

UN PROBLÈME CLASSIQUE REVISITÉ : LA QUADRATURE DU YIN-YANG

Jean-Paul TRUC

École des Pupilles de l'AIR, Saint-Ismier 38332

jean-paul.truc@prepas.org

RÉSUMÉ

Cet article souhaite montrer comment un très vieux problème comme la Quadrature du cercle est toujours d'actualité pour les amateurs de géométrie et peut donner matière à des activités d'enseignement au Lycée. Après une courte introduction historique qui reprend quelques quadratures, nous exposons une nouvelle méthode de quadrature du cercle, découverte par un mathématicien amateur de Béziers, André Ferrandi (Ferrandi, 2015). Trois preuves différentes, venant de trois auteurs différents, en sont données. Elles utilisent la géométrie analytique, la géométrie classique du triangle, et la géométrie complexe. Deux d'entre elles au moins sont accessibles aux élèves de Terminale Scientifique des Lycées et peuvent faire des sujets de travaux dirigés. Nous l'avons vérifié avec la classe de Terminale S du Lycée d'Altitude de Briançon, grâce à son professeur, Hubert Proal.

1 Des origines à la Grèce antique

1.1 Les prémices

On peut considérer que la première tentative de quadrature du cercle apparaît sur un papyrus égyptien de 1650 av. J.-C. écrit par le scribe Ahmès, qui indique la méthode pour construire un carré qui ait la même surface qu'un cercle. Sa méthode (voir figure 1) consiste à diminuer le diamètre d'un neuvième pour trouver le côté du carré. Le calcul donne :

$$\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 = \left(\frac{8D}{9}\right)^2,$$

ce qui conduirait à la valeur approchée de π suivante : $\pi \simeq \frac{256}{81} \simeq 3,1604$. Bien sûr, le problème numéro 50 de ce rouleau est posé dans des termes beaucoup plus concrets : « Un champ circulaire a un diamètre de neuf Khet (environ 50 m), quelle est sa surface ? ». Il n'y a pas de méthode générale, juste des exemples numériques qui permettent de la deviner, et le but est avant tout opératoire. Enfin la notation π ne sera introduite par William Jones qu'en 1706 et fixée par Euler en 1737.

1.2 Les mathématiques grecques

Dès l'Antiquité, le problème est posé en des termes géométriques et pas seulement pour faciliter les calculs. D'après Plutarque, Anaxagoras (499 av. J.-C., 427 av. J.-C.) est le premier à avoir écrit sur ce sujet.

Hippocrate de Chios (vers 440 av. J.-C.) ouvre une voie indirecte mais importante avec ses lunules, car il réalise la première quadrature d'un objet géométrique à contours circulaires (par un triangle rectangle isocèle). Cette découverte va donner de l'espoir aux « quadrateurs » à venir.

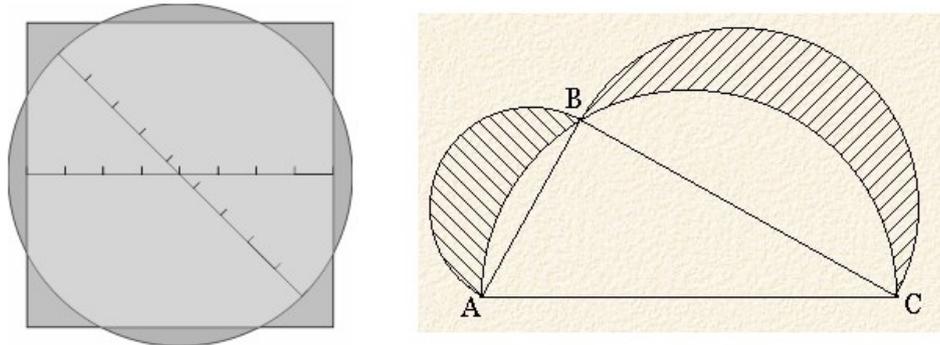


Figure 1 – La quadrature d’Ahmès et les lunules d’Hippocrate

D’autres mathématiciens vont utiliser des moyens détournés et en un certain sens « cinématiques » : Dinostrate (vers 350 av. J.C.), suivant les traces d’Hippias (vers 430 av. J.C.) utilise une courbe construite à l’aide d’un système mécanique (cette approche des courbes est générale à cette époque) : une droite horizontale se déplace vers le haut à une vitesse uniforme v , pendant qu’une autre droite tourne autour de O avec une vitesse de rotation uniforme ω . A l’instant $t = 0$ les deux droites sont confondues avec Ox . La *Quadratrice de Dinostrate* est la courbe décrite

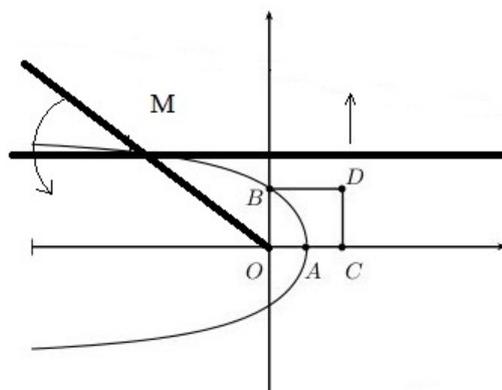


Figure 2 – La Quadratrice de Dinostrate

par le point d’intersection M de ces deux droites (voir figure 2). Déterminons l’équation de ce lieu en coordonnées polaires. À l’instant t , ce point M a pour ordonnée $y = vt$ et la droite qui tourne fait un angle $\theta = \omega t$ avec Ox . La distance $r = OM$ vérifie donc :

$$r^2 = x^2 + y^2 = v^2 t^2 + r^2 \cos^2 \theta = \frac{v^2 \theta^2}{\omega^2} + r^2 \cos^2 \theta,$$

d'où nous tirons :

$$r = \frac{v}{\omega} \frac{\theta}{\sin \theta}.$$

Cette courbe est une *quadratrice*. En effet, comme :

$$r(0) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{v}{\omega} \frac{\theta}{\sin \theta} = \frac{v}{\omega},$$

nous aurons donc : $r(\pi/2) = \frac{\pi}{2}r(0)$, et par suite (c.f. figure 1.2) : $OB = \frac{\pi}{2}OA$. Finalement si C est le symétrique de O par rapport à A , on a :

$$OC \times OB = \pi OA^2.$$

On a donc la possibilité, connaissant cette courbe, de construire un rectangle de surface égale à π en prenant par exemple $v = \omega$, mais la courbe n'est pas en elle-même constructible. D'après Proclus (Heath, 2013), le sophiste Hippias d'Elis aurait découvert cette courbe vers 420 av. J.-C. pour le problème de trisection de l'angle, et elle aurait ensuite été utilisée par Dinostrate vers 350 av. J.-C. pour la quadrature du cercle ; mais certains pensent que Hippias avait déjà introduit l'appellation de *quadratrice*.

Quoiqu'il en soit, il est déjà bien établi vers 300 av. J.-C. que « les cercles sont dans la proportion des carrés sur leurs diamètres » (Peyrard, 1804), le « sur » indiquant bien qu'il s'agit de comparer entre eux des objets géométriques, plus que des nombres.

1.3 Les quadratures d'Archimède

Du point de vue cinématique, Archimède propose une jolie solution dans son traité sur les spirales (ou cochloïdes), qu'il définit, toujours de manière « mécanique » comme les courbes engendrées par un point qui se déplace à partir d'un point central O de façon uniforme le long d'une droite qui tourne uniformément autour de O . Au bout d'un demi-tour, le point occupe la position M , d'angle polaire π . Traçons alors la tangente à cette spirale en M . Elle coupe en un point P l'axe Oy (voir figure 3). Archimède prouve alors que OP est égal à la demi-circonférence du cercle de rayon OM . En effet l'équation en coordonnées polaires de la spirale d'Archimède est de la forme $r = a\theta$ et il est bien connu que la tangente de l'angle fait par la tangente et le rayon polaire OM vaut :

$$\tan \widehat{OMP} = \frac{r(\theta)}{r'(\theta)} = \frac{a\theta}{a} = \theta$$

donc au point M , $\theta = \pi$ et :

$$\tan \widehat{OMP} = \pi = \frac{OP}{OM}.$$

Dès lors, $OM \times OP = \pi OM^2$ et on a bien construit un rectangle qui a pour aire l'aire du cercle de rayon OM .

Mais c'est dans le domaine des approximations, encadrant le cercle par des polygones convexes réguliers inscrits et ex-inscrits, que son apport sera sans doute le plus décisif (première et troisième propositions du traité sur la mesure du cercle), conduisant à l'encadrement :

$$\frac{22}{7} < \pi < \frac{223}{71} \text{ soit } 3.140845... < \pi < 3.142857....$$

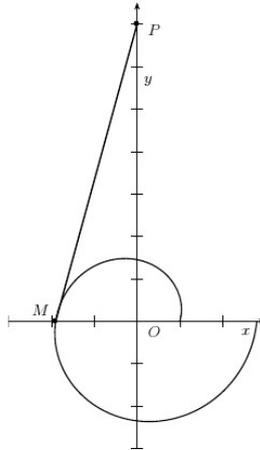


Figure 3 – La spirale d’Archimède

1.4 Une quadrature de la Renaissance : la quadrature d’Oronce Fine

La méthode d’encadrement d’Archimède sera améliorée, en nombre de polygones et en effort de calcul, durant le Moyen Âge et la Renaissance, avec parfois des variantes comme la quadrature de Francon de Liège (1050). François Viète en 1579 calcule π avec neuf décimales exactes (soulignons que Viète est un des premiers à penser que la quadrature géométrique exacte est impossible). Plus tard, le physicien Danois Snelle, par exemple, en 1621, calcule π par cette méthode avec 35 décimales.

Parallèlement à cette approche d’approximation, les tentatives de Quadrature géométriques continues, et sont réfutées l’une après l’autre. A titre d’exemple, nous allons détailler ici celle d’Oronce Fine.

Oronce Fine (qui signe de son nom latin : Orontii Finæi) a écrit un ouvrage dédié à la quadrature du cercle *Quadrature Circuli, tandem inuenta & clarrissimè demonstrata*, paru en 1544. Dans ce livre, il expose sa solution à ce problème classique, pour lequel Nicolas de Cues venait juste d’être réfuté et auquel Léonard de Vinci lui-même s’était essayé sans succès.

La critique de son travail se manifeste bientôt par la réfutation, en 1546, du mathématicien portugais Pedro Nunès, professeur à Coimbra, qui était son grand rival en cartographie. À sa suite, Jean Borrel, pourtant disciple de Fine le réfute également.

La quadrature d’Oronce est la suivante : considérons un cercle de centre E , dont AC et BD sont deux diamètres perpendiculaires. On joint par une ligne droite le point A à G , milieu de l’arc AD , on divise cette droite AG en moyenne et extrême raison (c’est-à-dire dans le rapport le nombre d’or, (de Lanascot, 1925)), GH étant le grand segment. Par H on mène à BD une parallèle HK qui rencontre AC en K : la longueur EK est le demi-côté du carré équivalent au cercle. Bien sûr, il s’agit encore d’une approximation. Comme on va le voir, cela donnerait comme valeur $\pi \simeq 3,15$ environ.

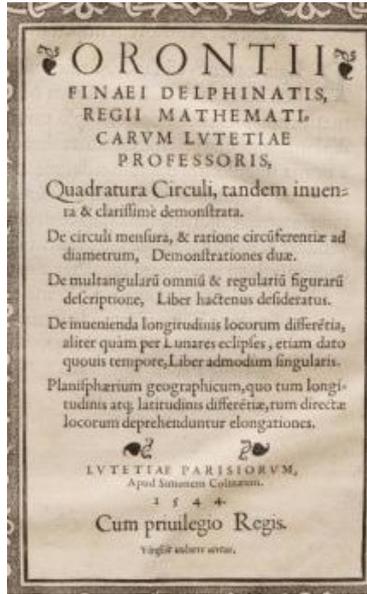


Figure 4 – Page de garde de Quadratura Circuli de Fine

Détaillons les calculs de cette jolie quadrature **qui va relier π au nombre d'Or ϕ** . Les nombres complexes ont été découverts en Italie au XVIème siècle par des contemporains d'Oronce Fine, comme Tartaglia (1506-1557) et Bombelli. L'ingénieur mathématicien Albert Girard (1595-1632) les qualifie de *solutions impossibles*. Il n'est donc pas si anachronique de les utiliser dans notre calcul, bien que l'application des nombres complexes à la géométrie, par Argand et Gauss, ne date que du début du XIXème siècle. Reportons nous donc à la figure 5 ; notons ϕ le nombre d'or. Les affixes complexes des points A , G , et H sont reliées par la relation : $z_A - z_G = \phi(z_H - z_G)$, ou encore :

$$\phi z_H = z_A + z_G(\phi - 1). \quad (1)$$

Prenant un rayon $ED = 1$ et E comme origine, nous avons $z_A = i$ et $z_G = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$. Nous tirons alors de la relation (1) l'ordonnée du point H , en prenant la partie imaginaire :

$$2y_H = 2 EK = \frac{2 + \sqrt{2}(\phi - 1)}{\phi}.$$

Nous devons donc à Oronce Fine cette jolie approximation de $\sqrt{\pi}$ en fonction du nombre d'or (rappelons nous que $\phi^{-1} = \phi - 1$) :

$$\sqrt{\pi} \simeq 2 EK = (\phi - 1)(2 + \sqrt{2}(\phi - 1)).$$

le calcul numérique ($\phi \simeq 1.618034$) nous donne $\pi \simeq 4 EK^2 \simeq 3,1550623$.

1.5 Un coup d'arrêt

L'impossibilité de la quadrature du cercle par construction géométrique a été démontrée seulement par Ferdinand von Lindemann en 1882. Il faudrait pour cela que π soit un nombre

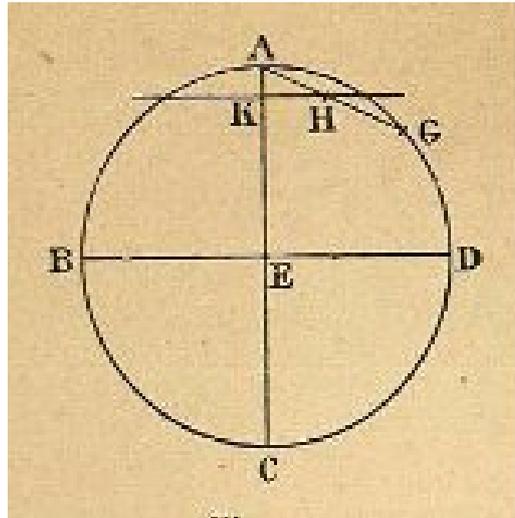


Figure 5 – La quadrature d’Oronce Fine

constructible, ce qui n’est pas le cas, car seuls les nombres algébriques le sont, à savoir les entiers, les rationnels et les racines d’équation algébriques à coefficients entiers. Les nombres qui ne répondent pas à ces conditions sont dits transcendants et π en fait partie. Depuis, les propositions d’article sur la quadrature du cercle sont le plus souvent le fait de mathématiciens autodidactes, et bien sûr rejetées dans la plupart des rédactions sans même être examinées en détails.

2 La quadrature du YIN YANG

2.1 La construction géométrique d’André Ferrandi

Dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé Oxy , on considère (voir figure 6) un cercle (C) de centre O et de diamètre horizontal MN . On désigne par (Δ) la seconde bissectrice. Menons par le point N la parallèle à (Δ) , notée (Δ') .

Maintenant, construisons le cercle (ω) de centre N et de rayon MN . Il coupe la droite (Δ') en un point Q (voir figure 5). Nous traçons alors la demi droite OQ qui coupe le premier cercle (C) en un point K , puis par K nous menons la perpendiculaire à (Δ) qui coupe respectivement les axes Ox et Oy en des points A et B . Alors le rapport de l’aire du carré de côté AB sur celle du cercle (C) est voisin de 1.

Bien sûr, tout point K' de la droite (D) définit un cercle de centre O passant par K' et un carré de côté $A'B'$ dont le rapport des aires sera le même que précédemment. Dans ce qui suit, nous allons calculer une valeur exacte du rapport des aires de deux manières différentes.

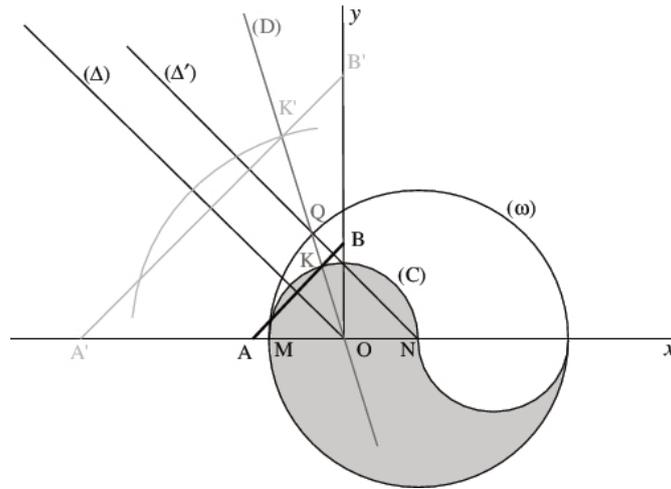


Figure 6 – La quadrature du Yin-Yang

3 Une méthode analytique

Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que le cercle (C) est de rayon $R = 1$ (cela revient à un changement d'unité). Comme la bissectrice (Δ) a pour équation $y = -x$ et que le repère est orthogonal, l'équation de la perpendiculaire à (Δ) passant par le point K est de la forme $y = x + c$. La valeur de c suffit à déterminer l'aire du carré de côté AB . En effet A et B ont pour coordonnées respectives $(-c, 0)$ et $(0, c)$ ce qui fait que la longueur du segment AB est $\sqrt{2c^2}$ et l'aire \mathcal{A}_2 d'un carré de côté AB sera donc égale à : $\mathcal{A}_2 = 2c^2$.

Nous allons essayer de déterminer la valeur du paramètre c . Comme (Δ') a pour équation $y = 1 - x$, les coordonnées du point Q sont déterminées (sachant $y_Q > 0$) par le système d'équations :

$$\begin{aligned}(x_Q - 1)^2 + y_Q^2 &= 4 \\ x_Q + y_Q &= 1\end{aligned}$$

On en tire facilement $y_Q = \sqrt{2}$, $x_Q = 1 - \sqrt{2}$.

Remarquons maintenant que la droite (D) a une équation de la forme $y = tx$ et en écrivant qu'elle passe par Q , on calcule la valeur de t :

$$t = \frac{\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} = -2 - \sqrt{2}. \quad (1)$$

Le point K étant l'intersection de (D) et de la perpendiculaire à (Δ) , ses coordonnées vérifient :

$$\begin{aligned}y_K &= tx_K \\ y_K &= x_K + c\end{aligned}$$

ce qui nous permet de calculer le paramètre c :

$$c = (t - 1)x_K. \quad (2)$$

il reste à écrire que K est sur le cercle (C) , ce qui nous donne :

$$x_K^2 + y_K^2 = (1 + t^2)x_K^2 = 1.$$

On en tire successivement :

$$x_K^2 = \frac{1}{1 + t^2},$$

puis grâce à (2) :

$$c^2 = \frac{(t - 1)^2}{1 + t^2}. \quad (3)$$

Nous sommes maintenant en mesure de calculer le rapport des aires :

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{A}_2}{\mathcal{A}_1} &= \frac{2c^2}{\pi} &&= \frac{2(t-1)^2}{\pi(1+t^2)} \\ &&&= \frac{2(3+\sqrt{2})^2}{\pi(7+4\sqrt{2})} \\ &&&= \frac{2(11+6\sqrt{2})^2}{\pi(7+4\sqrt{2})} \\ &&&= \frac{2}{17\pi}(29 - 2\sqrt{2}). \end{aligned}$$

La valeur numérique est d'environ 0.98008. Cette quadrature est moins précise que celle de Fine par exemple, puisqu'elle donne $\pi \simeq 2c^2 \simeq 3,08$, avec une erreur relative de 2% environ.

4 Une approche géométrique

Introduisons le point H , intersection de la bissectrice (Δ) avec AB . Revenons au cas général et notons r le rayon du petit cercle. Le grand cercle a ainsi pour rayon $2r$. Désignons par α une mesure de l'angle \widehat{KOH} . Dans le triangle rectangle OHK , nous avons :

$$OH = OK \cos \alpha = r \cos \alpha,$$

mais le triangle AHO étant isocèle (par construction), $AH = HO$. Par ailleurs, (Δ) est la médiatrice de AB donc $AB = 2AH$, d'où : $AB = 2r \cos \alpha$. Nous pouvons donc maintenant exprimer le rapport des aires du carré de côté AB et du disque de rayon r comme :

$$\frac{\mathcal{A}_2}{\mathcal{A}_1} = \frac{4 \cos^2 \alpha}{\pi}. \quad (4)$$

Ainsi, si on avait $\cos \alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, la quadrature serait parfaite, comme l'indique d'ailleurs André Ferrandi dans son document original.

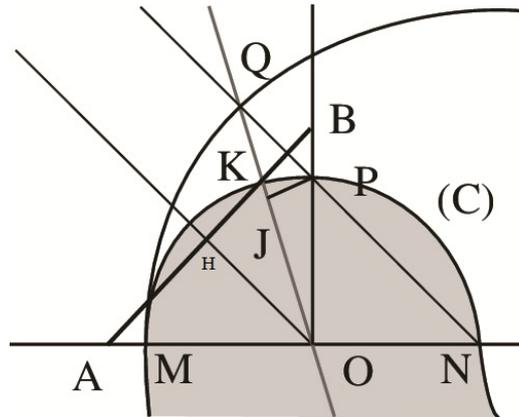


Figure 7 – La quadrature du Yin Yang (détail)

Calcul de $\cos \alpha$

Soit P le point du petit cercle (ω) à la verticale de O , comme indiqué sur la figure 7. Le triangle ONP est isocèle rectangle en O et $OP = ON = r$. Par le théorème de Pythagore $NP = r\sqrt{2}$. D'autre part $QP = QN - NP$ et $QN = 2r$, d'où finalement :

$$QP = r\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1).$$

Abaissons la hauteur PJ issue de P dans le triangle OQP , comme indiqué sur la figure 7. Comme l'angle \widehat{OQP} a aussi pour mesure α (angles alternes internes), cette hauteur a pour longueur $PJ = QP \sin \alpha$. Mais on peut aussi calculer PJ dans le triangle rectangle OJP ce qui donne :

$$PJ = OP \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right).$$

Nous obtenons donc l'équation trigonométrique :

$$QP \sin \alpha = OP \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right).$$

Remplaçant QP et OP par leurs expressions en fonction de r conduit à :

$$r\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1) \sin \alpha = r \left(\frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\sqrt{2}} \right),$$

ou encore à :

$$\left(2(\sqrt{2} - 1) + 1 \right) \sin \alpha = \cos \alpha,$$

d'où on tire :

$$\tan \alpha = \frac{1}{2\sqrt{2} - 1}. \quad (5)$$

Or $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha}$ donc, tous calculs faits :

$$\cos^2 \alpha = \frac{29 - 2\sqrt{2}}{34}. \quad (6)$$

Expression donnant le rapport des aires

Finalement, en reportant (6) dans (4), on retrouve le rapport des aires calculé précédemment :

$$\frac{\mathcal{A}_2}{\mathcal{A}_1} = \frac{2}{17\pi}(29 - 2\sqrt{2}) = C_{YY},$$

où on a introduit la notation C_{YY} , pour désigner cette constante (Ferrandi, 2015).

5 Une expérimentation au Lycée

Nous avons proposé ce sujet de réflexion à une classe de terminale S (niveau équivalent à : GB year 13, US 12th grade, Canada et Belgique 6ème sec.) en l'occurrence la classe de Hubert Proal, professeur agrégé de mathématiques au lycée d'Altitude de Briançon, patrie d'Oronce Fine.

Le sujet a été abordé par Hubert Proal lors d'une séance de révisions sur les nombres complexes. La méthode relève donc d'un choix du professeur. Le sujet n'a pas été expliqué d'un point de vue historique dans un premier temps mais simplement présenté comme un exercice sortant des sentiers battus, à l'encontre des traditionnels exercices de révision pour le bac.

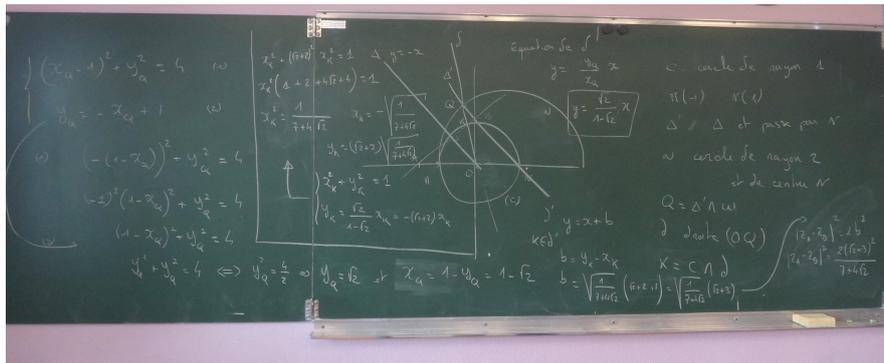


Figure 8 – Le problème au tableau dans la classe (Photo H. Proal)

La séance a eu lieu en classe entière (28 élèves). Les dessins ont été fait à la main au tableau, puis dans un deuxième temps le logiciel Geogebra, projeté sur la tableau blanc, a été utilisé pour fournir une base solide au raisonnement, tout en permettant d'annoter le dessin.

Dans cette classe, il y avait de bons élèves qui ont suivi et participé aux calculs, effectués à la main. L'exercice est abordé sous forme de discussion ; le professeur écoute les idées des élèves et regarde avec eux si cela peut marcher ou pas.

Nous détaillons ci-dessous les calculs effectués lors de cette séance :

Le problème est de calculer le rapport de l'aire du carré de côté AB sur celle du cercle (C), soit encore $\frac{|z_B - z_A|^2}{\pi}$ (voir figure 10). On commence par calculer l'affixe du point Q : $z_Q =$

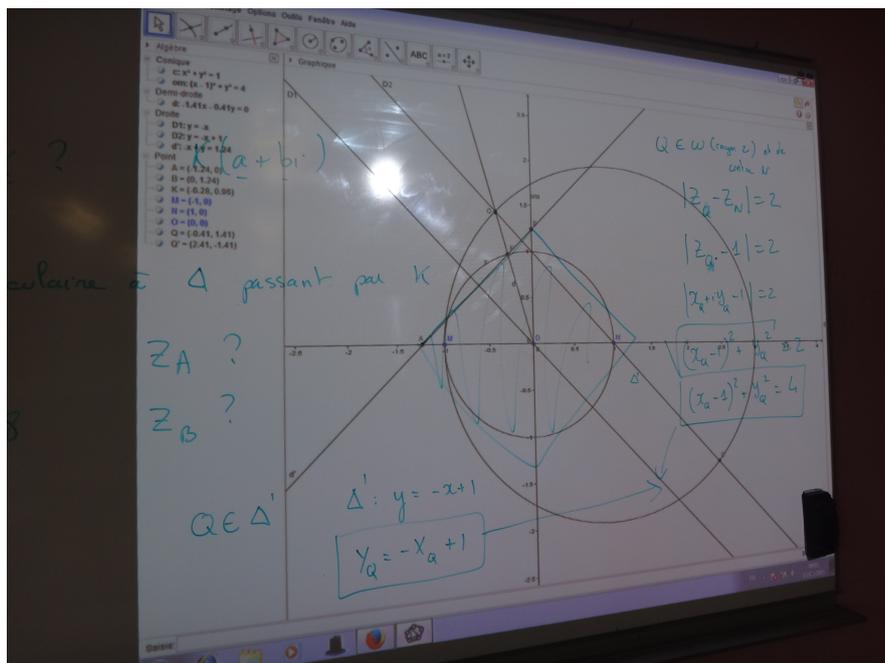


Figure 9 – Travail sur écran avec Geogebra (Photo H. Proal)

$1 + 2e^{\frac{3i\pi}{4}} = 1 - \sqrt{2} + i\sqrt{2}$. Puis, on calcule la distance OQ : $|z_Q| = \sqrt{5 - 2\sqrt{2}}$, ainsi que son inverse $\frac{1}{|z_Q|} = \frac{\sqrt{17}\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}}{17}$. On en déduit l'affixe du point K du cercle trigonométrique :

$$z_K = \frac{z_Q}{|z_Q|} = \frac{-\sqrt{17(7 - 4\sqrt{2})} + i\sqrt{17(10 + 4\sqrt{2})}}{17}.$$

Il reste à calculer les affixes des points A et B . La figure 11 explique la façon dont procède le calcul. Remarquer que $z_A \in \mathbb{R}$ et $z_B \in i\mathbb{R}$.

6 En conclusion

Cette quadrature amusante peut-être l'occasion de faire un peu de géométrie élémentaire dans une classe de lycée. Elle n'est certes pas aussi précise que celle d'Hippias ou que celle d'Oronce Fine par exemple (Fréchet, 2013), mais elle a le mérite de fournir un petit problème de géométrie accessible au plus grand nombre, et de faire appel à des outils basiques, comme les équations de droite où la géométrie du triangle, tout en montrant les relations entre ces deux aspects du problème.

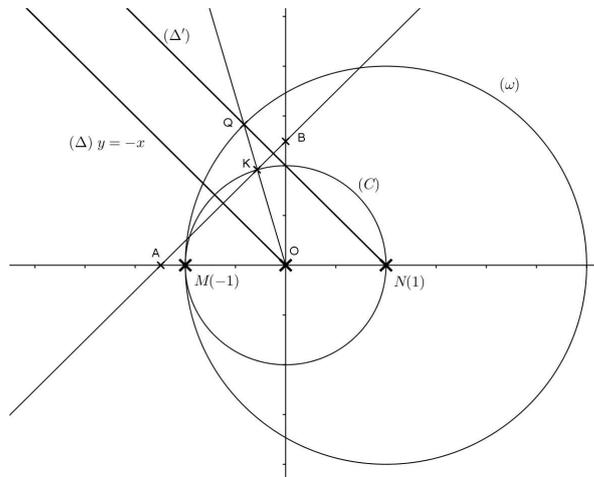


Figure 10 – La Quadrature par les complexes (Image H. Proal)

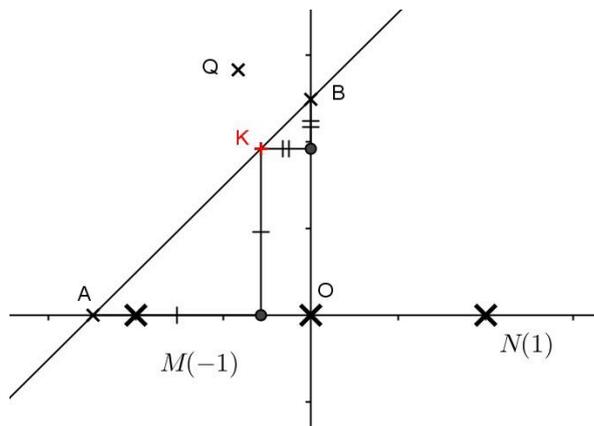


Figure 11 – La Quadrature par les complexes - détail (Image H. Proal)

RÉFÉRENCES

- de Lanascot, Q. (1925). *La géométrie du compas*. Paris : Librairie scientifique A. Blanchard.
- Ferrandi, A. (2015). La quadrature du Yin et du Yang. *Quadrature*, 97, 12-14.
- Fréchet, G. (2013). Oronce Fine, mathématicien et cartographe. *Quadrature*, 90, 36–47.
- Heath, T. (2013). *A history of Greek Mathematics*. Cambridge : Cambridge University Press.
- Peyrard, F. (1804). *Les éléments de géométrie d'Euclide, traduits littéralement et suivis d'un Traité du cercle, du cylindre, du cône et de la sphère, de la mesure des surfaces et des solides, avec des notes*. Paris : F. Louis. Consulté sur <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k110982q.r=.langFR>