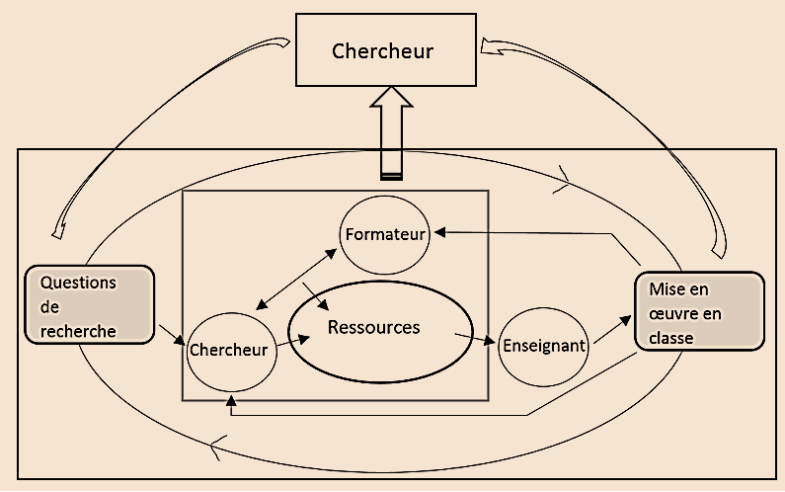


Figure 2 *– Articulation des espaces de recherche et de travail*

Ainsi, au cœur de notre dispositif (et de notre démarche d'IDD), se trouve un espace de travail créé par les différents acteurs prenant part à ce travail collaboratif (figure 3). Ceux-ci

se définissent principalement comme chercheurs, formateurs ou enseignants et cet espace se structure en deux niveaux : groupe restreint / groupe élargi. Situé entre les trois types d'institutions de rattachement des acteurs – institutions de recherche (notamment laboratoires de recherche), de formation (ESPE[3] et circonscription) ou d'enseignement (la circonscription et plus largement l'académie) – cet espace de travail est un lieu d'échanges, de réflexion et d'élaboration de ressources. C'est un espace interinstitutionnel, interface créée par la recherche et pour la recherche entre les deux pôles recherche et enseignement ordinaire visant à la fois la production de savoirs didactiques et l'amélioration de l'enseignement ordinaire via la production d'une ressource pour les enseignants, élaborée dans le cadre d'une formation continue.

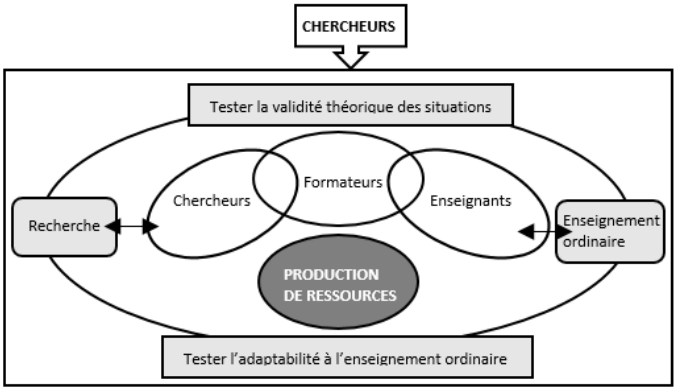


Figure 3 *– Espace de travail interinstitutionnel*

Au sein de cet espace interinstitutionnel de travail, le chercheur interagit avec les autres acteurs. Mais, cet espace de travail est englobé par l'espace de recherche, et là le chercheur occupe une autre position, une position extérieure afin d'étudier ce qui se joue dans l'espace interinstitutionnel que nous avons créé afin de mieux comprendre ce qui peut faire obstacle à l'adaptabilité des situations à l'enseignement ordinaire ou au contraire ce qui peut la favoriser. Le chercheur est donc amené à occuper, de manière successive ou simultanée, deux positions différentes.

III. ETUDES D'INTERACTIONS AU SEIN DU DISPOSITIF DE TRAVAIL

1. Des références théoriques qui enrichissent notre questionnement

Afin d'outiller nos analyses concernant la dimension collective de cette démarche d'IDD, nous reprenons à notre compte la notion de monde. Cette notion telle qu'elle est développée dans le travail de Beguin qui emprunte ce concept à Prieto, vise justement à conceptualiser la notion de « point de vue » (Beguin, Cerf, 2004 ; Beguin, 2005). Elle correspond à un certain système de référence, un certain arrière-plan à partir desquels chacun se saisit d'une réalité tangible. Chaque arrière-plan est construit par et pour l'action par les acteurs ce qui fait dire à Béguin que ce monde est construit et orienté. Chaque individu se situe à l'intérieur de ce monde, s'y positionne de manière singulière et construit ainsi peu à peu son expérience.

Le travail de conception est alors vu comme la construction d'un monde commun, lieu d'échanges et d'apprentissages mutuels au sein duquel de nouvelles propositions émergent peu à peu. Il est important de noter que la construction de ce monde commun ne va pas de soi,

[3] Ecole Supérieure du Professorat et de l'Education

il y a des conflits, des désaccords mais c'est *« lorsqu'on s'éloigne d'un monde qu'on prend conscience de son existence »* (Beguin, 2005).

Notre travail se situe à l'interface de deux pôles : la recherche et l'enseignement ordinaire. Le premier se caractérise par l'étude de questions relatives à l'enseignement ou à l'apprentissage définies par un cadrage théorique et la production de savoirs scientifiques (publications) sur ces questions et celui de l'enseignement et de la formation se caractérise par l'action auprès d'acteurs (élèves ou enseignants) dans le système d'enseignement et de formation des maîtres. Ces deux pôles se distinguent ainsi par leur finalité et leur mode d'action mais aussi par leur temporalité. Les écrits scientifiques se situent en amont et en aval de l'enseignement et de la formation des maîtres avec un décalage dans le temps, ils peuvent être retravaillés de nombreuses fois et sur une longue durée avant leur publication alors qu'une séance d'enseignement ou de formation qui a eu lieu ne peut être modifiée même si son contenu peut être repris dans une nouvelle séance ou des documents qui viennent la compléter.

Dans le travail de conception de ressources mené au sein du LéA, nous cherchons à prendre en compte à la fois le « point de vue » des chercheurs (finalisé par la production de savoirs scientifiques) et « celui des enseignants » (finalisé par l'action auprès des élèves). L'évolution de notre projet témoigne que la construction d'une ressource commune ne va pas de soi (il y a des débats, des désaccords, des besoins à prendre en compte) : le résultat du travail des uns n'est jamais définitif, ce n'est qu'une hypothèse de travail à confirmer par les autres.

Envisager les différents points de vue en présence en termes de « mondes », nous conduit à enrichir notre questionnement. Comment les différents acteurs en présence interagissent-ils au sein du dispositif et comment ce double mouvement de validation se réalise-t-il ? Doit-on considérer que les uns valident le travail des autres et réciproquement de manière spontanée en adoptant à chaque fois son « point de vue » en tant que chercheur ou en tant qu'enseignant ? Ou est-ce plus complexe que cela ? Les différents acteurs se positionnent-ils par rapport à ces différents « arrière-plans » en fonction de leur statut ou sont-ils « mobiles » ? Et plus précisément, comment les EMF et CPC se positionnent-ils dans ce double mouvement de validation ?

L'analyse de moments d'échanges peut nous apporter des éléments de réponses à ces questions et plus largement nous éclairer quant à la manière dont peut se construire ce lieu d'échanges et d'apprentissages mutuels inhérent au travail de conception.

2. Analyse d'échanges au sein du groupe restreint

Le contexte est le suivant : lors de la première année de travail nous concevons et testons une situation d'enseignement qui vise à initier les enseignants à notre approche de la géométrie. En fin d'année, les EMF relaient le souhait des enseignants d'avoir une progression à l'année de l'enseignement de la géométrie et deux d'entre eux rédigent une progression qu'ils communiquent au groupe restreint. Il s'agit d'un tableau présentant une suite d'activités à mettre en œuvre en classe. Celles-ci cherchent à prendre appui sur l'approche présentée par les chercheurs mais s'inspirent aussi d'exemples d'activités proposées par des manuels. Les chercheurs prennent connaissance de la proposition des EMF et l'un d'entre eux rédige à son tour un texte fournissant des repères pour une progression. Sa proposition est organisée autour de situations de restauration de figures simples (carré, rectangle et triangle) dans lesquelles un jeu sur les variables didactiques permet d'amener à enrichir peu à peu les connaissances des élèves sur chacune de ces figures. Le chercheur

qualifie lui-même cette progression de « théorique » car il s'agit avant tout de grands repères et qu'il reste à la charge de l'enseignant le choix d'activités complémentaires voire la conception de situations de recherche prenant appui sur les repères donnés.

L'équipe restreinte se réunit à la rentrée pour faire le point et la discussion porte sur la réponse à apporter à la demande faite par les enseignants associés au projet.

Afin d'analyser ce qui se joue au travers de ces échanges, nous enregistrons cette séance de travail entre l'un des deux chercheurs[4], deux EMF et un CPC. Nous effectuons tout d'abord un découpage de la transcription en épisodes (une synthèse des épisodes est située en annexe) pour identifier ensuite pour chacun de ces épisodes, le (ou les) acteur(s) ayant pris part aux échanges, l'objet principal des échanges (c'est-à-dire ce qui donne son unité à l'épisode) ainsi que la dynamique qui s'en dégage, c'est-à-dire ce qui initie et fait évoluer les échanges. Nous relevons de plus la nature des différentes interventions (était-ce l'expression d'un besoin, une proposition, un avis, une argumentation… ?). Enfin, nous nous intéressons à la nature des arguments échangés et par qui. Des connaissances mathématiques, didactiques ou pédagogiques ont-elles été mobilisées, explicitées ? Des critères de validation de la part des chercheurs au regard de l'approche de la géométrie développée ont-ils été mis en avant ? Les formateurs ont-ils rendu compte de besoins ou de priorités liées à l'exercice du métier ?

Au début de la réunion (épisode 1), le chercheur interroge les EMF à propos de la manière dont ils vont pouvoir intégrer la progression théorique envoyé par l'autre chercheur à la progression qu'ils avaient précédemment proposée. Les EMF ne répondent pas vraiment à la question, valident la progression théorique envoyée par le chercheur en donnant des arguments en tant qu'enseignants, par rapport à leurs propres pratiques.

Le chercheur relance alors la discussion (épisode 2) en disant que le document envoyé est une progression théorique, que ce n'est pas le type de progression figurant dans les classeurs d'un enseignant et souligne ainsi les limites du document proposé. Là encore, les EMF expriment leur satisfaction quant au document fourni par le chercheur mais commencent à évoquer des besoins : des besoins en tant qu'enseignants mais aussi des besoins en termes d'articulation entre théorie et pratique. On note ici un début de décentration par rapport à leurs propres pratiques.

Le chercheur recentre les échanges sur la question de la progression d'un enseignant lambda (épisode 3). Des propositions sont alors faites en tant que formateurs même si l'un des EMF revient sur des arguments liés à sa propre pratique.

L'un des CPC intervient alors (épisode 4) et ce qu'il dit revient à structurer les propositions des uns et des autres à partir de la contrainte institutionnelle des programmes. On est donc passé de la question portant sur la validation d'un document à un questionnement portant sur les conditions d'un document à élaborer ensemble.

Puis (épisode 5), le chercheur revient sur la progression proposée par les EMF, souligne l'intérêt d'avoir proposé des activités ordinaires et des activités directement inspirées de l'approche développée.

Enfin (épisode 6), le chercheur sollicite l'expertise des formateurs pour faire expliciter le travail enseignant (c'est-à-dire, des critères de validation du « point de vue » des enseignants) et là, le CPC intervient pour interroger les moyens de contrôle de la mise en œuvre de l'approche développée par les chercheurs (« point de vue » des chercheurs).

[4] Il ne s'agit pas du chercheur ayant conçu la progression théorique (celui-ci n'était pas présent au début de la réunion de travail et donc de cet échange mais il est arrivé peu de temps après).

3. Interprétation des données analysées

Considérant ce moment dans sa globalité et la manière dont évoluent les échanges d'un épisode à l'autre, nous faisons plusieurs constats.

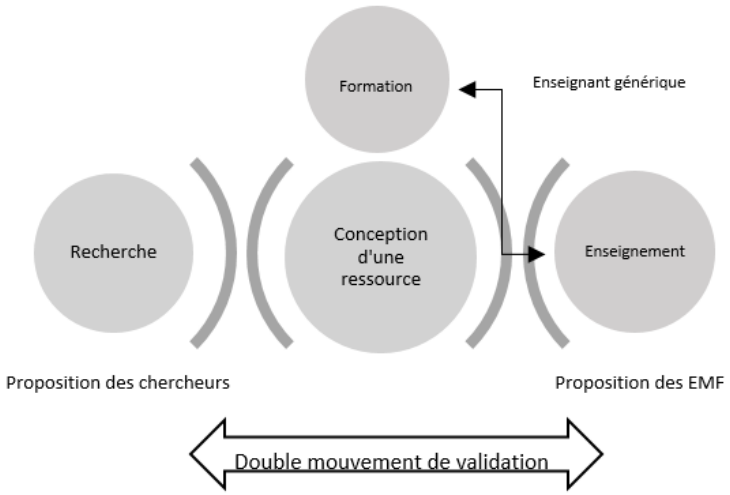
D'une part, au début des échanges, les interventions du chercheur visent à amener les formateurs à valider (ou à invalider) la proposition faite par l'autre chercheur dans le monde des enseignants mais le chercheur se heurte à une certaine résistance de la part des EMF. En effet, ceux-ci valident le document par rapport à leurs propres besoins. Or, le chercheur attend de leur part qu'ils adoptent le « point de vue » d'un enseignant lambda (ce qu'ils ne sont pas vraiment, bien sûr). Les échanges évoluent néanmoins et peu à peu, les EMF se positionnent en tant que formateurs, ce qui leur permet d'avoir la distance nécessaire par rapport à leurs propres pratiques pour pouvoir s'interroger sur les besoins d'un enseignant lambda. Ainsi, la validation attendue des EMF de la part du chercheur demande à la fois décentration et généricité. Elle débute véritablement lorsque ceux-ci parviennent à abandonner leur propre « point de vue » d'enseignant pour adopter la position de formateur.

D'autre part, l'intervention du CPC est déterminante, en resituant la demande des enseignants au regard de contraintes institutionnelles (les programmes), il permet de trouver un terrain d'entente et les échanges évoluent vers des questions en lien avec la conception d'un document commun structuré autour des programmes et articulant les propositions des uns et des autres.

L'analyse de cet échange donne à voir une partie de la complexité de ce qui se joue à travers les positions prises par les différents acteurs et la dynamique de ce double mouvement de validation.

Tout ce passe comme si les deux mondes existaient indépendamment des acteurs qui peuvent avoir un pied dans chacun des deux mondes et/ou être mobiles, c'est-à-dire, ne pas toujours se situer dans le même monde. C'est le cas lorsqu'ils cherchent à se mettre à la place d'acteurs situés dans un autre monde ou du moins à prendre en compte leur « point de vue ». En effet, si le monde de l'enseignement est orienté vers l'action, cela n'empêche pas la réflexion. Quant au chercheur, il est amené à faire des propositions utiles pour l'enseignement.

Il apparait de plus la nécessité pour les différents acteurs de se décentrer de leur propre individualité pour adopter une position[5] porteuse de généricité (figure 4).



[5] Contrairement à la figure 2, il n'y a pas d'intersection sur la figure 3 car il s'agit ici de représenter des positions et non pas des individus.

Figure 4 *– Interactions au sein du groupe restreint*

IV. CONCLUSION

L'analyse des échanges retenus pour cet article révèle en partie la complexité de ce qui se joue entre les différents acteurs du dispositif. Il souligne de plus l'importance de la présence de formateurs chargés de classe qui peuvent à certains moments adopter un positionnement qui dépasse leur propre individualité pour être plus représentatifs d'un certain « point de vue », celui des enseignants.

Comme nous l'avons rappelé, les deux niveaux de questionnement inhérents à la démarche d'IDD sont ne sont pas indépendants et une dialectique doit s'exercer entre ces deux niveaux dans le but d'aboutir à la production d'une ressource susceptible d'être utile pour l'apprentissage des élèves et utilisable efficacement par les enseignants. Cette dialectique s'exerce en particulier par le travail au sein du groupe restreint et par l'existence de boucles itératives entre la conception et la réalisation des séances sur le terrain. Il nous est ainsi apparu que le groupe restreint et la présence dans ce groupe de maîtres formateurs qui sont à la fois enseignants et formateurs jouait un rôle essentiel qui devait être identifié en tant que tel dans la démarche d'IDD et notre analyse souligne ici combien ils peuvent aider les chercheurs à investir le second niveau de questionnement.

Nous devons poursuivre l'étude des conditions du double mouvement de validation mis en place au sein de notre dispositif de travail collaboratif en questionnant par exemple comment sont pris en compte les propositions des EMF via l'observation de séances par les chercheurs. Nous espérons ainsi réussir à mieux cerner leur rôle dans la mise en place d'un espace commun de conception et dans l'élaboration d'une ressource tenant compte à la fois du point de vue des enseignants et de celui des chercheurs.

REFERENCES

Beguin P. (2005) Concevoir pour les genèses professionnelles. In Rabardel P., Pastré P. (Eds.) Modèles du sujet pour la conception. Dialectiques activités développement. Toulouse : Octarès.

Beguin, P., Cerf, M. (2004) Formes et enjeux de l'analyse de l'activité pour la conception des systèmes de travail. Activités, 1(1), 54-71.

Brousseau G. (2013) Introduction à l'ingénierie didactique. http://guy-brousseau.com/2760/introduction-a-l%E2%80%99ingenierie-didactique-2013/ posté le 13 décembre 2013, consulté le 30 janvier 2014.

Mangiante-Orsola C., Perrin-Glorian M.J. (2016a) Elaboration de ressources pour la classe, interface entre recherche et enseignement ordinaire. In Chopin M.P., Cohen-Azria C., Orange-Ravachol D. (Eds.) Questionner l'espace. Les méthodes de recherche en didactiques. (pp. 79-94) Lille : Presses Universitaires du Septentrion.

Mangiante-Orsola C., Perrin-Glorian M-J. (2016b). Ingénierie didactique de développement en géométrie au cycle 3 dans le cadre du LéA Valenciennes-Denain. Actes du séminaire national de didactique des mathématiques, Arras, France.

Perrin-Glorian M.J. (2011) L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement de ressources et formation des enseignants. In C. Margolinas et al. (éds.) En amont et en aval des ingénieries didactiques. pp. 57-78. Grenoble : La pensée sauvage.

Perrin-Glorian M.J., Godin M. (2014) De la reproduction de figures géométriques avec des instruments vers leur caractérisation par des énoncés. Math-école n°222, 26-36.

ANNEXE

Synthèse de l'épisode 1
C1 interroge les EMF à propos de la façon dont ils ont conçu une première version d'une progression possible et comment ils pensent utiliser le document donné par C2. EMF1 explique ce qui a motivé la conception d'une nouvelle progression. « On ne pouvait plus travailler comme avant », « mais on ne savait pas comment travailler en intégrant la nouvelle démarche ». EMF1, à propos du document : « quel bonheur, c'est un guide sur lequel se reposer ». « très clair, très précis, il y a des repères par cycles, des activités que l'on peut plus ou moins adapter ».
Synthèse de l'épisode 2
C1 caractérise le document : progression théorique, progression non finalisée EMF1 : oui, mais cela permet de corriger la progression conçue par les EMF EMF1 : difficulté du passage de la connaissance de la démarche d'enseignement (formation) à la conception d'une progression prenant appui sur cette démarche ou d'une nouvelle « leçon ». EMF1 : la présentation de l'approche est néanmoins indispensable. EMF1 : une situation complexe ne suffit pas non plus.
Synthèse de l'épisode 3
C1 recentre sur la question de la progression pour un enseignant lambda. EMF1 propose carte mentale pour éviter une progression linéaire et « pour que chacun puisse piocher ». EMF1 revient sur le fait que l'aspect linéaire de la progression ne le gêne pas. Des éléments de la progression initiale sont à conserver.
Synthèse de l'épisode 4
CPC1 propose une organisation possible : « repartir des compétences des programmes » à mettre en lien avec nos propositions. CPC1 questionne les classes concernées EMF1 justifie le choix de situer les propositions faites (argument en tant qu'enseignant)
Synthèse de l'épisode 5
C1 revient sur la progression proposée par les formateurs. Articuler l'ancien et le nouveau pour ne pas trop déstabiliser. CPC1 : partir des programmes et proposer des activités plus ou moins usuelles.
Synthèse de l'épisode 6
C1 questionne la part laissée aux enseignants : qu'est-ce qu'il manque à cette progression théorique pour pouvoir figurer dans le classeur d'un enseignant ? EMF et CPC : les liens avec les programmes, les savoirs, les savoirs faire, l'évaluation CPC1 : il manque aussi une explicitation des situations proposées pour que les enseignants « ne passent pas à côté des véritables enjeux ».

QUELLE RELATION ENTRETIENNENT DES PROFESSEURS ET DES CHERCHEURS DANS UNE INGÉNIERIE DIDACTIQUE COOPÉRATIVE ? LE RÔLE DU DIALOGUE D'INGÉNIERIE DANS LE TRAVAIL COLLECTIF

MORELLATO[*] Mireille

Résumé – Cet article propose de décrire les pratiques de travail collectif entre des professeurs des écoles et des chercheurs en didactique lors de la mise à l'essai d'un dispositif de recherche et d'enseignement, l'ingénierie didactique coopérative en mathématiques « ACE-Arithmécole ». Nous appréhenderons une telle coopération au travers d'un dialogue d'un type particulier, le « dialogue d'ingénierie ».

Mots-clefs : ingénierie didactique coopérative ; dialogue d'ingénierie ; enquête

Abstract – This paper seeks to describe the cooperative practices of a team of teachers and researchers during the implementation of the « Ace-Arithmécole » cooperative didactic engineering in mathematics. We appreciate this cooperation with a specific dialogue, that of the engineering dialogue of the project.

Keywords: cooperative didactic engineering ; engineering dialogue ; inquiry

I. PRATIQUE DE TRAVAIL COLLECTIF DANS UNE INGENIERIE DIDACTIQUE COOPERATIVE

Nous décrivons dans ce texte une pratique de travail collectif entre des professeurs des écoles et des chercheurs en didactique au travers du dialogue qu'ils ont établi conjointement pour la conception et la mise en œuvre de séquences d'enseignement. Ces séquences ont été élaborées au sein d'un dispositif de recherche. Dans ce cadre, une ingénierie didactique coopérative, nommée « ACE-Arithmécole » (Arithmétique et compréhension à l'école élémentaire), a été mise en place de septembre 2011 à décembre 2017. Cette ingénierie a permis de construire collectivement une progression de situations didactiques en mathématiques pour des élèves de cycle 2 (élèves de 6 à 8 ans). La progression couvre tout le programme scolaire français en numération, calcul et résolution de problèmes. La recherche s'est appuyée sur des résultats de travaux en didactique des mathématiques et en sciences cognitives[1].

Michèle Artigue (1990) décrit une ingénierie didactique comme une méthodologie de recherche qui vise à confronter une hypothèse théorique avec une mise en œuvre. Dans ACE-Arithmécole, des hypothèses de travail ont été mises à l'épreuve dans les conditions écologiques de la classe. Certaines de ces hypothèses ont été validées par des pré et post tests portant sur les acquis des élèves, comparativement à des élèves de classes témoins (Fischer, Sander, Sensevy, Vilette, & Richard, 2018 ; Fischer et al., 2019) ; d'autres hypothèses l'ont été sous forme de preuves[2] (Sensevy, Santini, Cariou, Quilio, 2018). Une double direction de travail a été menée : un travail théorique sur les situations didactiques et le savoir en jeu ; une adaptation aux contraintes de l'enseignement ordinaire. Une progression s'est alors constituée

[*] CREAD – France – mireille@syrah.fr ; mireille.morellato@ac-aix-marseille.fr

[1] Site de la recherche : http://blog.espe-bretagne.fr/ace/

[2] Nous renvoyons cette assertion au travail du séminaire-action du CREAD, coordonné par G. Sensevy, en 2018-19. Ce travail questionne la preuve en didactique, et plus spécifiquement lorsqu'on cherche à montrer l'efficacité d'un dispositif d'enseignement. Des premiers travaux sont en cours d'édition suite au symposium d'octobre 2018, colloque ARCD, Bordeaux. https://arcd2018.sciencesconf.org/data/pages/Cadrage_1.pdf

et s'est modifiée au fil des mises en œuvre et du travail collectif, au cours d'un processus itératif. Une telle recherche s'affirme donc à la fois comme une recherche fondamentale et de développement. Elle peut être classée dans les *design-based research* (Roditi & Trgalovà, 2015 ; Sanchez & Monod-Ansaldi, 2015).

Cependant une ingénierie didactique dite *coopérative* s'en distingue par sa manière d'envisager *a priori* le travail collectif entre chercheurs et professeurs. Des travaux (Joffredo-Le Brun, Morellato, Sensevy, & Quilio, 2018 ; Sensevy, 2011, 2016 ; Sensevy, Forest, Quilio, & Morales, 2013) ont approfondi la question. Selon les descriptions des auteurs, ce mode de coopération repose sur deux caractéristiques liées : (i) une détermination commune de fins communes (progrès pour tous les élèves, mise en œuvre raisonnablement réalisable) ainsi que les moyens d'y parvenir (choix des activités, déroulement envisagé, …) et (ii) un principe de symétrie entre les instances « chercheur » et « professeur ».

Un collectif composé de professeurs des écoles, de formateurs (conseillers pédagogiques, maîtres-formateurs), de doctorants et de chercheurs en didactique s'est constitué pour la mise en place de l'ingénierie didactique coopérative ACE-Arithmécole. Les fins d'enseignement et d'apprentissage de savoirs sont partagées par tous les membres du collectif engagés dans le dispositif. Ces fins se réalisent dialectiquement dans la construction (et la reconstruction) des moyens, concrétisés par l'ingénierie didactique. Tous les acteurs ont besoin de comprendre les actions réalisées lors de la conception, de la mise en œuvre, de l'analyse de l'ingénierie pour pouvoir faire évoluer et transformer le dispositif. Les deux aspects « comprendre » et « transformer » sont intrinsèquement liés. Tous coopèrent, dès le départ, à la réalisation d'une œuvre commune, une progression de séquences d'enseignement.

II. LE DIALOGUE D'INGENIERIE : UN PROCES DE LA MISE EN ŒUVRE

La didactique étant une science de la pratique, celle d'enseignement (Sensevy & Mercier, 2007), il est nécessaire, selon ces auteurs, de l'examiner au sein de l'action effective du professeur et de ses élèves dans leur classe, en relation avec le savoir, sans pour cela la réduire à l'explicitation des pratiques des enseignants. Un espace de dialogue doit être créé pour que cet examen de la mise en œuvre en classe d'ACE-Arithmécole puisse avoir lieu. Nous pensons que cet espace dialogique est une institution didactique de nature coopérative, pivot de l'articulation didactique entre l'individuel et le collectif. En effet, chaque membre du groupe de recherche va vivre une expérience commune, celle de la mise en œuvre de l'ingénierie. Comme ni les uns, ni les autres ne savent *a priori* comment elle se déroulera, ils ont besoin d'échanger afin de l'anticiper.

A partir d'un document princeps[3], proposé par les chercheurs, quatre professeurs des classes dites d'étude ont procédé, en 2011-12, à une première mise en œuvre dans leur classe. Un document à destination des professeurs des classes dites expérimentales est alors rédigé, sur la base de cette première expérience de mise en œuvre, par le groupe composé des chercheurs, des quatre professeurs et des formateurs. Les années suivantes, des professeurs des classes expérimentales[4] rejoignent le dispositif et mettent en place les séquences à partir

[3] Ce document princeps est un texte court, relatant les enjeux d'apprentissage et des propositions de situations didactiques, rapidement décrites.

[4] L'année suivante, d'implémentation à grande échelle de l'ingénierie (2012-13), soixante professeurs des classes dites d'expérimentation ont mis en œuvre l'ensemble des séquences de la progression sur les académies d'Aix-Marseille, Lille, Rennes et Versailles. Depuis, chaque année, d'autres professeurs ont rejoint le dispositif. Certains professeurs des classes expérimentales se sont engagés dans le dispositif en tant que professeurs des classes d'étude. Ils participent alors à l'enrichissement et aux modifications des ressources.

du document rédigé[5]. Ce sont les mises en œuvre qui sont rapportées et discutées lors de réunions, régulièrement tenues, avec l'appui des comptes-rendus des séances. Nous cherchons à décrire ce dialogue afin de comprendre à quel jeu jouent ensemble chercheurs, formateurs et professeurs.

III. CARACTERISER LE DIALOGUE D'INGENIERIE : ELEMENTS THEORIQUES

Afin de caractériser un tel dialogue, nous nous appuierons sur la *théorie de l'action conjointe en didactique* (Sensevy, 2011 ; Sensevy & Mercier, 2007). La théorie de l'action conjointe a été initialement élaborée pour analyser les relations didactiques entre enseignant et apprenant. Dans nos travaux nous nous adossons à cette théorie car elle nous permet de décrire le dialogue d'ingénierie comme un lieu de transactions. En effet, chacun a la possibilité de prendre en compte l'action d'autrui en coordonnant ou ajustant son action en fonction de celle d'autrui : il ne s'agit pas d'œuvrer ensemble mais d'œuvrer conjointement à la diffusion de savoirs car l'action de l'un dépend de, ou se réfère, à celle de l'autre par rapport à un objet de savoir. Les transactions sont alors vues comme une enquête (Dewey, 1993) des professeurs, formateurs et chercheurs sur un savoir ingénierique (expression que nous préciserons par la suite). Cette enquête se déroule dans un environnement sur lequel ils agissent et selon un arrière-plan qu'ils ont construit conjointement.

Nous caractérisons les transactions entre les membres du collectif en nous appuyant sur les notions de *contrat* et de *milieu*. Le contrat est constitué d'un système de connaissances disponibles, individuelles et collectives, antérieures à la mise en œuvre de l'ingénierie ou issues du début de cette mise en œuvre : c'est l'arrière-plan, le « déjà-là » des échanges. Ce système est actualisé par des problèmes soulevés par la mise en œuvre. Ces problèmes se constituent alors en faits à questionner selon des nécessaires et des possibles pour l'action coopérative. Le milieu fait problème pour tous les professeurs, mais aussi pour les chercheurs et formateurs, puisqu'il est constitué par la mise en place d'une séquence d'enseignement-apprentissage en cours d'élaboration. Il véhicule en outre des présupposés et des hypothèses d'ingénieries spécifiques. Ainsi tous sont amenés à élaborer le milieu de l'enquête.

IV. METTRE EN EVIDENCE LA DIMENSION DIALOGIQUE DES ECHANGES : ELEMENTS DE METHODOLOGIE

Pour mettre en évidence la dimension dialogique des échanges entre professeurs, formateurs et chercheurs, nous nous sommes appuyée sur le logiciel *Transana* (Fassnacht & Woods, 2001), logiciel d'aide à la transcription, à la gestion des données et à l'analyse des données filmées. Nous avons procédé d'abord à un filmage des réunions (qui constituent nos données principales) puis à une transcription de l'intégralité des échanges[6]. Nous avons découpé ce corpus en épisodes qui mettent en évidence des unités de sens dans le flot de la discussion. Nous avons ensuite opéré des sélections d'épisodes en établissant des requêtes dans la base de données. Ces requêtes permettent d'obtenir des collections d'épisodes, grâce au moteur de recherche du logiciel, à partir de mots-clés attribués à chacun des épisodes.

[5] Suite aux réunions avec l'ensemble des professeurs (réunions organisées en sous-groupes locaux), le document a été ensuite complété et modifié les années suivantes. La dernière version de ce document est consultable à l'adresse : http://blog.espe-bretagne.fr/ace/ (adresse récupérée le 5 décembre 2017).

[6] Le collectif est composé de groupes régionaux. Nous avons suivi plus particulièrement un de ces groupes.

Nous avons ensuite procédé à une réduction des épisodes d'une collection en une *vue synoptique* (Wittgenstein, 2004) pour constituer chacune des séries épisodiques[7].

Une vue synoptique est une forme de compréhension des phénomènes qui met au jour des éléments existants en les disposant de telle manière que se dévoilent des relations susceptibles de produire des connaissances (Sensevy, 2011). Le travail de réduction des données recueillies transforme ce qui est observable et représentable pour produire « un arrangement possible [des objets de l'empirie] en vue de les penser » (Glock, 2003, p. 585).

Une série épisodique est donc constituée d'épisodes signifiants, relatifs à une pratique de coopération concernant l'étude d'un objet didactique mis en œuvre dans la séquence d'enseignement. Nous présentons ici une des séries issue de nos travaux (Morellato, 2017).

V. SERIE EPISODIQUE RELATIVE A UN DIALOGUE D'INGENIERIE PORTANT SUR LA PLACE DU CALCUL DANS UN JEU DE COMPARAISON ENTRE DEUX ECRITURES ADDITIVES

1. *Ce qu'il faut savoir de la situation didactique proposée aux élèves pour comprendre l'arrière-plan des transactions*

La coopération entre les membres du collectif ACE-Arithmécole est fondée sur le développement pour l'enseignement d'une situation didactique de base, nommée « Jeu des annonces ». Cette situation est proposée aux élèves pour qu'ils y découvrent et construisent un savoir. Le savoir visé, à terme, est la compréhension de la numération décimale positionnelle. Ce qui se joue, dans les premiers temps, avec du matériel (des doigts et des dés) sur de « petits » nombres de 0 à 12, se travaillera par la suite à l'écrit avec des nombres plus grands.

Le Jeu des annonces est une *situation de désignation et de comparaison de mesures*. Les élèves expriment la mesure d'une grandeur, ici la taille d'une collection de points ou de doigts, puis comparent les deux mesures (nombres de points et de doigts). L'un de ces nombres est obtenu par le lancer d'un dé. L'autre choisi par l'élève avec les doigts de ses deux mains qu'il montre. L'enjeu est ici, pour l'élève, de signifier l'équivalence (ou la non-équivalence) des mesures exprimées.

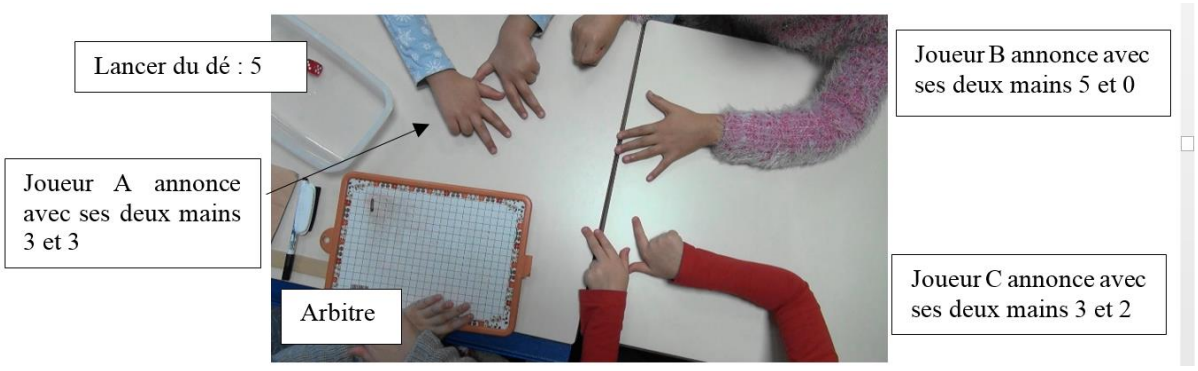


Figure 1 *– Partie du Jeu des annonces*

Les doigts immobilisés sont montrés *avant* le lancer du dé, à la manière d'un pari sur ce qui va

[7] Une description de cette méthode et de son usage est consultable (Morellato, 2017). https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01591957v1

sortir[8]. « L'annonce » des doigts devra être comparée avec « le lancer ». Le jeu est gagné si l'annonce est égale au lancer. Le joueur A pourra déclarer : « j'ai perdu, 3 et 3 ne sont pas comme 5 ». Chacun des joueurs B et C pourra dire : « j'ai gagné, mon annonce 5 et 0 (ou 3 et 2) est égale à 5 ». Plus tard, ils exprimeront par écrit le gain ou la perte au jeu de comparaison : « 5 = 3 + 2 = 5 + 0 » ; «5 ≠ 3 + 3» ou « 3 + 3 > 5 ».
Cette situation didactique fonde ainsi le travail des élèves sur des comparaisons d'écritures additives. En effet, le Jeu des annonces va se répéter tout en évoluant sur un grand nombre de séances pour former un ensemble de situations. Le nombre et la valeur des termes augmenteront. Ainsi, de nouvelles questions, relatives à la comparaison d'écritures additives et à son expression écrite, mais aussi à la désignation écrite des nombres, se poseront.

2. Description de la série

La série épisodique présentée dans cet article se déroule lors de la deuxième année de mise en œuvre de l'ingénierie (2012-13). Cette série est relative à la place du calcul dans le jeu des annonces. Les échanges recueillis se sont déroulés lors des deuxième, troisième et quatrième réunions d'un groupe local (les 24 octobre, 21 novembre et 5 décembre 2012) sur les dix réunions prévues par le dispositif.

Nous avons regroupé les épisodes de cette série en quatre moments composés d'un ou plusieurs épisodes. Ils présentent l'enquête du collectif sur l'opportunité à déclarer le résultat de l'annonce et son rôle dans la comparaison entre annonce et lancer. Ce découpage en quatre moments nous permet de montrer les transactions à l'œuvre. Nous pourrions les considérer comme les actes d'une pièce de théâtre. Les deux premiers moments donnent à voir les questionnements mais aussi les points de vue et les pratiques des professeurs ainsi que le point de vue du chercheur quant à un fait relatif à la mise en œuvre et aux décisions prises *in situ* par les professeurs. Le troisième introduit la perspective du changement de variables (l'augmentation du nombre de termes) prévu par la suite de la progression. Le quatrième étudie le cas d'une partie qui comporte plus de deux termes dans une situation effective. Dans le cadre de cet article, nous décrivons ces différents moments en nous attachant aux assertions principales.

Premier moment (2e réunion)

Un professeur relate un fait didactique qui a eu lieu dans sa classe de Cours préparatoire (élèves de 6 ans) lors d'une phase écrite du Jeu des annonces. Lors de la séance évoquée, les règles du jeu ont évolué : trois élèves s'associent, en jouant chacun avec une seule main, pour proposer une annonce à 3 termes. Le professeur rapporte ainsi le fait : « *il y a un enfant qui m'a demandé : est-ce que je peux mettre égal dans l'annonce, pour marquer déjà le résultat, pour que je m'en rappelle. 3 + 1 + 2 est-ce que je peux écrire la somme ? Est-ce que je peux mettre égal ? On avait vu déjà les structures additives possibles, j'ai autorisé certains enfants à écrire la somme dans la colonne des annonces mais en écrivant d'abord l'addition* ». Le professeur autorise donc certains de ses élèves à utiliser l'écriture «3 + 1 + 2 = 6 ». Rappelons que, dans la phase du jeu à laquelle le professeur fait allusion, l'annonce (ici à trois termes 3 + 1 + 2) doit être comparée au lancer d'un dé. Les valeurs du dé étant comprises entre 1 et 6, l'écriture mathématique attendue est, dans le cas où l'annonce est gagnante, « 3 + 1 + 2 = 6 » mais elle pourrait tout aussi bien être, par exemple, « 3 + 1 + 2 > 4 » si le lancer du dé est 4. Dans la situation didactique, l'écriture mathématique attendue correspond

[8] Il s'agit d'un pari mathématique car certaines valeurs ne seront pas atteignables. Par exemple, l'annonce 3 et 4 (ou 5 et 2) ne peut pas être gagnante (équivalente) par rapport au lancer d'un seul dé, ni 0 et 1 face à deux dés. Dans la situation didactique proposée, les élèves sont amenés à explorer les possibilités gagnantes ou pas.

au compte-rendu de la partie de jeu et les signes mathématiques « = » ou « > » expriment l'équivalence ou la non-équivalence entre les mesures produites. Le signe « = » utilisé par l'élève dans l'écriture « 3 + 1 + 2 = 6 » n'est pas de la même nature : il exprime ici le résultat de la somme. Ce résultat sert de mémoire pour faciliter la comparaison puisqu'il n'y a plus qu'un terme à comparer avec le lancer. Le professeur s'interroge sur cet usage.

Le chercheur donne son point de vue : l'écriture permet de mettre en évidence la décomposition et le nombre atteint mais à terme il faudra aussi commencer à construire les équivalences (« 6 = 3 + 3 = 3 + 2 + 1 = 5 + 1, etc.»). Il attire l'attention sur le langage à employer dans la situation et qui doit en décrire son fonctionnement : « *reformuler par-dessus 3 doigts et 5 doigts désignent le lancer tant ou permet d'atteindre le nombre tant ou correspond à tel lancer* ». Il demande aussi aux professeurs d'exercer une vigilance pour ne pas que l'écrit soit dissocié de la situation du jeu (« *que l'écriture formelle ne soit pas isolée du sens de la situation qui l'a produite* »).

Deuxième moment (3e réunion)

Des professeurs confrontent leurs pratiques quant à la place du calcul de la somme dans le jeu de comparaison et les stratégies de comparaisons qui ont été mises en place dans leurs classes : « *c'est très rare que je leur demande le résultat de l'annonce : alors ça fait combien quand ils n'en ont pas besoin pour regarder si c'est pareil ou pas pareil […] 3 + 2 + 1 on voit bien que le dé c'est 2 et que dans l'écriture il y a d'autres nombres. Donc c'est pas la peine (de calculer) donc c' (l'annonce) est plus grand* » ; « *on leur donne une idée du sens de l'écriture dans le cas de 3 + 4 + 1 on doit privilégier le 3 + 4 qui donnent 7 et après 7 + 1* ». Ces stratégies font appel soit à la comparaison des termes, soit au calcul partiel de la somme.

Troisième moment (4e réunion)

Pour le chercheur, le calcul du résultat pour comparer annonce et lancer peut être efficace sur deux ou trois termes, voire un peu plus pour les bons calculateurs, mais cette stratégie sera sujette à erreurs quand le nombre de termes deviendra plus important (« *si tu mets vingt termes tu vas saturer les possibilités de calcul* »). Il engage une réflexion collective sur l'évolution de la situation didactique initiale du Jeu des annonces. Le jeu de comparaison de mesures va s'affranchir de la situation matérielle des doigts et des dés quand le nombre de termes et la valeur des termes vont augmenter. En effet, cette évolution est conçue pour provoquer une rupture (un saut informationnel) permettant de remettre en question les techniques construites sans pour autant les disqualifier (« *la situation propose organiquement la mise à l'épreuve des techniques des élèves pour en construire d'autres* »). Les professeurs vont devoir accompagner ce passage d'une situation où il y a une forte référence à la situation du Jeu des annonces vers une situation où le travail peut mieux s'effectuer sur des symboles. En effet le chercheur émet l'hypothèse qu'un travail dans et avec les nombres autorise d'autres manipulations, parce que ces symboles peuvent produire une écriture qui dépasse le seul compte-rendu de l'expérience du jeu (« *est-ce que à partir de l'écriture additive tu peux produire autre chose* »).

Quatrième moment (4e réunion)

Un professeur relate la première mise en œuvre de la comparaison d'une annonce à trois termes (5 + 5 + 1) et d'un lancer à quatre termes (4 + 5 + 1 + 6) qui a eu lieu la veille. L'intention du professeur était d'amener la classe à développer une autre stratégie que celle du calcul du total. En effet, certains élèves calculaient le total mais faisaient des erreurs en additionnant les termes du lancer ; le reste de la classe n'avait rien produit. Le professeur qui a mené la séance s'interroge : « *donc on a 11 et on a 16 et ils calculent là et je pataugeais là à essayer de faire regrouper ou calculer à l'intérieur des termes. J'y arrivais pas quoi* ».

Différentes stratégies sont alors proposées par les professeurs et formateur : barrer les termes identiques ou rendus identiques, réduire des termes à l'aide de connaissances déjà construites de manière à rendre identique le plus possible les deux écritures additives par des techniques de composition et décomposition, mettre en place des techniques de regroupement (chercher des « 6 » (5 + 5 + 1 et 4 + 5 + 1 + 6 donnent 5 + 6 à comparer à 4 + 6 + 6) ou des « 10 » (5 + 5 + 1 et 4 + 5 + 1 + 6 donnent 10 + 1 à comparer à 10 + 5 + 1).

La vidéo de ce moment de classe, tournée la veille, est ensuite visionnée. C'est l'observateur, par ailleurs professeur-formateur, qui a indiqué une piste au professeur et aux élèves : « *dans l'annonce 5 + 5 + 1 il y a des 5 et dans l'autre annonce combien il y a de 5 ?* » ; les élèves répondent « *un* » ; l'observateur reprend : « *et il n'y en a pas d'autres de 5 qu'on peut faire ?* » ; un élève trouve qu'on peut grouper 4 + 1 ; l'annonce devient 5 + 5 + 6 à comparer avec 5 + 5 + 1. Une réduction de termes a été réalisée afin de rendre le plus de termes identiques pour la comparaison des écritures. Le signe de comparaison a été ensuite ajouté : 5 + 5 + 1 < 5 + 5 + 6 et explicité, l'annonce est plus petite que le lancer car 1 < 6.

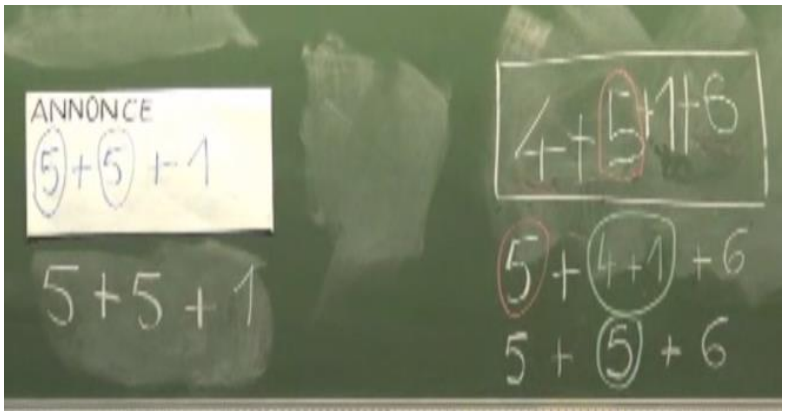


Figure 2 – *Capture vidéo de la séance*

Le visionnage de la vidéo n'apporte pas de stratégie de résolution différente au problème de comparaison posé, autre que celles qui ont été proposées par les professeurs auparavant. Cependant cette vidéo donne des indications sur les expressions qui pourraient être utilisées en classe et les signes qui pourraient signifier le regroupement des termes.

Le chercheur met au jour des actions possibles : signifier que les connaissances acquises par le groupe classe sont à utiliser (« *il est productif de signifier au groupe qu'il y a des connaissances qu'il possède et qui peuvent être utilisées à ce moment-là* ») ou solliciter la mémoire didactique de la classe (« *tu es le gardien de la mémoire de ce qui a été travaillé des connaissances qui ont été construites* ») de manière à diriger l'étude des élèves («*des sollicitations que tu peux faire de façon intéressante productive* »).

VI. LE DIALOGUE D'INGENIERIE : UN JEU D'OBJECTIVATION DES CONNAISSANCES PRODUITES

Nous avons rapporté des échanges entre des professeurs et un chercheur qui avaient trait à la place du calcul dans la situation de comparaison entre annonce et lancer proposée aux élèves. L'enquête que va mener le collectif sur ce sujet a pour point de départ un fait didactique rapporté par un professeur (autoriser le calcul de la somme pour mémoriser le nombre à atteindre avant le lancer du dé). Chacun peut émettre un avis de son point de vue : (i) cette stratégie de calcul du tout n'est pas la seule et dépend de l'annonce et du lancer en jeu

car il est facile de comparer 3 + 2 + 1 et 2 en observant les termes ; (ii) cette stratégie sera disqualifiée quand le nombre de termes à comparer sera trop important ; (iii) il existe d'autres stratégies par réduction du nombre de termes, basées sur les connaissances de « petits » répertoires additifs (acquis expérimentalement lors du Jeu des annonces) et sur les techniques de composition / décomposition afin de rendre le plus possible les termes identiques (comme dans l'exemple 5 + 5 + 1 < 5 + 5 + 6). Professeurs et chercheur commencent ici à constituer un arrière-plan commun, à la fois pratique (pour une mise en œuvre effective de la situation) et théorique (pour la distinction des fonctions du signe « = » dans les écritures mathématiques, le rôle du langage dans la description de la situation pour soutenir cette distinction et pour conserver le sens de la situation qui l'a produite). Les deux aspects pratique et théorique étant intrinsèquement articulés.

Une telle construction d'un arrière-plan partagé est nécessaire à la poursuite de l'enquête collective sur la mise en œuvre des enjeux d'apprentissage. L'enjeu discuté dans la série épisodique présentée n'est pas le calcul mais un travail de désignation écrite de mesures. L'enquête du collectif sur la mise en œuvre et la compréhension de ce point de l'ingénierie n'est pas terminée. En effet, le chercheur émet l'hypothèse qu'un travail dans et avec les nombres autorise d'autres écritures mathématiques, qui diraient « quelque chose d'autre » de l'expression considérée. Cette hypothèse n'est pas encore *concrétisée dans l'enquête pratique collective* car le rôle de la désignation de quantités avec des nombres « fabriqués » pour comparer avec la plus grande puissance (comme par exemple dans 5 + 6 < 4 + 6 + 6) n'est pas encore complètement appréhendé par les professeurs.

Ces niveaux de description de la pratique et de compréhension divers créent de l'expérience sur la mise en œuvre de la situation de comparaison d'écritures additives pour chacun des membres du groupe. La constitution d'une telle expérience collective est un objectif majeur d'une ingénierie didactique coopérative ; elle va au-delà de « l'application » d'un dispositif pensé par des chercheurs. Cette constitution prend du temps et dépasse le cadre d'une seule année scolaire.

Ainsi le dialogue d'ingénierie favorise le processus d'enquête qui vise à résoudre des problèmes relatifs au savoir ingénierique. Les savoirs ingénieriques qui sont construits collectivement peuvent être considérés dans un sens praxéologique (Chevallard & Sensevy, 2014). Le dialogue d'ingénierie participe (i) à la construction d'un arrière-plan partagé par la pratique et le discours sur la pratique et (ii) à la constitution de faits d'expérience, en concrétisant les assertions dans l'enquête pratique collective.

REFERENCES

Artigue, M. (1990). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9* (3), 281–308.

Chevallard, Y., & Sensevy, G. (2014). Anthropological Approaches in Mathematics Education, French Perspectives. In *Encyclopedia of Mathematics Education* (p. 38-43). New York, London: Springer Dordrecht, Heidelberg. Consulté à l'adresse : https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01139352.

Dewey, J. (1993). *Logique : la théorie de l'enquête* (2e éd.). Paris : Presses universitaires de France.

Fassnacht, C., & Woods, D. (2001, 2013). *Transana (version 2.52) [PC]*. Wisconsin Center for Education Research, University of Madison, USA. Consulté à l'adresse : http://www.transana.org/.

Fischer, J.-P., Vilette, B., Joffredo-Lebrun, S., Morellato, M., Lenormand, C., Calliste Scheibling-Seve, C., & Richard, J.-F. (2019). Should we continue to teach standard written algorithms for the arithmetical operations? *Educational Studies in Mathematics.* https://link.springer.com/article/10.1007%2Fs10649-019-09884-9

Fischer, J.-P., Sander, E., Sensevy, G., Vilette, B., & Richard, J.-F. (2018). Can young students understand the mathematical concept of equality? A whole-year arithmetic teaching experiment in second grade. *European Journal of Psychology of Education*. http://link.springer.com/10.1007/s10212-018-0384-y

Glock, H.-J. (2003). *Dictionnaire Wittgenstein*. Paris : Gallimard.

Joffredo-Le Brun, S., Morellato, M., Sensevy, G., & Quilio, S. (2018). Cooperative Engineering as a Joint Action. *European Educational Research Journal*, En ligne : http://journals.sagepub.com/doi/abs/10.1177/1474904117690006

Morellato, M. (2017). Travail coopératif entre professeurs et chercheurs dans le cadre d'une ingénierie didactique sur la construction des nombres : conditions de la constitution de l'expérience collective. Thèse de doctorat, Université de Bretagne Occidentale, Brest, France.

Roditi, E., & Trgalovà, J. (2016). Collectifs de professeurs et chercheurs. In Y. Matheron, G. Gueudet, V. Celi, C. Derouet, D. Forest, M. Krysinska, S. Quilio, M. Rogalski, T. A. Sierra, L. Trouche, C. Winslow, & S. Besnier (Eds), *Enjeux et débats en didactique des mathématiques (vol. 1)* (p. 183-202). Grenoble : La pensée sauvage.

Sanchez, E., & Monod-Ansaldi, R. (2015). Recherche collaborative orientée par la conception. *Education & Didactique*, *9* (2), 73-94.

Sensevy, G. (2011). *Le sens du savoir : éléments pour une théorie de l'action conjointe en didactique*. Bruxelles : De Boeck.

Sensevy, G. (2016). Le collectif en didactique. Quelques remarques. In Y. Matheron, G. Gueudet, V. Celi, C. Derouet, D. Forest, M. Krysinska, S. Quilio, M. Rogalski, T. A. Sierra, L. Trouche, C. Winslow, & S. Besnier (Eds), *Enjeux et débats en didactique des mathématiques (vol. 1)* (p. 223-253). Grenoble : La pensée sauvage.

Sensevy, G., Forest, D., Quilio, S., & Morales, G. (2013). Cooperative Engineering as a Specific Design-Based Research. *ZDM, The International Journal on Mathematics Education*, *45* (7), 1031-1043.

Sensevy, G., & Mercier, A. (2007). Agir ensemble : l'action didactique conjointe. In G. Sensevy, & A. Mercier (Eds), *Agir ensemble. L'action didactique conjointe du professeur et des élèves* (p. 187-211). Rennes : Presses universitaires de Rennes.

Sensevy**, G.,** Santini, J.**,** Cariou, D., & Quilio, S. (2018). Preuves fondées sur la pratique, pratiques fondées sur la preuve : distinction et mise en synergie. *Éducation et didactique, 12* (2), 111-125.

Wittgenstein, L. (2004). *Recherches philosophiques*. Paris : Gallimard.

RECHERCHES COLLABORATIVES EN ACTION : UN ECLAIRAGE SUR LE *CRITERE DE DOUBLE VRAISEMBLANCE*

SABOYA Mireille[*] – TREMBLAY[**] Mélanie

Résumé – Nos études s'inscrivent dans le modèle de recherche collaborative développé principalement par Desgagné et Bednarz (Québec). Nous proposons dans ce texte une exploration de deux enjeux autour du critère de *double vraisemblance*, ces enjeux prennent place dans le processus de coconstruction et sont reliés à des chercheuses en formation. Un premier épisode relate la contribution d'une chercheuse stagiaire qui prend à son compte le critère de double vraisemblance. Le deuxième épisode met de l'avant le rôle d'interface d'une chercheuse stagiaire qui apparaît déterminant dans un moment de tension. Ces épisodes permettent de mieux comprendre comment se met en place le critère de *double vraisemblance* et questionne la formation en recherche collaborative.

Mots-clefs : recherche collaborative, coconstruction, double vraisemblance, enjeux, tensions.

Abstract – Our studies are part of the collaborative research model developed mainly by Desgagné and Bednarz (Quebec). We propose in this text an exploration around the concept of double likehood of two issues that take place in the process of coconstruction. A first episode describes the contribution of a trainee researcher who takes the double likelihood criteria into account. The second episode puts forward the interface role of a trainee researcher who appears to be determining in a moment of tension. These episodes help to better understand how the double likelihood criteria is set up and questions collaborative research training.

Keywords: collaborative research, coconstruction, double likelihood, stakes, odds.

I. LE MODELE DE RECHERCHE COLLABORATIVE DANS LEQUEL S'INSCRIVENT NOS ETUDES : VERS LE CONCEPT DE DOUBLE VRAISEMBLANCE

Le modèle de recherche collaborative dont il est possible de trouver une synthèse dans différents textes (Desgagné 1997, 1998 ; Desgagné, Bednarz, Couture, Poirier et Lebuis 2001 ; Bednarz 2013a, 2013b) a pour pivot central une activité réflexive aménagée entre des chercheurs et des praticiens, où vont se mailler les idées, les compréhensions des uns et des autres en vue d'éclairer des questions liées à la pratique. Dans cette approche, est sous-jacente la reconnaissance de deux communautés, une communauté de pratique et une communauté de recherche qui ont chacune des manières de faire et de penser ainsi que des enjeux qui leur sont propres ; elles s'unissent en vue de coconstruire un savoir professionnel[1]. Cet arrimage entre théorie et pratique permet la coconstruction d'un savoir reconnu et partagé à la fois par la communauté scientifique et par la communauté des praticiens. Pour cela, il ne suffit pas pour le chercheur d'aller sur le terrain des praticiens. Celui-ci se doit « de concilier deux terrains : celui de la pratique, certes, mais aussi celui de la recherche » (Desgagné 1998, p. 81) et de produire une double « vraisemblance » à sa démarche d'investigation. C'est ce critère de *double vraisemblance* qui est l'objet de ce texte, critère que Desgagné emprunte à Dubet (1994) :

> « La vraisemblance implique une double exigence. Elle doit être conforme aux normes habituelles du métier de sociologue qui organise et rationnalise des données, qui puise ailleurs que dans son propre matériau et qui est soumis à une exigence de non-contradiction. Elle doit être aussi crédible pour les acteurs dont on postule qu'ils sont compétents et pas complètement aveugles sur ce qu'ils font dans la mesure où toute action exige une activité de justification et de compte rendu. L'argumentation du

[*] Université du Québec à Montréal (UQAM) – Québec (Canada) – saboya.mireille@uqam.ca
[**] Université du Québec à Rimouski, campus Lévis – Québec (Canada) – melanie_tremblay@uqar.ca

[1] Un des fondements de ce modèle de recherche est l'approche ethnométhodologique (Coulon, 1993) qui s'intéresse aux significations que les acteurs sociaux d'un groupe social donné construisent à propos des situations dans lesquelles ils évoluent quotidiennement.

> sociologue vise donc un double public : la communauté scientifique, avec ses critères propres, et les acteurs, qui maîtrisent d'autres données » (p. 249).

Le chercheur collaboratif sera constamment habité du souci de tenir compte des préoccupations des deux communautés, donc de rendre compte du critère de *double vraisemblance* aux trois étapes de la recherche collaborative. À l'étape de cosituation, le chercheur est amené à définir un projet de recherche susceptible de rencontrer les préoccupations des praticiens et de la communauté scientifique. Il est ainsi préoccupé par *une double pertinence sociale*. L'objet cositué devra avoir une pertinence pour les deux communautés. Par la suite, un dispositif de recherche est mis en place qui s'apparente à ce que Davidson Wasser et Bresler (1996) nomment une « zone interprétative partagée ». Cette zone prend place à l'étape de coopération avec un défi majeur pour le chercheur, celui de faire en sorte que les différentes rencontres réflexives entre les participants à la recherche soient des occasions non seulement de collecte de données pour les chercheurs, mais également de questionnement pratique pour les praticiens. Le défi du chercheur est de créer une situation réflexive qui n'est pas étrangère aux participants. Ainsi, dans cette deuxième étape, le chercheur est habité par un souci de *double rigueur méthodologique* dans cette zone interprétative partagée. Les rencontres réflexives devront être des occasions de collecte de données pour le chercheur et de questionnement pratique pour les praticiens. Enfin, à l'étape de coproduction, il est question d'analyser les données collectées. Le chercheur doit faire en sorte à travers l'analyse des données que les savoirs produits prennent une forme utile à la fois aux praticiens et aux chercheurs. Le chercheur devra ainsi trouver une façon de présenter les résultats de cette analyse sous une forme qui satisfasse à la fois la communauté de recherche et de pratique. Le chercheur collaboratif est habité par *une double fécondité des résultats*.

Le critère de double vraisemblance a été défini par différents articles (Desgagné, 1997, 1998; Desgagné et al., 2001). Dans Bednarz (2013a), ce critère est exemplifié dans les trois étapes de la recherche collaborative à travers cinq projets de recherche, quatre en didactique des mathématiques et un projet en didactique des sciences. Toutefois, Morrissette et Desgagné (2009) mettent de l'avant ce qu'ils nomment le *jeu des positions de pouvoir* et relèvent que le critère de double vraisemblance ne va pas de soi pour le chercheur :

> Penser une telle manière la collaboration de recherche pourrait laisser penser croire que le rapprochement de ces deux logiques de penser et d'agir va de soi, du moment qu'on réunit chercheurs et praticiens dans un même « espace réflexif » en vue d'assumer leur démarche de coconstruction de savoir. Rien n'assure pourtant que les logiques des uns et des autres pour penser le savoir soient compatibles ; si elles le sont, on peut penser qu'en cours de démarche, les partenaires auront néanmoins à négocier entre eux leur manière d'envisager le savoir à coconstruire (p. 119).

Dans ce même sens, Pépin et Desgagné (2017) illustrent à travers une démarche de coconstruction d'un projet entrepreneurial à l'école primaire trois moments forts du critère de double vraisemblance. Un premier moment de convergence des points de vue dans la négociation entre le chercheur et l'enseignante impliquée, ce qu'ils nomment la *double vraisemblance confortée*. Un deuxième moment qui présente une divergence des points de vue dans la négociation, la *double vraisemblance confrontée.* Ce moment évolue vers un troisième moment où prend place une conciliation des points de vue, ce qui sera appelé la *double vraisemblance accommodée.*

Nous souhaitons, dans ce texte, poursuivre la réflexion sur le critère de *double vraisemblance*, en nous tournant sur la formation en recherche collaborative. Cette réflexion prendra place à travers deux épisodes qui impliquent des assistantes chercheuses. Dans le premier épisode, nous verrons comment ce critère se met en place dans des moments non prévus dans le dispositif de collecte de données. Cet épisode amène à considérer un dispositif de collecte de données riche en termes de coconstruction. Le deuxième épisode provenant

d'une autre recherche collaborative touche à la codiffusion des résultats entre chercheure et enseignants auprès de la communauté professionnelle et s'inscrit dans un moment de tension dans lequel la forme du résultat à présenter n'est pas partagée par les deux communautés. Rentre alors en jeu un troisième partenaire de la recherche, une assistante chercheuse, qui joue le rôle d'interface pour permettre la viabilité du critère de *double vraisemblance*, central dans la recherche collaborative.

II. LE CRITERE DE *DOUBLE VRAISEMBLANCE* QUI PREND PLACE DE FAÇON INATTENDUE LORS D'UNE ENTREVUE INDIVIDUELLE

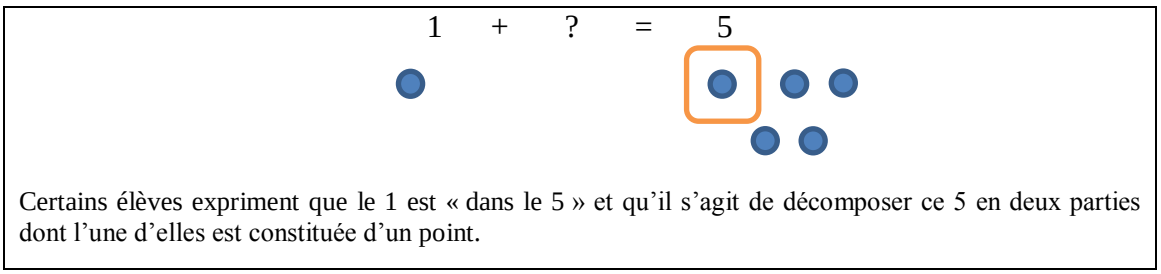
L'exemple présenté ici provient d'une recherche collaborative qui est actuellement en cours et qui implique deux enseignantes intervenant en adaptation scolaire auprès d'élèves en difficulté d'apprentissage en deuxième et troisième années du primaire (7 à 9 ans), deux chercheuses et deux chercheuses assistantes. Le projet est né d'une demande des enseignantes qui constatent les difficultés de leurs élèves en résolution de problèmes. L'objet de la recherche tourne autour des moyens à mettre en place pour aider les élèves à améliorer leurs habiletés à résoudre des problèmes et à développer leur sentiment de contrôle lors des résolutions. Nous nous pencherons ici sur l'exemple de Marie[2], l'enseignante qui intervient en deuxième année primaire auprès de ses 11 élèves âgés entre 9 et 11 ans. Dans les rencontres réflexives prennent place tous les intervenants (les 2 chercheuses, les 2 enseignantes et les 2 chercheuses assistantes), ces rencontres ont lieu environ à chaque 6 semaines et sont d'une durée d'une journée. Pendant ces rencontres, les participantes élaborent conjointement des situations et des interventions qui visent à développer une action contrôlée[3] chez les élèves dans la résolution de problèmes. Ces situations et interventions sont par la suite expérimentées par les enseignantes dans leur classe et les résultats obtenus alimentent la rencontre réflexive qui suit. Afin de préparer les rencontres, les chercheures ont demandé à une des chercheuses assistantes d'aller filmer dans la classe lors des expérimentations. Pendant les séances, l'assistante chercheuse intervient auprès des élèves pour mieux comprendre ce qu'ils font et elle mène une mini-entrevue d'explicitation avec l'enseignante à la fin de la séance. L'objectif de cette mini-entrevue (d'une durée d'au plus 5 minutes) est de recueillir les impressions « à chaud » de l'enseignante et de documenter ses prises de décision.

Les questions posées sont : 1) Êtes-vous satisfaite de la séance ? 2) Est-ce que le déroulement est tel que vous l'aviez anticipé ? 3) Si vous aviez à refaire la séance, procèderiez-vous de la même manière ou quelles sont les améliorations que vous apporteriez et pourquoi ? Lors de la rencontre réflexive, nous procédons à ce que Clot, Faïta, Fernandez et Scheller (2000) nomment l'autoconfrontation croisée. Des extraits de la séance en classe sont choisis par les chercheures et présentés par la suite aux participantes à la recherche. Une activité réflexive du collectif se met alors en place. L'enseignante revit ainsi l'activité passée dans l'action présente (Clot et al. 2000). En effet, le visionnement de ces extraits fait émerger des justifications, des remises en question qui proviennent des différents membres et qui permettent une coconstruction de l'objet de recherche. Des extraits de l'entrevue post séance sont également présentés en rencontre. Ces éléments sont des leviers importants pour la rencontre réflexive de groupe. Ainsi, les participants rentrent dans une discussion sur ce qui a été fait, mais également sur ce qui aurait pu être fait. C'est en préparant les rencontres réflexives que les chercheuses se sont aperçues d'un changement dans les rôles pris par l'enseignante et la chercheuse assistante, cette dernière poursuivant, à la demande de

[2] Tous les noms choisis sont fictifs.
[3] Nous reprenons le concept de contrôle élaboré par Saboya, Bednarz et Hitt (2015).

l'enseignante, la coconstruction de l'objet de recherche et prenant à sa charge le critère de *double vraisemblance.*

La situation prend place en début d'année scolaire. Forte d'une expérience de deux ans en recherche collaborative[4], l'enseignante décide de présenter aux élèves des problèmes de structure additive avec un terme manquant (Vergnaud 1982). Face au constat de difficultés ressenties par les élèves lors de cette histoire mathématique[5], Marie décide de débuter la prochaine séance par une activité dans laquelle il sera demandé aux élèves de trouver le terme manquant à partir de diverses égalités. De plus, elle décide de choisir des petits nombres pour que les élèves aient plus de facilité à calculer mentalement et à vérifier la réponse obtenue. Elle prévoit ainsi développer le raisonnement qui permet de trouver un terme manquant, raisonnement que les élèves pourront par la suite réinvestir lors de la résolution d'une histoire mathématique. Lors de cette deuxième séance, Marie revoit avec les élèves la signification du signe égal (vu comme une équivalence entre les expressions de gauche et de droite de l'égalité) et demande aux élèves de représenter de différentes façons le nombre 5. Elle en arrive avec les élèves à trouver différentes représentations comme 2+3, 4+1, 10-5 et 0+5. Par la suite, elle leur demande de trouver le nombre pour lequel 1 plus ce nombre donne 5. Elle procède ainsi avec plusieurs autres nombres. L'enseignante s'appuie pour ce faire sur une représentation dessinée (voir figure 1).



Certains élèves expriment que le 1 est « dans le 5 » et qu'il s'agit de décomposer ce 5 en deux parties dont l'une d'elles est constituée d'un point.

Figure 1 – Un exemple de recherche de terme manquant appuyé par une représentation dessinée.

Marie donne d'autres exemples que les élèves font individuellement comme ? + 8 = 15. Constatant que les élèves se débrouillent bien, elle décide de leur donner une histoire mathématique avec des petits nombres, histoire pour laquelle on recherche l'état initial :

> Ce matin, Julie avait un certain nombre de billes. En après-midi, son amie lui a remis 6 billes. Maintenant, elle en a 8. Combien en avait-elle ce matin ?

Suite à l'appropriation du problème en grand groupe, Marie choisit de réaliser la phase de modélisation aussi avec les élèves (? + 6 = 8), elle leur laisse la tâche de trouver le terme manquant. Avec grande stupéfaction, elle remarque que les élèves ne sont pas capables de réinvestir les raisonnements développés lors de l'activité réalisée préalablement, ce qu'elle exprime ainsi lors de la mini-entrevue :

> **Marie** : moi j'étais sûre que ça allait aller mieux, mais non la technique ça n'allait pas mieux pour tout le monde. Il y en a encore qui ne l'ont pas encore compris. C'est encore à travailler ce principe du terme manquant. C'est comme si je ne le sais plus si c'est mieux de le travailler avec la technique ou de la faire conjointement avec l'histoire mathématique ou de le faire juste avec des histoires mathématiques. C'est une grande question que j'ai. ***Toi, peux-tu parler ?*** Toi comparativement à ce que tu as vu la semaine passée, est-ce qu'il y a quelque chose que tu remarques ?

[4] L'équipe a travaillé sur une analyse des problèmes de structure additive et a coconstruit une séquence d'enseignement qui prend en considération un ordre de grandeur dans la complexité des problèmes. Voyant les difficultés des élèves pour résoudre des problèmes avec des termes manquants, l'enseignant décide d'en proposer dès le début de l'année scolaire pour avoir l'occasion de les travailler sur du long terme.

[5] Les enseignantes ont choisi de parler de la résolution d'***histoires*** mathématiques au lieu de la résolution de problèmes mathématiques, le mot « problème » présentant une connotation négative.

Nous voyons ici que l'enseignante fait appel aux observations de la chercheuse assistante et demande de se prononcer sur ce qu'elle a observé pour pouvoir partager ensemble leurs constats. Toutefois, la question posée par l'enseignante : « Toi, peux-tu parler ? » montre que l'enseignante ne reconnaît pas chez l'assistante chercheuse le rôle de partager son point de vue. En effet, les chercheuses ont chargé l'assistante chercheuse de documenter et de leur rapporter ce qui s'est passé en classe. L'enseignante reconnaît ainsi que la coconstruction ne prend place que pendant les rencontres réflexives avec les chercheuses. On voit qu'à partir de ce moment s'opère un changement dans le rôle de l'assistante chercheuse qui propose une piste d'intervention, l'utilisation de matériel qui est basée sur des discussions qui ont pris place lors de rencontres réflexives antérieures (Saboya et Tremblay 2017) :

> **Chercheuse assistante** : j'ai remarqué que juste d'avoir changé les nombres *(les nombres choisis sont plus petits que lors de la première séance)* ça l'a aidé surtout pour Marco. Pour les autres, je trouvais que ça allait bien. On pourrait leur laisser peut-être du temps aussi pour qu'ils puissent manipuler. Peut-être que moi je mettrais du matériel et je les ferais manipuler avec du matériel pour qu'ils puissent manipuler les quantités en jeu.
>
> **Marie** : oui pour ta suggestion. Tu sais moi c'était comme évident avec les petits nombres on pouvait les faire en dessinant. Peut-être que je pourrais le faire en manipulant avec des jetons.
>
> **Chercheuse assistante** : il faudrait en faire pas mal plus aussi.
>
> **Marie** : oui puis insister que la façon d'écrire le nombre à gauche c'est la même que le nombre à droite. Avec plein d'autres nombres.

On assiste ainsi à un épisode de coconstruction non attendu dans lequel l'assistante chercheure prend en compte le critère de *double vraisemblance* exprimant une sensibilité par rapport à ce qui a été fait par les élèves en classe et par ce qui a été coconstruit dans les rencontres réflexives. Cet échange montre le potentiel d'une discussion « dans l'action » qui permet un questionnement sur ce qui a été gagnant, de ce qui a été défaillant et de rentrer collectivement dans une recherche d'interventions pour pallier aux difficultés constatées. La création de cet espace réflexif contribue à alimenter l'objet de la recherche et les entrevues d'explicitation après les expérimentations deviennent des moments de collecte de données qui font avancer la coconstruction de l'objet de recherche. En outre, cet épisode met de l'avant un enchevêtrement des rôles des différents partenaires dans la recherche collaborative (Saboya, 2013), les rôles de chacun des partenaires pouvant prendre différentes formes tout au long de la recherche. L'analyse de l'entretien d'explicitation qui succède la séance en classe a permis de constater qu'à partir de cet entretien, enseignante et assistante chercheuse se sont donnés un espace de réflexion et de coconstruction qui n'était pas d'emblée planifié dans le cadre du dispositif de recherche.

III. LE CRITERE DE *DOUBLE VRAISEMBLANCE* EN PERIL LORS DE LA CODIFFUSION : ROLE D'INTERFACE D'UNE CHERCHEUSE STAGIAIRE

Cet épisode s'appuie sur une recherche collaborative impliquant une chercheuse, une étudiante au doctorat qui effectue un stage de recherche et quatre enseignants intervenant à la première année du premier cycle du secondaire[6] (élèves de 12-13 ans) d'une école publique située dans la banlieue de Montréal. L'équipe était intéressée à comprendre la possible évolution d'une action contrôlée chez les élèves à travers la construction conjointe de situations et d'interventions (Saboya 2012 ; Saboya et Rhéaume 2015 ; Saboya, Bednarz et Hitt 2015). L'expérimentation s'est étalée pendant une année scolaire dans laquelle ont pris

[6] Dans le système québécois, la première année du secondaire correspond à la deuxième année du collège en France (niveau cinquième). Le primaire au Québec a une durée de 6 ans.

place des rencontres réflexives entrecoupées d'expérimentations en classe. Des situations et des interventions ont été coconstruites entre les membres de la recherche qui contribuent au développement d'une action contrôlée chez les élèves à travers une vérification de leur démarche et de la réponse obtenue ainsi que de leur capacité à retourner à l'énoncé de la situation à différents moments de la résolution. Ce qui précède touchant principalement la composante[7] de la vérification du contrôle. L'extrait rapporté ici se rattache à la phase de codiffusion de la recherche alors que la chercheuse propose aux enseignants de présenter conjointement les résultats obtenus autour de la vérification dans un colloque professionnel. La proposition a été reçue avec enthousiasme par les quatre enseignants. Dans cette rencontre, la chercheuse se doit de trouver une façon de présenter les résultats sous une forme qui satisfasse à la fois la communauté de recherche et la communauté de pratique. Toutefois, lors des discussions, des positions différentes entre les partenaires se font sentir. Elles reposent sur des visions d'un rapport au savoir qui diffèrent. C'est un moment où le risque de rupture se fait sentir, la chercheuse ayant de la difficulté à maintenir le critère de *double vraisemblance*. Rentre alors en jeu une tierce personne, la chercheuse stagiaire qui agit comme interface dans la négociation. Lors des premières rencontres réflexives, celle-ci avait un rôle d'observatrice, elle prenait des notes sur des points qu'elle jugeait saillants pour documenter la coconstruction, ce qui permettaient de préparer la prochaine rencontre réflexive et d'aiguiller les analyses. Ainsi, la chercheuse stagiaire restait en retrait, n'intervenant pas dans les discussions. Toutefois, son sujet doctoral se situant au primaire, les enseignants, dans un souci d'arrimage primaire secondaire[8], ont sollicité à maintes reprises son expertise. Sa contribution aux discussions est devenue, au fil des rencontres de plus en plus active. Elle est ainsi devenue un « membre » à part entière.

La chercheuse propose de tabler la présentation au colloque autour d'une discussion ouverte avec les participants à l'atelier : il serait demandé aux enseignants s'ils ont observé des difficultés autour de la vérification chez leurs élèves et/ou d'expliciter des traces qui montrent une vérification ou au contraire des difficultés sous cet angle. Un malaise s'installe à l'annonce de cette proposition qui est signe d'une possible rupture, il s'exprime par un silence qui dure et des yeux baissés. La chercheuse stagiaire rompt alors le malaise en réenclenchant la discussion tel que le montre l'extrait suivant[9] :

> **S** : (En s'adressant à la chercheuse) : En nous présentant ça, où tu veux qu'on en vienne? Est-ce que toi l'objectif c'est de discuter de ce qu'on a fait pour ouvrir la discussion avec les gens qui viendront à la présentation ?
>
> **C** : Ben vous, comment le voyez-vous ? J'aimerais vous entendre en premier.

Ainsi, l'intervention de la chercheuse stagiaire permet de réenclencher la discussion en demandant à la chercheuse de reformuler son objectif. Cette dernière en profite alors pour renvoyer la question aux enseignants, ce qui permet de renouer avec le critère de *double vraisemblance* de la recherche collaborative. Les propos des enseignants soulignent que ceux-ci souhaitent présenter ce qu'ils nommeront un « clé en main » que les autres enseignants participant à l'atelier pourront réutiliser :

> **E1** : moi je vais te dire très clairement, quand je m'en vais en formation puis je vois ces tables rondes, je n'aime pas participer à ça, c'est sûr que je lâche l'activité. Il y a bien des fois des « moi, moi, moi » puis à un moment donné ça me tape royalement sur les nerfs. Je me dis j'aime mieux aller voir quelqu'un qui a

[7] Le concept de contrôle comprend 10 composantes dont la vérification, l'anticipation, la perception des erreurs.
[8] Ce besoin d'arrimage entre primaire-secondaire se fait sentir par exemple à travers l'intervention d'un des enseignants « Ce serait intéressant de planter des affaires dans le primaire ».
[9] Les codes utilisés sont S: chercheuse Stagiaire, C: Chercheuse, E1, E2, E3, E4 désignent respectivement chacun des quatre enseignants.

montré quelque chose, qui a vu quelque chose, qui fait quelque chose. Arriver avec une trousse, je trouverais ça intéressant.

S : proposer quelque chose qui a été testé, qui fonctionne bien, que tu voudrais partager.

E3 : oui parce qu'aller s'asseoir et se faire dire qu'ils ne valident pas, on le sait.

E1 et E2 : c'est ça.

E1 : il faut amener quelque chose qui soit pratico pratique, ce que l'on fait concrètement. Expliquer comment on fait pour obliger nos élèves à vérifier, à valider leurs réponses.

E3 : il faut que ce soit concluant.

La chercheuse souhaite, quant à elle, développer chez les participants à l'atelier, une sensibilité autour du développement d'une activité de vérification qui se ferait autour d'une discussion sur leur propre expérience avec les élèves. Il s'agissait pour elle, en quelque sorte, de faire revivre aux participants du colloque, le processus de la recherche collaborative en cosituant d'abord la place, l'expression et l'importance du contrôle dans leurs classes. La discussion entre les participants de la recherche se poursuit et l'idée de faire participer les enseignants de l'atelier est abandonnée. L'équipe arrive à la décision de plutôt présenter au colloque :

- des productions d'élèves qui sont des exemples concrets montrant des traces de vérification et des difficultés à vérifier. Comme le dira l'enseignant 3 (E3), c'est « spécifique ».

- une banque de problèmes susceptibles de favoriser une vérification chez les élèves.

- quatre pistes d'interventions qui visent à développer une activité de vérification chez les élèves (voir figure 2). La première piste est présentée comme une piste gagnante (voir Saboya, Martel et al. 2015). Deux pistes (2 et 3) qui semblent fructueuses mais qui sont à explorer et la quatrième piste qui n'a pas été concluante lors de l'intervention.

PISTE 1	**PISTE 2**	**PISTE 3**	**PISTE 4**
On fournit la réponse à l'élève dès le début pour forcer une prise de conscience et favoriser l'auto vérification.	Faire corriger des copies d'élèves par d'autres élèves.	Donner des problèmes avec des erreurs et leur demander de les trouver.	Mettre ensemble des élèves qui ont des réponses différentes pour discuter de leurs démarches et les faire rentrer dans un processus de validation.
Piste gagnante	*Pistes fructueuses... à explorer.*		*Piste non concluante*

***Figure 2** – Des interventions coconstruites pour développer une vérification chez les élèves.*

Il est à noter que les enseignants sont prêts à présenter des pistes qui n'ont pas abouti ou qui demandent de poursuivre la réflexion, ce qui est loin d'être un « clé en main » concluant. Ceci démontre une ouverture de leur part et cette prise de conscience que la phase de codiffusion devrait, elle aussi, être l'expression d'un processus de coconstruction qui n'est pas linéaire. S'est ainsi mis en place après le moment de tension, une négociation qui prend en compte les besoins des différents intervenants.

IV. DISCUSSION

Ces deux exemples proposent d'examiner plus en profondeur le processus de coconstruction à travers des tensions vécues entre les partenaires mais également à travers un prolongement de la zone interprétative que permet la mise en place d'entretiens

d'explicitation. Ces deux épisodes viennent éclairer des moments d'accords et de désaccords dans lesquels la coconstruction et le critère de *double vraisemblance* sont interpellés. Est soulignée, à travers le deuxième épisode, la fragilité des négociations et le rôle que peut jouer dans ces moments un troisième partenaire comme interface entre les deux communautés. Celui-ci permet au chercheur de renouer avec le critère de *double vraisemblance* et de poursuivre la régulation des interactions. Le premier épisode souligne l'apport des entretiens après les séances en classe comme des moments riches de coconstruction tout en maintenant le critère de *double vraisemblance*. Ces entretiens sont une occasion supplémentaire de poursuivre le dialogue. À cet effet, les deux enseignantes ont fait la demande aux deux chercheuses de venir coanimer dans la classe pour pouvoir discuter dans l'action de ce qui s'est passé et ne pas attendre, des fois, plusieurs semaines la prochaine rencontre de groupe pour pouvoir en discuter.

Un autre aspect qui ressort de ces deux épisodes est le changement dans les rôles des partenaires. Saboya (2013) rapporte à cet effet un enchevêtrement entre les rôles des deux communautés de pratique et de recherche. Ici prend place un autre partenaire de la recherche, des assistants chercheurs qui sont en formation. Dans ces deux recherches, on peut noter un changement dans le rôle qui leur est préalablement attribué qui fait qu'elles deviennent des membres à part entière du groupe et prennent à leur charge le critère de *double vraisemblance* de la recherche collaborative. Il serait intéressant d'étudier de plus près la formation à la recherche dont les assistants chercheurs bénéficient. Participer à des projets de recherche collaborative permet aux étudiants chercheurs de comprendre de l'intérieur comment se vit cette recherche. En effet, faire de la recherche collaborative ne va pas de soi. Notre expérience en formation d'étudiants de deuxième cycle a permis de relever que les étudiants ont de la difficulté à maintenir le critère de double vraisemblance, étant, à certaines occasions, amenés à reprendre la collecte de données car celle-ci ne respecte pas les critères de la recherche collaborative. Mais comment penser la formation des étudiants chercheurs à la recherche collaborative ? La question reste ouverte.

Finalement, ce texte se veut une contribution à l'étape de coproduction sous l'angle de la codiffusion des résultats qui est peu documenté dans la littérature et qui pose, comme nous l'avons vu, des défis pour le chercheur qui souhaite garder le critère de *double vraisemblance*, l'enjeu se situant sur la perception de chacun sur la forme que doivent prendre les résultats d'une recherche collaborative. La chercheuse considère le processus de la recherche comme une forme de résultat intéressant à diffuser ce qui n'est pas partagé par la communauté des praticiens qui souhaite la diffusion d'un produit fini, d'un clé en main.

RÉFÉRENCES

Bednarz N. (2013a) Recherche collaborative et pratique enseignante. Regarder ensemble autrement. Paris : L'Harmattan.

Bednarz N. (2013b) Recherche collaborative en didactique des mathématiques. Dans A. Bronner et al. (Éd.), *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage* (pp. 121-170). XVIe école d'été de didactique des mathématiques. Carcassonne (août 2011). La Pensée Sauvage Éditions.

Clot Y., Faïta D., Fernandez G. & Scheller L. (2000) Entretiens en confrontation croisée : une méthode en clinique de l'activité. *Perspectives interdisciplinaires sur le travail et la santé* [En ligne], 2-1 | 2000, mis en ligne le 01 mai 2000, consulté le 30 juin 2017. URL : http://pistes.revues.org/3833 ; DOI : 10.4000/pistes.3833.

Coulon A. (1993) *Ethnométhodologie et éducation*. Paris, Presses universitaires de France.

Davidson Wasser J., Bresler, L. (1996) Working in the interpretative zone : conceptualizing collaboration in qualitative research teams. *Educational Researcher*, 25(5), 5-15.

Desgagné S. (1997) Le concept de recherche collaborative : l'idée d'un rapprochement entre chercheurs universitaires et praticiens enseignants. *Revue des sciences de l'éducation, 23(2)*, 371-393.

Desgagné S. (1998) La position du chercheur en recherche collaborative : illustration d'une démarche de médiation entre culture universitaire et culture scolaire. *Recherches qualitatives*, *18*, 77-105.

Desgagné S., Bednarz N., Couture C., Poirier L. & Lebuis P. (2001) L'approche collaborative de recherche en éducation : un nouveau rapport à établir entre recherche et formation. *Revue des sciences de l'éducation, 27*(1), 33-64.

Dubet F. (1994) *Sociologie de l'expérience*. Paris, Seuil.

Morrissette J., Desgagné S. (2009) Le jeu des positions de savoir en recherche collaborative : une analyse des points de vue négociés d'un groupe d'enseignantes du primaire. *Recherches qualitatives*, Vol. 28(2), 118-144.

Pépin M., Desgagné S. (2017) La double vraisemblance au fondement de la collaboration de recherche : retour sur la démarche de coconstruction d'un projet entrepreneurial à l'école primaire. Phronesis. Les recherches collaboratives en éducation et en formation : référents théoriques, outils méthodologiques et impacts sur les pratiques professionnelles. Volume 6, 1-2, 126-139.

Saboya M. (2012) Analyse d'une didactique d'intervention autour du développement d'une activité de contrôle : stratégies d'enseignement et indicateurs du contrôle chez les élèves du secondaire. In Dorier, J.-L. Coutat, S. (Éds). *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle. Actes du colloque EMF2012* (GT9, pp. 1246-1258).

Saboya M. (2013) Élaboration conjointe d'une intervention visant le développement du contrôle chez les élèves. In N. Bednarz (Éd.). *Recherche collaborative et pratique enseignante. Regarder ensemble autrement* (p. 119-127). Paris : L'Harmattan.

Saboya M., Rhéaume S. (2015) Quel contrôle exercent les élèves lors de la résolution d'un problème de comparaison de fractions ? *Petit x*, *99*, 5-31.

Saboya M., Bednarz N. & Hitt F. (2015) Le contrôle exercé en algèbre : conceptualisation et analyses en résolution de problèmes. A*nnales de didactique et de sciences cognitives*, Volume 20, 61-100.

Saboya M., Tremblay M. (2017) Co-élaboration d'interventions entre enseignantes et chercheures visant le développement d'un choix éclairé de matériel auprès d'élèves en difficulté d'apprentissage au primaire dans la résolution de problèmes additifs. In Braconne-Michoux, A., Gibel, P. & Oliveira, I. (Éds.), *Étude de différentes formes d'interactions entre recherches en didactique des mathématiques et formations professionnelles des enseignants*. Québec : Livres en ligne du CRIRES. http://lel.crires.ulaval.ca/public/BraconneMichoux_Gibel_Oliveira_2017.pdf

Saboya M., Martel I., Lavallée S. & Rhéaume S. (2015) *Pourquoi fournir la réponse aux élèves avant toute résolution ?* Envol.

Vergnaud G. (1982) A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problem. In Carpenter T.P., Moser J.M., Romberg T.A. (Eds). *Addition and Subtraction: a cognitive perspective*. Hillsdale NJ: Lawrence Erlbaum.

COLLABORATION ENTRE ENSEIGNANTS À L'UNIVERSITÉ ET ÉMERGENCE D'IDÉES

TRIGUEROS[*] María – LOZANO[**] María Dolores

Résumé – Cet article présente les résultats du travail collaboratif d'un groupe constitué de didacticiens des mathématiques et d'enseignants universitaires en mathématiques. Ce groupe collabore depuis trois ans au sein d'un séminaire. Il cherche à développer de nouvelles façons d'enseigner l'algèbre linéaire à des étudiants de première année. Nous examinons, dans cet article, les conditions de cette collaboration qui ont modifié la pratique en enseignement des mathématiques des enseignants. Nous nous appuierons sur la notion d'énactivisme qui nous permet d'étudier la relation entre travail collaboratif et processus de changement.

Mots-clefs : algèbre linaire, travail collaboratif, modélisation, énactivisme, enseignement universitaire

Abstract – This paper presents about collaborative work of a team formed by mathematics educators and mathematics teachers at the university. They worked together for three years in a seminar to develop new ways to teach linear algebra to first year students. We examine the collaboration conditions which can modify teachers' practices using an enactivist perspective which enables us to study the relation between collaboration and the change process.

Keywords: Linear algebra, collaborative work, modeling, enactivism, university teaching

La littérature sur le travail collaboratif a principalement traité de ses effets sur le travail des étudiants. Les résultats des études ont montré que le travail collaboratif est un moyen efficace d'apprendre des tâches qui nécessitent un raisonnement et de favoriser une participation équitable (Phelps, et al., 1989). Ils ont également montré que le travail collaboratif stimule la participation active des étudiants et qu'il en résulte une différence statistiquement significative dans l'apprentissage et la compréhension profonde des concepts. Ces différences ont été trouvées dans des groupes expérimentaux dans différentes classes de sciences et de mathématiques, avec un nombre différent d'étudiants et d'enseignants différents (Freeman, et al., 2014).

Certaines études ont montré que la collaboration entre les étudiants n'est pas suffisante pour promouvoir l'apprentissage, et que la conception des activités utilisées joue un rôle essentiel dans la possibilité de focaliser l'attention des étudiants et de stimuler le raisonnement mathématique (Mullins, et al., 2011). D'autres études (Fuchs, et al., 2000) montrent que le succès du travail collaboratif réside dans ses possibilités de promouvoir la discussion et les conflits cognitifs entre les étudiants, et la possibilité de trouver des moyens d'y faire face. Il y a peu d'ouvrages consacrés au travail collaboratif des professeurs d'université, et sur leurs résultats par rapport aux changements qui peuvent impliquer dans leur travail quotidien. Dans une étude en rapport avec celle présentée ici, Trigueros et Lozano (2015) ont montré de possibles transformations dans l'activité des professeurs à partir du travail collaboratif effectué dans un séminaire pour concevoir des activités didactiques basées sur la modélisation et le travail collaboratif des étudiants. Ce travail reprend les résultats des recherches précédentes pour analyser les caractéristiques de la collaboration qui permettent aux enseignants de faire évoluer leur façon d'enseigner. Les questions de recherche qui ont guidé ce travail étaient : Quelles sont les principales caractéristiques du travail collaboratif parmi les enseignants qui contribuent à l'évolution des pratiques pédagogiques au niveau universitaire ? et comment les pratiques des enseignants changent-ils lorsqu'ils participent à un projet

[*] ITAM– México – trigue@itam.mc
[**] Universidad de las Américas-Puebla – México – lolis.lozano@gmail.com

impliquant des idées d'enseignement des mathématiques et une réflexion sur les pratiques d'enseignement ?

I. UNE PERSPECTIVE ECLAIREE PAR L'ÉNACTIVISME

Nous considérons qu'une perspective théorique appropriée pour étudier la relation entre le travail collaboratif et les processus de changement est l'énactivisme, une théorie issue du travail des biologistes Maturana et Varela (Maturana et Varela 1992). Cette perspective, qui met l'accent sur l'inséparabilité de l'individu et du monde, peut éclairer nos idées émergentes sur le travail collaboratif et ses effets sur les pratiques des enseignants.

L'énactivisme considère que les actions dans le monde, à un instant donné, sont déterminées par les composantes qui constituent un système particulier et leurs relations. L'histoire d'un système ou d'un individu détermine quels éléments du monde peuvent être appréciés et interprétés et, en même temps, les actions suivantes du système ou de l'individu. Les structures d'un système sont très flexibles et changent d'instant en instant. C'est à travers l'interaction que les structures changent et que de nouvelles pratiques peuvent être apprises (Trigueros & Lozano, 2007, 2015). Cependant, ce n'est pas possible de déterminer les résultats des interactions, ne peuvent pas être déterminés de l'extérieur parce qu'ils sont créés par les expériences et la constitution antérieures des individus. Dans les mots de Maturana et Varela : « Ce n'est que lorsqu'une interaction nous déloge - comme si nous étions réinstallés dans un environnement culturel différent et que nous y réfléchissions, que nous produisons de nouvelles constellations de relation [...]» (p.242). Voir dans ce contexte englobe, à la fois, la perception et l'interprétation, et son utilisation ; il est lié au fait que différents individus peuvent « voir » des choses différentes en regardant le « même phénomène ».

Dans cet article, nous cherchons à découvrir comment, à travers le travail collaboratif, les enseignants remarquent certains aspects en relation à leur façon d'enseigner et comment, en interaction avec d'autres enseignants, ils sont capables de « voir » ce qu'ils ne pouvaient voir auparavant : D'une part l'apprentissage des élèves et leur apprentissage en tant qu'enseignants, et d'une autre part leur rôle en tant que concepteurs d'activités de modélisation et didactiques innovantes.

II. MÉTHODOLOGIE

Le groupe qui a participé au séminaire était composé de sept mathématiciens, dont trois didacticiens des mathématiques. Tous les participants étaient enseignants des cours d'algèbre linéaire et étaient intéressés à l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre linéaire. Le séminaire a été réalisé dans une université au Mexique où les stratégies d'enseignement sont pour la plupart traditionnelles. Il y avait des réunions hebdomadaires au cours desquelles des problèmes mathématiques et des activités conceptuelles basés sur des structures de la Théorie APOS (Action, Processus, Objet, Schéma) ont été développés et discutés. Des idées d'éducation mathématique ont été introduites, des observations en classe, des travaux de classe et des entrevues ont été analysées.

Pour explorer les interactions pendant le séminaire et leur effet sur les possibles processus de changement des participants on a utilisé des idées de l'énactivisme décrites ci-dessus où, les chercheurs et les enseignants sont perçus comme des individus développant leur apprentissage dans un contexte particulier (Reid, 1996). Cette recherche concerne l'analyse des interactions entre les chercheurs et leur objet d'étude (les contenues d'un cours d'algèbre

linéaire), afin de proposer des explications sur le changement des enseignantes adéquates et utiles. Pour cette raison, nous, en tant que chercheurs, avons formulé des résultats provisoires qui ont été discutées avec tous les membres du groupe. Ceci est en lien avec des approches participatives et fondées sur la recherche.

Nous avons pris des notes détaillées pendant les réunions et nous avons enregistré quelques séances. Nous nous sommes concentrés sur les types de sujets abordés pendant les réunions, tels que les concepts mathématiques, les idées théoriques sur l'apprentissage des mathématiques, les stratégies d'enseignement et les réflexions sur les descriptions de changements dans l´enseignement des participants. Nous avons essayé de relier les expériences des participants avec leur parcours en tant qu'enseignants et de la façon dont ils voient leur rôle dans le contexte de la classe. Nous avons contrasté leur perspective avec les observations de ses leçons. Dans les enregistrements vidéo tirés des leçons, nous avons cherché les changements du travail des enseignantes au début et au fur et à mesure du déroulement du séminaire. Nous avons décrit comment ils organisaient les activités de modélisation et comparaient les stratégies utilisées par les étudiants. Nous avons utilisé un système de codage simple qui faisait référence à l'utilisation de problèmes développés dans le séminaire et au type de participation des étudiants et des enseignants pendant son usage dans la salle de classe. Ensuite nous avons discuté des résultats individuels et négocié différents points de vue comme moyen de triangulation (Cohen & Manion, 2000). Nous présentons ici les résultats sur la collaboration et les processus de changement des participants.

III. RÉSULTATS DE L'INTERACTION AU SÉMINAIRE

Dans toutes les sessions, la participation était riche en interventions. Le défi de l'objectif du séminaire et son intérêt pour le projet global ont fortifié son engagement dans cet effort. L'exemple suivant montre un échange d'idées entre les participants (T) lors de la proposition d'un problème de modélisation basé sur le modèle de production de Leontief tel que lui l'a proposé, c'est-à-dire, les élèves avaient des tableaux de données sur la production et la demande externe d'un groupe de trois industries pendant dix mois et ils devaient trouver un modèle qui permettrait de prédire la production nécessaire à tout moment :

T5 - J'ai utilisé deux problèmes que je trouve très intéressants pour les étudiants. L'un est un problème des réseaux, par exemple, des circuits dans la distribution d'électricité ou d'eau dans les villes, et un problème de production qui est une simplification du problème de Leontief.

T4- Je pense que le problème des réseaux est mieux mais, j'enseigne aux étudiants qui étudient l'économie, il serait préférable choisir un contexte moins technique. J'aime la production parce qu'elle est directement liée à l'économie ... mais je ne peux pas imaginer comment le convertir comme un problème ouvert. Que pensez-vous du contexte des rues d'une ville ? Cela apparaît dans certains livres…

T6- Mais sommes-nous intéressés à ce qu'il soit facile à résoudre ? Dans la recherche en didactique des mathématiques, il y a des résultats qui montrent qu'il est préférable que les problèmes représentent un défi pour les étudiants, mais les étudiants devraient être capables d'utiliser des outils qu'ils connaissent déjà pour commencer au moins, et qu'ils ne sont pas frustrés. J'aime le problème suggéré par T5, mais je m'assurerais qu'il ait multiples solutions comme ça, les étudiants peuvent utiliser les méthodes qu'ils connaissent, mais avec suffisamment de variables pour qu'ils aient des difficultés et aient besoin de nouvelles façons de penser ou de repenser dans les systèmes.

T5- Nous pourrions considérer un problème avec 6 équations et 7 inconnues. Nous pouvons leur donner le réseau routier et leur demander si c'est possible en fermer une rue sans provoquer un embouteillage.

T1 - Dans ce problème, je m'attendrais à ce que les étudiants aient des difficultés s'ils essayent de le résoudre d'eux-mêmes ... et alors ils ne pourraient pas interpréter l'ensemble de solutions.

T5- Oui, mais nous pourrions considérer un problème comme j'ai suggéré. Nous pouvons leur donner le réseau des rues et leur demander s'il est possible de fermer l'une d'elles sans provoquer un embouteillage.

T3- Je pense comme T1, les étudiants peuvent avoir des difficultés pour le modéliser et le travailler. On devrait leur rappeler d'abord ce qu'ils ont étudié auparavant et ensuite leur enseigner la nouvelle méthode.

T5- Ce que je ferais, c'est d'utiliser ce problème, mais je discuterais en groupe avec les étudiants, les guiderais et présenterais les nouveaux concepts et techniques nécessaires à ce moment-là. Je pense que les étudiants ont besoin d'être aidés. Il y aurait des restrictions que je ne pense pas qu'ils puissent gérer.
T7- L'idée est que les étudiants travaillent en collaboration. Lorsqu'ils sont en groupe, on peut leur donner une opportunité pour développer des idées intéressantes que nous ne pouvons pas imaginer.
T4- C'est vrai, j'ai vu ça quand j'ai travaillé des activités sur la démonstration des théorèmes.
T2- Je crois aussi que le travail collaboratif est bon, ce qui m'inquiète avec ce type de problème est de savoir comment nous allons gérer le temps, parce que nous avons assez de questions à couvrir.
T6- C'est une question de gestion du temps. Vous n'avez pas à tout faire en classe, vous pouvez laisser une partie comme devoirs, ou vous pouvez utiliser la calculatrice ou l'ordinateur ... même si je préfère qu'ils le fassent d'abord en classe, car ils apprennent mieux.
T7- Je pense de même. Nous pouvons utiliser les activités que nous avons développés pour réfléchir sur les méthodes de résolution des systèmes d'équations linéaires et pour introduire, à partir de cette réflexion, la méthode gaussienne et son interprétation en général. Après, on pourra revenir au problème pour utiliser la méthode et trouver et interpréter l'ensemble de solutions avec les restrictions.

Grâce à ces interactions, on peut observer des aspects de leur parcours au séminaire. La façon dont ils perçoivent leur rôle d'enseignants et celui des élèves et la communication ouverte de leurs conceptions sur l'enseignement montrent qu'il y a des enseignants qui ont déjà utilisé le travail collaboratif, alors que d'autres semblent hésiter à le faire. L'interaction ouverte dans ce cas ouvre la voie à la transformation de leurs stratégies d'enseignement et de l'innovation. Une fois que les problèmes et les activités à travailler ont été conçus, les enseignants ont commencé à les utiliser dans leur classe. Le dialogue dans le séminaire est passé de la conception des problèmes et des réactions des étudiants aux expériences des enseignants lors de leur utilisation en classe. Les exemples suivants montrent quelques caractéristiques des dialogues du séminaire dans cette étape :

T1 - Ce que j'ai fait me permet de guider les étudiants vers les concepts importants du cours .... Il serait intéressant de voir ce qui se passe si nous permettons aux étudiants d'en faire plus par eux-mêmes ...
T3 - Je suis convaincu que les problèmes sont intéressants, mais je pense toujours que nous devons d'abord enseigner la théorie. Ils peuvent l'utiliser dans la solution du problème. C'est plus efficace.
T7 - Avez-vous essayé de laisser les élèves travailler par eux-mêmes ? Mon expérience est que les étudiants nous montrent toujours qu'ils peuvent faire plus que ce que nous pensons.
T3 - Je ne suis pas sûr que cela fonctionnera ... Je ne pense pas que les étudiants puissent faire, par eux-mêmes, des choses qui ont pris des mathématiciens de nombreuses années. En outre, nous avons tous appris en étant introduits d'abord aux définitions et aux théorèmes, et cela a bien fonctionné.
T6- Mais ce n'est pas ce que nous essayons de faire ici. Bien sûr, les étudiants ne découvriront pas tous les concepts. L'idée c'est de les laisser travailler sur le problème, écouter leurs idées. En plus, nous avons des activités à utiliser avec eux afin qu'ils puissent construire des nouveaux concepts et y réfléchir avant de les discuter avec l'ensemble du groupe et de les institutionnaliser.
T2 - Je sais que l'enseignement des mathématiques est complexe… il y a tellement de choses à prendre en compte ... Il est important d'être conscient de ce que les élèves savent déjà et de la façon dont ils gèrent chaque situation ... La recherche en « éducation mathématique » montre que les étudiants sont capables de faire face aux problèmes et de travailler avec leurs idées. Et nous avons également conçu des activités pour qu'ils travaillent afin qu'ils puissent trouver eux-mêmes des résultats et des définitions. L'idée est de les laisser travailler avec le problème, écouter leurs idées, et utiliser les activités afin qu'ils puissent construire de nouveaux concepts et y réfléchir avant de discuter avec l'ensemble du groupe.

Dans cette discussion, nous observons comment, en fonction de leur histoire et, malgré leur volonté de suivre les stratégies de modélisation, les participants ont des doutes qui diffèrent selon leur expérience antérieure. Par exemple, T3 a une grande expérience et est considéré par les étudiants comme un bon enseignant, T1 est plus jeune et, bien qu'il ait enseigné de la même manière, que T1, il est prêt à essayer quelque chose de nouveau. T7, T6 et T2 ont de l'expérience en éducation mathématique, elles ont utilisé la méthode collaborative et connaissent leurs résultats, alors ils essaient de convaincre les autres qu'un changement peut se refléter dans l'amélioration de l'apprentissage des élèves. Les enseignants

discutent, plus tard, les résultats d'utiliser la méthode d'enseignement prévue ; aussi sur l'usage des structures de la théorie APOS peut aider à interpréter les difficultés des étudiants :

> T3 - Présenter le problème comme ça prendra beaucoup de temps en classe. Alors que peux-tu faire ? Il serait préférable d'avoir des sessions supplémentaires pour travailler sur les modèles, une fois qu'on leur a enseigné ce qu'on désire ... Mais, dans la salle de classe ? Je ne pense pas que ce soit possible ...
> T5- J'ai longtemps utilisé des problèmes de modélisation, vous perdrez peut-être du temps à enseigner de cette façon, mais vous verrez que vous gagnez du temps, parce que les étudiants ont mieux appris.
> T2- J'ai vu que les étudiants utilisent généralement des actions pour résoudre les systèmes. Ils peuvent trouver si le système a ou pas une solution, mais ils ne réfléchissent pas vraiment sur leurs actions, ils ne peuvent pas prendre la solution rencontrée comme un objet qui a des propriétés ... les activités aident, mais, on a besoin de les faire réfléchir chaque fois, ils doivent développer cette habitude.

Ces interactions montrent comment les enseignants ont changé et utilisent la méthodologie collaborative. Pour certains d'entre eux, comme T3, le changement est plus difficile. Pour d'autres comme T1 et T5, même s'ils ont une histoire différente, l'acceptation de l'innovation est plus facile car ils sont intéressés à innover équipés par de nouvelles idées, ou par leur croyance sur la valeur des situations de modélisation dans l'apprentissage.

À la fin de la première année, les participants avaient aussi des discussions sur les limites du modèle :

> T2- Certains étudiants reviennent à des méthodes mémorisées ou inadéquates qu'ils ne comprennent pas vraiment ... Utiliser l'approche de modélisation était bon pour certains élèves ... Mais d'autres restent coincés. La situation de modélisation ne suffit pas ..., c'est là où je considère que l'introduction d'activités spécifiquement conçues joue un rôle important. Nous devons discuter à propos de l'APOS afin de pouvoir rédiger plus d'activités ...
> T3 - Je suis d'accord, d'après ce que nous avons discuté ici, je pense que les étudiants peuvent avoir des problèmes avec les variables mais ... On peut considérer nouvelles activités. ...
> T1- C'est intéressant ... les activités sont conçues pour amener les élèves à réfléchir sur des détails spécifiques du concept que je n'avais pas jugés importants auparavant ... nous pouvons essayer de rendre les ensembles d'activités plus complets.

Cette interaction montre que parfois les enseignants considéraient que des changements de stratégies étaient nécessaires. Ils ont estimé que plus d'activités conceptuelles conçues dans le cadre du séminaire pourraient être utiles aux étudiants pour réfléchir, en particulier sur les activités concernant les actions algébriques nécessaires à la solution des problèmes.

Une autre situation intéressante illustrant une caractéristique importante du travail collaboratif a eu lieu lors d'une session de planification :

> T5- Je pense qu'au lieu d'utiliser le problème de production de Leontief pour introduire des systèmes d'équations, nous pourrions l'introduire comme Léontief l'a fait mais, à plus petite échelle, pour introduire l'indépendance linéaire.
> T3- Mais comment ? À moins que nous leur donnions les données et qu'ils doivent comprendre les paramètres, mais cela reste un système d'équations ...
> T5- Oui, en fait plusieurs systèmes mais nous pouvons introduire des tableaux de données qui sont linéairement dépendantes et voir ce qui se passe, je pense que ça pourrait marcher, puisque j'ai fait quelque chose comme ça dans ma classe le semestre dernier.

Après avoir conçu la table T1 et T7 ont testé le problème dans leurs classes. Au lieu de donner toutes les données aux élèves, T7 a donné à certaines équipes des sous-ensembles de données linéairement indépendants et à d'autres des sous-ensembles linéairement dépendants. Après que les élèves (E) ont travaillé avec les données, dans la discussion du groupe les élèves ont découvert qu'ils avaient trouvé différentes solutions avec la calculatrice ou l'ordinateur et que certains calculs ne pouvaient être interprétés dans la situation du problème :

> S1- Certains d'entre nous ont trouvé la même solution, qui devrait être la bonne
> S2- Mais nous avons vérifié la solution et il n'y a pas d'erreur ... mais le système n'a qu'une seule solution ...

T7- Pourquoi pensez-vous qu'il existe des différences si vous prétendez avoir trouvé la bonne solution ?
E1- Ils ne peuvent pas être corrects car ils ont trouvé une très grosse production et cela n'a aucun sens
E3- Nous avons aussi bien fait les choses, mais nous avons une production négative ...
T7- Que peut-il se passer ? Pouvez-vous expliquer les différences ? ...

Après quelque temps, les étudiants ont commencé à se concentrer sur leurs données et les relations avec les propriétés des systèmes.

E4- ... ces données semblent être toutes dans le même plan
E3- Dans notre ensemble de données il y a un vecteur qui est multiple d'un autre ...
E2- Ce que je vois, c'est que nous avons des informations redondantes. Des informations qui ne sont pas utiles et c'est pourquoi l'ordinateur a trouvé une très grosse production ... il a, probablement, divisé par un très petit nombre qui devrait être nul.

L'émergence de l'idée de « l'information redondante » a été prise par les étudiants pour expliquer les problèmes avec les ensembles de données. Une situation similaire s'est produite dans d'autres cas où ce problème a été utilisé. Les enseignants ont profité de l'émergence de cette idée pour introduire les concepts de combinaison linéaire, dépendance et indépendance linéaire, et leur interprétation géométrique à travers des activités conçues dans le cadre du séminaire. En retournant travailler sur le modèle, les étudiants ont essayé d'appliquer les nouvelles idées à l'ensemble du tableau de données. Ils ont conclu que toute la table prise comme un ensemble de vecteurs était linéairement dépendant puisqu'il y avait des « informations redondantes » et ils ont conclu :

E2- ... dans les ensembles où un nombre infini de solutions, ou où nous avons trouvé des « solutions étranges », les ensembles sont linéairement dépendants ... ils contiennent des informations redondantes. Ceux qui ont trouvé une solution unique avaient des ensembles linéairement indépendants. Ces concepts sont utiles pour valider notre modèle pour le problème.
E1- L'indépendance linéaire est donc nécessaire pour trouver une solution unique, n'est-ce pas ?

La notion d'information redondante a été utilisée tout au long du semestre pour donner un sens à la dépendance et à l'indépendance linéaires, les élèves l'ayant même utilisée pour différencier une base des ensembles du générateur.

Cet épisode montre que les interactions entre les enseignants ont favorisé qu'ils peuvent voir un problème avec lequel ils avaient travaillé à plusieurs reprises dans le passé, dans une perspective différente qui pourrait aider les élèves à rendre les concepts abstraits plus concrets. Cela montre aussi que lorsque l'on travaille en collaboration et que les élèves ont besoin d'expliquer quelque chose qui semble être faux, de nouvelles idées peuvent émerger de l'interaction, et elles peuvent aider les élèves à comprendre de nouveaux concepts abstraits.

On peut observer que tous les enseignants ont changé à la suite des interactions au sein du séminaire et de l'environnement créé dans leurs salles de classe. Leur expérience passée a continué à jouer un rôle dans leur évolution, mais il est également évident que leur participation au séminaire a provoqué des changements similaires chez tous les enseignants.

Après la deuxième année, de nouveaux problèmes ont été développés, des vidéos de classes ont été analysées et des recherches ont été menées sur l'expérience didactique, les interactions dans le groupe sont devenues plus fluides et de nouvelles questions ont été soulevées. La discussion suivante montre ces changements :

T4 - Nous pouvons voir à partir de ces vidéos que ce problème aide vraiment les élèves à apprendre des concepts abstraits tels que l'ensemble de base et l'ensemble ... et je peux voir que plus d'étudiants construisent des Processus.
T6- C'est vrai, nous n'avons pas trouvé les difficultés rapportées dans la littérature, mais très peu d'étudiants construisent des Objets.
T7- Le problème aide, mais aussi l'utilisation des activités que nous avons conçues pour aider les étudiants à construire ces nouveaux concepts en utilisant la Théorie APOS.

Le travail sur les problèmes a continué, mais des différences dans la discussion ont également été constatées :

T3- C'est un problème qui peut être utile pour l'enseignement de la projection ... Je l'ai utilisé en classe ... après avoir enseigné les concepts ... T4 et T6 m'ont aidé et ensemble nous l'avons conçu comme un problème ouvert ...

T5- Je peux vous aider à concevoir les activités. C'est un concept important, il a de nombreuses applications.

Des changements ont également été remarqués dans le travail des enseignants dans leurs classe :

T5- Je suis d'accord, les activités ont été très utiles, mais j'ai aussi beaucoup appris sur la théorie. Cela m'aide maintenant à comprendre ce que les élèves disent en classe, et souvent j'ai besoin de nouvelles activités ou de dire quelque chose de différent aux élèves et je m'appui sur la théorie.

T4- Je ressens la même chose, parfois j'ajoute d'autres activités .... Mais je profite aussi de toute la discussion ici pour poser quelques questions et trouver où les étudiants ont encore des doutes ou des idées fausses que je dois encore travailler avec eux.

T7- Il est vrai que tout ce que nous avons fait ne fonctionne pas parfaitement, mais nos discussions nous ont aidé à trouver des moyens de faire face aux difficultés que nous rencontrons chaque jour.

T3- Mais je sens maintenant que même si je prends des décisions en classe qui ne s'avèrent pas très bonnes, je suis plus confiant de laisser les élèves travailler et parfois ils aident à trouver un moyen de revenir à ce que nous avons décidé de faire préalablement.

T2- J'ai aussi trouvé que l'apprentissage de nouvelles théories didactiques m'a été utile. Mais en classe, je me suis retrouvé coincé dans une situation où je ne pouvais pas utiliser les mathématiques pour expliquer aux élèves ce qui se passait. Nous avons dessiné ce diagramme (dessine le diagramme sur le tableau) et je ne sais pas vraiment comment l'interpréter en termes du problème des rues.

T3- On peut le discuter ici pour que vous puissiez reprendre la discussion la prochaine fois. Qu'est-ce qui se passe avec les voitures ...

L'analyse des interactions dans le séminaire montre d'une part l'évolution des mathématiciens sur la conception des activités de modélisation mathématique comme un outil d'enseignement et d'autre part la pertinence d'avoir un travail collaboratif des étudiants dans la réalisation de ces activités lors de sa mise en œuvre.

IV. DISCUSSION ET CONCLUSIONS

Les exemples présentés montrent comment la participation à un séminaire a influencé tous les participants. Le séminaire est un exemple de travail collaboratif entre mathématiciens, enseignants et didacticiens où l'étude des interactions des participants peut nous aider à trouver ces aspects de la collaboration qui ont un rôle important dans la transformation des participants. Afin de promouvoir des changements positifs, la discussion entre les membres du groupe doit fournir un environnement changeant où chacun d'eux peut trouver des idées riches qui se confrontent aux leurs. Cependant, les interactions et le changement produit sont différents pour chaque membre du groupe, car ils ne partagent pas la même histoire. Mais, grâce au développement du séminaire, des changements similaires chez différents participants ont été observés, liés probablement aux sujets et à des intérêts communs des membres du groupe. Les interactions rendaient possibles des façons communes de se relier, de parler des mathématiques, sur leur apprentissage des mathématiques et des théories d'apprentissage. Dans certains cas, comme T3 et T5, ont pu « voir plus » et sont passés de la discussion des aspects mathématiques du problème et de l'importance de l'explication par les enseignants pour considérer les aspects de l'enseignement et de l'apprentissage qui les aident à s'ouvrir à une méthode d'enseignement innovante. T1 et T4 ont accepté des changements dans leur façon de travailler avec les élèves plus facilement. Leur parcours en tant qu'enseignants leur a montré que les étudiants peuvent travailler seuls, mais ils ont pu ajouter des informations de l'apprentissage des théories à leur prise de décision et concevoir de nouvelles activités. Au

début, T2, T6 et T7 étaient convaincus de l'efficacité de l'expérience d'enseignement basée sur leurs connaissances en éducation mathématique. Elles changeaient leurs méthodes d'enseignement pour inclure également des espaces où les étudiants pouvaient réfléchir individuellement. Elles pouvaient « voir plus » en discutant de différentes théories d'apprentissage qui aident à aborder les problèmes sous différents angles et à approfondir leurs connaissances mathématiques.

Le partage des expériences d'enseignement, l'analyse du matériel écrit des élèves et l'enregistrement vidéo ont joué un rôle important dans cette collaboration. Les discussions découlant de ces activités ont induit des changements dans les stratégies d'enseignement. Mais l'expérience a également changé le groupe du séminaire en tant qu'un espace commun où l'exploration et le partage des idées a été créé. Les conversations qui consistaient au départ en un échange d'expériences individuelles et d'anecdotes ont changé au fur et à mesure que le séminaire progressait. L'intérêt s'est concentré sur les perspectives partagées sur les mathématiques et leur enseignement et sur la discussion approfondie des résultats obtenus grâce à l'utilisation de la nouvelle méthodologie d'enseignement.

Les résultats de cette étude montrent que la discussion et la réflexion continues sur la pratique ainsi que la volonté de faire face à une innovation ont aidé les participants à transformer leurs pratiques d'enseignement. Les changements étaient profonds et étroitement liés à leurs besoins. Nous avons également la preuve que la transformation des participants et les produits du séminaire axés sur les concepts clés de l'algèbre linéaire et sur l'apprentissage des étudiants ont aidé les étudiants à apprendre des concepts abstraits (Trigueros et Possani, 2013).

REFERENCES

Cohen, L., & Manion, L. (2000). Research methods in education. Routledge. p. 254. (5th edition).

Freeman, S., Eddya, S. L., McDonough, M., Smith, M. K., Okoroafor, N., Jordta, H. & and Wenderoth, M. P. (2014). Active learning increases student performance in science, engineering, and mathematics. Proceedings of the National Academy of Sciences USA. 111 (23) 8410–8415.

Fuchs, L. S., Fuchs, D. Kazdan, S., Karns, K., Calhoon, M. B., Hamlett, C. L. & Hewlett, S. (2000). Effects of Workgroup Structure and Size on Student Productivity during Collaborative Work on Complex Tasks. *The Elementary School Journal.* 100(3), 183-212.

Maturana, H., and F. Varela 1992. *The Tree of Knowledge: The Biological Roots of Human Understanding*. Revised Edition, Boston, Shambala.

Mullins, D., Rummel, N. & Spada, H. (2011). Are two heads better that one? Differential effects of collaboration on students' computer-supported learning in mathematics. *International Journal of Computer-Supported Collaborative Learning*. 6, 421-443.

Phelps, E., & Damon, W. (1989). Problem solving with equals: Peer collaboration as a context for learning mathematics and spatial concepts. Journal of Educational Psychology, 81(4), 639-646.

Reid, D. (1996). Enactivism as a Methodology. In Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, edited by L. Puig and A. Gutierrez ,Vol. 4, 203-209. Valencia, Spain: PME.

Trigueros, M. & Lozano, M.D. (2007). Developing resources for teaching and learning mathematics with digital technologies: an enactivist approach. For the learning of mathematics, 27, 2, pp. 45-51.

Trigueros, M. & Lozano, M.D. (2015). Teacher change: ideas emerging from a project for the teaching of university mathematics. Teaching in Higher Education, 20 (7) 699-710.

Trigueros, M. & Possani, E. (2013). Using an economics model for teaching linear algebra. Linear Algebra and its Applications. 438, 1779-1792.

« *J'AVAIS JAMAIS VU ÇA COMME ÇA AVANT !* » UN PROJET DE RECHERCHE-ACTION COLLABORATIVE POUR LA FORMATION CONTINUE EN MATHEMATIQUES AU SECONDAIRE[1]

RENÉ de COTRET[*] Sophie – PASSARO[**] Valériane

Résumé – Le projet de formation continue « *J'avais jamais vu ça comme ça avant* » vise à développer, mettre à l'essai et documenter un modèle de formation continue pour des enseignants de mathématiques au secondaire travaillant avec des élèves à risque. Il vise à faire évoluer les regards des participants sur l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques par l'entremise d'un projet collaboratif de création d'activités visant, elles-mêmes, à provoquer des changements de regards chez les élèves.

Mots-clefs : Formation continue, recherche collaborative, changement de regard, enseignement secondaire, ingénierie didactique

Abstract – The project « *J'avais jamais vu ça comme ça avant* » (*I newer saw it that way before !*) wants to develop, test and inform an in-service training model for secondary school mathematics teachers working with at-risk pupils. More specifically, it aims to change the viewpoint of participants on teaching and learning mathematics through a collaborative project creating new teaching activities. The objective of these activities in themselves is to help pupils change the way they see mathematics.

Keywords: In-service training, collaborative research, change of viewpoint, secondary school teaching, didactic engineering

I. ORIGINE ET VISEE DU PROJET

Au cours d'une journée de formation que nous animions il y a quelques années, deux enseignantes du secondaire ont été amenées, par leur travail sur de « nouveaux » problèmes, c'est-à-dire des problèmes qui comportent une forme de piège ou qui sollicitent une facette inexplorée ou inhabituelle d'un concept[2], à voir autrement les mathématiques en jeu. Cela les a conduites à proposer de tels problèmes à leurs élèves à risque en espérant qu'ils vivent, à leur tour, une nouvelle façon de voir les maths. Leur initiative a été récompensée par l'exclamation réjouie d'un élève «*J'avais jamais vu ça comme ça avant!*» sous-entendant une compréhension enrichie !

Ce sont de tels enrichissements de regards, de conceptions, de significations, émergeant de la confrontation avec de nouveaux problèmes et pouvant favoriser la persévérance et la réussite scolaire, que nous avons visés par ce projet de formation continue, et ce, pour chacun des participants, enseignants (4), conseillers pédagogiques (3) et chercheures (2). Dans la foulée de Wittgenstein selon qui « la signification est l'usage » nous proposons que plus les usages et les situations qui permettent de travailler un concept seront variés, plus sa signification sera riche. Ainsi, c'est à partir du problème de la conception d'activités pour

[1] Nous tenons à remercier le Ministère de l'éducation, des loisirs et des sports du Québec qui nous a octroyé une subvention pour réaliser ce projet dans le cadre du programme Chantier 7. Pour leur investissement généreux, curieux et assidu, nous voulons aussi remercier les enseignants : Guylaine Laramée, Susie Lévesque, Mélanie Senécal et François Vallée, de même que les conseillers pédagogiques Suzanne Bergeron, Stéphane Lavallée et Rosamaria Sandoval. La collaboration des commissions scolaires des Affluents et Seigneurie-des-Mille-Iles, a également été essentielle à la mise en œuvre du projet, nous leur en sommes très reconnaissantes.

[*] Université de Montréal, Canada, sophie.rene.de.cotret@umontreal.ca

[**] Université de Montréal, Canada, valeriane.passaro@umontreal.ca

[2] Un exemple de problème « nouveau » : Vous savez que pour additionner des fractions on les met généralement au même dénominateur. Comment expliquer alors que quelqu'un ayant obtenu 7/8 au numéro 1 d'un devoir, 5/7 au numéro 2 et 3/5 au numéro 3 se retrouvera avec une note de : (7+5+3)/(8+7+5) = 15/20 ?

aider les élèves à risque ou ayant des difficultés en mathématiques au secondaire que la formation s'est organisée.

II. ASSISES THEORIQUES ET METHODOLOGIE

Le projet de formation repose sur trois assises théoriques. Premièrement, il s'appuie sur le fait que les élèves en difficultés ont besoin de défis plutôt que de répétitions pour apprendre. Les enrichissements recherchés dans notre projet se fondent sur la position selon laquelle les élèves ayant des difficultés souvent

> « sont davantage des «enseignés» que des «apprenants» du fait des nombreuses reprises de certains enseignements reçus. » (Giroux & Ste-Marie 2007 p.40)

Afin d'éviter ces reprises de l'enseignement, il est nécessaire

> « de varier les accès aux savoirs et donc […] les situations pour favoriser la transmission et l'acquisition de savoirs mathématiques. » (Id. p.40).

Bien que cette nécessité vise particulièrement les élèves à risque, elle est valable pour tout apprenant et guide l'organisation de la formation. Nous postulons donc que c'est par l'usage et l'action dans une variété de situations que se construit la signification et que se modifie le regard ou la façon d'appréhender les problèmes, et ce, tant pour les élèves que pour les partenaires du projet.

Deuxièmement, pour concevoir et mettre à l'épreuve de telles situations, nous nous sommes appuyées sur la théorie des situations didactiques et sur l'ingénierie didactique. Le dispositif mis en place pour la conception, par l'équipe, de situations mathématiques destinées aux élèves (incluant des phases d'action, de formulation, de validation et d'institutionnalisation) est lui-même organisé de manière à ce que les participants soient plongés dans ces mêmes types de situations mais, cette fois, à propos de savoirs didactiques. Nous visons à ce que les rétroactions des différents milieux avec lesquels les participants sont invités à interagir (milieu pour l'action, milieu pour la formulation, etc.) soient à la fois source de remises en question et de développement de connaissances.

Il importe d'ajouter que ces assises théoriques constituent aussi des éléments théoriques qui sont objet d'enseignement lors de la formation. Comme les participants sont appelés à réfléchir tant sur la formation reçue que sur les activités qu'ils développent pour leurs élèves, ils bénéficient d'un double regard pour observer les concepts à l'œuvre : par les activités de formation dans lesquelles ils sont plongés et par les activités d'enseignement qu'ils conçoivent pour leurs élèves.

Troisièmement, pour orchestrer l'ensemble de la formation nous avons mis en place un processus de recherche collaborative dans lequel chacun des participants apporte son regard et son expertise au service de l'équipe. Un tel processus, vise la « médiation entre recherche et pratique » (Desgagné, Bednarz 2005). Ainsi, il s'agit, non seulement de mettre la théorie au service de la pratique, mais aussi d'utiliser la pratique pour enrichir le sens de la théorie.

Le processus collaboratif a pris la forme d'une séquence de trois cycles de quatre situations chacun: situation d'action où les participants ont développé ensemble des activités pour leurs élèves; situation de formulation pour expliciter les éléments qui ont guidé les choix (analyse *a priori*); situation de validation à partir de l'expérimentation des activités dans les classes et de l'analyse des productions, incluant le questionnement des choix effectués et la modification éventuelle des activités (analyse *a posteriori*); enfin, pour clore le cycle et à titre d'institutionnalisation, présentation par les enseignants des « étonnements » dans le cadre d'un colloque professionnel. Ce sont les enseignants qui ont choisi les thèmes sur lesquels

l'équipe travaillait en fonction de leurs préoccupations d'enseignement, des difficultés qu'ils éprouvaient pour amener leurs élèves à développer les apprentissages visés, et ce, pour chacun des 3 cycles. Les thèmes retenus ont été : les opérations sur les nombres relatifs, les proportions et les fonctions affines.

Il importe de souligner que le volet collaboratif du projet s'est mis en place dès la conception du projet puisque deux enseignantes et leur conseillère pédagogique ont participé à la rédaction de la demande de subvention (co-construction du projet). Rappelons que le projet visait la formation continue des enseignants et des conseillers pédagogiques et il a été, à ce titre, dirigé par les chercheures. Toutefois, le modèle de formation développé a fait appel à un travail collaboratif par l'ensemble des participants. Il s'agissait non seulement de mettre la théorie au service de la pratique, mais aussi d'utiliser la pratique pour voir ou revoir la théorie de sorte que le contenu s'est construit au fur et à mesure de la formation par l'ensemble des participants, chacun étant invité à partager ses expériences et réflexions. Ainsi, l'activité réflexive inhérente au modèle adopté visait un jeu de va-et-vient entre la pratique, telle que relatée par les participants du milieu scolaire, et le regard réflexif porté sur cette pratique par l'ensemble des participants.

III. RESULTATS

Le projet visait principalement à susciter des changements de regards, des étonnements chez les participants, témoignant, par là, d'un apprentissage. Nous faisons état des principaux types de changements de regards dégagés en cours de formation ou lors du bilan.

À propos des concepts mathématiques. Le point commun des changements de regards à propos des concepts mathématiques a trait à l'enrichissement du sens des concepts travaillés. Cet enrichissement se réalise tant à partir de l'étude de problèmes inhabituels qu'à partir de l'analyse de procédures des élèves, lesquelles soulèvent parfois des questions fondamentales à propos des concepts. Par exemple, lors du travail sur les relatifs, où la soustraction 28 -71 était demandée, un élève a obtenu -57 en faisant 8-1=7 puis 2-7= -5. L'étonnement, devant ce résultat incorrect, provenant d'un raisonnement qui semble pourtant correct, a conduit les participants à chercher l'origine de l'erreur et, surtout, à comprendre le raisonnement de l'élève. C'est ainsi que nous avons mis en évidence qu'effectivement la somme de 7 unités et (-5) dizaines donne -50+7= -43 mais que ce résultat ne correspond pas à l'écriture -(50+7) à laquelle conduit, par concaténation, l'algorithme habituel. Les enseignants et les CP ont ainsi pris conscience du domaine de validité de l'algorithme de soustraction et, plus généralement, de l'importance de questionner les procédures apprises.

À propos des concepts didactiques. Dans le cadre de la formation, des éléments de l'ingénierie didactique et de la TSD ont été présentés lors des premières journées. Au cours des rencontres et des bilans, ils ont été utilisés pour décrire certaines observations ou réflexions et ils ont donc pris un sens dans l'action. Ainsi, certains concepts qui pouvaient paraître un peu rébarbatifs au départ ont gagné l'estime des enseignants et des CP, qui, à la fin de la formation les mentionnent comme des éléments ayant un impact direct sur leur pratique enseignante. Par exemple, au début de la formation les enseignants et les CP se montraient un peu sceptiques ou méfiants en ce qui a trait à l'analyse a priori, ils craignaient qu'on remette en question leurs savoirs expérientiels et leur demande de tout prévoir. À la fin des 3 années du projet, on constate que leur conception de l'analyse a priori s'est raffinée et enrichie. Pour eux, une analyse a priori permet « de voir les intentions de ce qu'on veut faire ou provoquer », « d'anticiper toutes les réponses des élèves et pas seulement les bonnes » et « d'anticiper pour mieux répondre ». Ils commencent ainsi à voir la pertinence et la nécessité pour l'enseignant

d'expliciter et formuler clairement ses intentions lors de la création d'une activité. Ils voient aussi qu'une analyse a priori est un moyen d'anticiper des stratégies et, le cas échéant, de jouer sur la valeur des variables didactiques.. Le travail sur l'erreur prend aussi une nouvelle couleur : au lieu d'identifier les erreurs pour prévoir comment les éviter ou les attaquer, les enseignants perçoivent la richesse d'analyser les erreurs pour comprendre d'où elles viennent.

À propos des pratiques enseignantes. Pour rendre compte des changements de pratiques auxquels a mené le projet, laissons la parole aux enseignants: « Je suis plus à l'écoute de l'élève, je l'amène à se questionner sur ses choix. Je comprends mieux les démarches d'élèves, je prends plus de temps pour comprendre ce qu'ils font, j'interviens mieux. ».

À propos d'éléments de la formation. La demande faite aux enseignants pour qu'ils fassent une présentation dans un colloque professionnel (GRMS[3]) est apparue une étape essentielle à la formation, notamment en favorisant la dévolution. En effet, par la pression que représente l'anticipation du jugement des pairs lors de la communication, les enseignants ont été amenés à assumer, et même à revendiquer, la responsabilité des propos exprimés. De plus, cette étape a contribué à l'institutionnalisation en favorisant l'explicitation des apprentissages par les enseignants et en permettant aux formateurs de prendre la mesure des apprentissages et des effets sur la pratique enseignante. Nous n'avions pas anticipé que cette étape aurait d'aussi grands effets.

IV. DISCUSSION

Tel que nous en avons discuté lors du colloque, nous pensons que certaines conditions ont été essentielles à la réussite de ce projet collaboratif : L'existence d'une réelle confiance mutuelle entre tous les participants (directe ou par personne interposée) / Partir des questions et difficultés d'enseignement des enseignants pour amorcer le travail / Concevoir les activités en collaboration afin de développer un arrière-plan commun sur lequel pourront s'ancrer et prendre sens les concepts théoriques présentés et mis en œuvre / La nécessité d'une assistante pour observer et permettre à la chercheure de jouer « pour vrai » / Bénéficier de beaucoup de temps pour se questionner, réfléchir, discuter, partager les expériences, tenter de formuler les étonnements et apprentissages.

Afin que les retombées de ce projet puissent aller au-delà des participants, deux documents rendant compte de la recherche sont en préparation. Un premier présente les activités développées de même que les raisons des choix didactiques qui ont conduit à leur développement. Cet aspect est essentiel pour favoriser une mise en œuvre et une gestion des activités qui soient guidées par les intentions d'apprentissage exprimées et nourries par les analyses a priori réalisées. Si les participants ont pu proposer les grandes lignes de ce recueil, la tâche de rédaction ne peut leur être dévolue et incombe donc à l'assistante de recherche et à la chercheure. Le second document, quant à lui, décrit le dispositif de formation prévu et effectif, en fait une analyse et propose quelques améliorations au modèle de formation.

REFERENCES

Desgagné, S. & Bednarz, N. (2005) Médiation entre recherche et pratique en éducation : faire de la recherche "avec" plutôt que "sur" les praticiens. *Revue des sciences de l'éducation*, vol. 31, n° 2, 2005, p. 245-258. http://id.erudit.org/iderudit/012754ar

[3] Groupe des responsables en mathématiques au secondaire.

Giroux, J., Ste-Marie, A. (2007) Maillage de situations didactiques faisant appel à des environnements informatisés et conventionnels dans des classes d'adaptation scolaire. in J. Giroux et D. Gauthier, (Eds). *Difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques*. Montréal : Éditions Bande didactique. pp.35-63.

Projet Spécial 5 (SPE5)
Mathématiques et informatique

BILAN DU PROJET SPÉCIAL N°5

MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Responsables

MODESTE* Simon – BUTEAU** Chantal

Correspondante CS

CARON*** France

I. INTRODUCTION

Se distinguant de la question de l'intégration des TICE dans l'enseignement des mathématiques, un projet spécial avait cours pour la première fois à l'EMF autour de la relation particulière qu'entretiennent les mathématiques et l'informatique, comme disciplines à part entière. Leurs liens sont différents de ceux que peuvent entretenir les mathématiques avec d'autres disciplines. En effet, en informatique comme en mathématiques, le formalisme symbolique occupe une place importante, les fondements s'appuient sur la logique, et une partie de la validation relève d'une activité de preuve. Ces points communs sont attestés par l'histoire des deux disciplines. Cependant, chacune de ces deux sciences a ses thèmes propres, et si l'informatique apporte des points de vue nouveaux en mathématiques ainsi que de nouveaux problèmes, il en résulte que plus en plus de connaissances mathématiques sont nécessaires en informatique.

Par ailleurs, l'informatique participe à l'évolution des rapports dans la recherche entre les mathématiques et les autres disciplines, par les nouveaux modèles et les simulations qu'elle permet d'envisager pour résoudre des problèmes complexes. Comme l'avance la Société mathématique européenne : "Together with theory and experimentation, a third pillar of scientific inquiry of complex systems has emerged in the form of a combination of modelling, simulation, optimization and visualisation." (2011, p.2).

En mettant l'interdisciplinarité au cœur du débat ainsi que les enjeux sociétaux associés (compréhension du monde et de son évolution), le thème du colloque EMF 2018, *Mathématiques en Scène, des ponts entre les disciplines*, était donc particulièrement propice à explorer la relation qu'entretiennent mathématiques et informatique, entre elles et avec les autres disciplines, pour questionner leur enseignement et leur apprentissage.

Une telle exploration s'avère d'autant plus nécessaire que plusieurs réformes récentes ont mené à l'intégration de l'informatique dans les programmes scolaires obligatoires sous formes diverses (comme discipline scolaire indépendante, attachée aux mathématiques ou à d'autres disciplines, par des enseignants bivalents, etc.).

Sans s'y limiter, le groupe de travail souhaitait questionner, sur les plans épistémologique et didactique, les objets suivants :

- Programmation en mathématiques et mathématiques dans la programmation
- Pensée(s) informatique(s) et pensée(s) mathématique(s)

* Université de Montpellier – France – simon.modeste@umontpellier.fr
** Brock University– Canada – cbuteau@brocku.ca
*** Université de Montréal – Canada – france.caron@umontreal.ca

- Champs, concepts et objets partagés entre informatique et mathématiques, points communs et divergences
- Relation des mathématiques et de l'informatique aux autres disciplines, modélisation et simulation

Les questions abordées pouvaient traiter des choix de curriculums, des organisations d'enseignement (et de leurs réformes), des activités proposées en classe, de la conception de ressources, des apprentissages et difficultés des élèves, et conduire à questionner la formation initiale et continue des enseignants, à la fois sur les plans disciplinaire, épistémologique et didactique.

Sept contributions représentant 2 pays (France et Canada) ont répondu à l'appel. Témoignant de l'intérêt pour ce thème, plus de 60 personnes du colloque ont participé aux échanges du groupe.

Les contributions reçues ont conduit à organiser les travaux du groupe selon les axes suivants, lesquels constituent respectivement les thèmes de discussion des trois premières séances: i) Natures des pensées algorithmique/informatique, rapport aux mathématiques ; ii) Programmation pour les mathématiques, programmation par les mathématiques ; et iii) Objets, concepts, raisonnements à l'interface maths-info. Nous traiterons brièvement de chacun de ces axes dans les sections qui suivent. Nous poursuivrons avec des perspectives pour un prochain groupe de travail en guise de conclusion. Pour ce qui est de la quatrième et dernière séance, les discussions se sont poursuivies, en plus d'une présentation brève par des participants de la place de la programmation dans les programmes scolaires de différents pays– (voir l'Annexe 2).

II. NATURE DES PENSEES ALGORITHMIQUE OU INFORMATIQUE, RAPPORT AUX MATHEMATIQUES

Avec l'intérêt suscité par l'article de Wing (2006), la nature de la pensée informatique (« computational thinking » ou « algorithmic thinking ») et ses liens avec la pensée mathématique, la pensée d'ingénierie et la pensée scientifique (Wing, 2008) nécessitent d'être éclairés.

Dans cette visée, Chantal Buteau a présenté un cadre conceptuel pour étudier la nature ainsi que le rôle et la place accordés à la pensée informatique dans l'enseignement des mathématiques au niveau postsecondaire. L'approche proposée prend en compte la discussion sur la pensée informatique en sciences et mathématiques, et elle s'appuie sur l'approche instrumentale pour décrire comment les étudiants en mathématiques de niveau universitaire peuvent s'approprier la programmation et s'engager dans un travail de pensée informatique pour les mathématiques, comme le feraient des mathématiciens. Certains participants ont souligné que, comme l'a révélé l'étude de Broley (2015), les pratiques informatiques ne sont pas entièrement acceptées par la communauté mathématique; si elles le sont davantage en mathématiques appliquées, la partie informatique du travail n'est pas systématiquement publiée, rendant invisible cet aspect du travail du mathématicien.

Marina Rafalska et Simon Modeste se sont intéressés aux conceptions d'élèves et d'étudiants à la transition secondaire-supérieur en France autour de l'algorithme et de l'algorithmique. À l'aide d'un questionnaire et d'une grille d'analyse basée sur un modèle épistémologique, ils montrent comment ces conceptions évoluent dans le temps et comment la dimension objet du concept se développe lors des premières années de l'enseignement supérieur. Cela confirme l'approche essentiellement basée sur l'algorithme en tant qu'outil au secondaire et la construction de la dimension objet du concept dans les premières années

d'université. L'analyse des réponses des étudiants montre aussi des conceptions variables selon les filières et options d'origine en particulier entre les cours de mathématiques, d'informatique et de sciences de l'ingénieur. Le auteurs mettent en avant que les conceptions des élèves/étudiants à la transition secondaire-supérieur permet aussi de confronter les curriculums et enseignements avec les conceptions effectivement construites.

Pour lancer la discussion collective suivant les deux communications, nous sommes partis de la définition de la pensée informatique (« computational thinking ») proposée par Wing (2008): « La pensée informatique est une sorte de pensée analytique. Elle partage avec la pensée mathématique les manières générales dont nous pourrions aborder la résolution d'un problème. Elle partage avec la pensée d'ingénierie les moyens généraux permettant de concevoir et d'évaluer un système vaste et complexe fonctionnant dans le respect des contraintes du monde réel. Elle partage avec la pensée scientifique les manières générales dont nous pourrions aborder la compréhension de la calculabilité, de l'intelligence, de l'esprit et du comportement humain. » (p.3717, traduit par nous).

Des participants ont fait ressortir la difficulté et même le risque d'établir des frontières entre pensée humaine, pensée mathématique, pensée algorithmique, et pensée informatique. Par exemple, si l'on réduit la pensée algorithmique à la capacité à traduire la résolution d'un problème en une suite d'instructions exécutable par n'importe quel opérateur, on court le risque d'associer une telle pensée à une pensée automatique, froide et stupide, et de l'opposer à la pensée mathématique, qui elle serait « noble », analogique, intelligente, intuitive. On retrouve cette idée chez Maurer (1998) : « In any event, algorithmics does not mean performing algorithms over and over by hand. Algorithms will be carried out more and more by machines or by person-machine combinations. Algorithmics is thinking about algorithms, not thinking like algorithms » (p.24).

III. PROGRAMMATION POUR LES MATHÉMATIQUES, PROGRAMMATION PAR LES MATHÉMATIQUES

L'enseignement de la programmation (que ce soit avec des langages « classiques » ou des outils dédiés) peut aussi bien mettre en jeu des apprentissages mathématiques (programmation par les maths) que nourrir la dimension expérimentale des mathématiques (programmation pour les maths).

La contribution de Chaachoua, Tchnounike et Crisci présente un premier exemple de programmation pour les mathématiques, où les tâches de conception d'algorithme et de programmation ont pour intention d'aider à construire le sens de la division euclidienne ; sans qu'il y ait de concept informatique explicitement en jeu, le travail de l'algorithme est vu comme contribuant au développement de la pensée informatique. Si pour les auteurs, un environnement comme Scratch permet de traiter conjointement (voire même de faire coïncider) les phases d'écriture de l'algorithme et de programmation (car les élèves écrivent leur algorithme en agençant les blocs Scratch), ils font toutefois ressortir l'importance de confronter le programme à son exécution pour atteindre la notion mathématique en jeu, ce que ne permet pas la simple écriture d'un algorithme.

Un second exemple de programmation pour les mathématiques a été partagé par Jannick Trunkenwald, avec l'analyse a priori de la tâche de conception d'un programme de simulation d'une expérience aléatoire, à l'aide d'un générateur de nombres pseudo-aléatoires. À travers les deux niveaux de programmation impliqués (pour générer les résultats d'un échantillon et les différents échantillons), une telle tâche paraît contribuer au développement de la pensée informatique. Mais l'intention didactique est d'abord ici de faire apprécier la fluctuation

d'échantillonnage et d'ouvrir vers les intervalles de confiance. L'analyse de la tâche demande de considérer les techniques et technologies envisageables dans trois domaines distincts: probabilités, statistique et algorithmique.

Lors des échanges de cette séance, les questions suivantes ont été soulevées :

- Quelle institutionnalisation des concepts issus de l'informatique observe-t-on (ou devrait-on avoir) en école primaire ? Est-il possible de détacher l'activité de programmation de ces concepts ?
- Est-ce que le traitement au sein de l'informatique peut faire apparaître de nouveaux aspects des concepts mathématiques ?
- Quel rôle jouent les contraintes institutionnelles (notamment les programmes) dans la définition de situations d'apprentissage de l'algorithmique ?
- Est-ce que l'outil informatique aide toujours au développement de la connaissance mathématique ou est-ce que parfois il peut devenir un obstacle ?
- Au sujet de la représentation d'un algorithme dans un langage, le passage par l'écriture d'un algorithme semble indispensable pour l'écriture d'un programme; l'est-il vraiment avec des langages comme Scratch?
- Les apports de la didactique de l'informatique (Baron & Bruillard, 2001) ou de la psychologie de la programmation (Hoc et al., 1990) sur ces questions gagneraient à être pris en compte.

IV. OBJETS, CONCEPTS, RAISONNEMENTS A L'INTERFACE MATHÉMATIQUES-INFORMATIQUE

Quels que soient les contextes, la question de la relation aux mathématiques se pose, tant certains concepts ou outils sont proches.

Il convient donc d'aborder les questions liées aux interactions et aux interfaces entre mathématiques et informatique sans réduire l'une à l'autre, mais en pensant leurs objets et leurs activités comme un continuum polarisé par les deux disciplines. Cela passe par l'identification des concepts, objets, pensées, activités en jeu, et par le questionnement de leur enseignement et de leur apprentissage, en essayant de dépasser la juxtaposition des deux disciplines pour entrer dans une interdisciplinarité réelle. En particulier, les champs et concepts spécifiques qui se développent à l'interface des mathématiques et de l'informatique (mathématiques discrètes, algorithmique, …) doivent être examinés ; cela peut se faire en adoptant tantôt les points de vue que porte l'informatique sur des concepts mathématiques classiques (variable, fonction, ...), tantôt les points de vue mathématiques sur les concepts de l'informatique.

Antoine Meyer et Simon Modeste ont mis en évidence le fait que la dichotomie et jeu de la devinette sont des thèmes présents dans les programmes, souvent vus comme allant ensemble. Ils distinguent derrière le terme français *dichotomie* les notions de recherche binaire (en algorithmique) et de *méthode de bissection* (d'après l'anglais). La dichotomie (bissection) peut être vue comme un moyen permettant d'apprendre, de mieux comprendre ou simplement d'utiliser le Théorème des valeurs intermédiaires, en offrant une construction possible pour traduire et compléter un théorème qui n'est pas constructif. Le choix d'un critère d'arrêt permet de comparer l'efficacité de différentes options (nombre maximal d'itérations, |a-b|, |f'(c)|, …). La recherche binaire fait appel au logarithme en base 2 et peut permettre d'aborder arbre de décision et écriture binaire des nombres. On peut aussi démontrer que l'algorithme de recherche binaire fonctionne toujours et est optimal. Et c'est un enjeu de l'informatique de prouver de telles choses.

Au-delà des mathématiques pour la démonstration en informatique et de l'informatique pour l'expérimentation en mathématiques, c'est bien une dialectique plus riche qu'il convient d'envisager entre ces disciplines. Les mathématiques permettent notamment d'ouvrir les boîtes noires présentes dans les outils de calcul et de représentation (ex. grapheurs munis de solveurs).

Dès lors qu'on ouvre aux approches algorithmiques, il faut pouvoir envisager leur coexistence (voire même leur concurrence) avec des raisonnements mathématiques plus traditionnels, de même que la possibilité d'émergence d'approches hybrides. L'analyse a priori gagne alors à anticiper les différentes techniques envisageables, et ménager un espace de négociation entre elles. Sylvain Beauvoir propose de s'appuyer sur une analyse des structures de contrôle (Balacheff et Margolinas, 2005), autant pour anticiper et analyser les raisonnements d'élèves que pour conduire l'institutionnalisation des savoirs.

Un travail des algorithmes et de la programmation en classe de mathématiques permet aussi de mieux comprendre par les mathématiques des applications importantes de l'informatique dans la vie quotidienne. Cela a pu être illustré avec l'exemple de la cryptologie, présenté par Emmanuel Volte (texte non présent dans les actes). En s'appuyant sur des programmes scratch, des élèves de niveau collège ont pu se familiariser avec la représentation étoilée de la fréquence des lettres pour identifier un cryptage de César (par simple décalage), enchaîner avec un encodage par méthode affine et aborder ensuite un encodage avec clé publique (méthode du sac à dos).

Les échanges de cette séance auront permis de dégager quelques concepts qui se situent à l'intersection (ou à l'interface) des mathématiques et de l'informatique ou qui, venant d'une discipline, bénéficient de l'éclairage de l'autre discipline. À l'intersection des deux disciplines, on réitère la présence des concepts de variable, de fonction, d'algorithme, etc. Du côté des concepts, idées ou même champs informatiques éclairés par les mathématiques, il y a d'abord évidemment l'algorithmique en général et certains de ses principes d'efficacité ("Diviser pour régner") qui conduisent à une analyse mathématique de la complexité, mais aussi plus particulièrement des champs tels que la théorie des graphes et autres domaines des mathématiques discrètes. Tout le champ de la géométrie computationnelle ou algorithmique pourrait constituer par ailleurs un domaine d'application des mathématiques, avec notamment le recours à la géométrie (repérée), aux transformations, à l'algèbre linéaire. Du côté des concepts ou idées mathématiques éclairés ou enrichis par l'informatique, on relève notamment les notions de division (euclidienne ou décimale) et le théorème des valeurs intermédiaires. On note toutefois une certaine domination du numérique dans les activités scolaires pensées et présentées dans ce groupe pour introduire à l'algorithmique.

V. PERSPECTIVES

Au terme de nos discussions, nous retenons quelques perspectives qui demandent à être abordées dans un groupe de travail futur : approfondir l'articulation entre mathématiques et informatique (enjeux de logique et de preuve, relations faux amis / vrais parents de concepts et notions à l'intersection des deux disciplines, etc.) ; articuler avec les recherches en didactique de l'informatique ; examiner l'apport de l'informatique débranchée ; questionner la formation initiale et continue des enseignants ; suivre (et étudier) l'évolution des curricula (mathématiques et informatique) de niveaux scolaire et post-secondaire ; préciser les cadres théoriques (vocabulaires, objectifs, …) ; envisager le rôle des mathématiques pour faire de l'informatique (programmation par les mathématiques).

On gagnerait à maintenir le caractère « spécial » de ce groupe transversal vis à vis des autres thématiques du colloque, afin de maximiser la participation à ce sujet ré-émergent.

RÉFÉRENCES

Balacheff, N. & Margolinas, C. (2005) cK¢ Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. Dans : Balises pour la didactique des mathématiques, La Pensée Sauvage éditions, pp. 1 – 32.

Baron, G.-L., & Bruillard, É. (2001). Une didactique de l'informatique ? Revue française de pédagogie(135), pp. 163–172. Consulté sur http://www.jstor.org/stable/41201696

Broley, L. (2015). La programmation informatique dans la recherche et la formation en mathématiques au niveau universitaire. Université de Montréal : Mémoire de maîtrise non publié, disponible sur : https://papyrus.bib.umontreal.ca/xmlui/handle/1866/12574

Hoc, J. M., Green, T. R. G., Samurcay, R., J. Gilmore D. J. (Eds) (1990) Psychology of programming. London: Academic Press.

Maurer S. B. (1998) What is an algorithm? What is an answer? In Morrow L. J., Kenney M. J. (Eds.), The teaching and learning of Algorithm in school mathematics, NCTM 1998 Yearbook, (pp.21-31). Reston, VA: NCTM.

Société mathématique européenne (2011). Position paper of the European Mathematical Society on the European commission's contributions to European research. Consulté sur http://ec.europa.eu/research/horizon2020/pdf/contributions/post/european_organisations/european_mathematical_society.pdf

Wing, J. M. (2006). Computational thinking. *Communications of the ACM*, *49*(3), 33-35.

Wing, J. M. (2008). Computational thinking and thinking about computing. Philosophical transactions of the royal society of London A: mathematical, physical and engineering sciences, 366(1881), 3717-3725.

ANNEXE 1

LISTE DES TEXTES DU SPE5 PAR ORDRE ALPHABETIQUE DU PREMIER AUTEUR

BUTEAU, C., MULLER, E., SACRISTAN, A.I. & MGOMBELO, J.

Pensée informatique en enseignement des mathématiques post-secondaires : un cadre conceptuel

CHAACHOUA, H., TCHOUNIKINE, P. & CRISCI, R.

L'algorithmique et la programmation pour la construction du sens de la division euclidienne

MEYER, A. & MODESTE, S.

Recherche binaire et méthode de dichotomie, comparaison et enjeux didactiques à l'interface mathématiques – informatique

MODESTE, S. & RAFALSKA, M.

Conception de la notion d'algorithme à la transition secondaire-supérieur en France

TRUNKENWALD, J.

Entre probabilités et statistiques : un jeu algorithmique pour simuler la fluctuation d'échantillonnage

AFFICHES

BEAUVOIR, S.

Analyse des outils de contrôle lors de la résolution algorithmique ou mathématique d'un problème

VOLTE, E.

Cryptographie au collège. Quels apports possibles ? Exemples de pratiques (poster présenté sans texte dans les actes).

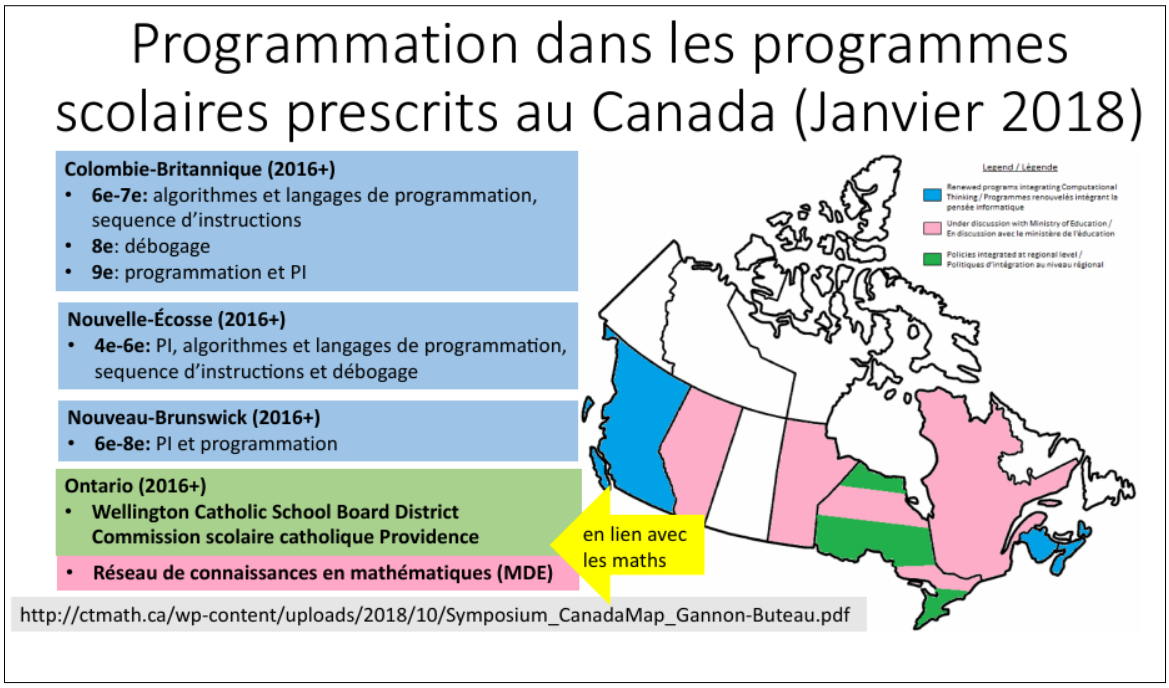
Cette dernière contribution n'a pas donné lieu à un texte publié dans les actes

ANNEXE 2 – PLACE DE LA PROGRAMMATION DANS LES PROGRAMMES SCOLAIRES DE DIFFÉRENTS PAYS.

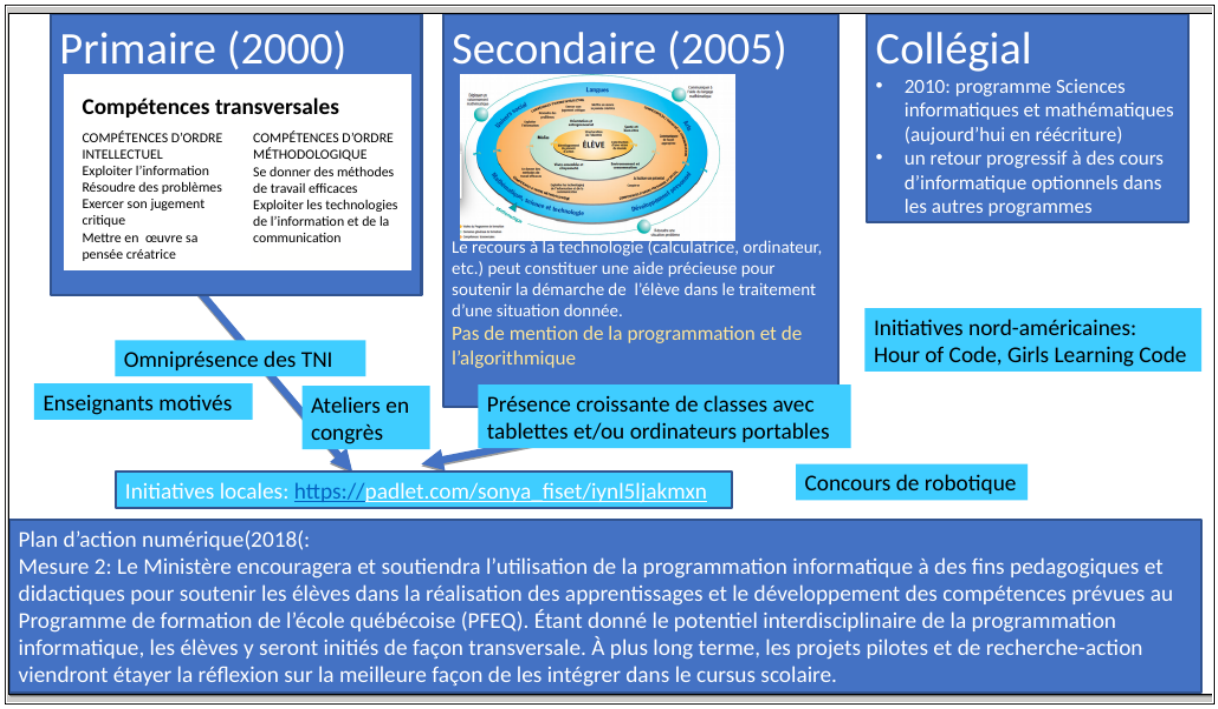
France :

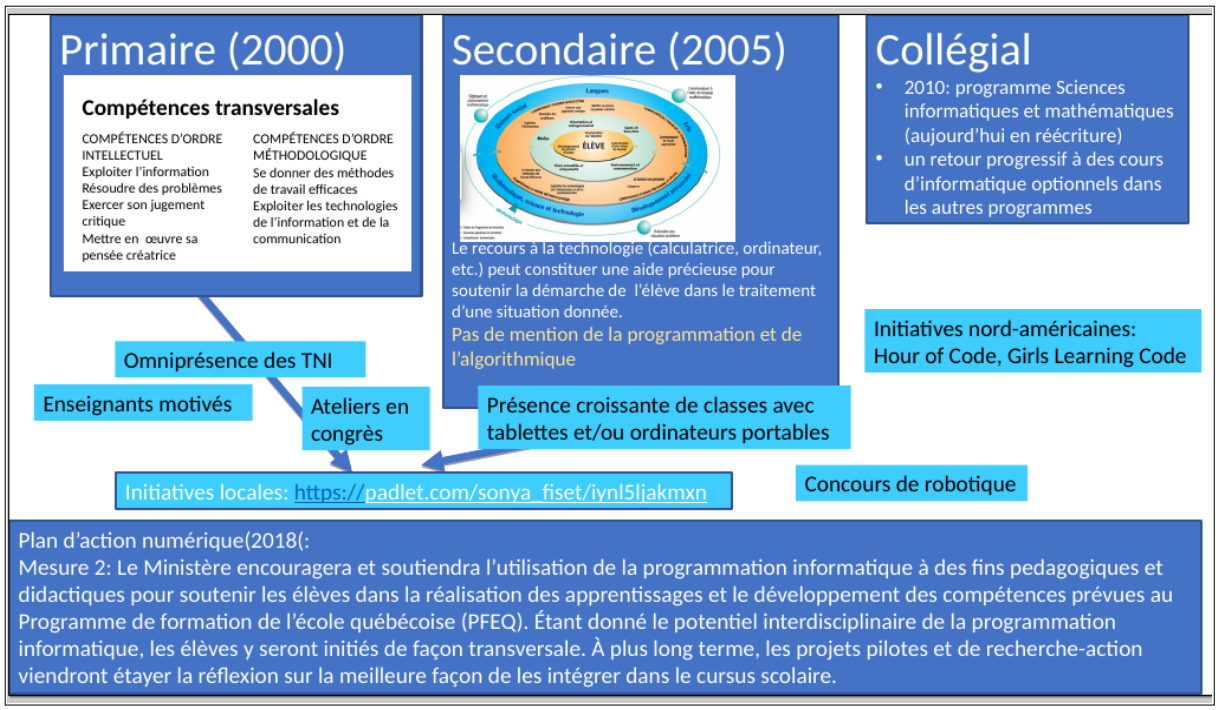
- Au primaire (6 à 11 ans) Injonction. Un enseignant sur 2 du primaire n'a pas investit cette partie du programme. Problème de formation.
- Au collège (11 à 15 ans) enseignement partagé entre math et technologie.
  - scratch
  - variable, boucle, test
  - évalué au brevet APMEP
- En Lycée (15+) : la situation évolue beaucoup.
  - Actuellement : ICN en 2nde, ISN en Term S. Algorithmique en math. Aussi présent en SI ou en STI2D (carte arduino, ou RPI).
  - Demain : Multiplication par 10 des heures d'info (SIF). SNT (1 h 30) en 2nde. NSI (4 h en 1ère, 6 h en T). Algorithmique et programmation en Math.
- Une option au concours de recrutement d'enseignement de math

Canada (hors Québec) :



Québec :


Primaire (2000)
Compétences transversales
COMPÉTENCES D'ORDRE INTELLECTUEL
Exploiter l'information
Résoudre des problèmes
Exercer son jugement critique
Mettre en œuvre sa pensée créatrice
COMPÉTENCES D'ORDRE MÉTHODOLOGIQUE
Se donner des méthodes de travail efficaces
Exploiter les technologies de l'information et de la communication
Secondaire (2005)
Le recours à la technologie (calculatrice, ordinateur, etc.) peut constituer une aide précieuse pour soutenir la démarche de l'élève dans le traitement d'une situation donnée.
Pas de mention de la programmation et de l'algorithmique
Collégial
2010: programme Sciences informatiques et mathématiques (aujourd'hui en réécriture)
un retour progressif à des cours d'informatique optionnels dans les autres programmes
Initiatives nord-américaines: Hour of Code, Girls Learning Code
Omniprésence des TNI
Enseignants motivés
Ateliers en congrès
Présence croissante de classes avec tablettes et/ou ordinateurs portables
Initiatives locales: https://padlet.com/sonya_fiset/iynl5ljakmxn
Concours de robotique
Plan d'action numérique(2018(:
Mesure 2: Le Ministère encouragera et soutiendra l'utilisation de la programmation informatique à des fins pedagogiques et didactiques pour soutenir les élèves dans la réalisation des apprentissages et le développement des compétences prévues au Programme de formation de l'école québécoise (PFEQ). Étant donné le potentiel interdisciplinaire de la programmation informatique, les élèves y seront initiés de façon transversale. À plus long terme, les projets pilotes et de recherche-action viendront étayer la réflexion sur la meilleure façon de les intégrer dans le cursus scolaire.


Primaire (2000)
Compétences transversales
COMPÉTENCES D'ORDRE INTELLECTUEL
Exploiter l'information
Résoudre des problèmes
Exercer son jugement critique
Mettre en œuvre sa pensée créatrice
COMPÉTENCES D'ORDRE MÉTHODOLOGIQUE
Se donner des méthodes de travail efficaces
Exploiter les technologies de l'information et de la communication
Secondaire (2005)
Le recours à la technologie (calculatrice, ordinateur, etc.) peut constituer une aide précieuse pour soutenir la démarche de l'élève dans le traitement d'une situation donnée.
Pas de mention de la programmation et de l'algorithmique
Collégial
2010: programme Sciences informatiques et mathématiques (aujourd'hui en réécriture)
un retour progressif à des cours d'informatique optionnels dans les autres programmes
Initiatives nord-américaines: Hour of Code, Girls Learning Code
Omniprésence des TNI
Enseignants motivés
Ateliers en congrès
Présence croissante de classes avec tablettes et/ou ordinateurs portables
Initiatives locales: https://padlet.com/sonya_fiset/iynl5ljakmxn
Concours de robotique
Plan d'action numérique(2018(:
Mesure 2: Le Ministère encouragera et soutiendra l'utilisation de la programmation informatique à des fins pedagogiques et didactiques pour soutenir les élèves dans la réalisation des apprentissages et le développement des compétences prévues au Programme de formation de l'école québécoise (PFEQ). Étant donné le potentiel interdisciplinaire de la programmation informatique, les élèves y seront initiés de façon transversale. À plus long terme, les projets pilotes et de recherche-action viendront étayer la réflexion sur la meilleure façon de les intégrer dans le cursus scolaire.

PENSÉE INFORMATIQUE EN ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES POST-SECONDAIRES : UN CADRE THÉORIQUE

BUTEAU[*] Chantal – MULLER[*] Éric – SACRISTÁN[**] Ana Isabel – MGOMBELO[*] Joyce

Résumé – Nous voyons un besoin crucial de comprendre comment habiliter les étudiants en mathématiques à participer à la pensée informatique qui devient une partie intégrale des mathématiques. Dans notre recherche, nous explorons comment les étudiants en mathématiques de niveau universitaire peuvent s'approprier la programmation et s'engager dans la pensée informatique pour les mathématiques, comme le feraient des mathématiciens. Cet article présente le cadre théorique de nos recherches.

Mots clefs : pensée informatique, pensée computationnelle, genèse instrumentale, programmation, mathématiques postsecondaires, 3e pilier de la recherche scientifique

Abstract –We see a crucial need in mathematics education to understand how students could be empowered to participate in the computational thinking that is now becoming an integral part of the mathematics community. In our research, we are interested in examining how university mathematics students may appropriate programming and engage in computational thinking for mathematics, as mathematicians would do. In this paper, we present the theoretical framework that grounds our research.

Keywords: computational thinking, instrumental genesis, programming, third pillar of scientific inquiry, undergraduate mathematics

I. INTRODUCTION

Avant même de l'arrivée des ordinateurs personnels, Papert (1971) imaginait un monde dans lequel les enfants programmaient naturellement l'ordinateur, les utilisant comme un outil pour agir en tant que jeunes mathématiciens. Près de 50 ans plus tard, nous assistons à un regain répandu de l'intérêt porté à cette vision, qui se manifeste par plusieurs réformes éducatives, en mathématiques et ailleurs (p. ex. En Europe : Bocconi et al., 2016), sous le couvert de la pensée informatique, aujourd'hui considérée comme une compétence du 21e siècle.

Wing (2008) décrit la pensée informatique comme un type de pensée critique qui rejoint la pensée mathématique de par les approches générales par lesquelles on peut aborder la résolution de problèmes. Mais on observe aussi un apport de l'informatique à une approche mathématique traditionnelle (sans technologie numérique). Gadanidis et al. (2016) discutent d'affordances qui, lorsque combinées, mettent en avant une dimension expérimentale à l'activité mathématique, notamment par la modélisation dynamique et l'automatisation (p. ex. simulation), des surprises conceptuelles (p. ex. utiliser la programmation pour explorer de « nouvelles » mathématiques), d'entrées multiples (p. ex. plusieurs angles d'entrées possibles pour explorer et résoudre un problème mathématiques), et de la sensation tangible (p. ex. avec diverses visualisations dynamiques de concepts mathématiques). En somme, nous pouvons décrire celles-ci comme caractérisant, selon les termes de Papert (1980b), un « objet-avec-lequel-penser » reprenant selon nous l'essence de l'utilisation de la programmation par les mathématiciens dans leur travail de recherche (Broley, 2015).

Nous voyons un besoin important de comprendre comment on peut habiliter les étudiants en mathématiques à faire de la programmation, cet objet-avec-lequel-penser qui occupe aujourd'hui une place si importante dans la communauté mathématique. On s'intéresse donc à la programmation en tant qu'instrument d'investigation et d'application mathématique plûtot qu'à la nature mathématique de la programmation. Cet article se concentre sur le cadre

[*] Brock University – Canada – {cbuteau,emuller,jmgombelo}@brocku.ca
[**] Cinvestav-Matemática Educativa – Mexico – asacrist@cinvestav.mx

conceptuel qui sous-tend notre projet de recherche en cours (2017-2022), financé par le Conseil de recherche en sciences humaines du Canada (CRSH). Il vise à explorer comment les étudiants de mathématiques de niveau postsecondaire apprennent à utiliser la programmation comme un instrument de pensée informatique pour les mathématiques.

Il s'agit d'une étude non interventionnelle qui s'inscrit dans une séquence de trois cours de mathématiques axés sur la programmation à l'université Brock (Canada). Dans ces cours, en place depuis 2001 et destinés aux étudiants en mathématiques et aux futurs enseignants de mathématiques, les étudiants apprennent à concevoir, programmer, et utiliser des environnements informatiques interactifs pour l'investigation de conjectures, concepts et théorèmes mathématiques et d'applications de situations réelles (Buteau et al., 2015; Muller et al., 2009). Les objectifs de notre recherche incluent : (a) décrire la genèse instrumentale des étudiants de l'utilisation de la programmation en tant qu'instrument de pensée informatique pour les mathématiques; (b) déterminer s'il y a appropriation et si celle-ci est maintenue au-delà des exigences du cours; (c) identifier comment les enseignants créent un environnement d'apprentissage pour soutenir les genèses instrumentales des élèves. Cette étude s'appuie sur nos recherches passées et en cours (p. ex. Buteau et Muller, 2014; Buteau et al., 2016).

II. CADRE CONCEPTUEL

Nous commençons par discuter plus largement de la pensée informatique et de la programmation, en nous appuyant notamment sur les travaux de Wing (2008). Nous portons ensuite notre attention sur la pensée informatique en mathématiques telle que décrite par les pratiques de recherche des mathématiciens. Cela conduit à une discussion sur la pensée informatique dans l'enseignement des mathématiques, qui à son tour est éclairée par les travaux de Weintrop et al. (2016) et par le paradigme constructionniste (Papert et Harel, 1991). Ensuite, nous développons notre vision de l'apprentissage des mathématiques par une entrée informatique en nous inspirant des travaux de Lave et Wenger (1991). Enfin, nous présentons l'approche instrumentale de Guin et Trouche (1999) afin d'éclairer notre compréhension de l'intégration de la technologie dans l'enseignement des mathématiques.

1. La pensée informatique

Wing (2014) décrit ainsi la pensée informatique « les processus de pensée impliqués dans la formulation d'un problème et de ses résolutions de telle sorte qu'un ordinateur—humain ou machine—puisse l'effectuer efficacement. » (para. 5)[1]. Ainsi, la pensée informatique est un processus sous-jacent à la programmation informatique. Et comme le déclarent Grover et Pea (2013), la programmation informatique « n'est pas seulement une compétence fondamentale de [l'informatique] et un outil clé pour soutenir les tâches cognitives impliquées dans [la pensée informatique], c'est aussi une démonstration des compétences informatiques » (p. 40). De plus, Wing (2008) explique que l'essence de la pensée informatique se trouve dans l'abstraction.

La relation qu'entretiennent la programmation informatique et la pensée informatique avec la pensée et l'apprentissage mathématiques et scientifiques est reconnue depuis le développement du langage de programmation Logo (voir Papert, 1980a). Cette relation est mise en évidence dans le cadre tridimensionnel proposé par Brennan et Resnick (2012) qui caractérise la « pensée informatique » en termes de

[1] Toutes les citations d'origine anglaise sont des traductions libres.

> *les concepts informatiques* (les concepts avec lesquelles les concepteurs interagissent dans la programmation, comme l'itération, le parallélisme, etc.), *les pratiques informatiques* (les pratiques que développent les concepteurs alors qu'ils interagissent avec les concepts, comme le débogage ou le remixage du travail d'un autre), et *les perspectives informatiques* (les perspectives que les concepteurs se forment du monde qui les entoure et d'eux-mêmes). (p. 1)

Dans les sections suivantes, nous abordons le thème de la pensée informatique en mathématiques puis celui de la pensée informatique dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques.

2. La pensée informatique en mathématiques

La Société mathématique européenne (SME) (2011) a reconnu une nouvelle façon de s'engager dans la recherche en mathématiques : « Avec la théorie et l'expérimentation, un troisième pilier de l'investigation scientifique des systèmes complexes a émergé dans la combinaison de la modélisation, de la simulation, de l'optimisation et de la visualisation » (p.2). En 2016, les mathématiciens qui ont dirigé un semestre thématique de 6 mois sur les mathématiques numériques dans les applications émergentes au Centre de recherches mathématiques (CRM) à Montréal (Canada) ont indiqué que :

> Un changement fondamental est en train de se produire dans le rôle des mathématiques appliquées et computationnelles. Le rapport entre la modélisation, l'analyse et les solutions des problèmes mathématiques dans les applications a changé. […] Dans les applications émergentes, le choix des modèles va de pair avec les outils computationnels et l'analyse mathématique. (CRM, 2016, paragr. 1)

Ces pratiques émergentes en matière de mathématiques relèvent de la pensée informatique pour les mathématiques et sont enracinées dans la technologie programmable. En effet, la taxonomie de Weintrop et al. (2016) (Figure 1) offre un aperçu de l'engagement des mathématiciens dans la pensée informatique, qui englobe les activités décrites par la SME (2011) et par les organisateurs du semestre sur les mathématiques informatiques au CRM. Les travaux de Weintrop et al. sont fondés sur une revue de littérature approfondie, une analyse d'activités d'apprentissage des mathématiques et des sciences et sur des entrevues avec des scientifiques tels que biochimistes, physiciens, ingénieurs en matériaux, informaticiens et ingénieurs biomédicaux. Les auteurs décrivent également ce qu'ils croient être les pratiques intégrales de la pensée informatique pour les mathématiques et les sciences. Broley, Buteau et Muller (2017) ont illustré par des travaux de recherche de mathématiciens les différentes formes de pratiques de pensées informatiques intégrales proposées par Weintrop et al.

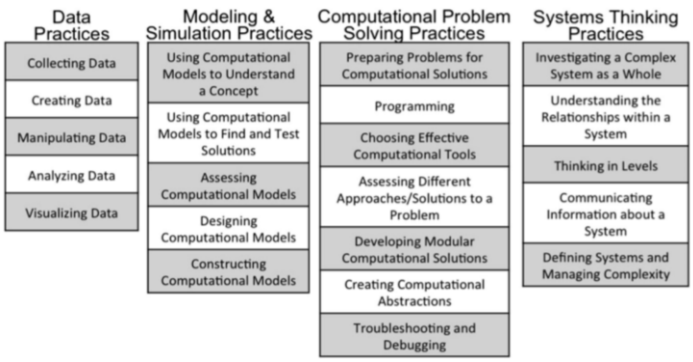


Fig. 1 – Taxonomie de la pensée informatique en mathématiques et sciences (Weintrop et al., 2016, p. 135).

En adoptant le cadre de Brennan et Resnick (2012) dans le contexte des mathématiques, le travail de Weintrop et al. (2016) fournit non seulement des détails spécifiques aux disciplines sur la dimension des pratiques informatiques, mais met également de l'avant des perspectives informatiques—c'est-à-dire des perspectives récemment développées par les mathématiciens

sur les mathématiques en tant que discipline « conformément à la nature de plus en plus informatique des mathématiques et des sciences de l'ère moderne » (Weintrop et al., 2016, p. 127).

3. La pensée informatique dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques

De plus, Weintrop et al. (2016) affirment que « l'utilisation variée et appliquée de la pensée informatique par les experts du domaine fournit un plan détaillé pour l'enseignement de la pensée informatique » (p. 128). Leur taxonomie détaillée fournit donc une image de ce que ça représente pour la classe de mathématiques de s'engager dans la pensée informatique en mathématiques comme le feraient les mathématiciens.

Tel que mentionné précédemment, le langage de programmation Logo et la théorie du constructionnisme constituent un héritage vieux de 45 ans pour la pensée informatique dans l'enseignement des mathématiques (Papert & Harel, 1991). La prémisse du paradigme constructionniste est de créer des situations d'apprentissage centrées sur les élèves afin qu'ils s'engagent consciemment dans la construction (p. ex. programmer) d'objets tangibles, à travers des projets—habituellement informatiques—significatifs : « Les gens se construisent de nouvelles connaissances avec une efficacité particulière quand ils sont engagés dans la construction d'objets significatifs [...] [c'est-à-dire] quelque chose de significatif pour eux-mêmes et pour les autres autour d'eux » (Kafai & Resnick, 1996, p. 214).

Des études sur le constructionnisme dans l'enseignement supérieur des mathématiques montrent comment la programmation aide les élèves dans leur compréhension des concepts mathématiques (Leron et Dubinsky, 1995) et comment elle contribue au développement de la pensée critique (p. ex., Abrahamson et al., 2004). En fait, Noss et Hoyles (1996) soulignent qu'un apprenant, lorsqu'il entreprend de modifier un programme, articule des relations entre des concepts présents au sein d'un micromonde « et c'est dans ce processus d'articulation qu'un apprenant peut créer des mathématiques et révéler simultanément cet acte de création à un observateur » (p. 54). Dans notre travail, nous reconnaissons l'approche constructionniste pour la mise en œuvre de la programmation et de la pensée informatique qu'elle entraîne, et concevons l'apprentissage des mathématiques en prenant appui sur des aspects de la théorie de la cognition située, comme décrite ci-dessous.

4. Apprendre les mathématiques en s'engageant dans une pensée informatique

Notre vision de l'apprentissage s'inspire de quelques idées des travaux de Lave et Wenger (1991) sur les communautés de pratique. Hoadley (2012) souligne que deux définitions de communautés de pratique découlent des travaux de Lave et Wenger : (i) une définition basée sur les caractéristiques, signifiant une communauté qui partage des pratiques et (ii) une définition basée sur les processus d'apprentissage par lesquels les communautés de pratique sont considérées comme des groupes dans lesquels prend place un processus constant de « participation périphérique légitime ». Dans notre travail, on s'appuie sur cette deuxième définition. Lave et Wenger utilisent le concept de participation périphérique légitime pour décrire comment les apprenants entrent dans une communauté et adoptent progressivement ses pratiques. Nous utilisons cette idée de la participation périphérique légitime pour comprendre comment les étudiants apprennent les mathématiques en s'engageant dans la pensée informatique. Les « mathématiques » ne sont alors pas considérées comme un ensemble de connaissances à acquérir par l'étudiant, mais plutôt comme un processus de participation continuelle par lequel l'étudiant devient progressivement membre d'une communauté (de mathématiciens). En outre, nous ne voyons pas la pensée informatique d'un

point de vue cognitif (par exemple, voir un ordinateur comme un outil d'apprentissage interactif illustrant des concepts). Plutôt, nous nous concentrons sur la façon dont les étudiants créent et utilisent des outils informatiques pour s'engager dans des opportunités de participer en périphérie à des pratiques considérées comme faisant partie intégrante de la communauté mathématique, comme indiqué par Weintrop et al. (2016). En d'autres termes, notre emphase est sur la façon dont les étudiants (les novices) se servent de la pensée informatique pour les mathématiques, comme le feraient les mathématiciens (les vétérans).

Cette vision de l'apprentissage concorde avec le paradigme constructionniste. Papert (1971) a soutenu que « être mathématicien [...] comme être un poète, un compositeur ou un ingénieur, c'est *faire*, plutôt que de savoir ou de comprendre » (p.1, notre traduction), et qu'en programmant les mathématiques, les apprenants s'engagent dans des « mathématiques informatiques » (p. 25) à travers lesquelles ils mathématisent. Pour Papert (1980b), l'ordinateur fournit à l'apprenant un moyen de construire des « objets-avec-lequel-penser» et, par l'exploration et la découverte dans un certain domaine de connaissances, « permet à un apprenant de mobiliser des idées productrices ou des habilités intellectuelles » (p.204). Cela résonne avec le grand nombre de mathématiciens et de scientifiques qui utilisent l'ordinateur au 21e siècle.

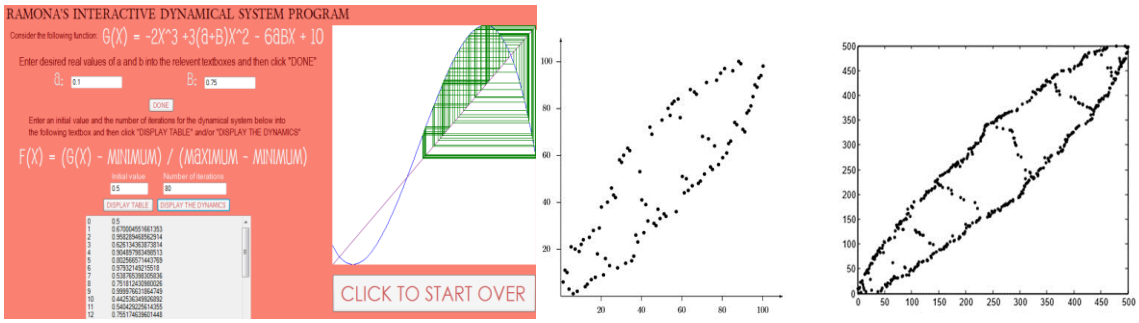


Fig. 2 – Exemples de pratiques en résolution de problèmes informatiques. À gauche : capture d'écran du travail exploratoire d'un étudiant de premier cycle d'un système dynamique À droite : capture d'écran du travail exploratoire d'un mathématicien sur une structure de permutation (Broley et al., 2017, pp. 4, 6).

Le travail de Broley et al. (2017), cité plus haut, illustre comment des étudiants du premier cycle universitaire ont appris les mathématiques à travers la construction d'objets informatiques interactifs (c'est-à-dire, « objets-avec-lequel-penser ») et comment ces pratiques s'harmonisent avec celles des mathématiciens : par exemple, l'engagement d'une étudiante dans les pratiques informatiques de résolution de problèmes—où elle a dû concevoir, programmer et utiliser un environnement interactif pour explorer, graphiquement et numériquement, le comportement d'un système dynamique basé sur une fonction cubique à deux paramètres—montre des similitudes avec l'engagement d'un mathématicien dans ses recherches sur la permutation de sous-séquences (voir Figure 2). C'est lorsque l'étudiant devient compétent à s'engager, par la programmation, dans la pensée informatique pour les mathématiques « comme les mathématiciens le feraient » que nous considérons qu'une appropriation a eu lieu. Ce qui suit s'intéresse à cette appropriation et à comment on peut en rendre compte.

5. *L'appropriation, par les étudiants, de la programmation en tant qu'instrument de pensée informatique*

Cook et al. (2002) expliquent que l'appropriation est un processus de développement impliquant des actions exprimées socialement, orientées vers un but et véhiculées par des

outils par lesquelles les apprenants adoptent activement (nous pourrions dire « font siens ») des outils conceptuels et pratiques, internalisant ainsi les modes de pensée liés aux contextes spécifiques dans lesquels l'apprentissage a lieu. L'approche instrumentale (Rabardel, 1995/2002) est un cadre utile pour l'analyse de l'intégration technologique (Artigue, 2002; Guin & Trouche, 1999) et pour mieux comprendre comment les étudiants s'approprient un outil (technologique).

L'approche instrumentale décrit comment les artefacts (matériels ou symboliques) sont appropriés lorsqu'ils sont transformés en instruments à travers des schèmes d'utilisation et d'action par ce qu'on appelle la *genèse instrumentale* (Artigue, 2002). Trouche et Drijvers (2010) suggèrent qu'un instrument a été approprié lorsqu'il existe une « relation significative entre l'artefact et l'utilisateur pour un type spécifique de tâche » (p. 673). Ainsi, afin d'évaluer l'appropriation et l'intégration technologique, il est nécessaire d'observer la genèse instrumentale, en regardant à la fois l'artefact et les schèmes qui lui sont associés. Une façon de faire cela est de regarder les traces laissées par les élèves dans leur activité et ce qu'ils font avec l'artefact (Trouche 2004). Il est également nécessaire de prendre en compte l'activité de l'enseignant : ses conceptions et ses orchestrations des ressources (Trouche, 2004) et l'*intégration instrumentale*, qui est « comment les enseignants organisent les conditions pour une genèse instrumentale de la technologie proposée aux étudiants et dans quelle mesure ils favorisent l'apprentissage des mathématiques à travers la genèse instrumentale » (Goos & Soury-Lavergne, 2010, p. 313).

L'intégration instrumentale décrit quatre étapes d'une utilisation croissante de la technologie en classe (Assude, 2007) : (a) l'initiation instrumentale (étape 1)—les étudiants s'engagent uniquement dans l'apprentissage de l'utilisation de la technologie; (b) l'exploration instrumentale (étape 2)—les problèmes mathématiques motivent les élèves à en apprendre davantage sur l'utilisation de la technologie; (c) le renforcement instrumental (étape 3)—les étudiants résolvent des problèmes mathématiques avec la technologie, mais doivent étoffer leurs compétences technologiques; et (d) la symbiose instrumentale (étape 4)—la maîtrise de la technologie par les étudiants permet d'élargir la tâche mathématiques si bien que ce sont à la fois les compétences technologiques et la compréhension mathématiques des élèves qui sont enrichies.

Nous associons ces étapes aux dimensions de développement de la pensée informatique d'un étudiant du cadre de Brennan et Resnick (2012) : les étapes 1 et 2 aux concepts informatiques, les étapes 2 à 4 aux pratiques informatiques et les étapes 3 et 4 aux perspectives informatiques. Et c'est à l'étape 4 que nous soutenons que l'étudiant s'est approprié la programmation comme un instrument pour les mathématiques « comme le feraient les mathématiciens » (à la fois en termes de pratiques et de perspectives informatiques), ce que nous nommons « la programmation en tant qu'instrument de pensée informatique pour les mathématiques ».

III. PROCHAINES ÉTAPES DE NOTRE RECHERCHE

Dans cet article, nous avons présenté le cadre théorique sur lequel s'appuie notre recherche, centré sur la façon dont les étudiants de premier cycle universitaire en mathématiques en viennent à s'approprier la programmation en tant qu'instrument de pensée informatique pour les mathématiques. Brennan et Resnick (2012) suggèrent des façons d'évaluer le développement de la pensée informatique d'un apprenant, y compris l'analyse d'entrevues et de porte-folio de projets. Par conséquent, dans le cadre de notre recherche, nous collecterons les projets de mathématiques axés sur la programmation des étudiants (14

au total sur les trois cours), ainsi que leurs journaux de bord. leur travail en cours. Des entrevues finales et des questionnaires seront utilisés à la fin des études du programme de quatre ou cinq ans des participants, afin d'examiner la durabilité de leur utilisation de la programmation. Conformément à la recommandation de Trouche (2004), des entrevues semi-structurées avec les instructeurs de cours, des notes de terrain sur les observations durant les séances en laboratoire informatique et le matériel de cours permettront de mieux comprendre les objectifs didactiques des instructeurs et l'environnement d'apprentissage des participants. Ces dernières données éclaireront également les décisions pédagogiques des enseignants et dans quelle mesure elles sont en accord avec le paradigme constructionniste.

RÉFÉRENCES

Abrahamson, D., Berland, M., Shapiro, B., Unterman, J., & Wilensky, U. (2004). Leveraging epistemological diversity through computer-based argumentation in the domain of probability. *For the Learning of Mathematics*, *26*(3), 19-45.

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *7*(3), 245-274.

Assude, T. (2007). Teachers' practices and degree of ICT integration. In D. Pitta-Pantazi & G. N. Philippou (Eds.), *Actes du 5ième congrès de l' European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1339-1348). Larnaka, Cyprus: Department of Education, University of Cyprus.

Bocconi, S., Chioccariello, A., Dettori, G., Ferrari, A., & Engelhardt, K. (2016). Developing computational thinking in compulsory education: Implications for policy and practice. *EU Science Hub*. Retrieved from https://ec.europa.eu/jrc/en/printpdf/175911

Brennan, K., & Resnick, M. (2012). New frameworks for studying and assessing the development of computational thinking. *Actes de l'American Educational Research Association (AERA) annual conference*. Retrieved from http://web.media.mit.edu/~kbrennan/files/Brennan_Resnick_AERA2012_CT.pdf

Broley, L., Buteau, C., & Muller, E. (2017). *(Legitimate peripheral) computational thinking in mathematics*. Proceedings of the Congress of European Society for Research in Mathematics Education (CERME), Dublin (Ireland), February 2017.

Buteau, C., & Muller, E. (2014). Teaching roles in a technology intensive core undergraduate mathematics course. In A. Clark-Wilson, O. Robutti, & N. Sinclair (Eds.), *The mathematics teacher in the digital era: An international perspective on technology focused professional development* (pp. 163-185). Dordrecht, Netherlands: Springer.

Buteau, C., Muller, E., Marshall, N., Sacristán, A. I., & Mgombelo, J. (2016). Undergraduate mathematics students appropriating programming as a tool for modelling, simulation, and visualization: A case study. *Digital Experience in Mathematics Education*, *2*(2), 142-156.

Buteau, C., Muller, E., & Ralph, B. (2015, June). Integration of programming in the undergraduate mathematics program at Brock University. In *Online Proceedings of Math+Coding Symposium*, London, ON.

Centre de recherches mathématiques. (2016). *Computational mathematics in emerging applications*. Retrieved from http://www.crm.umontreal.ca/act/theme/theme_2016_1_fr/index.php

Computational Thinking in Mathematics Education. (n.d.). *About*. Retrieved from http://ctmath.ca/about/

Cook, L. S., Smagorinsky, P., Fry, P. G., Konopak, B., & Moore, C. (2002). Problems in developing a constructivist approach to teaching: One teacher's transition from teacher preparation to teaching. *The Elementary School Journal*, *102*(5), 389-413.

European Mathematical Society. (2011). *Position paper on the European Commission's contributions to European research.* Retrieved from http://ec.europa.eu/research/horizon2020/pdf/contributions/post/european_organisations/european_mathematical_society.pdf

Gadanidis, G., Hughes, J. M., Minniti, L., & White, B. J. (2017). Computational thinking, grade 1 students and the binomial theorem. *Digital Experiences in Mathematics Education*, *3*(2), 77-96.

Goos, M., & Soury-Lavergne, S. (2010). Teachers and teaching: Theoretical perspectives and classroom implementation. In C. Hoyles & J.-B. Lagrange (Eds.), *ICMI Study 17, technology revisited, ICMI study series* (pp. 311-328). New York, NY: Springer.

Grover, S., & Pea, R. (2013). Computational thinking in K-12: A review of the state of the field. *Educational Researcher*, *42*(1), 38-43. doi:10.3102/0013189X12463051

Guin, D., & Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments. The case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *3*(3), 195-227.

Hoadley, C. (2012). What is a community of practice and how can we support it? in D. H. Jonassen & S. M. Land (Eds.), Theoretical foundations of learning environments (2nd Ed.) (287-300) New York: Routledge.

Kafai, Y. B., & Resnick, M. (1996). *Constructionism in practice: Designing, thinking, and learning in a digital world*. Mahwah, NJ: Erlbaum, Routledge.

Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. New York, NY: Cambridge University Press.

Leron, U., & Dubinsky, E. (1995). An abstract algebra story. *American Mathematical Monthly*, *102*(3), 227-242.

Muller, E., Buteau, C., Ralph, B., & Mgombelo, J. (2009). Learning mathematics through the design and implementation of exploratory and learning objects. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, *63*(2), 63-73.

Noss, R., & Hoyles, C. (1996). *Windows on mathematical meanings: Learning cultures and computers* (Vol. 17). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Papert, S. (1971). Teaching children to be mathematicians vs. teaching about mathematics. *Artificial Intelligence Memo* No. 249. Retrieved from http://hdl.handle.net/1721.1/5837

Papert, S. (1980a). *Mindstorms: Children, computers, and powerful ideas.* New York, NY: Basic Books.

Papert, S. (1980b). Computer-based microworlds as incubators for powerful ideas. In R. Taylor (Ed.), The computer in the school: tutor, tool, tutee (pp. 203–210). New York: Teacher's College Press.

Papert, S., & Harel, I. (1991). Situating constructionisn. In S. Papert & I. Harel (Eds.), *Constructionism* (pp. 1-12). Norwood, NJ: Ablex.

Rabardel, P. (1995/2002). *Les hommes et les technologies; approche cognitives des instruments contemporains.* Paris, France: Armand Colin.

Trouche, L. (2004). Managing complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *9,* 281-307.

Trouche, L., & Drijvers, P. (2010). Handheld technology for mathematics education: Flashback into the future. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, *42,* 667-681.

Weintrop, D., Beheshti, E., Horn, M., Orton, K., Jona, K., Trouille, L., & Wilensky, U. (2016). Defining computational thinking for mathematics and science classrooms. *Journal for Science Education and Technology*, *25,* 127-147.

Wing, J. M. (2008). Computational thinking and thinking about computing. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 366(1881), 3717-3725.

Wing, J. M. (2014, January 9). Computational thinking benefits society. *Social Issues in Computing*, 40th Anniversary Blog, University of Toronto. Retrieved from http://socialissues.cs.toronto.edu/index.html%3Fp=279.html

L'ALGORITHMIQUE ET LA PROGRAMMATION POUR LA CONSTRUCTION DU SENS DE LA DIVISION EUCLIDIENNE

CHAACHOUA[*] Hamid – TCHOUNIKINE[**] Pierre – CRISCI[***] Rosamaria

Résumé – Nous abordons la question de la prise en compte de l'algorithmique à l'école primaire en tant que compétence générale relevant de la résolution de problème. Nous présentons des caractéristiques, au niveau didactique et algorithmique, que doivent avoir les tâches constituantes d'une séquence sur la division euclidienne. En se basant sur ces caractéristiques, l'article présente la construction de la séquence qui fait objet d'expérimentations dans des classes du cycle 3.

Mots-clefs : Algorithmique, Division euclidienne, Variable didactique, Scratch.

Abstract – We address algorithmic as a general problem solving competence at elementary school. We present the didactics and algorithmic characteristics of the tasks constituting a teaching sequence for Euclidean division. We present a teaching sequence based on these characteristics, which is presently under experimentation in third cycle classrooms.

Keywords: Algorithmic, Euclidean division, didactic variable, Scratch

I. INTRODUCTION

L'enseignement de l'informatique est entré dans les programmes scolaires du cycle 3. Outre le fait d'utiliser des logiciels usuels (traitement de texte, etc.), ces programmes indiquent qu'il est souhaitable que les élèves découvrent et pratiquent l'algorithmique et la programmation. Soulignons que l'introduction de l'algorithmique et de la programmation sont au programme du lycée depuis 2010 et certains travaux de recherche en didactique se sont intéressés à l'impact de cette introduction sur l'évolution de l'enseignement des mathématiques (Modeste, 2012) (Haspekian & Nijimbere, 2012).

L'algorithmique est une compétence générale, qui relève de la résolution de problème : un algorithme est un enchaînement d'actions, dans un certain ordre, qui chacune a un effet, et dont l'exécution complète permet de résoudre un problème. Un algorithme se décrit généralement en langage naturel. Il peut faire l'objet d'une programmation, c'est-à-dire d'une traduction dans un langage interprétable et exécutable par un ordinateur. Des langages de programmation pour enfants comme Scratch proposent des structures visuelles (des blocs) et des aides (manipulation des blocs par glissé-déposé, contrôle syntaxique automatique, etc.) qui font qu'il est possible de superposer la phase d'algorithmique et de programmation : les élèves écrivent leur algorithme en agençant les blocs Scratch, ce qui permet de l'exécuter directement.

Dans le cadre du projet EXPIRE[1], nous mettons en œuvre un ensemble d'actions qui vise à coupler une initiation à l'algorithmique et l'enseignement des mathématiques. En particulier,

[*] Univ. Grenoble Alpes, LIG – France – Hamid.Chaachoua@imag.fr

[**] Univ. Grenoble Alpes, LIG – France – Pierre.Tchounikine@imag.fr

[***] Univ. Grenoble Alpes, LIG – France – rosamaria.crisci@univ-grenoble-alpes.fr

[1] EXPIRE (EXpérimenter la Pensée Informatique pour la Réussite des Élèves ; cf. http://lig-membres.imag.fr/tchounikine/projetEXPIRE.html) est une opération soutenue par l'État dans le cadre du volet e-FRAN (Espace de formation, de recherche et d'animation numérique) du Programme d'Investissement d'Avenir, opéré par la Caisse des Dépôts. Il

nous explorons comment utiliser l'introduction en cycle 3 de l'algorithmique et de la programmation pour en faire des vecteurs d'apprentissage de notions de mathématiques.

Dans cet article, nous présentons les principes didactiques et algorithmiques d'une séquence focalisée sur la division Euclidienne. La séquence est fondée sur une situation didactique classique que, par un travail pluridisciplinaire impliquant didacticiens et informaticiens, nous avons retravaillé. Nous montrons comment le fait de demander aux élèves de construire un algorithme et de l'exécuter sur ordinateur peut être utilisé pour la construction du sens des notions de diviseur et de reste.

Le plan de l'article est le suivant : nous présentons d'abord la division euclidienne en tant qu'objet à enseigner à l'école primaire (§ II) et les objectifs de la recherche (§ III). Ensuite, nous présenterons les éléments de constructions de la séquence et de sa mise en place (§ IV et § V) et enfin quelques résultats préliminaires (§ VI).

II. ENSEIGNEMENT DE LA DIVISION EUCLIDIENNE

La division a deux significations qui peuvent être travaillées dans des contextes différents. La première signification est celle de division-partage, que l'on rencontre dans des situations de recherche de la « valeur d'une part ». La deuxième signification est celle de division-quotition, que l'on rencontre dans des situations de recherche du « nombre de parts ».

Plusieurs situations ont été élaborées pour construire le sens de la division euclidienne et en particulier le sens du quotient et du reste. En effet, une des difficultés de cette notion est que c'est une opération dont le résultat est formé de deux nombres.

Dès 1972, Guy Brousseau propose la situation dite de « course à 20 » sous forme d'un jeu entre deux élèves où il s'agit, pour chacun des adversaires, de réussir à dire 20 le premier, en ajoutant 1 ou 2 au nombre dit par l'autre. En fait, cette situation se modélise par le jeu de la « course à n », considérée comme situation fondamentale de la division (Brousseau, 1998). Le développement d'une stratégie gagnante nécessite de calculer le reste d'une division euclidienne.

Différentes ressources pour les professeurs des écoles proposent des séquences pour introduire la division euclidienne. Par exemple, le manuel CAP Maths CM1 (Ermel, 1997) propose une situation autour de la question « combien de fois un nombre est contenu dans un autre ? ». Dans la situation, les élèves doivent trouver le plus grand nombre de rubans identiques, de longueur donnée, dans un ruban donné. Les élèves peuvent manipuler et réaliser des découpages pour répondre à la tâche ou pour vérifier leur réponse.

Au niveau des programmes, la notion de division est abordée au cycle 2, dans des situations simples de partage ou de groupement. C'est au cycle 3 que l'on aborde la division euclidienne de deux entiers, dès le début du cycle.

III. OBJECTIFS DE LA RECHERCHE

Nous avons choisi de travailler le sens de la division euclidienne à partir de la recherche de nombre de parts dans une situation de division-quotition, et plus spécifiquement autour des objectifs suivants :

---

implique l'Université de Grenoble Alpes, la ville de Grenoble, le CCSTI La Casemate, l'Espé et le Rectorat de l'Académie de Grenoble.

- Trouver le nombre de parts dans une situation de partage équitable.

- Comprendre la signification du quotient et du reste.

- Comprendre l'écriture de la division euclidienne

L'algorithmique et la programmation forment une approche de la résolution de problème qui nous semble présenter deux caractéristiques pertinentes. D'une part, écrire un algorithme amène les élèves à expliciter une procédure de calcul. D'autre part, l'algorithme (ou, dit autrement, la procédure de calcul proposée par l'élève) peut être exécuté par l'ordinateur. Le fait que les conditions institutionnelles soient maintenant favorables à la pratique de l'algorithmique et de la programmation en cycle 3 nous a amené à considérer la question de recherche suivante : *comment exploiter les caractéristiques de l'algorithmique et de la programmation pour créer des situations didactiques faisant travailler le sens de la division euclidienne* en cycle 3 *?*

Pour répondre à cette question nous avons considéré l'enjeu d'apprentissage « donner du sens aux notions de quotient et de reste » et construit un ensemble de tâches présentant les caractéristiques suivantes :

1) L'algorithme/programme[2] que l'élève doit écrire définit le comportement d'un objet ou d'un personnage (par exemple, son déplacement) à l'écran.
2) La tâche de l'élève consiste à construire un algorithme qui permet d'obtenir un comportement cible, qui est stipulé par l'énoncé de l'exercice.
3) L'écriture de l'algorithme nécessite la mobilisation des notions enjeux d'apprentissage.
4) L'algorithme attendu est une explicitation de la procédure de calcul attendue.
5) L'exécution de l'algorithme permet de visualiser la procédure proposée par l'élève.
   Notons que cette recherche vise donc à étudier l'apport d'une séquence où algorithme et programmation sont réalisés ensemble et exécutés sur l'ordinateur. Il ne s'agit pas d'étudier l'apport de l'algorithmique en soi, qui peut être travaillée sans ordinateur.

IV. ÉLEMENTS DE CONSTRUCTION DE LA SEQUENCE

Dans la suite, nous présentons les choix fondamentaux de construction de la séquence, qui reposent sur des choix didactiques et/ou des propriétés de l'environnement informatique. Pour cela nous nous référons à la Théorie Anthropologique du Didactique (Chevallard, 1999), et plus précisément au cadre T4TEL (Chaachoua, 2018).

1. Le type de tâches

Il s'agit de considérer une bande numérique avec une *case cible* et un objet qui peut se déplacer sur cette bande en faisant des *sauts* constants.

D	1	2	3	4	…	C

Nous avons choisi comme départ, désigné par D, la case qui précède 1, sans introduire le 0. La case cible est une case désignée par *C*. Pour définir les sauts nous avons introduit une unité *pas*. Ainsi, un saut est définit par un nombre de pas : 1 pas, 2 pas, etc.

[2] Dans notre approche, les élèves écrivent directement l'algorithme dans l'environnement Scratch, et donc écrivent en même temps l'algorithme et le programme exécutable.

Afin de pouvoir travailler sur des nombres qui dépassent 100 et compte tenu des contraintes de l'écran nous avons opté par représenter la bande numérique par une spirale (cf. Figure 1).

Étant donnée une cible *C* et un saut S inférieur ou égal à *C*, il existe un couple d'entiers unique (q , r) tels que $C = S \times q + r$.

Les principes de l'environnement de programmation Scratch permettent de mettre en œuvre la situation en répondant aux caractéristiques recherchées (1) et (2). Scratch permet de définir des « lutins » (des objets ou des personnages). Le comportement d'un lutin est régi par un algorithme. L'algorithme s'écrit par composition de blocs, par exemple « avancer de x » (qui fait avancer le lutin sur l'écran). Le lutin apparaît sur une « scène » (un écran), vide par défaut, mais où il est possible de placer un dessin. Ceci permet de créer la situation suivante : une scène représentant une bande numérique ; un lutin, que nous avons décidé de représenter par un cercle-repère, positionné sur D (cf. Figure 1) ; et une tâche relevant du type de tâches T : « écrire un algorithme permettant de faire avancer le cercle-repère de D vers C en respectant un certain nombre de contraintes (taille des sauts, cases à éviter, etc.) ». Les données de la tâche, les contraintes de l'interface à respecter et les propriétés de la mise en œuvre avec Scratch sont liées à différentes variables didactiques[3] qui permettent de générer des types de tâches et des sous-types de tâches à partir de T.

2. Les variables didactiques

Variable V1 : Taille du nombre S (taille des sauts), qui peut prendre deux valeurs :

- Petit, S ≤10 (actions possibles : saut de 1 pas, saut de 2 pas, …, saut de 10 pas).
- Grand, S > 10 (actions possibles : saut de 11 pas, saut de 12 pas).

Afin de respecter les critères (3) et (4), nous avons défini des blocs Scratch spécifiques correspondant aux différents sauts autorisés : « Avancer de 1 pas », « Avancer de 2 pas », …, « Avancer de 12 pas ». L'énoncé de l'exercice précise que ce sont ces blocs qui doivent être utilisés pour écrire l'algorithme.

Afin de répondre au critère (5), les blocs sont construits pour marquer un arrêt de quelques dixièmes de seconde à chaque saut. Ainsi, si l'algorithme fait avancer le cercle-repère par sauts de 3 pas, il marque une courte pause en 3, 6, etc.

Variable V2 : Taille du nombre C (valeur de la case cible), qui peut prendre deux valeurs :

- Petit : $C \leq 100$.
- Grand : C > 100.

Les valeurs de S et C permettent de favoriser ou non la mobilisation du répertoire de la multiplication. Ainsi, on s'intéresse à la combinaison de ces deux variables comme suit :

- $S \leq 10$.
- S > 10 et $C \leq 10 * S$.
- S > 10 et $C > 10 * S$.

Afin de disposer de bandes numériques de longueurs importantes, nous les avons représentées sous la forme de spirales de 85 et 150 cases (cf. Figures 1 & 2). Les blocs

[3] Bien que la notion de variable didactique est empruntée à la théorie des situations didactiques nous l'utilisons dans le cadre de la T4TEL (Chaachoua, 2018).

« Avancer de n pas » sont construits pour suivre cette spirale (l'élève n'a pas à « faire tourner » le cercle-repère).

Variable V3 : Reste, qui peut prendre deux valeurs :

- Reste nul.
- Reste non nul.

Dans le cas où le reste est nul, on retrouve les notions de multiples et diviseurs.

Variable V4 : Visualisation des sauts, qui peut prendre deux valeurs :

- Sans trace : chaque saut est indiqué par une courte pause uniquement.
- Avec trace : les cases correspondant aux sauts sont marquées.

Cette variable relève du critère (5), et permet de moduler la visualisation des sauts (i.e., de la procédure de l'élève) pendant l'exécution du programme. Cette rétroaction permet notamment de rendre visible la régularité des sauts, qui est un élément pouvant aider à la compréhension du sens de $q \times S$ dans cette situation.

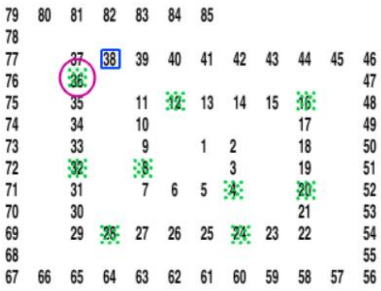


Figure 1 *– La bande numérique (taille 85, cercle-repère en 36, cible en 38, avec traces de sauts de taille 4)*

Variable V5 : Présence de cases interdites

Les cases interdites sont des cases où le cercle-repère ne doit pas s'arrêter. Ce type de contraintes est intéressant dans le cas où le reste est nul et l'élève doit choisir parmi plusieurs sauts possibles.

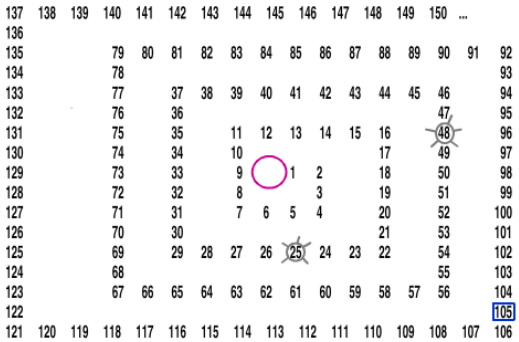


Figure 1 *– La bande numérique (taille 150, cercle-repère en D, cible en 105, avec des cases interdites en 25 et 48)*

Variable V6 : Masquage de la bande numérique

Les valeurs de la bande numérique peuvent être masquées (une série de cases successives sont remplacées par un trait). Cette variable permet de bloquer des procédures basées sur l'énumération.

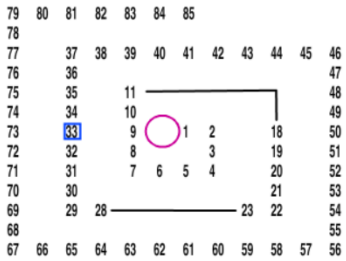


Figure 1 *– La bande numérique (taille 85, cercle-repère en D, cible en 33, avec des cases masquées)*

V. PRÉSENTATION DE LA SÉQUENCE

La séquence est organisée en 4 phases. La première permet de travailler les prérequis sur les multiples et les diviseurs. La deuxième porte sur la détermination du quotient et le sens du reste. La troisième porte sur la détermination du quotient et du reste, ainsi que l'écriture de la division euclidienne. Enfin, la dernière est une phase d'institutionnalisation du savoir appris à travers la résolution du problème.

Nous présentons dans ce paragraphe les choix des valeurs des différentes variables par rapport aux procédures et aux enjeux d'apprentissage dans la construction des trois premières phases. Concrètement, chaque phase correspond à une série d'exercices que les élèves doivent réaliser, chaque exercice correspondant à des valeurs différentes des variables didactiques.

1. Phase 1

L'objectif de cette phase est de travailler les prérequis sur les multiples et les diviseurs. Les tâches stipulent qu'il faut déplacer le cercle-repère sur la bande numérique pour atteindre une case cible en utilisant un type de saut choisi entre 1 et 9.

Considérons 3 tâches correspondantes à des choix de valeurs de variables différentes.

- La tâche 1 où la cible est C = 24. Les sauts possibles sont 1, 2, 3, 4, 6, 8. La technique mobilise la notion de diviseurs, ici les diviseurs de 24.
- La tâche 2, où l'on conserve la cible mais où l'on place des bombes sur 9 et 14. Dans ce cas, seuls les sauts 4, 6 et 8 sont gagnants (il faut choisir un diviseur de 24 qui ne soit pas diviseur des bombes).
- La tâche 3, où la cible est 84 et où l'on place une bombe sur 36. Dans ce cas, il y a un seul saut gagnant : 7.

Dans les deux tâches 1 et 2, le choix de la valeur C = 24 permet la mobilisation du répertoire de multiplication (variable V2). Ensuite, le choix des cases interdites par des bombes (Variable V5) disqualifie certaines techniques basées sur un choix aléatoire du saut. La tâche disqualifie, d'une part, la mobilisation du répertoire de la multiplication, et, d'autre part, le choix aléatoire de saut. Ainsi, la réussite de la tâche 3 nécessite la mobilisation des connaissances sur les multiples et diviseurs.

Nous voyons que ces 3 tâches répondent aux caractéristiques recherchées (1) et (2).

2. Phase 2

Dans cette phase, on introduit un reste non nul (variable V3). Les exercices stipulent qu'il faut que le cercle-repère se rapproche au maximum du nombre encadré C, sans le dépasser, et en utilisant le saut stipulé par l'énoncé de l'exercice.

Plusieurs procédures sont possibles : procéder par tâtonnement, mobiliser des multiples, compter les traces des sauts ou effectuer la division (mais cette dernière elle n'est pas attendue). Nous avons joué sur les valeurs des différentes variables pour faire émerger la division euclidienne.

Dans cette phase, nous avons décidé de garder les traces (variable V4) pour permettre de bien visualiser la régularité des sauts. Celle-ci sert également de contrôle dans certaines procédures. Dans les différents exercices, nous avons combiné les valeurs des variables V1 et V2 par rapport au répertoire de la multiplication.

3. Phase 3

L'objectif de cette phase est l'explicitation du reste. Pour cela, les exercices stipulent qu'il faut utiliser deux types de sauts : un saut (quotient) qu'il peut utiliser autant de fois qu'il le souhaite, et un autre (reste) à n'utiliser qu'une seule fois, et qu'il doit choisir dans une liste.

Exemple d'exercice : Écrivez un programme dans Scratch pour permettre au cercle-repère d'arriver exactement sur le nombre encadré (i.e., la cible, qui est mise en évidence sur la bande numérique), en utilisant le saut indiqué (autant de fois que vous souhaitez), et en utilisant une seule fois un joker au choix (des sauts de 1 à 6). Dans cet exercice, C = 97 et S = 7, et nous avons choisi de ne pas laisser de traces des sauts. L'algorithme attendu est présenté en Figure 4.



***Figure 4** – Un algorithme / programme attendu*

4. Un élément essentiel de chaque phase : la traduction vers le registre numérique

Les séances et exercices que nous élaborées sont fondées sur un choix important : la tâche des élèves est de construire un algorithme, et la rétroaction qu'ils reçoivent est le résultat de son exécution à l'écran. Il n'y a pas volontairement pas de rétroaction automatique sur les caractéristiques de la solution proposée : cette tâche est confiée à l'enseignant.

Le travail de l'enseignant est donc fondamental. En particulier, en plus de l'étayage et/ou de la validation, il est essentiel qu'il fasse des synthèses sur la traduction des algorithmes vers des écritures dans le registre numérique. Ainsi, dans l'exemple de la Figure 4, il faut faire le lien avec l'écriture : $97 = 13 \times 7 + 6$.

Ce type de traduction peut passer par des verbalisations du type "pour atteindre la cible 97 on avance de 7 pas 13 fois, puis on avance de 6 pas". Cette verbalisation peut être traduite sous la forme "Cible = (Nombre de sauts * Type de saut) + Joker" pour amener à l'écriture décontextualisée Dividende = (Quotient * Diviseur) + Reste.

VI. RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

La séquence a été déployée dans une cinquantaine de classes de CM1 et de CM2. Sa mise en œuvre par les enseignants n'a pas révélé de problème.

Les observations que nous avons menées dans certaines classes montrent que les élèves s'impliquent très facilement dans la résolution de problème et la création d'algorithmes. Lors des bilans collectifs, les élèves s'appuyaient sur des notions mathématiques (multiples, diviseurs) pour expliquer l'algorithme qu'ils avaient produit. La traduction de l'algorithme en égalités numériques était un moment fort pour la mobilisation et l'explicitation des connaissances mathématiques.

Nous avons réalisé des pré-tests/post-tests qui ont été soumis aux élèves individuellement dans l'environnement papier/crayon. Chaque test était constitué de 5 types de tâches visant spécifiquement à faire émerger des données relatives à la réponse et à la technique employée. Afin de traiter et analyser ces données, nous avons conçu une grille de codage qui met notamment en évidence les relations entre (1) la réponse de l'élève à l'exercice, (2) la technique utilisée par l'élève et (3) les variables des types de tâches et leurs valeurs : gestion du reste (oui/non), type de situation (division-quotition/division-partage), taille des nombres (petits/grands) et réponse attendue (quotient/reste/quotient et reste). Le traitement exploratoire des données de deux classes de CM2 fait notamment apparaître un taux de variation de +100% sur la validité de la réponse pour les types de tâches nécessitant une gestion du reste. De plus, l'évocation de techniques basées sur l'opération de division posée a également vu une augmentation substantielle (taux de variation égal à +170%). Ce traitement exploratoire suggère que la séquence amène les élèves à travailler les compétences visées.

VII. CONCLUSION

L'enseignement de l'informatique au cycle 3 peut être abordé avec des objectifs très différents, cf. l'analyse présentée dans (Tchounikine, 2016). Dans cet article, nous avons présenté un travail en cours qui étudie comment introduire la pensée informatique à l'école primaire comme un vecteur pour l'apprentissage des mathématiques.

Sur l'exemple de la division Euclidienne, nous avons montré qu'il est possible de créer des tâches où les élèves sont amenés à écrire un algorithme qui mobilise les notions enjeux d'apprentissage mais, également, qui est une explicitation de la procédure de calcul proposé par les élèves. L'exécution du programme permet donc d'obtenir une trace d'exécution de la procédure de calcul que propose l'élève. Cette ressource peut être exploitée par l'élève et, bien sûr, l'enseignant.

REFERENCES

Chaachoua H. (2018) Un cadre de référence pour la formalisation et l'extension du modèle praxéologique. *In 6e congrès pour la Théorie Anthropologique du Didactique*. Autrans. Janvier 2018.

Chevallard Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique de mathématiques*, 19(2), 221-265.

ERMEL (1997). *Manuel Ermel CM1, Apprentissage numériques et résolution de problèmes*. Hatier.

Tchounikine P. (2016) Initier les élèves à la pensée informatique et à la programmation avec Scratch. *Revue EpiNet n° 182*, http://lig-membres.imag.fr/tchounikine/PenseeInformatiqueEcole.html.

Modeste S. (2012) Enseigner l'algorithme pour quoi ? Quelles nouvelles questions pour les mathématiques ? Quels apports pour l'apprentissage de la preuve ? *Thèse de l'Université Joseph Fourier*. Grenoble.

Haspekian M. & Nijimbere C. (2012) Les enseignants face à l'entrée de l'algorithmique dans l'enseignement des mathématiques au lycée scientifique en France. *In Actes CORFEM – 18ème et 19ème colloques (2011 et 2012)*. Besançon.

RECHERCHE BINAIRE ET METHODE DE DICHOTOMIE, COMPARAISON ET ENJEUX DIDACTIQUES A L'INTERFACE MATHEMATIQUES - INFORMATIQUE[1]

MEYER[*] Antoine – MODESTE[**] Simon

Résumé – Nous analysons deux problèmes et leurs résolutions qui relèvent du paradigme « diviser pour régner » en algorithmique. Nous montrons que cela permet d'identifier des contenus restés implicites et de mettre en avant des enjeux didactiques à l'interface des mathématiques et de l'informatique.

Mots-clefs : recherche binaire, dichotomie, diviser pour régner, algorithmique

Abstract – We analyse two problems and their solutions, related to the "divide and conquer" algorithmic paradigm. We show that this allows us to identify implicit contents and to highlight didactical issues at the interface between mathematics and computer science.

Keywords: binary search, bisection, divide and conquer, algorithms

I. INTRODUCTION

Dans de nombreux curriculums du secondaire apparaissent des contenus d'algorithmique et de programmation, et plus généralement d'informatique. En France, ces sujets ont été introduits depuis 2009 au lycée (grades 10 à 12) et plus récemment au collège (grades 6 à 9) – voir (MEN, 2009a, 2015, 2017a) pour les programmes du collège et de seconde. Une particularité de ces enseignements est qu'ils ont lieu, entre autres, dans les programmes de mathématiques. Cela questionne la relation entre mathématiques et informatique permise dans ce cadre et pousse à faire des liens entre les deux disciplines. Il faut noter que beaucoup des questions qui se posent à ce sujet dans le secondaire se posent aussi dans l'enseignement supérieur (voir Ouvrier-Buffet et al., 2018).

Par ailleurs, les liens entre mathématiques et informatique sont étroits. On peut mentionner leurs fondements logiques communs, l'apport particulier de l'informatique aux mathématiques et réciproquement les questions que pose l'informatique aux mathématiques, ou encore les champs qui se développent à l'interface des deux disciplines (Modeste, 2015). Le projet ANR DEMaIn[2], dans lequel se développe le travail présenté ici, se propose d'étudier les relations entre mathématiques et informatique en faisant l'hypothèse qu'un travail épistémologique est indispensable pour identifier les

1 Réalisé avec le soutien financier de l'ANR, projet DEMaIn <ANR-16-CE38-0006-01>.
* LIGM (UMR 8049), UPEM, CNRS, ESIEE, ENPC, Université Paris-Est, 77454 Marne-la-Vallée – France – antoine.meyer@u-pem.fr
** IMAG, Université de Montpellier, CNRS, Montpellier – France – simon.modeste@umontpellier.fr
2 Le projet DEMaIn, Didactique et Épistémologie des interactions entre Mathématiques et Informatique, démarré en 2017, a pour objectif d'étudier ces questions particulières et de développer des ingénieries didactiques autour de deux axes complémentaires : Fondements scientifiques (logique, algorithmique, langages, preuve) et Concepts et objets (informatique mathématique, mathématiques discrètes, représentation des objets)

questions didactiques qui émergent de l'introduction d'informatique dans les programmes de mathématiques.

Nous proposons d'étudier deux problèmes classiques, présents dans le secondaire et le supérieur, pour lesquels un algorithme de type *diviser pour régner* existe : la recherche d'élément dans une liste triée et la recherche de zéro d'une fonction. À travers cette analyse, nous souhaitons montrer les questions mathématiques qui sont soulevées, la nature des preuves qui sont en jeu, et la complexité cachée de certaines notions. Ce travail nous semble caractéristique du type de travail qui est à mener autour des questions d'interactions mathématiques-informatique, et met en avant plusieurs points d'articulation : l'étude des algorithmes en tant qu'objets, les rapports entre discret et continu, les notions de complexité et de vitesse de convergence, les enjeux de preuve et de constructivité, les paradigmes algorithmiques[3], etc. La question de la dichotomie nous semble emblématique de ces enjeux.

Nous présentons une étude fine des problèmes concernés pour mettre en avant les enjeux disciplinaires, épistémologiques et didactiques qui se posent. Nous défendrons l'hypothèse que cette analyse préalable permet d'analyser comment certains aspects du thème de la dichotomie sont pris en charge ou non dans les ressources d'enseignement ou de formation.

II. RECHERCHE DE POSITION DANS UNE LISTE TRIEE

La recherche d'élément dans une collection est une tâche essentielle en informatique, à la base de nombreux algorithmes plus complexes. C'est aussi l'un des problèmes classiques abordés dans tout cours universitaire d'algorithmique – voir par exemple (Cormen, Leiserson, Rivest, & Cazin, 1994; Sedgewick, 1988) – et constitue de ce fait un objet d'étude incontournable. Ce problème donne lieu à une résolution emblématique de l'approche diviser pour régner, dont traitera la section suivante. D'un point de vue mathématique, on peut noter que la notion de relation d'ordre, ou d'ensemble ordonné, est au cœur de la question. Il existe plusieurs variantes du problème de recherche de la position d'un élément dans une liste triée. Toutes donnent lieu à des résolutions algorithmiques semblables. Pour les besoins de notre discussion, nous nous arrêtons à la version suivante du problème :

> **Problème P1 : position d'insertion dans une liste triée.** Étant donnés une liste croissante de n entiers $S = (a_i)_{0 \leq i < n}$ et un nombre entier b, déterminer le plus petit indice $0 \leq k < n$ tel que $b \leq a_k$, ou $k = n$ si $b > a_{n-1}$.

La question est de savoir à quel "emplacement" on peut insérer un nouvel élément dans une liste déjà triée tout en préservant sa monotonie. Une réponse k indique que l'élément doit être inséré *entre* les éléments a_{k-1} et a_k (ou en début ou fin de liste si k vaut 0 ou n). On impose aussi que k soit le plus petit possible, c'est à dire que si a_{k-1} existe alors $a_{k-1} < b$. Pour résoudre ce problème, on se place dans un modèle de calcul

3 En informatique, on appelle souvent « paradigmes algorithmiques » les principales familles de méthodes de résolution de problèmes (par exemple l'approche diviser pour régner, la programmation dynamique, les algorithmes de *back-tracking*, etc.)

où les seules opérations élémentaires considérées sont l'accès à un élément de la liste et la comparaisons de deux nombres. On cherche à déterminer un algorithme le plus efficace possible, au sens de la complexité asymptotique en nombre d'opérations élémentaires (*complexité en temps*).

Un algorithme simple (dit de *recherche linéaire*) consiste à balayer entièrement la liste S par indices croissants, en s'arrêtant au premier indice qui convient. Cet algorithme effectue au pire n comparaisons. Une méthode moins coûteuse découle du constat que lorsqu'on compare b avec l'un des a_i, si $b \leq a$ il n'est donc pas nécessaire de considérer les indices supérieurs ; de même si $b > a$ on peut ignorer les indices inférieurs ou égaux à i. Une méthode efficace consiste donc à éliminer le plus grand nombre possible de cas en comparant b à l'élément d'indice médian dans l'intervalle restant à explorer. L'algorithme correspondant est appelé recherche par dichotomie, ou recherche binaire (*binary search*) :

Algorithme A1 : Recherche de l'indice d'insertion de b dans $S = (a_i)_{0 \leq i < n}$.

1. On pose $g = 0$, $d = n$ les bornes initiales de l'intervalle de réponses possibles.
2. Si $g = d$, il reste une seule solution possible, répondre g.
3. Sinon, soit $m = \lfloor (g + d)/2 \rfloor$:
   - Si b $\leq a_m$, on pose $d = m$ et on reprend au point 2 ;
   - Sinon, on pose $g = m + 1$ et on reprend au point 2.

Voici une implémentation itérative possible de l'algorithme A1 en langage Python 3 :

```
def indice_insertion(lst, b):
    g, d = 0, len(lst)    # intervalle initial de recherche
    while g < d:
        m = (g + d) // 2  # indice médian (arrondi par défaut)
        if b <= lst[m]:
            d = m         # on élimine les indices > m
        else:
            g = m+1       # b > lst[m], on élimine les indices <= m
    return g              # ici g == d
```

Nous fournissons ici une analyse détaillée de l'algorithme A1, dans le but d'illustrer le type de techniques mathématiques utilisées pour cela. Nous nous intéressons à la preuve de terminaison de l'algorithme (le fait qu'il s'arrête pour toute instance) ; de sa correction (le fait que la réponse fournie est la bonne pour toute instance), à l'étude de sa complexité (nombre d'opérations nécessaires en fonction de la taille de la liste) et à son optimalité (la preuve qu'il n'existe pas d'algorithme résolvant ce problème avec une meilleure complexité au pire).

Preuve de terminaison. Considérons les valeurs de g et d à chaque exécution de l'étape 2 de l'algorithme A1 sur une instance $(S = (a_i)_{0 \leq i < n}, b)$ donnée. Les valeurs successives de $d - g$ forment une suite strictement décroissante d'entiers naturels, qui atteint donc nécessairement la valeur 0, ce qui provoque l'arrêt de l'algorithme. En effet, en supposant $g \neq d$ à un passage à l'étape 2 (le cas où $g = d$ est trivial), notons g' et d' les nouvelles valeurs de g et d calculées à l'étape 3. Comme $g < d$ on a $g \leq m < d$.

Selon la valeur de a_m on a soit $g' = m + 1 > g$ et $d' = d$, soit $g' = g$ et $d' = m < d$, ce qui implique que$0 \leq d' - g' < d - g$.

Preuve de correction. Soit $(S = (a_i)_{0 \leq i < n}, b)$ une instance du problème, et k le résultat associé. Soit ℓ le nombre de passages par l'étape 2 de l'algorithme (qui est fini comme démontré ci-dessus). Posons $(g_i)_{0 \leq i \leq \ell}$ et $(d_i)_{0 \leq i \leq \ell}$ les suites de valeurs respectives de g et d à chaque exécution de cette étape. Nous allons établir par récurrence sur i la propriété $P(i) : g_i \leq k \leq d_i$. Premièrement, $P(0)$ est vraie car $g_0 = 0$, $d_0 = n$ et par définition $0 \leq k \leq n$. Supposons à présent $P(i)$ pour $0 \leq i < \ell$ et montrons $P(i + 1)$. Par hypothèse de récurrence, $g_i \leq k \leq d_i$. On calcule $m = \lfloor (g_i + d_i)/2 \rfloor$. Deux cas se présentent : si $b \leq a_m$, comme S est croissante et par définition de k on a $k \leq m$. Or $d_{i+1} = m$ et $g_{i+1} = g$, donc $g_{i+1} = g \leq k \leq m = d_{i+1}$. Pour les mêmes raisons si $b > a_m$, nécessairement $k > m$. Or $g_{i+1} = m + 1$ et $d_{i+1} = d$, donc $g_{i+1} = m + 1 \leq k \leq d_i = d_{i+1}$. On déduit de ce qui précède que $P(i)$ est vraie pour tout $0 \leq i \leq \ell$, et en particulier que $g_\ell \leq k \leq d_\ell$, ce qui conclut la preuve puisque $g_\ell = d_\ell$.

Analyse de complexité. Montrons que l'exécution de A sur toute instance (S, b), avec S de longueur n, effectue dans tous les cas $\log_2 n$ opérations élémentaires, arrondi par défaut ou par excès. Plaçons-nous à l'étape 2 de l'algorithme, pour des valeurs quelconques de g et d telles que $0 \leq g \leq d \leq n$. Soit $x = \log_2(d - g + 1)$, nous allons montrer par récurrence forte sur $d - g$ que A1 fournit un résultat en un nombre d'étapes ℓ compris entre $\lfloor x \rfloor$ et $\lceil x \rceil$. Si $d = g$, on vérifie bien que $\ell = \log_2 1 = 0$. Sinon, supposons la propriété vraie à tout rang strictement inférieur à $d - g$. Comme $g \neq d$ la condition de l'étape 2 n'est pas vérifiée, on effectue donc l'étape 3 puis à nouveau l'étape 2. Appelons g' et d' les valeurs de g et d au passage suivant par l'étape 2. On distingue deux cas. Si $d - g + 1 = 2^p$ pour un certain $p \geq 0$, un simple calcul montre que $d' - g' + 1 = 2^{p-1}$. Par hypothèse de récurrence, on obtient que $\lfloor \log_2(2^{p-1}) \rfloor \leq \ell - 1 \leq \lceil \log_2(2^{p-1}) \rceil$, autrement dit $l = p$. Sinon, soit p l'unique entier tel que $2^{p-1} < d - g + 1 < 2^p$. On peut montrer que $(d - g)/2 \leq d' - g' + 1 \leq (d - g)/2 + 1$, ce qui implique que $2^{p-2} \leq d' - g' + 1 \leq 2^{p-1}$. Par hypothèse de récurrence, on obtient donc que $\lfloor \log_2(2^{p-2}) \rfloor \leq \ell - 1 \leq \lceil \log_2(2^{p-1}) \rceil$, soit $p - 1 \leq \ell \leq p$. La propriété est donc vraie pour toutes valeurs initiales $0 \leq g \leq d \leq n$. En particulier pour $g = 0$ et $d = n$ on obtient que l'exécution complète de A1 effectue au pire $\lceil \log_2(n + 1) \rceil$accès aux éléments de S, et exactement p si $n = 2^p - 1$ pour un certain p.

Preuve d'optimalité. On raisonne maintenant sur la classe de *tous* les algorithmes qui résolvent le problème P1 dans le modèle de calcul précédemment décrit. L'ensemble des exécutions de tout algorithme de ce type sur une suite S à n éléments peut être représenté par un arbre binaire appelé *arbre de comparaisons*, dont chaque nœud interne correspond à la comparaison d'un élément de S et d'un autre nombre, et dont chaque feuille représente une réponse de l'algorithme. Il est important de comprendre ici qu'un même arbre représente les exécutions possibles de l'algorithme sur *toutes* les suites de taille n, chaque branche représentant la suite de comparaisons effectuée sur une instance

particulière. La longueur des plus longues branches correspond donc à la complexité au pire sur les suites de cette taille.

On appelle *hauteur* d'un arbre la longueur (le nombre d'arêtes) de sa branche la plus longue. Tout arbre binaire possédant m feuilles est nécessairement de hauteur au moins $\lceil \log_2 m \rceil$, ou dit autrement un arbre binaire de hauteur h possède au plus 2^h feuilles. Dans le cas présent, comme tous les entiers k entre 0 et n sont une issue possible du calcul (positions d'insertion possibles d'un élément b dans une suite S de taille n), chacun d'entre eux doit être représenté par au moins une feuille de l'arbre, qui doit donc avoir au moins $n+1$ feuilles. Ainsi, au moins une des branches doit être de longueur supérieure ou égale à $\lceil \log_2(n+1) \rceil$. On en déduit que *tout* algorithme résolvant ce problème *doit* effectuer au moins $\lceil \log_2(n+1) \rceil$ comparaisons dans le pire cas. On a bien ici un minorant de la complexité du *problème* en lui-même, et non d'un algorithme spécifique le résolvant, puisqu'on a raisonné sur un algorithme quelconque. Puisque l'algorithme A1 étudié précédemment effectue au plus $\lceil \log_2(n+1) \rceil$ accès aux éléments de S (et donc comparaisons), il est dit *optimal*. C'est une caractéristique fondamentale de cet algorithme et de ses variantes.

III. UN CADRE GENERAL : L'APPROCHE "DIVISER POUR REGNER"

L'algorithme de recherche binaire est un représentant de la méthode de résolution de problèmes « diviser pour régner » (*divide and conquer*). La particularité de ces méthodes est d'exhiber une structure commune, décrite par exemple dans (Cormen et al., 1994) :

- Étape **diviser** : on subdivise l'instance donnée en un certain nombre de sous-instances plus petites *du même problème* ;
- Étape **régner**, ou en anglais *conquérir* : on résout récursivement chaque sous-instance, ou si certaines sont de très petite taille on donne leur solution directement ;
- Étape **combiner** : on déduit de la solution à chaque sous-instance une solution à l'instance de départ.

De nombreux problèmes admettent une résolution de ce type, qui permet d'exprimer la complexité des algorithmes-solutions par une formule de récurrence. Dans le cas particulier où l'instance à traiter est subdivisée en sous-instances de tailles (quasiment) égales, un résultat appelé "théorème maître" donne une expression approchée de la complexité :

> **Théorème maître (Cormen et al., 1994, théorème 4.1, p. 70).** Soient $a \geq 1$ et $b \geq 1$ deux constantes, $f(n)$ une fonction, et soit $T(n)$ la suite d'entiers naturels définie par $T(n) = aT(n/b) + f(n)$, où l'on interprète n/b soit comme $\lfloor n/b \rfloor$, soit comme $\lceil n/b \rceil$. $T(n)$ admet l'une des estimations asymptotiques suivantes :
>
> - Si $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$ pour une constante $\epsilon > 0$, alors $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$.
> - Si $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, alors $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log_2 n)$.

- Si $f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\epsilon})$ pour une constante $\epsilon > 0$, et si $af(n/b) \leq cf(n)$ pour une constante $c < 1$ et pour n suffisamment grand, alors $T(n) = \Theta(f(n))$.

Les cas de base de la définition de $T(n)$ sont omis de l'énoncé par simplicité. Nous ne présentons pas la preuve du théorème ici mais il est intéressant de noter que celle-ci utilise des arguments du même type que ceux rencontrés ci-dessus, en particulier une réflexion sur l'arbre des sous-instances récursives, sa hauteur et son nombre de feuilles.

Nous disposons ainsi d'une méthode générale pour obtenir une estimation asymptotique de la complexité (disons $T(n)$) de l'algorithme A sur une liste de taille n. En effet celle-ci s'exprime par la formule $T(n) = T(n/2) + 1$, on peut donc appliquer le théorème maître avec $a = 1$, $b = 2$ et $f(n) = 1$. Comme $f(n) = 1 = \Theta(n^0)$, le cas 2 du théorème s'applique et on obtient directement $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log_2 n) = \Theta(\log_2 n)$.

IV. DEMONSTRATION PAR DICHOTOMIE : L'EXEMPLE DU THEOREME DES VALEURS INTERMEDIAIRES

Le raisonnement par dichotomie est un outil classique des mathématiques, qui apparaît dans la démonstration de théorèmes bien connus d'analyse, comme le Théorème des valeurs intermédiaires ou encore le Théorème de Bolzano-Weierstrass. Il relève d'une approche de type "diviser pour régner", dans un sens moins algorithmique que précédemment évoqué. Ce type d'argument apparaît également sous une forme plus simple dans le raisonnement par disjonction de cas (par exemple selon le signe ou la parité d'un nombre), ou de manière légèrement différente dans le raisonnement par induction structurelle, très utilisé en informatique théorique par exemple. Dans cette section, nous nous intéressons à l'usage d'un raisonnement de ce type dans une démonstration d'un cas particulier du théorème des valeurs intermédiaires, parfois appelé Théorème de Bolzano (Guillemot, 1990) :

> **Théorème des valeurs intermédiaires (cas particulier, dit Théorème de Bolzano).** Pour toute fonction f continue sur l'intervalle $[\![a, b]\!]$ et telle que $f(a)f(b) \leq 0$, il existe $c \in [\![a, b]\!]$ tel que $f(c) = 0$.

Nous proposons ici une démonstration par dichotomie utilisant le théorème (ou axiome) des suites adjacentes. Il est intéressant de noter que la démonstration originelle de Bolzano utilise la propriété de la borne supérieure (Guillemot, 1990), qui peut être vue (à nouveau par un argument de dichotomie) comme une conséquence du théorème des suites adjacentes.

Démonstration – tirée de (Perrin 2017): Si $f(a)$ ou $f(b)$ est nul le résultat est évident. Sinon, on peut supposer $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$, quitte à appliquer le théorème à $-f$. On construit par récurrence deux suites adjacentes (a_n) et (b_n), avec $a_0 = a$ et $b_0 = b$. On passe de n à $n + 1$ en considérant $f\left((a_n + b_n)/2\right)$. S'il est positif, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = (a_n + b_n)/2$, sinon on pose $a_{n+1} = (a_n + b_n)/2$ et $b_{n+1} = b_n$. Soit c la limite commune de (a_n) et (b_n). Comme f est continue, les suites $(f(a_n))$ et $(f(b_n))$ convergent vers $f(c)$. Mais comme $f(a_n) \leq 0$ et $f(b_n) \geq 0$, $f(c) = 0$.

V. DICHOTOMIE EN ANALYSE NUMERIQUE : RECHERCHE DE ZERO

Une application directe de la preuve donnée dans la section précédente consiste à rechercher par une méthode de dichotomie (ou *bisection method*) un encadrement d'un zéro d'une fonction supposée continue et dont le signe change sur l'intervalle étudié. Cette application est exploitée dans de nombreuses ressources à destination des enseignants de lycée, par exemple dans les documents ressources officiels sur l'algorithmique de 2009 et 2017 (MEN, 2009b, 2017b). Ces ressources appellent à une analyse plus détaillée, que nous ne pouvons développer ici faute de place mais sur laquelle nous reviendrons lors du colloque. On considère donc le problème suivant :

> **Problème P2 : encadrement du zéro d'une fonction.** Soit f une fonction continue sur un intervalle I, soient $a < b$ deux points de I et $\epsilon > 0$ un réel. Déterminer $c \in I$ tel que f admet un zéro dans $[c - \epsilon, c + \epsilon]$.

Une fonction Python proposée en réponse à ce problème est fournie dans (MEN, 2017b) :

```
def dichotomie(f, a, b, epsilon=0.0001):
    assert(f(a) * f(b) < 0 and a < b)
    while b - a > epsilon:
        c = (a + b) / 2
        if f(a) * f(c) <= 0:
            a, b = a, c
        else:
            a, b = c, b
    return (a + b) / 2
```

La seconde ligne de cette fonction a pour effet de stopper le calcul si la fonction ne change pas de signe sur l'intervalle $[a, b]$ (ou si l'intervalle est vide). On note cependant que la continuité de f est laissée à l'état d'hypothèse et n'est pas vérifiée faute de moyen approprié. Il est également courant de « protéger » le calcul en imposant une borne fixe sur le nombre maximal d'itérations.

L'une des difficultés rencontrées par ce type de procédure est qu'un programme ne manipule pas des nombres réels mais des représentations approchées (en général des nombres à virgule flottante, de précision limitée). Il est donc concevable que pour certaines fonctions f possédant des points d'images très proches de 0, le résultat renvoyé par la fonction `dichotomie` soit en réalité très éloigné d'un véritable zéro de la fonction, la comparaison `if f(a) * f(c) <= 0` pouvant se révéler trop imprécise. Par exemple, définissons en Python la fonction $f(x) = (x - 0,3).e^{-1/(x-0,3)^2}$, complétée en $0,3$ par $f(0,3) = 0$:

```
def f(x):
    if x == 0.3:
        return 0
    else:
        return (x - 0.3) * exp(-1 / (x - 0.3)**2)
```

Cette fonction est continue et strictement monotone sur et s'annule en $0,3$. L'exécution sur `f` de la fonction `dichotomie` définie ci-dessus donne un résultat incorrect:

```
>>> dichotomie(f, 0, 1)
0.250030517578125
```

On trouve dans (Burden & Faires, 2010) une description détaillée de la méthode de bissection, de ses propriétés (notamment sa vitesse de convergence, qualifiée de « comparativement lente ») et de ses autres limitations (sensibilité aux erreurs d'arrondi), ainsi qu'une discussion sur d'autres critères de continuation possibles à la place du test `b - a > epsilon`. On trouve également dans (Bridges & Vîţă, 2006, p.2) une discussion sur l'aspect *non constructif* de cette méthode, qui implique qu'il n'est pas possible de la « réparer » en recourant par exemple à des représentations des décimaux en précision arbitraire. Leur validité n'étant pas garantie, on peut avancer que les programmes de ce type ne constituent pas des algorithmes au sens strict (mais plutôt des méthodes numériques approchées).

VI. BISSECTION ET RECHERCHE BINAIRE : UNE COMPARAISON

Les procédures de résolution des problèmes P1 et P2 semblent proches et relèvent toutes deux du paradigme diviser pour régner. Mais elles comportent des différences fondamentales, *a fortiori* dans un contexte d'enseignement. Nous citons ici les points les plus marquants.

La première différence entre ces problèmes est leur contexte d'application. Le problème P1 met en jeu des objets discrets, élémentaires en informatique, mais qui ne semblent pas toujours identifiés par les enseignants comme relevant du domaine mathématique qu'ils sont chargés d'enseigner. Le problème P2 met en jeu des fonctions à variable réelle, qui ont un lien fort avec les programmes d'analyse du lycée (notamment le théorème des valeurs intermédiaires), mais peut de ce fait présenter une difficulté mathématique accrue pour les élèves, au risque de masquer les enjeux algorithmiques sous-jacents. En particulier, les questions de choix d'un critère d'arrêt et d'interprétation du résultat obtenu sont des points délicats.

Une autre différence concerne la discussion sur l'efficacité de la procédure. Dans le premier cas, on a vu que la recherche binaire (algorithme A1) est optimale au sens de la complexité algorithmique, grâce à un argument de dénombrement. Par contraste, la notion de vitesse de convergence propre à l'analyse numérique diffère sensiblement de celle de complexité algorithmique « classique », et l'analyse de l'efficacité de la méthode de bissection ne peut être aisément abordée par des arguments du même type. En présence d'hypothèses plus fortes de régularité des fonctions, d'autres méthodes peuvent converger plus rapidement.

Enfin, comme évoqué plus haut, une implémentation directe de la méthode de bissection est sensible aux problèmes d'arrondi liés au choix de représentation des nombres réels. Cet aspect constitue une troisième et dernière différence, peut-être la plus importante dans un contexte d'enseignement.

Il est tentant pour mesurer la distance conceptuelle qui sépare ces deux problèmes de chercher à déterminer, étant donnée une instance (S, b) du problème P1, une instance (f, a, b, ε) du problème P2 dont la solution permettrait d'en déduire la réponse au

problème P1 sur (S, b), et réciproquement (on parle de *réductions*). Cependant, cette tâche s'avère assez fastidieuse et ne semble pas apporter d'éclairage nouveau sur les questions qui nous occupent.

Malgré les différences relevées entre les problèmes P1 et P2, on constate qu'une variante simplifiée du problème P1 (« jeu du nombre à deviner ») est fréquemment convoquée comme préalable (voire comme équivalent simplifié) au problème P2, par exemple dans (MEN, 2009b). Au-delà d'une exposition à l'idée de dichotomie, il ne nous semble pas évident *a priori* que ceci favorise une compréhension fine du problème P2 par les élèves. En particulier, comme discuté précédemment, l'optimalité de l'algorithme de recherche binaire ne peut constituer une justification de la pertinence de la méthode de bissection dans la recherche de zéro d'une fonction, comme le propose MEN (2009b). Le problème P1 général est quant à lui très rarement rencontré, à part dans certaines ressources « expertes » pour la formation d'enseignants. Notre hypothèse est que les problèmes de traitement de données (tri, recherches, etc.) ne sont pas reconnus par les enseignants de mathématiques ou les institutions d'enseignement des mathématiques comme relevant d'une interaction avec les mathématiques (alors que, par exemple, la notion d'ordre y est prégnante).

VII. CONCLUSION ET PERSPECTIVES DIDACTIQUES

Nous avons exposé deux problèmes classiques et leurs solutions, dans deux contextes, l'un en algorithmique classique sur les listes finies, l'autre en analyse numérique approchée. L'approche dominante au lycée du thème de la dichotomie semble être la recherche de zéro d'une fonction, ou plus généralement de mise en œuvre pratique du théorème des valeurs intermédiaires, dans l'objectif éventuel d'en simplifier la compréhension par les élèves. Ainsi, dans (MEN, 2017b), on lit :

> La méthode de dichotomie constitue un procédé dont la compréhension et la mise en œuvre peuvent être particulièrement délicates pour les élèves. Le détour par l'algorithmique permet de « faire fonctionner » la méthode et de l'observer en acte.

On se situe ici dans une démarche d'explicitation des contenus mathématiques par la programmation, sans regard porté sur le programme ou l'algorithme lui-même en tant qu'objet d'étude – cela va dans le sens des observations de Modeste (2012). Nous avons vu que les algorithmes et programmes concernés sont loin d'être simples, en particulier en raison de la complexité du calcul sur les nombres flottants. Enfin, on peut s'interroger sur la compréhension des notions d'algorithmique par les élèves en cas de difficulté sur les notions d'analyse mises en jeu.

Le problème de recherche dans une liste triée et l'algorithme de recherche binaire, tous deux fondamentaux en informatique, sont peu voire pas exploités dans des activités à destination des élèves. Quand ils le sont, c'est souvent sous la forme d'activités d'approche (du type « jeu du nombre à deviner »). Nous émettons l'hypothèse que des activités adaptées sur ce sujet permettraient d'explorer ou de réinvestir plusieurs notions importantes, tant de nature informatique que mathématique, à divers niveaux : notions algorithmiques de base (variables, conditions, boucles), manipulation de listes ou tableaux, découverte progressive de la notion de complexité, approche de l'algorithme en

tant qu'objet, calcul algébrique (puissance, éventuellement logarithme), démonstration (en particulier par récurrence).

RÉFÉRENCES

Burden L. B., Faires J. D. (2010) *Numerical Analysis (9th ed.)*. Brooks & Cole.

Bridges D. S., Vîţă L. S. (2006) *Techniques of Constructive Analysis.* Springer.

Cormen T. H., Leiserson C. E., Rivest R. L., & Cazin X. (1994). *Introduction à l'algorithmique (2ème édition)*. Paris : Dunod.

Guillemot M. (1990) Bolzano et la démonstration du théorème des valeurs intermédiaires. In Barbin E. (Ed.) *La démonstration mathématique dans l'histoire*. IREM de Lyon.

Ministère de l'Éducation Nationale (2009a) Programme de mathématiques, enseignement commun, seconde générale et technologique, BO n°30 du 23/07/2009, http://www.education.gouv.fr/cid28928/mene0913405a.html

– (2009b) Ressources pour la classe de seconde – Algorithmique, http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Programmes/17/8/Doc_ress_algo_v25_109178.pdf

– (2015) Programme d'enseignement du cycle 4, BO spécial du 26/11/2015, http://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?cid_bo=94717

– (2017a) Aménagements des programmes d'enseignement de mathématiques et de physique-chimie, seconde générale et technologique, BO n°18 du 04/05/2017, http://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?cid_bo=115984

– (2017b) Ressources pour le lycée - Algorithmique et programmation, http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/73/3/Algorithmique_et_programmation_787733.pdf

Modeste S. (2012) *Enseigner l'algorithme pour quoi ? Quelles nouvelles questions pour les mathématiques ? Quels apports pour l'apprentissage de la preuve ?* Manuscrit de thèse. Université de Grenoble. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00783294

– (2015) Impact of informatics on mathematics and its teaching. On the importance of epistemological analysis to feed didactical research, in Gadducci F., Tavosanis M. (Eds.) *History and Philosophy of Computing*, IFIP Series, Vol.487 (Springer).

Ouvrier-Buffet C., Meyer A., Modeste S. (2018) Discrete Mathematics at University Level. Interfacing Mathematics, Computer Science and Arithmetic. 2nd INDRUM conference, Norway.

Perrin D. (2017) Deux démonstrations par dichotomie. Site personnel. https://www.math.u-psud.fr/~perrin/CAPES/analyse/fonctions/Dichotomies.pdf

Sedgewick R. (1988) *Algorithms.* Addison Wesley.

CONCEPTION DE LA NOTION D'ALGORITHME A LA TRANSITION SECONDAIRE-SUPERIEUR EN FRANCE[1]

MODESTE Simon[*] – RAFALSKA Maryna[**]

Résumé – Nous nous intéressons aux conceptions d'élèves et étudiants à la transition secondaire-supérieur en France autour de l'algorithme et de l'algorithmique. À l'aide d'un questionnaire et d'une grille d'analyse basée sur un modèle épistémologique, nous montrons comment ces conceptions évoluent dans le temps et comment la dimension objet du concept se développe lors des premières années de l'enseignement supérieur.

Mots-clefs : algorithme, algorithmique, transition, secondaire, supérieur.

Abstract –We are interested in pupils' and students' conceptions of main notions of Algorithmics in the transition "secondary school-university" in France. Using a questionnaire and an analysis grid based on an epistemological model, we show how these conceptions evolve with time and how object dimension of the notion "algorithm" develops in students' conceptions during the first years of university.

Keywords: algorithm, algorithmics, transition, secondary school, university.

I. INTRODUCTION ET PROBLEMATIQUE

En France, l'algorithmique (comme champ scientifique s'intéressant à la conception d'algorithmes et à leur étude) est actuellement présente dans l'enseignement supérieur scientifique[2], mais aussi dans l'enseignement secondaire (programmes nationaux).

L'algorithmique a fait son apparition dans les programmes du lycée entre 2009 (classe de seconde – grade 10) et 2012 (classe de terminale – grade 12), dans les programmes de mathématiques. Des travaux comme (Modeste, 2012a, 2012b) ont étudié cette introduction. Modeste (2012) a montré la transposition didactique (au sens de Chevallard, 1985) spécifique de la notion d'algorithme qui est en jeu au lycée français. Modeste & Rafalska (2016) mettent en perspective cette transposition par rapport à ce qui peut être en jeu ailleurs, en Ukraine en l'occurrence.

Des éléments liés à l'algorithmique sont aussi enseignés au lycée dans les options de sciences de l'ingénieur des filières scientifiques, ou encore dans la spécialité optionnelle ISN (Informatique et Sciences du Numérique) de Terminale Scientifique (grade 12) créée en 2012.

Dans le même temps, un enseignement d'informatique (contenant une part d'algorithmique) s'est consolidé et généralisé dans les filières scientifiques des Classes Préparatoires aux Grandes Écoles (CPGE – correspondant aux deux premières années universitaires permettant de préparer les concours d'entrée en école d'ingénieur).

Par ailleurs, l'informatique, et en particulier l'algorithmique, est enseignée depuis bien longtemps à l'université, dès les premières années de licence (premier cycle universitaire constitué des 3 premières années, équivalent du Bachelor). On retrouve bien de l'algorithmique dans les licences d'informatique, mais aussi dans des licences comme les celles de mathématiques ou de mathématiques-informatique. Cet enseignement, bien installé, se trouve confronté aux évolutions récentes des curriculum du second degré concernant

[1]Publication réalisée avec le soutien financier de l'ANR, projet DEMaIn <ANR-16-CE38-0006-01>.
[*] IMAG, Université de Montpellier, CNRS, Montpellier – France – simon.modeste@umontpellier.fr
[**] Institut Français de l'Éducation, ENS de Lyon – France – rafalskayamarina@gmail.com
[2]Dans cet article, nous mettrons de côté les formations courtes de techniciens (Diplôme Universitaire de Technologie, Brevet de Techniciens Supérieur) du supérieur. L'étude de ces formations pourrait être intéressant pour notre thème mais demanderait un travail à part entière pour prendre en compte la diversité des filières concernées.

l'algorithmique. On pourrait penser que ces changements au lycée permettent une bonne préparation aux enseignements d'algorithmique dans le supérieur.

Le travail de (Modeste, 2012) laisse penser que cela est plus complexe et nous faisons l'hypothèse que, selon les institutions (les différents types d'établissements et niveaux scolaires, mais aussi les différentes filières et même les différents cours), les conceptions de la notion d'algorithme et de l'algorithmique mises en jeu diffèrent sensiblement et que la transition entre enseignement secondaire et supérieur à ce sujet n'est pas si simple.

La problématique de cet article est donc la suivante :

Quelles conceptions de l'algorithme et de l'algorithmique les différentes institutions scolaires et universitaires construisent-elles chez les élèves/étudiants à la transition secondaire-supérieur (scientifique)?

Plus précisément :

En quoi ces conceptions diffèrent-elles ou sont-elles proches ?

Comment peut-on expliquer les disparités qui apparaissent ?

Comment ces conceptions évoluent-elles dans le temps dans une même filière ou au passage d'une institution à l'autre ?

II. CADRE THEORIQUE

Pour répondre à cette problématique, nous proposons d'étudier les effets des transpositions didactiques en jeu dans les différentes institutions (Chevallard, 1985) au travers des rapport au savoir, les conceptions au sens de Vergnaud (1990), que montrent les élèves/étudiants issus de ces institutions. Nous faisons l'hypothèse de recherche que ces conceptions individuelles (ou les grandes tendances dans ces conceptions) nous renseignent sur les conceptions proposées construites par les institutions dont ces individus sont les élèves/étudiants, autrement dit qu'elles décrivent aussi le rapport des institutions à l'algorithme et à l'algorithmique.

Pour étudier ces conceptions, nous nous appuyons sur un modèle épistémologique proposé par (Modeste, 2012; Modeste, Ouvrier-Buffet, & Gravier, 2010). Ce modèle épistémologique du concept d'algorithme identifie cinq aspects fondamentaux :

- ***problème*** : un algorithme résout un problème, c'est-à-dire, répond à une question précise posée pour une famille d'instances ; incluant les notions d'entrée et de sortie ;

- ***effectivité*** : sur des données finies un algorithme, en suivant des règles non-ambiguës, apporte de façon effective une solution en un nombre fini d'étapes ; un algorithme peut être mis en œuvre par un opérateur quelconque, en particulier par un ordinateur/une machine exprimé sous forme d'un programme ;

- ***preuve*** : permet d'assurer que l'algorithme aboutit au bon résultat quelle que soit l'instance (*correction*) et garantit que ce résultat sera atteint en un nombre fini d'étapes (*terminaison*) ; utilisation d'algorithme dans des preuves ; liens aux preuves algorithmiques, par récurrence ou induction, etc. ;

- ***complexité*** : la complexité en temps, en espace, pour comparer des algorithmes entres eux et rechercher l'algorithme le plus efficace pour un problème donné ; la complexité calculée au pire, en moyenne, etc. ;

- ***modèles théoriques*** : machine de Turing, fonctions récursives et autres modèles ; les classes de complexité (P, NP, etc.) ; les notions de décidabilité et d'indécidabilité, etc.

Ces aspects se décomposent en deux catégories : ceux qui relèvent de l'algorithme comme outil (les aspects problèmes et effectivité) et ceux qui relèvent de l'algorithme comme objet (complexité, preuve et modèles théoriques). Regarder l'algorithme en tant qu'objet c'est s'intéresser aux questions de bon fonctionnement, de domaine de validité, de complexité et de description des algorithmes. Ce sont les problématiques de l'algorithmique. Regarder l'algorithme en tant qu'outil, c'est s'intéresser à l'utilisation que l'on en fait pour résoudre des problèmes.

Cet outil épistémologique a montré sa pertinence pour étudier les transpositions dans les programmes, ressources et manuels scolaires (Modeste, 2012a), mais aussi pour décrire les conceptions d'individus (variations des conceptions de l'algorithme chez des chercheurs en informatique et mathématiques, fondamentales et appliquées) (idem.).

Avec ce cadre, nous pouvons reformuler notre problématique en questions de recherche :

- *Quels aspects de l'algorithme sont présents dans les conceptions des élèves/étudiants des institutions de la transition secondaire-supérieure (scientifique) ?*

- *Comment peut-on interpréter les variations qui apparaissent ?*

- *Quels aspects apparaissent au fur et à mesure des cursus (continuités) ?*

- *Quelles ruptures se dessinent lors des transitions (changement d'institution) ?*

III. METHODOLOGIE

Pour répondre à ces questions de recherche, nous avons élaboré un questionnaire à faire passer aux élèves et étudiants. Il inclut des questions ouvertes et à choix multiples.

1. Construction du questionnaire

Nous détaillons d'abord la constitution de ce questionnaire. Ces premières questions ont pour but d'identifier la vision générale de l'algorithme et de l'algorithmique chez les élèves et les étudiants ainsi que leurs points de vue sur le rôle de l'algorithme dans la résolution de problèmes. En particulier, elles concernent :

- la définition de la notion d'algorithme, sa description :

  Comment expliqueriez-vous ce qu'est un algorithme, à quelqu'un de votre niveau qui n'a jamais fait d'algorithmique ? Si vous deviez écrire la définition du mot algorithme dans un dictionnaire, qu'écririez-vous ? Quel exemple donneriez-vous ?

- le rôle des algorithmes :

  A quoi servent les algorithmes ?

- la preuve des algorithmes :

  Comment peut-on vérifier qu'un algorithme donne une réponse correcte ?

- l'analyse des algorithmes :

  Quelles sont les critères de comparaison pour choisir parmi plusieurs algorithmes résolvant un même problème ?

Les dix-sept questions à choix multiples proposent aux élèves/étudiants de s'interroger sur certaines caractéristiques de l'algorithme afin d'identifier les aspects en jeu mais aussi les amalgames, les lacunes et les contradictions possibles dans leurs conceptions, ce qui ne peut pas être toujours possible lorsque l'on utilise seulement des questions ouvertes. Ainsi les questions à choix multiples concernent, dans un premier temps, les propriétés des algorithmes telles que :

- la nature discrète (commandes d'un algorithme exécutées une par une dans un ordre précis) ;

- la certitude (les instructions d'algorithmes doivent être formulées sans ambiguïté ; l'ordre des opérations d'un algorithme est important) ;

- la faisabilité (un algorithme doit être exécutable par l'opérateur, c'est-à-dire qu'il ne doit contenir que des commandes incluses dans le système de commande de l'opérateur) ;

- la finitude (le nombre d'étapes d'un algorithme est fini) ;

- l'effectivité (l'algorithme donne le résultat qui correspond à l'objectif fixé) ;

- la généricité (un algorithme doit pouvoir s'appliquer à n'importe quel cas d'un problème et garantir de toujours produire une solution pour ce cas).

Les questions proposées abordent aussi les langages d'écriture d'un algorithme, les systèmes qui exécutent les algorithmes ainsi que les types de problèmes que l'on peut résoudre à l'aide d'algorithmes.

À chaque fois, des énoncés sont proposés avec quatre propositions : d'accord, pas d'accord, ça dépend, je ne me prononce pas. Cela a pour but d'éliminer les réponses automatiques ou les réponses par élimination en permettant d'exprimer un doute ou une incompréhension. Nous avons aussi proposé aux élèves/étudiants de justifier leurs choix dans une ligne de commentaire (facultative), afin d'avoir plus d'informations sur les raisons qui ont guidé leurs réponses.

Exemple.

Un algorithme est toujours écrit à destination d'une machine (ordinateur, robot, calculatrice, ...).

□ d'accord □ pas d'accord □ ça dépend □ je ne me prononce pas

Commentaire_____

On voit bien ici qu'il ne s'agit pas de déterminer si les élèves/étudiants fournissent des réponses correctes ou erronées mais d'arriver à décrire leur conception, au travers du rapport au concept algorithme qui se révèle dans les réponses et leurs commentaires.

Le questionnaire (anonyme) demandait tout de même un certain nombre d'informations individuelles sur les cursus des élèves/étudiants interrogés et sur leur expérience de l'algorithmique et de la programmation.

2. Passation du questionnaire et organisation de l'analyse des réponses

Afin d'analyser les conceptions de l'algorithme chez les élèves et étudiants à la transition secondaire-supérieur en France, nous avons distribué durant l'année scolaire 2015-2016 le questionnaire à différents niveaux et filières, en particulier :

- au lycée : 3 classes de Première (grade 11) filière scientifique et 4 classes de Terminale (grade 12) filière scientifique, incluant une classe avec option ISN ;

- en CPGE : 2 classes de première année, filières PCSI (physique-chimie-sciences de l'ingénieur) et PTSI (physique-technologie-sciences de l'ingénieur) ;

- à l'université de Montpellier : 2 groupes de Licence première année (Licence Mathématiques et Informatique respectivement) et 1 groupe de Licence deuxième année (Licence Informatique).

Dans la suite, nous appellerons « groupe » chaque classe de lycée et chaque groupe de Licence observé. Au total, le questionnaire a été distribué à plus de 300 élèves et étudiants en France. Les passations ont eu lieu en fin de premier semestre et début de second semestre. Les

élèves/étudiants interrogés avaient donc déjà passé plusieurs mois dans la classe (et l'institution) au titre de laquelle on les questionne.

Pour l'étude des réponses aux questions ouvertes, nous avons élaboré une grille d'analyse reposant sur les 5 aspects d'algorithme présentés dans la section précédente. La Figure 1 donne un exemple de la grille servant à identifier les aspects évoqués dans les réponses des élèves et des étudiants. En colonne, nous pouvons trouver les aspects de l'algorithme avec les points principaux qui caractérisent ces aspects (voir Modeste (2012)). Une ligne correspond aux réponses d'un élève/étudiant. Le chiffre 1 représente le fait que l'aspect est évoqué dans la réponse de manière explicite ou implicite (dans la description ou dans les exemples donnés par les élèves/étudiants).

	Effectivité						Problème		Complexité		Preuve				Modèles théoriques		
Numéro d'étudiant	Langage	Opérateur req, règles non-ambiguës	Ordinateur/machine ou programme	Calculs/Formules	Succession d'étapes/ordres/instructions	Finitude	Résolution de problèmes	Entrée/sortie	Complexité (Espace/Temps)	Optimalité	Correction	Terminaison	Outil de preuve	Récurence	Machine de Turing et autres modèles	Décidabilité	P/NP
L2-1-1							1		1		1	1					
L2-1-2											1						
L2-1-3							1		1		1						
L2-1-4			1	1			1		1	1	1						
L2-1-5							1		1		1						
L2-1-6									1	1							
L2-1-7									1			1					
L2-1-8									1	1							
L2-1-9									1		1						
L2-1-10					1		1		1		1	1					
L2-1-11					1				1		1						

Figure 1 *– Exemple d'utilisation de la grille d'analyse.*

Cela nous a permis ensuite d'identifier quels aspects de l'algorithme sont dominants dans les conceptions des élèves/étudiants à différents niveaux ainsi que les proportions d'élèves/étudiants évoquant tels ou tels aspects (ou combinaison d'aspects) dans chaque groupe et les variations de ces proportions aux différents niveaux étudiés.

Pour l'analyse des réponses aux questions à choix multiples, nous avons eu une première approche quantitative, en relevant les statistiques des items choisis pour chacune des questions dans les différents groupes étudiés. Cela nous a permis d'identifier les questions sur lesquelles il apparaissait le plus d'écart entre les réponses majoritaires des groupes, les questions pour lesquelles nous notons des écarts dans certains groupes vis-à-vis de la conception du point de vue du savoir savant et qui ont mis certains groupes en difficulté (majorité de « je ne me prononce pas » par exemple, ou grande diversité des réponses dans un même groupe).

Dans chacun de ces cas, nous nous sommes interrogés sur les raisons de ces réponses chez les élèves/étudiants de chaque groupe ainsi que l'évolution des réponses en fonction du niveau d'enseignement (passage lycée-supérieur ou au cours d'une filière par exemple). Pour étayer nos interprétations, les commentaires proposés par certains élèves/étudiants concernés ont été un apport important.

IV. RÉSULTATS

Nous présentons ici quelques résultats obtenus, que nous détaillerons lors de la présentation des recherches au groupe. Pour des raisons de place, nous ne pouvons présenter les résultats de toutes les institutions concernées, ni de tous les points du questionnaire. En particulier, nous n'aborderons pas ici les Classes Préparatoires aux Grandes Écoles.

1. Niveau secondaire (fin du lycée)

Dans les définitions de la notion d'algorithme, données en classes de Première S et Terminale S, l'aspect *effectivité* est dominant. Les élèves évoquent « une suite d'instructions s'effectuant rigoureusement dans l'ordre » ; « une série d'étapes à exécuter », « une chaîne de calculs programmés », « une succession de consignes données à un ordinateur », « des lignes écrites en un langage compréhensible par tous », etc. Beaucoup d'élèves (52% à 80% dans les groupes de Première S et 64% à 86% dans les groupes de Terminale S) utilisent la notion de programme pour définir la notion d'algorithme. Par exemple : « un algorithme est un programme qui résout ce qu'on lui demande étape par étape, toujours de la même manière ».

L'algorithme figure souvent dans les réponses comme outil d'automatisation des calculs à l'aide d'une machine (la calculatrice ou l'ordinateur). En classes de Terminale S, nous avons aussi trouvé un certain nombre de définitions qui se réfèrent au langage d'écriture d'un programme en utilisant les concepts de la programmation tels que la notion de variable, les entrées-sorties, les conditions, les boucles, les fonctions, etc. Cette situation est davantage présente dans les réponses des élèves ayant choisi l'option ISN.

Exemple : Un algorithme est une méthode de calcul composée d'une initialisation, où les variables sont déclarées, d'un traitement qui permet d'effectuer les calculs et d'une sortie qui affiche la variable souhaitée.

La plupart des élèves en Première S et en Terminale S qui ont répondu que les algorithmes sont utilisés pour la résolution de problèmes, donnent des exemples de problèmes mathématiques : algorithme d'Euclide ; évaluation de la distance parcourue selon la vitesse et le temps ; vérification si un triangle est rectangle ou non, en donnant les longueurs de chaque côté, etc. (en Première S) ; évaluation du discriminant, des racines d'un polynôme, les évaluations successives des éléments d'une suite, etc. (en Terminale S).

Comme en classes de Première S, les élèves de Terminale S n'évoquent pas explicitement la notion de complexité. Cependant, dans le contexte des critères de comparaison des algorithmes, ils parlent plus souvent (Terminale S : 14% à 27%, contre Premier S : 9% à 12%) de temps d'exécution, d'efficacité d'un algorithme sans donner d'explications supplémentaires. Il n'est pas évident d'identifier ce dont ils parlent réellement : de nombre d'exécutions à faire pour avoir le résultat (rapidité), de temps passé avant l'affichage du résultat sur l'écran, du nombre d'opérations élémentaires dans un algorithme en fonction de la taille des données ou d'autre chose. Pour valider les algorithmes, ils ne proposent, dans la majorité des cas, de ne le faire qu'au travers de tests de programmes.

Pour résumer, la conception de l'algorithme des élèves de lycée ne se limite qu'aux aspects *effectivité* et *problème* qui caractérisent le concept d'algorithme comme outil. Nous notons quelques apparitions de l'aspect *complexité* sans que la notion correspondante ne soit explicitement mentionnée (on pourrait supposer que la notion est en embryon).

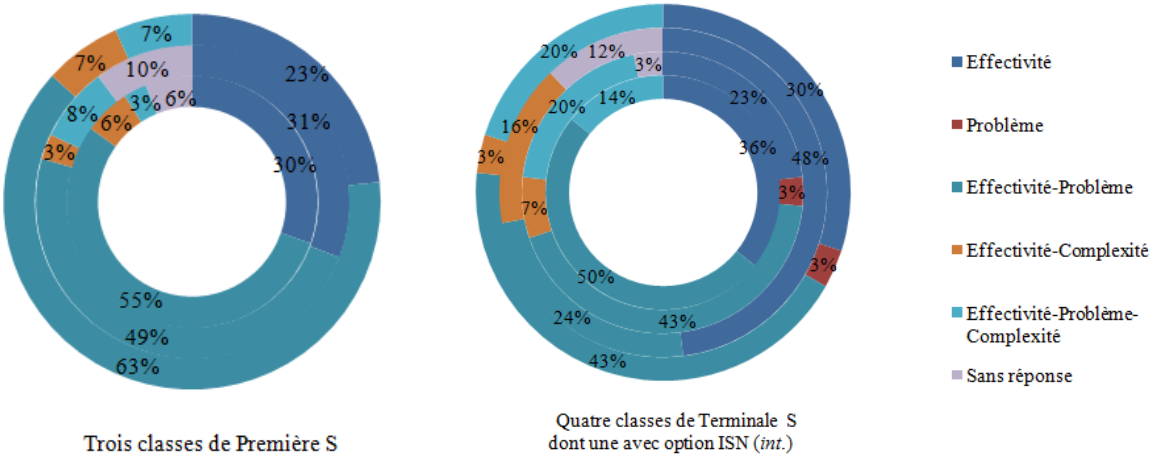


Figure 2 *- Proportions des aspects d'algorithme présents dans les réponses des élèves de lycée (chaque couleur correspond à un ensemble d'aspects présents simultanément)*

2. Niveau supérieur (premières années du niveau universitaire)

Dans la définition de la notion d'algorithme en filières mathématiques et informatique de Licence 1, les aspects *effectivité* et *problème* sont aussi dominants.

Pour décrire la notion d'algorithme, les étudiants d'informatique évoquent le concept de programme (53%) plus souvent par rapport aux étudiants de mathématiques qui parlent principalement de la succession d'étapes ou d'instructions (54%).

La moitié des étudiants de chaque spécialité pense que les algorithmes sont utilisés pour faire des calculs et mettent en avant la dimension outil d'un algorithme.

> L1-Info-13. Un algorithme est une méthode de calcul générale pour un problème donné. L'avantage de l'algorithme c'est que l'on refait exactement les mêmes calculs, dans le même ordre, on change juste les paramètres en fonction du problème. Ex. : trouver la moyenne de plusieurs nombres, calculer le montant final dans un magasin après une réduction.

> L1-Maths-15. Un algorithme est un outil pour faire des opérations répétitives rapidement. Ex. : résoudre des équations.

Comme nous pouvons le voir, les exemples d'algorithmes donnés par les étudiants des deux spécialités sont principalement issus des mathématiques. Cependant, l'aspect *problème* est plus présent dans la spécialité informatique que mathématiques (88% contre 71% respectivement).

Par rapport au lycée, très peu d'étudiants évoquent dans les réponses seulement les aspects *effectivité* ou/et *problème* : 6% en informatique, 21% en mathématiques de Licence 1. Le reste des étudiants aborde aussi la vitesse, le temps de l'exécution, le nombre d'étapes, l'efficacité de l'algorithme, ce qui relève de l'aspect *complexité*. La notion de complexité n'apparaît explicitement qu'en Licence 2 (informatique) (dans 88% de réponses). Nous avons même trouvé quelques définitions d'algorithme en Licence 2 où cet aspect est évoqué. En particulier :

> L2-Info-11. Algorithme – c'est une suite d'instructions à réaliser afin de résoudre un problème, d'obtenir des résultats d'opérations parfois complexes. Cela demande de la réflexion si on veut que l'algorithme soit optimisé, c'est à dire rapide et efficace. Par exemple, pour trier une liste dans l'ordre croissant.

> L2-Info-16. Algorithme c'est comment organiser notre programme de telle manière qu'il est capable de faire/trouver un élément efficace. Par exemple, l'algorithme dichotomique, parce que je crois que lui nous présente comment économiser de temps de recherche (sic).

Par rapport aux Licence 1, les étudiants de Licence 2 (informatique[3]) parlent beaucoup moins des calculs dans les définitions proposées d'algorithme, mettant l'accent sur le langage d'écriture d'algorithme (« universel », « usuel », « courant ») et la résolution des problèmes.

Contrairement aux étudiants de Licence 1 qui proposent de tester le programme pour vérifier que l'algorithme est correct, les étudiants de Licence 2 évoquent la notion d'invariant et parlent de la preuve de la terminaison d'un algorithme. De ce fait, nous notons une apparition de l'aspect preuve (64% de réponses) en Licence 2 (informatique). Ce qui est aussi remarquable à ce niveau c'est que la moitié des étudiants évoquent les 4 aspects : effectivité, problème, complexité et preuve. Cela nous permet de dire qu'il y a un glissement progressif en L1 puis L2 vers une conception de l'algorithme non seulement comme outil mais aussi comme objet[4].

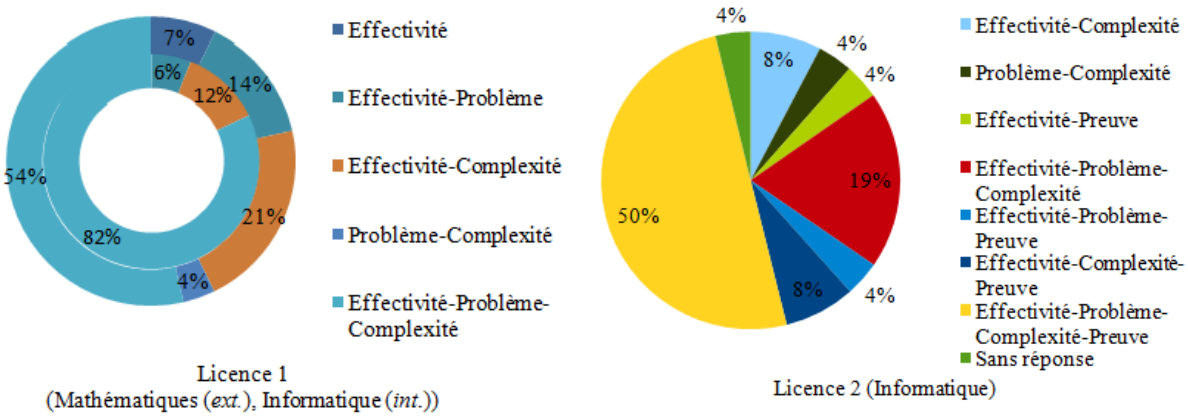


Figure 3 *- Proportions des aspects d'algorithme évoqués dans les réponses des élèves d'université (chaque couleur correspond à un ensemble d'aspects présents simultanément)*

V. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Nous avons montré, sur la base d'une partie des résultats de nos questionnaires, l'évolution des conceptions des étudiants et élèves concernant l'algorithmique à la transition lycée-université. Cela confirme l'approche essentiellement basée sur l'algorithme en tant qu'outil au secondaire et la construction de la dimension objet du concept dans les premières années d'université.

L'analyse des réponses des étudiants, non pas en tant que représentant de leur niveau scolaire/universitaire mais selon leurs filières et options d'origine semble aussi révéler des conceptions variables. En particulier, nous pensons qu'il est raisonnable de faire l'hypothèse d'un rapport différent au concept algorithme dans les cours de mathématiques, d'informatique et de sciences de l'ingénieur.

L'étude des conceptions des élèves/étudiants à la transition secondaire-supérieur permet aussi de confronter les curriculums et enseignements avec les conceptions effectivement

[3]Des contraintes ne nous ont pas permis d'interroger des étudiants de L2 mathématiques pour être complet. Il est prévu de remédier prochainement à cela.

[4]Cela semble cohérent avec les contenus des enseignements d'algorithmique et programmation proposés en début d'université. Nos questionnaires montrent que cela est absent à l'entrée à l'université et parvient à se structurer au cours des deux premières années.

construites. La poursuite de notre étude devrait permettre de questionner la préparation à l'enseignement supérieur dans le secondaire et la prise en compte de l'état des connaissances des étudiants à l'entrée de l'université. Nous souhaitons aussi approfondir la compréhension des réponses d'élèves et d'étudiants éloignées de notre modèle épistémologique pour comprendre les obstacles qui peuvent apparaître à la transition secondaire-supérieur en algorithmique.

REFERENCES

Chevallard Y. (1985) *La transposition didactique – du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Modeste S. (2012a) *Enseigner l'algorithme pour quoi ? Quelles nouvelles questions pour les mathématiques ? Quels apports pour l'apprentissage de la preuve ?* (Manuscrit de thèse). Université de Grenoble. Consulté à l'adresse https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00783294/

Modeste S. (2012b) La pensée algorithmique : Apports d'un point de vue extérieur aux mathématiques. *Actes du Colloque EMF*.

Modeste S., Ouvrier-Buffet C., & Gravier S. (2010) Algorithmique et apprentissage de la preuve. *Repères IREM, 79*, 51-72.

Modeste S. Rafalska M. (2016) Algorithmics In Secondary School: A Comparative Study Between Ukraine And France, Proceedings of CERME 10, Dublin.

Vergnaud G. (1990) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *10*(2-3), 133-170.

ANALYSE DES CONTRÔLES LORS DE LA RÉSOLUTION ALGORITHMIQUE OU MATHÉMATIQUE D'UN PROBLÈME

BEAUVOIR[*] Sylvain

Résumé – Étude du raisonnement algorithmique et de son articulation avec le raisonnement mathématique par l'analyse des structures de contrôle mobilisées lors de la résolution des problèmes issus du projet Euler.

Mots-clefs : algorithme, résolution de problèmes, raisonnement, pensée algorithmique

Abstract – A study of the algorithmic reasoning and its connection with mathematical reasoning through an analysis of the control tools used in solving problems selected from the Euler project.

Keywords: algorithm, problem solving, reasoning, algorithmic thinking

I. INTRODUCTION

Fin 2014, le ministère de l'éducation nationale français a présenté « la stratégie mathématique », un ensemble de mesures visant à améliorer le niveau des élèves. On peut noter la mobilisation de l'algorithmique comme nouvel objet d'enseignement.

> L'algorithmique servira, aux côtés de la géométrie, de support à la pratique du raisonnement déductif, à l'image de ce qui se fait dans bien d'autres pays. (Ministère de l'éducation nationale, 2014)

Le raisonnement algorithmique y est alors affiché comme une déclinaison d'un raisonnement classique des mathématiques. Pourtant, ce lien étroit entre raisonnement mathématique et raisonnement algorithmique, nous semble à étudier et fait l'objet de notre recherche. Plus précisément, nous avons questionné la possibilité de construire un outil méthodologique qui permette d'identifier puis d'analyser le raisonnement en mathématique et en algorithmique lors de la résolution de problèmes.

II. RAISONNEMENT ET RESOLUTION DE PROBLEME

Raisonner est de par nature une entreprise complexe, souvent implicite ; analyser cette tâche nécessite donc de réfléchir à une grille de lecture, à des indicateurs observables pour objectiver ce processus. La recherche en didactique des mathématiques fournit des cadres théoriques qui permettent cela. Nous supposerons donc que ces cadres, ou du moins l'un d'entre eux, permettent aussi d'analyser le raisonnement algorithmique.

Tout d'abord, il nous faut clarifier la notion d'algorithme. Nous retiendrons la définition de Modeste (2012) qui relie clairement celle-ci à la résolution de problèmes.

> Un algorithme est une procédure de résolution de problème, s'appliquant à une famille d'instances du problème et produisant, en un nombre fini d'étapes constructives, effectives, non ambiguës et organisées, la réponse au problème pour toute instance de cette famille. (Modeste, 2012)

C'est donc le processus mental lors de ce type de tâches qu'il nous faut observer. Pour ce faire, nous avons choisi, comme l'a fait Giroud (2011), d'étudier les problèmes comme des concepts au sens de Vergnaud.

> Nous considérons que le concept-problème sur un problème P est composée des éléments suivants :
> - l'ensemble des problèmes $\mathcal{P}$ qui donnent du sens à P, nous parlerons d'espace problème ;
> - l'ensemble des invariants opératoires $\mathcal{I}$ qui correspondent aux connaissances sur lesquelles repose l'action du sujet en situation de résolution d'un élément de $\mathcal{P}$;

[*] IMAG, Université de Montpellier, CNRS, France, Projet ANR DEMaIn [ANR-16-CE38-0006-01]

- l'ensemble des représentations $\mathcal{R}$ que l'on peut associer aux éléments de $\mathcal{P}$. (Giroud, 2011)

Notre intérêt portant sur le raisonnement lors de la résolution de problèmes, notre regard doit donc se concentrer sur l'ensemble des invariants opératoires qui guident l'action du sujet. Nous avons donc besoin d'un cadre méthodologique plus fin qui permette son analyse. Balacheff et Margolinas (2005) proposent une extension du modèle de concept, appelé modèle cK¢, en spécifiant les invariants liés au concept. L'ensemble $\mathcal{I}$ est ainsi remplacé par :

- un ensemble d'opérateurs qui permettent de transformer un problème en un autre ;
- $\sum$ une structure de contrôle qui assure la non contradiction de la conception et contient des outils de décision sur la légitimité de l'emploi d'un opérateur ou sur l'état (résolu ou non) d'un problème.

Analyser le raisonnement lors d'une résolution de problème correspond donc, pour nous, à mettre en évidence cette structure de contrôle, ainsi décrite, qui guide l'action et qui permet de s'assurer de la résolution complète du problème.

Ainsi nous formulons l'hypothèse suivante : les cadres théoriques du concept-problème étendus au modèle cK¢, permettent l'analyse du raisonnement lors de la résolution d'un problème, qu'elle soit mathématique ou algorithmique.

III. ANALYSE DES PROBLEMES DU PROJET EULER

Pour mettre à l'épreuve notre hypothèse de recherche, nous avons fait le choix de nous intéresser à des problèmes suffisamment riches, c'est-à-dire permettant plusieurs types de résolutions dont une résolution algorithmique. Nous avons alors puisé dans les problèmes issus du « Projet Euler » [1], par exemple :

> Problem 1 – If we list all the natural numbers below 10 that are multiples of 3 or 5, we get 3, 5, 6 and 9. The sum of these multiples is 23. Find the sum of all the multiples of 3 or 5 below 1000.

Nous travail a consisté à faire l'analyse à priori de ces problèmes. Tout d'abord, nous avons recueillis plusieurs solutions possibles à ce problème :

- une solution mathématique se basant sur la formule de la somme des éléments d'une suite arithmétique ;
- une solution algorithmique qui consiste à énumérer tous les nombres inférieurs à 1000, de tester leur divisibilité par 3 ou 5 et d'accumuler, le cas échéant leur valeur ;
- une autre solution algorithmique qui permet de générer tous les multiples de 3 ou de 5 inférieurs à 1000, puis d'en faire leur somme.

Ensuite, nous avons, en nous appuyant sur les cadres théoriques déjà évoqués, tenté de mettre en évidence les opérateurs et les contrôles qui semblent avoir guidé les résolutions du problème.

Par exemple, la seconde résolution algorithmique de notre problème pourrait être sa décomposition en 3 sous-problèmes : comment générer la liste des nombres inférieurs à 1000 ; comment tester si un nombre est un multiple de 3 ou 5 et enfin comment calculer la somme d'une liste de nombres. Ensuite, la résolution de chacun d'eux va mobiliser des outils algorithmiques (boucles, instructions conditionnelles) en fonction de la tâche à accomplir.

Nous nous sommes enfin inspirés de nouveau de Giroud (2012) pour représenter sous forme de schémas les liens qui existent entre contrôles et opérateurs. Nous présentons ces

[1] https://projecteuler.net - Série de défis pouvant être résolus grâce aux mathématiques ou à l'algorithmique.

résultats en annexe de ce document. Ils nous ont permis déjà d'établir des similitudes suivant les différentes résolutions.

IV. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Ainsi, nous pouvons dire que les modèles du concept-problème et cK¢ nous semblent pertinents pour éclairer et décrire le raisonnement, qu'il soit algorithmique ou mathématique. La représentation sous forme de schéma, couplé à notre modèle, permet de mettre en lumière la structure de la résolution d'un problème et peut être un outil éclairant d'analyse à priori.

Il est évident que ce travail, n'en est qu'à ses prémices, et que de nombreuses perspectives s'offrent à nous pour le prolonger. Dans un premier temps, nous souhaiterions lui donner une dimension plus expérimentale en utilisant notre outil pour analyser et mettre en évidence les raisonnements d'élèves lors de mise situation.

Ensuite notre travail pourrait de plusieurs manières aider l'enseignement et l'apprentissage de l'algorithmique. Une classification entre les opérateurs algorithmiques (boucle « POUR », boucle « TANT QUE », …) et les contrôles liés semble possible et porteuse de sens, tout comme identifier, grâce à cette schématisation, les problèmes relevant de résolutions similaires.

Enfin nous pourrions comparer dans les pratiques enseignantes, la prise en compte des contrôles et des opérateurs selon que l'on soit en mathématique ou en algorithmique.

REFERENCES

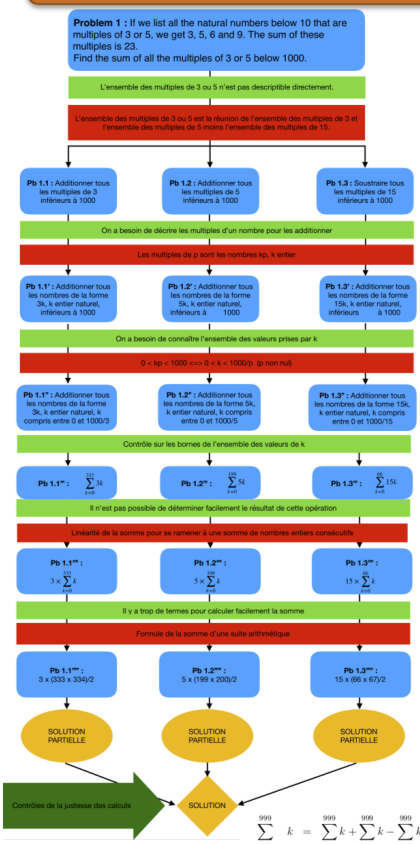
Balacheff, N., & Margolinas, C. (2005). cK¢ Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. In A. Mercier & C. Margolinas (Eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques* (p. 1-32). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Giroud, N. (2011) *Etude de la démarche expérimentale dans les situations de recherche pour la classe.* Thèse de doctorat. Université de Grenoble.

Ministère de l'éducation nationale. (2014) *Stratégie mathématique* (Dossier de presse). Consulté à l'adresse : http://cache.media.education.gouv.fr/file/12_Decembre/30/2/DP-l-ecole-change-avec-vous-strategie-mathematiques_373302.pdf

Modeste, S. (2012) *Enseigner l'algorithme pour quoi ? Quelles nouvelles questions pour les mathématiques ? Quels apports pour l'apprentissage de la preuve ?* Thèse de doctorat. Université de Grenoble.

Mise en œuvre du cadre théorique pour l'analyse de problèmes : *Les problèmes du projet Euler (projecteuler.net)*



$$\sum_{\substack{k=1\\3|k \text{ ou } 5|k}}^{999} k = \sum_{\substack{k=1\\3|k}}^{999} k + \sum_{\substack{k=1\\5|k}}^{999} k - \sum_{\substack{k=1\\15|k}}^{999} k$$
$$= \sum_{i=1}^{333} 3k + \sum_{i=1}^{199} 5k - \sum_{i=1}^{66} 15k$$
$$= 3\sum_{i=1}^{333} k + 5\sum_{i=1}^{199} k - 15\sum_{i=1}^{66} k$$
$$= 3 \times \frac{333 \times 334}{2} + 5 \times \frac{199 \times 200}{2} - 15 \times \frac{66 \times 67}{2}$$
$$= 233168$$



$a = 0$
pour i allant de 1 à 1000 **faire**
  si $i\%3 == 0$ ou $i\%5 == 0$ **alors**
    $a = a + i$
  fin du si
fin du pour



$a = 0$
$i = 0$
tant que $i \leqslant 1000$ **faire**
  $a = a + i$
  $i = i + 3$
fin du tant que
$i = 0$
tant que $i \leqslant 1000$ **faire**
  $a = a + i$
  $i = i + 5$
fin du tant que
$i = 0$
tant que $i \leqslant 1000$ **faire**
  $a = a - i$
  $i = i + 15$
fin du tant que

LEGENDE :

- en bleu, le problème de départ et les sous-problèmes qui en découlent ;
- en vert, les contrôles qui guident l'action du sujet ;
- par une flèche verte foncée, les contrôles qui assurent de l'état (résolu ou non) d'un problème ;
- en rouge ou rose ; les opérateurs qui permettent de transformer un problème en un (ou des) autre(s) ;
- en jaune la solution au problème ou les solutions intermédiaires aux sous-problèmes.

ENTRE PROBABILITÉS ET STATISTIQUES : UN JEU ALGORITHMIQUE POUR SIMULER LA FLUCTUATION D'ÉCHANTILLONNAGE

TRUNKENWALD* Jannick

Résumé – Cette communication aborde l'enseignement de la fluctuation d'échantillonnage en classe de seconde. Il s'agit d'une analyse a priori de la simulation algorithmique d'un lancer de dés. Les dimensions instrumentale, sémiotique, et discursive sont mises en perspective avec trois domaines en interaction : les probabilités, les statistiques, et l'algorithmique. La réflexion doit être expérimentée dans le cadre de formations destinées aux lycées privés algériens présentant le baccalauréat français.

Mots-clefs : (mathématiques, algorithmique, simulation, échantillonnage, probabilités)

Abstract –This communication adresses the teaching of sampling fluctuation in fifth year of high school. It's about the analysis a priori of the simulation algorithmics of a roll of dices. The instrumental, semiotic, and discursive dimensions are put in perspective with three domains in interaction : the probability, the statistics, and the algorithmics. The reflection must be experimented within the framework of trainings intended for the Algerian private high schools presenting the french high school diploma

Keywords: mathematics, algorithmic, simulation, sampling, probability.

INTRODUCTION

En France, la notion d'intervalle de fluctuation est abordée en seconde. En l'absence de référentiel théorique, son approche expérimentale est « facilitée » par un emploi de l'informatique. Nous avions organisé en 2017 une formation courte visant l'introduction en classe de l'approche fréquentiste. Une nouvelle expérimentation de ce dispositif est en cours, auprès d'enseignants de mathématiques issus d'un réseau de lycées privés algériens. Nous n'exposons ici que la première situation à laquelle les stagiaires ont été confrontés. Et seules les considérations d'ordre didactique ayant guidé notre réflexion lors du choix de cet énoncé, ainsi que l'analyse a priori du travail mathématique en jeu, sont ici présentées.

I. UNE SITUATION POUR ABORDER L'APPROCHE FRÉQUENTISTE

1. Objectif

Notre réflexion est orientée par l'attendu institutionnel ci-dessous :

> « Les questions de fluctuation d'échantillonnage constituent un axe important de la formation du futur citoyen. (…) On peut, par expérimentation et simulation, faire observer aux élèves que les échantillons de taille n obtenus à partir d'un modèle de Bernoulli ont, pour environ 95% d'entre eux, des fréquences d'apparition du nombre 1 qui fluctuent dans un intervalle centré en p et d'amplitude $\frac{2}{\sqrt{n}}$. (…) Pour p donné, on peut faire calculer les bornes de cet intervalle pour quelques valeurs de n, et remarquer qu'il faut multiplier la taille de l'échantillon par k² pour diviser par k l'amplitude de l'intervalle. » (Ressources pour la classe de seconde, Probabilités et statistiques, Juin 2009, Eduscol).

Pour établir l'intervalle de fluctuation en 2nde, l'absence de justification formelle a été abordée par Parzysz (2009) :

> « l'accès à la notion de modèle qui est une finalité visée à terme par le cycle terminal, peut être préparé par l'étude et la simulation d'expériences aléatoires diverses correspondants au même modèle probabiliste. La comparaison des procédures, des tableaux et des hypothèses sous-jacentes doit permettre aux élèves de se convaincre de l'analogie que présentent ces expériences sous leurs apparences diverses, et de déboucher sur la notion de schéma d'expérience, constituant en quelque sorte une classe d'équivalence d'expériences aléatoires » (Parzysz, 2009, p. 102).

* LDAR – France- jannick.trunkenwald@yahoo.fr

Nechache (2016) aborde aussi ces questions en présentant le cycle de modélisation d'un modèle mathématique de type numérique :

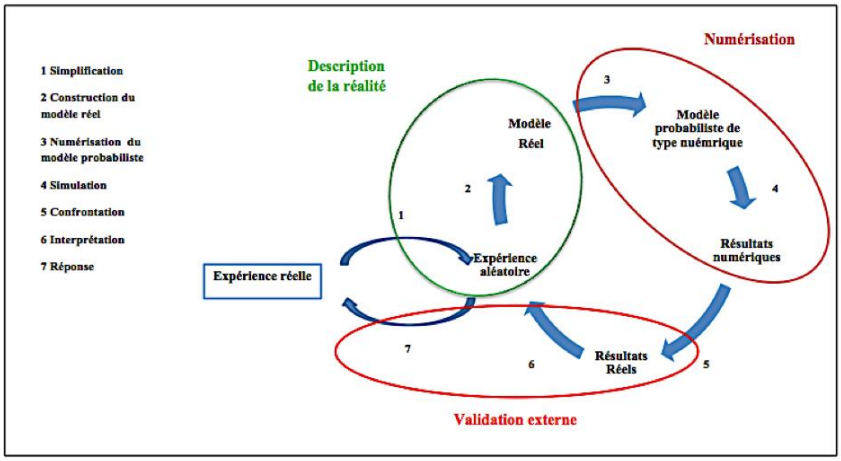


Figure 1 – *Cycle de modélisation avec un modèle probabiliste de type numérique (Nechache , 2016)*

L'expérience réelle est d'abord simplifiée sous forme d'une expérience aléatoire permettant d'envisager un premier modèle probabiliste réel. Celui-ci est alors traduit en modèle numérique pour la simulation. L'exécution de ce programme de simulation donne une réponse, qui est d'abord interprété par rapport au modèle réel, puis interprété en regard de l'expérience aléatoire. L'expérience aléatoire peut être adaptée suivant l'information apportée à l'expérience réelle. Un nouveau modèle réel peut aussi être envisagé pour affiner la compréhension de l'expérience réelle (ce qui correspond alors à un nouveau cycle).
Nechache souligne cependant une difficulté liée à ce type de modèle numérique :

> Dans l'enseignement secondaire, la construction du modèle probabiliste de type numérique est basée sur des connaissances qui ne sont pas disponibles dans l'espace de travail personnel des élèves. C'est pourquoi, la construction de ce modèle est habituellement prise en charge par le professeur qui laisse aux élèves l'exécution de la simulation. (Nechache, 2016)

Nous souhaitons aborder cette problématique spécifique d'une réalisation du programme de simulation qui serait conjointe à son exploitation d'un point de vue probabiliste. Nous formulons l'hypothèse que : « le modèle final simulant la fluctuation d'échantillonnage est élaboré dans de meilleures conditions si on lui fait subir plusieurs cycles de modélisations. » Et nous chercherons à déduire la nature de ces cycles de l'analyse qui va suivre.

2. Énoncé choisi

L'interaction de plusieurs domaines mathématiques, en temps limité, nous a incité à concevoir une situation initiale souple et classique, afin de faciliter la confirmation par les stagiaires, et la validation du résultat obtenu par simulation.

Énoncé :

- **Un jeu A consiste à lancer simultanément deux dés cubiques équilibrés numérotés chacun de 1 à 6. On gagne à ce jeu si la somme des résultats affichés sur les deux dés est supérieure ou égale à 9 ?**
- **Un jeu B consiste à prélever au hasard un jeton dans un sac qui contient 8 jetons blancs et 16 jetons rouges. On gagne à ce jeu si on obtient un jeton blanc.**

Pour quel jeu a-t-on le plus de chances de gagner ?

L'approche laplacienne du lancer des dés consiste à modifier l'univers initial constitué de sommes possibles non équiprobables, pour décrire un autre univers aux issues équiprobables (couples de valeurs de chaque dé). La probabilité quantifie un degré de certitude, en se distinguant de la notion d'évènement. On peut finalement s'attendre aux erreurs suivantes :

- Une fausse équiprobabilité portant sur les différentes sommes possibles allant de 2 à 12. Ce qui fournirait le résultat erroné de 4/11 pour la probabilité de gagner au jeu A.
- Une autre erreur consistant à considérer les valeurs allant de 1 à 12 pour la somme (alors que le plus petit résultat possible est 2). Ce qui fournirait le résultat erroné 4/12.

Dans le cas du biais d'équiprobabilité, le résultat erroné de 4/11 dépasse 8/24=1/3. Et il apparaîtrait alors plus aisé de gagner au jeu A qu'au jeu B. Alors que le jeu B est en réalité plus avantageux. En effet, voici l'univers formé par tous les couples possibles de résultats des dés : Ω={(1 ;1) ;(1 ;2) ;(1 ;3) ;(1 ;4) ;(1 ;5) ;(1 ;6) ;(2 ;1) ;(2 ;2) ;(2 ;3) ;(2 ;4) ;(2 ;5) ;(2 ;6) ;
(3 ;1) ;(3 ;2) ;(3 ;3) ;(3 ;4) ;(3 ;5) ;(3 ;6) ;(4 ;1) ;(4 ;2) ;(4 ;3) ;(4 ;4) ;(4 ;5) ;(4 ;6) ;(5 ;1) ;
(5 ;2) ;(5 ;3) ;(5 ;4) ;(5 ;5) ;(5 ;6) ;(6 ;1) ;(6 ;2) ;(6 ;3) ;(6 ;4) ;(6 ;5) ;(6 ;6)}
En notant E l'évènement : « La somme des résultats des deux dés est supérieure ou égale à 9 ».
On a : E = {(3 ;6) ;(4 ;5) ;(5 ;4) ;(6 ;3) ;(4 ;6) ;(5 ;5) ;(5 ;6) ;(4 ;6) ;(5 ;6) ;(6 ;6)}
Et par équiprobabilité dans Ω, on obtient P(E) = 10/36 = 5/18 < 1/3. Ce qui permet de confronter le bon résultat avec la réponse erronée découlant du biais d'équiprobabilité.
Sans détailler davantage l'approche laplacienne, nous allons désormais restreindre notre propos sur l'approche fréquentiste, dont le paragraphe suivant présente une première étude.

3. Étude des praxéologies en jeu

Notre tâche consiste à estimer la probabilité que la somme de deux dés soit supérieure ou égale à 9. Notons la t_1. Le type de tâche T correspondant tient compte de notre institution I de la classe de 2^{nde}, et de l'organisation mathématique locale (OM_E) liée à la fluctuation d'échantillonnage. Ce qui nous amène à une répétition réelle de l'expérience aléatoire, ou à une simulation de type numérique exploitant le générateur pseudo-aléatoire de la machine. Ainsi, pour la tâche t_1 l'expérience aléatoire peut être simulée à partir de la variable aléatoire sous-jacente : Alea(6)+Alea(6). Le type T est donc la classe des tâches pouvant se résoudre par approche fréquentiste simulée, dans les mêmes conditions de difficulté que la tâche t_1 : c'est-à-dire lorsqu'une simple instruction de calcul en ligne permet une modélisation numérique du résultat observé lors de l'expérience aléatoire. Par exemple :

- t_2 : En lançant trois dés (au lieu de deux). Modèle numérique : Alea(6)+Alea(6)+Alea(6).
- t_3 : Déterminer la probabilité que la distance entre deux points choisis au hasard sur un segment de longueur 1 dépasse 1/2. Modèle numérique : Abs(Alea()-Alea()).

Plusieurs techniques permettent de résoudre le type de tâche T au sein de l'institution I :

- τ_1 : Approche fréquentiste réalisée en répétant l'expérience aléatoire réelle.
- τ_2 : Approche fréquentiste réalisée en répétant l'expérience aléatoire simulée.
- τ_3 : Approche fréquentiste par simulation algorithmique d'une répétition de l'expérience aléatoire pour en déduire une fréquence des succès.
- τ_4 : Approche fréquentiste par simulation algorithmique d'une fluctuation d'échantillonnage (nuage de points représentants plusieurs fréquences).
- τ_5 : Approche fréquentiste finalisée en exploitant l'intervalle de fluctuation.

Prenons en considération le discours sous-jacent sur la technique :

> On entend par technologie (…) un discours ayant pour objet premier de justifier « rationnellement » la technique (…) le style de rationalité varie bien entendu (…) de sorte qu'une rationalité institutionnelle pourra apparaître… peu rationnelle dans une autre institution. (Chevallard, 1998)

Ce principe relatif de « rationalité » se rattache d'ailleurs à l'idée de paradigme probabiliste abordée par Parzysz dont le premier niveau (P1) est évoqué en ces termes :

> « des observations permettant d'attribuer une chance d'apparition à chacune des différentes issues » (Parzysz, 2014, p. 68).

Dans notre institution I, la description d'un protocole expérimental probabiliste, ainsi qu'une justification de l'intervalle de fluctuation basée sur l'observation (raisonnement de type inductif), entrent dans ce cadre de rationalité. Nous pouvons donc en déduire les technologies sous-jacentes aux techniques respectives τ_1 τ_2 , τ_3 , τ_4 , et τ_5 :

- θ_1 : le principe intuitif de la loi des grands nombres.
- θ_2 : le principe d'équivalence de l'expérience aléatoire réelle et de sa simulation.
- θ_3 : la structure algorithmique des programmes de simulation d'une fréquence des succès.
- θ_4 : la structure algorithmique des programmes de simulation d'un nuage de fréquences.
- θ_5 : L'énoncé de l'intervalle de fluctuation.

θ_1 , θ_2 , θ_3 , et θ_4 sont des embryons de technologie issues des techniques τ_1 , τ_2 , τ_3 , τ_4. La technologie θ_5 , la plus avancée dans I, incarne la théorie sous-jacente notée Θ.
Ces technologies sont productrices de nouvelles techniques pouvant traiter d'autre types de tâches. On peut exploiter θ_3 pour élaborer la technique de simulation d'une loi géométrique tronquée, ou encore exploiter θ_5 pour élaborer une technique de prise de décision…
Mais la justification empirique de θ_5 passe par une exploitation des autres technologies citées à travers les techniques correspondantes. Cela nous ramène à l'idée de tâche problématique :

> Dans un univers de tâches routinières, surgissent (…) des tâches problématiques (…) qui sont alors des types de problèmes (…) autour desquels de nouvelles praxéologies devront se constituer. (Chevallard 1998)

Cette situation de pénurie praxéologique se vérifie en abordant dans I la fluctuation d'échantillonnage. Il s'agit de créer une organisation praxéologique encore inédite $O=[T/\tau_i/\theta_i/\Theta]_i$. La question « comment créer *O* » devient alors une organisation didactique *dO*. Nous décrivons ci-dessous les moments d'études correspondant à *dO* :

- Moment 1: Première rencontre avec O en expérimentant T à l'aide de la technique τ_1 qui permet d'appréhender la nature du hasard, et de mettre l'intuition à l'épreuve.
- Moment 2 : Exploration du type de tâche T. L'élaboration de techniques étant au cœur de l'activité mathématique, τ_1 peut être affinée, puis comparée à τ_2 , puis accélérée avec τ_3 …
- Moment 3: Constitution de l'environnement technologico-théorique. Reproduction du travail avec d'autres tâches pour faire émerger les premiers embryons de technologie.
- Moment 4: Travail de la technique pour dépasser les embryons de technologies. Aboutissement de τ_4 en exploitant θ_4 pour mettre en évidence θ_5 à l'aide de conjectures.
- Moment 5: Institutionnalisation de θ_5 . Cela va permettre une émergence de la théorie Θ, et la distingue de certains éléments qui ont contribué à sa construction.
- Moment 6 : l'évaluation.

Cette étude envisageant à travers l'outil TAD un renforcement progressif et une évolution des techniques successives, montre le rôle particulier joué par le travail algorithmique, qui peut souvent être réinvesti ou adapté sans que toutes ses étapes soient à reconstruire. Et cela se vérifie encore davantage pour les programmes de simulations. Nous pouvons citer Chevallard pour un aspect plus général de cette idée :

> En réalité l'étude et la résolution d'un problème d'un type déterminé va toujours de pair avec la constitution d'au-moins un embryon de technique, à partir de quoi une technique plus développée pourra éventuellement émerger (…) ainsi se noue une dialectique fondamentale : étudier des problèmes est un moyen permettant de créer et de mettre au point une technique relative aux problèmes de même type, technique qui elle-même sera ensuite le moyen de résoudre de manière quasi routinière des problèmes de ce type. (Chevallard, 1998)

La partie suivante ne concerne que la simulation, à l'aide d'une approche algorithmique, du phénomène de fluctuation d'échantillonnage. L'enchaînement des moments didactiques va guider notre analyse du travail mathématique associé aux structurations successives des techniques τ_2 , τ_3 , τ_4 , puis τ_5 et de leurs avatars technologiques sur lesquels elles vont successivement s'appuyer.

II. ANALYSE DE LA NATURE DU TRAVAIL MATHÉMATIQUE

1. *L'espace de Travail Mathématique (ETM)*

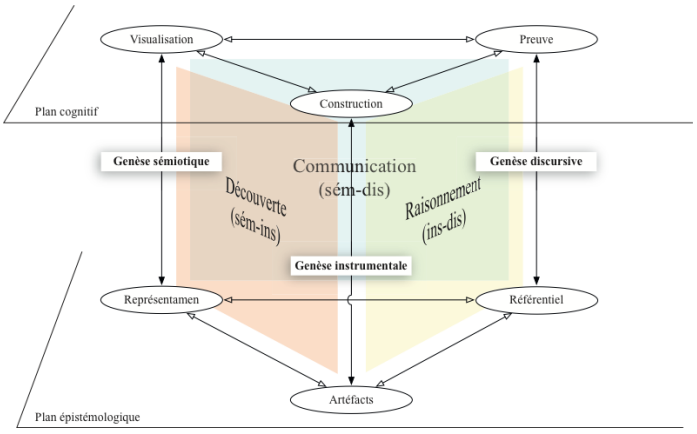


Figure 2 *– L'Espace de Travail Mathématique (Kuzniak & Richard, 2014).*

L'outil méthodologique ETM (Kuzniak 2011) va nous aider à décomposer les perceptions intellectuelles en jeu lors de l'activité mathématique. Trois dimensions instrumentale, sémiotique, et discursive sont prises en compte. Chacune engendre une relation dynamique entre le plan épistémologique et le plan cognitif. Les outils technologiques (artefacts), sémiotiques (representamen), et théoriques (référentiel) du plan épistémologique, peuvent alors être exploités à l'aide de schèmes appropriés. On parle dans ce cas respectivement de genèses instrumentale (I), sémiotique (S), et discursive (D). Et ces genèses respectives produisent dans le plan cognitif des constructions, des visualisations, et des preuves. Enfin l'activation de deux genèses peut entraîner une circulation entre les dimensions qui les portent, ce qui peut parfois être rapprochée de l'idée de modélisation.
Nous nommons « projection » de l'ETM la restriction à un domaine spécifique de ce que nous observons dans l'ETM. L'interaction dans notre étude des probabilités, des statistiques descriptives et de l'algorithmique nous amène donc à projeter l'ETM dans ces trois domaines. Et nous noterons ces trois projections : ETM_p, ETM_s, et ETM_A.
Afin d'éviter une surcharge visuelle, nous présenterons le schéma de l'ETM avec une vue du dessus. Des points et des traits mis en gras représentant les différentes genèses D, I, et S ainsi que les circulations dans les plans situés entre les axes de ces genèses.

2. *La place de l'algorithmique*

Nous commençons par une précision de Modeste (2012) concernant le fait qu'un programme de simulation n'est pas un algorithme proprement dit :

> Simulation d'expérience : les trois variantes de simulation ne nous semblent pas relever réellement de l'algorithmique : il s'agit de mettre sous forme d'un programme ou d'un programme-papier, de traduire, une expérience avec des outils numériques (générateur de nombres aléatoires). On ne traite pas un problème au sens où nous l'avons défini. (Modeste, 2012 p 130)

Cela nous apparaît surtout lié à l'utilisation du générateur pseudo-aléatoire, qui est lui-même un artefact instrumentalisé pour construire le programme de simulation. En référence à l'Espace de Travail Algorithmique (ETA) de Laval (2015) qui englobe notre idée d'ETM_A, le travail de conception algorithmique présente une triple dimension instrumentale, sémiotique, et discursive au sein de l'ETM_A. Nous relions en particulier cette dimension discursive à l'idée du langage comme expression verbale ou écrite qui permet l'articulation et

l'enchaînement des pensées. En effet, les programmes de simulations finalisant les techniques τ_2 , τ_3 , et τ_4 (voir figure 3 ci-dessous) sont des écritures formalisées de protocoles expérimentaux. Les expressions algorithmiques en langage naturel constituent alors une formulation explicite de la démarche à suivre dans le domaine des statistiques descriptives pour mener à bien une approche fréquentiste. Et ces explicitations qui peuvent être rapprochées de l'idée de preuve nous ramènent aussi aux technologies correspondantes : θ_2 , θ_3 , et θ_4. Cela évoque encore cette genèse discursive qui, selon Laval (2015), se confirme lorsque le programme « tourne » (en orientant le travail algorithmique suivant son premier niveau de paradigme algorithmique).

PROGRAMME DE SIMULATION POUR τ_2
Pour la simulation d'une expérience aléatoire :
Alea(6)+Alea(6)

PROGRAMME DE SIMULATION POUR τ_3
Pour simuler un calcul de fréquence après 400 tests de l'expérience aléatoire :

Initialiser la variable effectif à 0
Répéter 400 fois :
Si Alea(6)+Alea(6) >8
alors augmenter effectif de 1
Afficher la fréquence obtenue : effectif/400

PROGRAMME DE SIMULATION POUR τ_4
VERSION 1
Pour simuler 50 calculs de fréquences :

Répéter PROGRAMME τ_3 **50 fois**

VERSION 2
Pour tracer le nuage de points simulant 50 calculs de fréquences :

k←0
Répéter 50 fois :
PROGRAMME τ_3
k←k+1
Placer point (k ;fréquence)
Fin

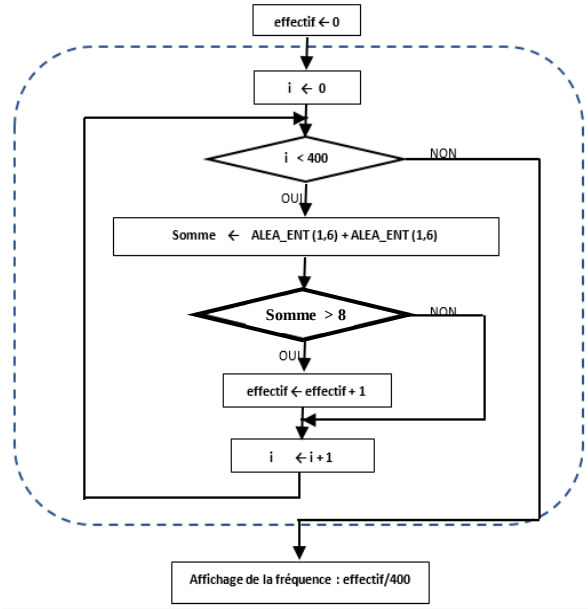


Figure 3 *– Programmes de simulation finalisant les techniques* τ_2 , τ_3 , et τ_4 *et organigramme pour* τ_3.

L'organigramme de la figure 3 montre comment une approche schématique peut renforcer la dimension sémiotique de l'ETM_A : cela met en évidence le fonctionnement réel de la machine qui est basé sur un stockage des données à des adresses mémoire. La structure d'emboîtement, ou encapsulage correspondant au principe de programmation sous-procédurale, explicite les techniques τ_2 , τ_3 , et τ_4. Et une telle visualisation de blocs structurant une suite d'instructions entraîne une circulation entre les dimensions discursive et sémiotique dans l'ETM_A.

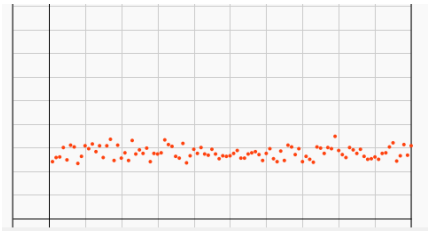


Figure 4 *– Représentation du nuage des fréquences simulées (technique* τ_4*) avec 100 simulations de fréquences calculées à partir d'échantillons de taille 400. Programme réalisé sur le logiciel Algobox.*

Ces programmes de simulations sont aussi très actifs dans la dimension instrumentale de l'ETM. Mais cela se produit à l'extérieur de l'ETM_A. L'outil « programme de simulation » est instrumentalisé pour construire une observation statistique, au sein de l'ETM_S (et au sein de l'ETM_P lorsque cette construction montre certaines propriétés du hasard).

Précisons les termes *artefact*, *outil*, et *instrument* avec un article de la revue ZDM (2016) :

> Artifacts are generally of material nature or they may reproduce, in a computerized environment, actions similar to what material tools do. The word tool will be used with a more general meaning, and not only material tools will be considered but also conceptual tools, like theorems, algorithms or collection of signs. (…) the word instrument has a cognitive value : a tool becomes an instrument when the subject has constructed schemes for using this tool. (Kuzniak, Nechache, Drouhard, p. 863)

En considérant l'emploi du logiciel *Algobox* qui est équipé d'un interface graphique préprogrammé, et qui ne possède pas d'instruction d'appel d'un sous-programme, nous en déduisons une mise en relation de ces considérations avec l'analyse praxéologique :

Technique appliquée pour l'approche fréquentiste	Rôle de la technique appliquée et du programme de simulation utilisé	Protocole expérimental réalisé en appliquante la technique	Genèses provoquées par la technique			Technique amorcée / technologie consolidée
			dans l'ETM_A	dans l'ETM_S	dans l'ETM_P	
τ_2	Simuler l'expérience aléatoire.	Calculer une fréquence simulée.	**Ins** , **Dis**	**Ins, Sem**, (Dis)	**Ins**	τ_3 / θ_2
τ_3	Calculer une fréquence simulée.	Tracer un nuage de points « fréquences simulées ».	(Ins), **Sem**, **Dis**	**Ins**, **Sem**, (Dis)	(Ins), **Sem**	τ_4 / θ_3
τ_4	Tracer un nuage de points « fréquences simulées ».	Conjecture : bornes de l'intervalle de fluctuations.	(Ins, Sem), **Dis**	**Ins, Sem, Dis**	(Ins, Sem), **Dis**	τ_5 / θ_4

Exemple : La technique τ_4 consiste à reprendre le protocole expérimental de tracé d'un nuage de fréquences simulées, et à l'automatiser en améliorant le programme de simulation d'une fréquence. Le nouveau programme de simulation permet alors d'observer différents nuages de points, ce qui donnera une possibilité de conjecturer la propriété de l'intervalle de fluctuation.

3. *Analyse des genèses et circulations dans les trois projections de l'ETM*

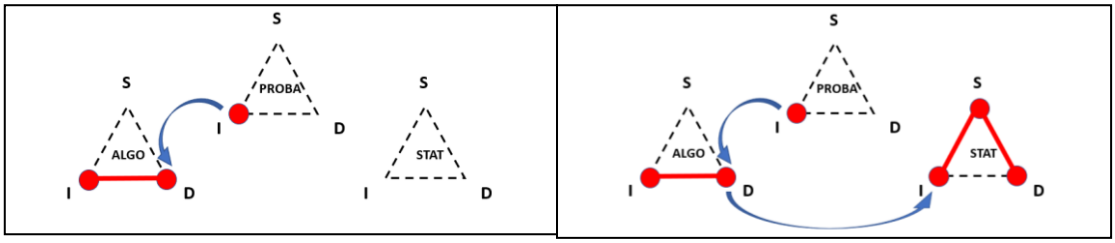


Figure 5 *– Schéma éclaté en vue du dessus de l'ETM lors des deux principales phases de la technique* τ_2

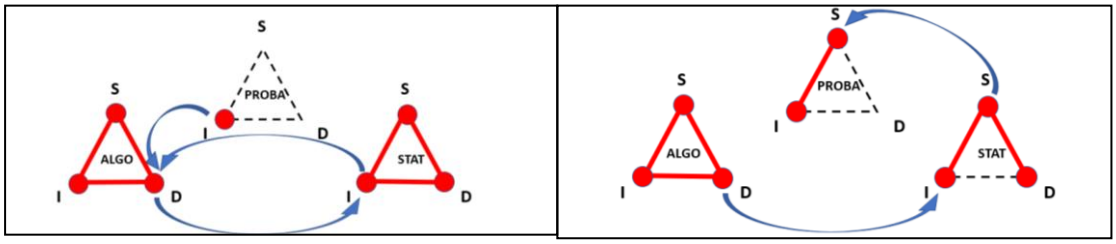


Figure 6 *– Schéma éclaté en vue du dessus de l'ETM lors des deux principales phases de la technique* τ_3

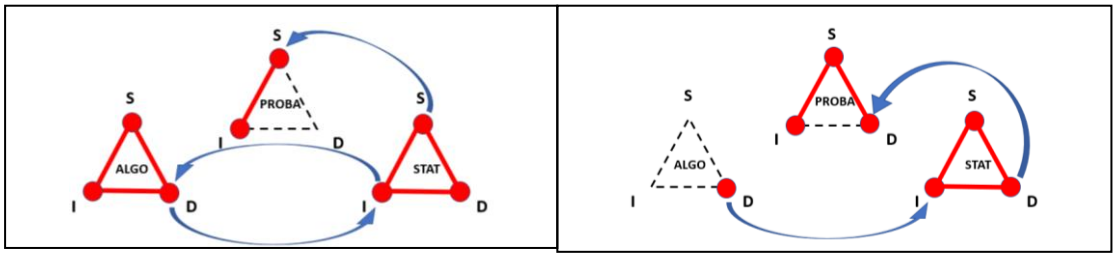


Figure 7 *– Schéma éclaté en vue du dessus de l'ETM lors des deux principales phases de la technique* τ_4

Les figures 5, 6, et 7 résument visuellement notre analyse du travail mathématique. Les structurations successives dues aux techniques τ_2 , τ_3 , et τ_4 construisent la praxéologie associée au type de tâche T. Nous en exposons ci-dessous les principaux éléments :

- La technique τ_2 commence par une genèse instrumentale de l'artefact générateur aléatoire dans l'ETM_A construisant une simulation de somme de deux dés. Après validation discursive de cette simulation, on l'exploite en tant qu'outil dans l'ETM_S pour une genèse instrumentale construisant un protocole expérimental de calcul d'une fréquence (figure 5).
- La technique τ_3 consiste d'abord à reprendre le protocole de simulation d'une fréquence pour l'automatiser. Ce qui engendre une circulation complète dans l'ETM_A. Le nouveau programme de simulation d'une fréquence est ensuite utilisé comme outil dans l'ETM_S pour construire un protocole de tracé du nuage des fréquences. Ce qui provoque une genèse sémiotique dans l'ETM_P (visualisation des fluctuations du hasard).
- Enfin, la technique τ_4 reprend le protocole de tracé du nuage pour l'automatiser, ce qui génère à nouveau une circulation complète dans l'ETM_A. Ce dernier programme est utilisé dans l'ETM_S pour construire une conjecture de l'intervalle de confiance. Ce travail entraine une genèse discursive dans l'ETM_P (au premier niveau de paradigme probabiliste).

III. CONCLUSION

L'étude des moments didactiques a mis en évidence un ordre d'apparition de techniques de résolution successives pour la tâche de simulation d'échantillonnage. La structuration progressive du savoir-faire, met en relation des embryons de connaissance intuitive. Ce qui apporte une cohérence d'ensemble constituant une forme de théorie adaptée à un premier niveau de paradigme. Le phénomène de construction praxéologique met en évidence un lien direct entre l'enchaînement des techniques, et les étapes de construction du programme de simulation par encapsulages successifs. Et ces étapes algorithmiques entrent aussi en résonance avec les phases du protocole expérimental statistique. Cette congruence sémantique trouve son expression dans un certain aspect du travail de programmation informatique : l'organisation de type procédurale en blocs sous-programmes.

De son côté, l'outil ETM met en évidence des interactions entre les trois domaines considérés : Le programme de simulation est exécuté dans l'ETM_S en tant qu'outil technologique, afin de construire dans une genèse instrumentale un nouveau protocole expérimental. Puis l'ancien programme de simulation pris comme outil théorique, va construire dans une genèse discursive de l'ETM_A un nouvel objet algorithmique visant à automatiser ce nouveau protocole expérimental… L'analyse du travail mathématique dans les projections de l'ETM, met en évidence une triple répétition de ce processus : une dialectique cyclique d'interactions évolutives. Un début de réponse apparaît concernant notre question initiale lié à la nature de cycles de modélisations permettant la découverte progressive du phénomène de fluctuation d'échantillonnage, par des stagiaires ou dans le cadre de la classe. Une nouvelle phase, expérimentale, s'impose désormais pour finaliser cette recherche.

RÉFÉRENCES

Chevallard Y. (1998) Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. *Actes de l'Université d'Eté,* IREM de Clermont-Ferrand, 91-120.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *In Annales de didactique et de sciences cognitives, volume 16,* 9–24.

Kuzniak, A. & Richard, P. (2014). Spaces for mathematical work : viewpoints and perspectives. *Relime*, 17(4.1):17–26.

Kuzniak A., Nechache A., & Drouhard J.P., Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom, (2016), *ZDM Mathematics Education. **48.6**,* 861-874.

Laval, D. (2015). L'algorithmique comme objet d'apprentissage de la démarche de preuve en théorie élémentaire des nombres : l'algorithme de Kaprekar. *Actes du Quatrième symposium international – ETM de juillet 2014,* 103-115. Madrid, Espagne.

Modeste S. (2012). *Enseigner l'algorithme pour quoi ? Quelles nouvelles questions pour les mathématiques ? Quels apports pour l'apprentissage de la preuve ?* Thèse de doctorat. Université de Grenoble. France.

Nechache A. (2016). *La validation dans l'enseignement des probabilités au secondaire.* Thèse de doctorat. Université Paris-Diderot, Paris, France.

Parzysz, B. (2009). Des expériences au modèle, via la simulation. In *Repères-IREM*, (74) : 91–103.

Parzysz, B. (2014). Espaces de travail en simulation d'expérience aléatoire au lycée : une étude de cas. In *Relime, volume 17.4,* 65–82.

RESCOL-PROB. (2009), Ressources pour la classe de seconde, Probabilités et statistiques, juin 2009. http://eduscol. education.fr (consulté le 01/08/18).

Actions et manifestations

BILAN DU GROUPE ACTIONS ET MANIFESTATIONS

Responsables

FIORELLI[*] Shaula – LECORRE[**] Thomas – PESTEL[***] Marie-José

Correspondant CS

BARBAZO[****] Eric

I. UNE NOUVEAUTÉ A EMF2018, LES ACTIONS ET MANIFESTATIONS

Le colloque EMF 2018 a innové par l'installation d'un nouveau type de travail pendant le colloque : Actions et Manifestations (AM). Cette idée repose sur deux axes : présenter d'une part les actions développées pour la vulgarisation partout où elles existent et d'autre part les manifestations permettant la vulgarisation mathématique et leur organisation.

Pendant le colloque ces actions et manifestations ont été présentées sous différentes formes : ateliers, présentations de jeux et d'activités autour de ces jeux, expositions ou concours.

L'enjeu a été de montrer et de faire partager des actions de vulgarisation déjà engagées, reconnues et efficientes dans différents pays, sous différentes modalités : activités mises en places par des universités, associations d'enseignants, organismes publics, acteurs du périscolaire ou encore chercheurs passionnés.

Des plages horaires ont été réservées dans le programme du colloque, afin que les participants puissent tester, découvrir et échanger autour de ces AM.

Ce groupe n'a pas fait d'appel à communications mais ce sont les responsables qui ont sollicité les associations et les différents organismes de différents pays pour présenter des exemples d'actions de vulgarisation. Quelques candidatures spontanées ont aussi été reçues et retenues.

II. ACTIONS ET MANIFESTATIONS

Une grande variété d'activités a été présentée : de l'exposition à l'atelier en passant par la mallette pédagogique et le concours d'énigmes mathématiques, tout le monde y a trouvé son bonheur. Au vu de cette variété, il est intéressant de regrouper ces contributions selon différents aspects.

1. Les différentes formes de la vulgarisation représentées

Si on regarde les activités sous les aspects de la forme de présentation, on dégage trois catégories principales[1] :

[*] Mathscope, Section de Mathématiques, Université de Genève – Suisse – shaula.fiorelli@unige.ch

[**] Université de Cergy-Pontoise – France – thomas.lecorre@u-cergy.fr
[***] Comité International des Jeux Mathématiques – France – mjp@cijm.org
[***] Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public – France – barbazo@wanadoo.fr

[1] La liste détaillée des participants est en annexe.

Les présentations statiques (expositions ou panneaux)	• Exposition Art & Math • Exposition « Regards sur les mathématiques, itinéraires méditerranéens » • Exposition « 2000 ans d'énigmes mathématiques » • Chasse au trésor mathématique
Les manipulations interactives (avec ou sans animateur)	• La Grange de Maths • AlPaGe • Mathscope • Math à modeler • Labosaïque
Les projets de longue durée	• Les Savanturiers : le canoë montable et démontable

Il est bien sûr entendu que ces catégories sont perméables ; par exemple, l'Exposition « Regards sur les mathématiques » comportait de nombreux objets que l'on pouvait toucher et manipuler. Cependant, elles montrent bien trois optiques différentes dans l'approche de la matière à présenter, liées non seulement à des volontés de présentation mais aussi à des contraintes techniques ou de conditions de présentation.

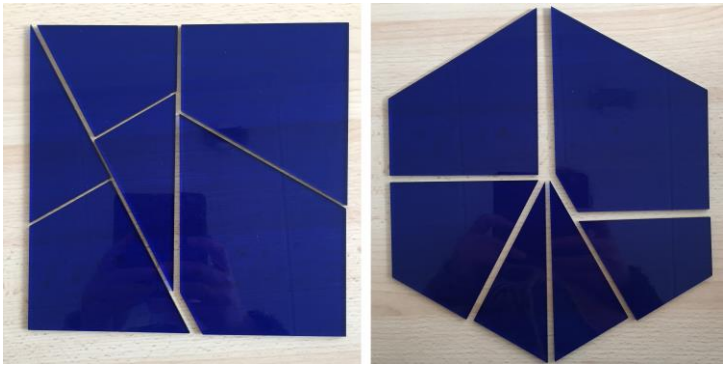


Figure 1 *– Un puzzle tiré d'une mallette pédagogique de la Grange des maths*

2. Les différents acteurs de la vulgarisation

Un autre aspect à observer consiste à regarder les différents acteurs de la vulgarisation représentés dans ces AM. On peut en compter principalement trois : les universités et les centres de recherches, les associations et les actions indépendantes.

Universités et centres de recherche	• Labosaïque (Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme, Université de Caen) • Exposition « Regards sur les mathématiques, itinéraires méditerranéens » (IREM d'Aix-Marseille) • Mathscope (Université de Genève) • Math à modeler (Institut Fourier, Université Grenoble Alpes) • Les Savanturiers (Centre de Recherches Interdisciplinaires)
Associations	• AlPaGe • Comité International des Jeux Mathématiques • La Grange de Maths
Actions indépendantes	• Exposition Art & Math

On observe une grande part d'activités initiées par les universités et centres de recherche parmi les participants. Ceci provient principalement du carnet d'adresse des organisateurs, les participants étant sollicités par ces derniers. En effet, de nombreuses associations proposent des activités de découverte des mathématiques, notamment au niveau scolaire ou périscolaire. Il faut cependant noter que de plus en plus les universités et les centres de recherche montrent une volonté de promouvoir leurs travaux par des actions de vulgarisation. C'est particulièrement le cas lorsque des subsides nationaux ou internationaux sont attribués aux laboratoires. En effet, de plus en plus, ces subsides prévoient qu'une part du budget soit octroyée à des actions pour le public.

3. Les publics visés

Le public visé par les actions des participants et d'une part les élèves des écoles, que ce soit en milieu scolaire ou périscolaire, et le grand public d'autre part. À nouveau, il n'y a pas de séparation nette, les participants travaillant avec des classes participent aussi à des festivals ou des actions pour le grand public en adaptant leurs activités selon le format.



Figure 2 *– Les enfants des centres aérés de Gennevilliers comparent l'aire de polygones sans outils de mesure*

III. BILAN DES AM

Le planning du colloque EMF 2018 aménageait des plages horaires pour que les participants puissent profiter des activités proposées par les AM. Nombreuses ont été les personnes qui ont pu profiter des différentes activités. De plus, le mercredi après-midi, les AM ont accueilli des enfants des centres aérés de Gennevilliers. Répartis en plusieurs groupes, ils ont pu profiter à leur tour des différentes activités proposées par les participants.

Un petit bémol sur l'organisation, les activités étant rassemblées dans une salle un peu à part, elles n'ont peut-être pas bénéficié d'une grande visibilité. Si ce format est reconduit dans les prochaines éditions du colloque, il serait intéressant de réfléchir à la place de ce type de travail, non seulement d'un point de vue physique, mais aussi à comment l'inscrire plus étroitement dans les travaux du colloque. La création du groupe de travail sur l'Étude des processus de vulgarisation depuis EMF2018 a déjà permis une interaction mais elle est encore à un stade informel. Une piste serait d'utiliser cet espace des AM pour avoir un volet pratique répondant au volet théorique du groupe de travail.



Figure 3 *–Les participants du Colloque expérimentent les différentes activités proposées*

Un des grands intérêts de ces AM a été qu'il s'est transformé en espace d'échange entre les participants. Ceux-ci ont en effet été très riches. Nous nous sommes questionnés sur nos pratiques, nous avons partagé des manips et eu de nombreux moments « Ouah ! ». Bien qu'informels, ces échanges ont permis à chacun de partager des visions et des approches nouvelles et de tisser des liens pour initier de futures collaborations.

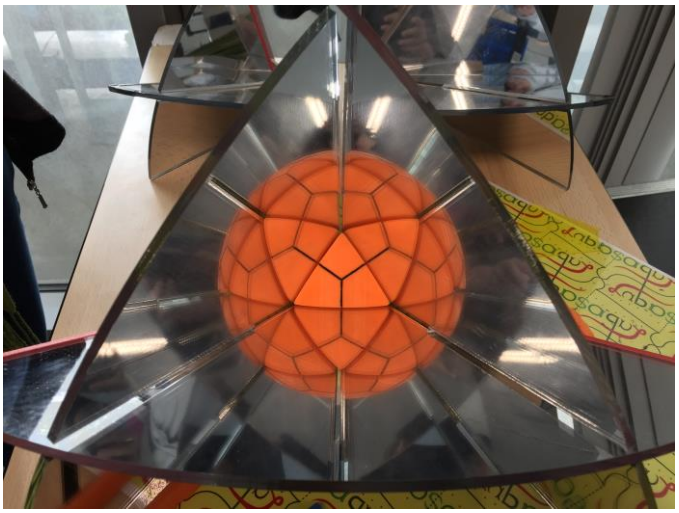


Figure 4 *– Moment « ouah ! » devant les miroirs du Labosaïque*

ANNEXE – LISTE DES PARTICIPANTS

AlPaGe, Algerie, Canada, France et Suisse. http://alpage.unige.ch/.
Chasse au trésor mathématique, Comité International des Jeux Mathématiques (CIJM). https://www.cijm.org/.
La Grange de Maths, Grenoble, France. https://www.la-grange-des-maths.fr/.
Labosaïque, Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme, Université de Caen, France, https://www.lmno.cnrs.fr/equipes/dcm/labosaique.
Exposition Art & Math, Commissaire Gisèle De Meur, Belgique. http://gatito.be/expo/.
Exposition « Regards sur les mathématiques, itinéraires méditerranéens », IREM d'Aix-Marseille, France. http://www.irem.univ-mrs.fr/expo2013/.
Exposition « 2000 ans d'énigmes mathématiques », Comité International des Jeux Mathématiques (CIJM). https://www.cijm.org/.
Mathscope, Université de Genève, Suisse. www.mathscope.ch.
Math à modeler, Institut Fourier, Université Grenoble Alpes, France. http://mathsamodeler.ujf-grenoble.fr/accueil.html.
Les Savanturiers – L'École de la recherche, Centre de Recherches Interdisciplinaires, Paris, France. https://les-savanturiers.cri-paris.org/.

TITRE :

Actes du colloque EMF 2018

AUTEURS:

Edités par Maha ABBOUD

Avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux du colloque EMF2018 : https://emf2018.sciencesconf.org/

RESUME :

Les rencontres scientifiques de l'Espace Mathématique Francophone (EMF) qui ont lieu tous les trois ans depuis 2000, sont reconnues comme conférences régionales de la Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique (CIEM / ICMI). Elles s'adressent aux différents intervenants préoccupés par les questions qui touchent à l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques : mathématiciens, didacticiens des mathématiques, chercheurs, formateurs, enseignants de différents niveaux.

Le 7ème colloque de l'Espace Mathématique Francophone s'est tenu à Gennevilliers sur le site de l'université de Cergy-Pontoise du 22 au 26 octobre 2018.

Pour cette édition, le comité scientifique présidé par Maha Abboud (Laboratoire de Didactique André Revuz) a choisi d'orienter les travaux du colloque sur le thème crucial des relations entre les mathématiques et les autres disciplines, dans l'enseignement.

Le nombre des participants a atteint 320 venant des quatre coins du monde, de pays francophones ou bien de communautés de recherche coopérant avec des chercheurs francophones : Canada, Belgique, Suisse, Mexique , Brésil, Liban, Algérie, Tunisie, Maroc, Mali, Burkina Faso, Côte d'Ivoire, Sénégal, Cameroun, Congo, Grèce, Hongrie, Etats-Unis, Luxembourg, Madagascar et le Viet Nam.

MOTS- CLES :

Francophonie, Mathématiques, Interdisciplinarité, Enseignement, Apprentissage, Formation

Éditeur: IREM de Paris
Université de Paris
75205 Paris cedex 13
https://irem.univ-paris-diderot.fr/

Dépôt légal : 2019
ISBN : 978-2-86612-391-8