

LES RÈGLES D'UN QUART ET UN VINGTIÈME ET DES COMPTES DE FLANDRE COMME MODÉLISATION DU RÉEL

Costa Clain, TERESA

Universidade de Aveiro, CIDMA - Centro de Investigação e Desenvolvimento em Matemática e Aplicações,
Campus Universitário de Santiago, 3810-193 Aveiro, Portugal, costa.jesus.teresa@ua.pt

RÉSUMÉ

La Maison de l'Inde et le comptoir de Flandre sont à l'origine de règles spécifiques dont on ne trouve pas d'équivalent dans les traités d'arithmétique des autres pays. La règle d'un quart et un vingtième correspond à un prélèvement d'un quart plus un vingtième des trois quarts restants, c'est-à-dire $\frac{1}{4} + \frac{1}{20} \times \frac{3}{4} = \frac{23}{80}$ de la quantité initiale. La règle des comptes de Flandre correspond à une formule de conversion. Dans cette session, nous proposons une introduction à ces règles spécifiques du commerce des épices au Portugal à l'époque de la Renaissance, en tenant compte de l'interaction entre les Mathématiques, l'Histoire et l'introduction de la mentalité quantitative pour la modélisation du réel.

1 Les traités d'arithmétique portugais du XVI^e

Le Portugal connut une période de forte prospérité et de grande activité commerciale durant le XVI^e siècle. Les découvertes maritimes furent le moteur d'un formidable accroissement du développement économique et ont placé Lisbonne au centre d'un vaste commerce international. Le développement d'activités commerciales mettant en jeu des sommes considérables, et l'introduction d'un impôt lié au commerce des épices motivèrent et favorisèrent l'utilisation de nouvelles pratiques arithmétiques plus efficaces, répondant de manière plus adéquate aux nécessités d'un négoce sans cesse plus complexe et structuré. On assiste à quelques exemples de modélisation arithmétique utilisés à cette époque, comme furent les calculs des impôts de la Maison de l'Inde (la règle d'un quart et un vingtième), la règle des compagnies pour l'exécution des négoce et la confluence de diverses formes de *cabedal*¹ à la poursuite d'une entreprise particulière (les règles de troc).

Ce fut précisément à ce moment qu'apparurent les premières œuvres de référence en arithmétique telles que le *Tratado da Pratica d'Arismetica* de Gaspar Nicolas, publié pour la première fois en 1519 ; la *Pratica d'Arismetica* de Ruy Mendes de 1540 ; le *Tratado da arte de Arismetica*, de Bento Fernandes de 1555. Issue d'un besoin de formation des marchands et de la nécessité de construire des institutions royales adaptées au commerce international et à sa gestion (perception de l'impôt par exemple), la publication de traités d'arithmétique représente

¹ *Cabedal* – Fonds financiers pour assurer le commerce de l'Orient. Parfois, le *cabedal* se composait d'or, d'argent et de cuivre, en plus de la monnaie en vigueur. D'autre part les lettres de change voire même les marchandises, ceci dans le cas spécifique du troc, étaient considérées comme faisant aussi partie du *cabedal* [Almeida 1994, vol. II, p. 294].

une étape importante pour le développement et la diffusion d'une pratique mathématique liée au monde des affaires au Portugal.

Des trois traités imprimés durant ce siècle au Portugal, le plus populaire fut sans aucun doute l'œuvre de Gaspar Nicolas qui connut onze éditions s'étalant sur plus d'un siècle alors que le traité de Ruy Mendes ne fut publié qu'une seule fois en 1540 par le même éditeur Germão Galharde².

À l'image des traités italiens, les ouvrages portugais s'articulent autour de sujets liés au négoce. Une constante commune à tous ces traités est la présence de règles spécifiques liées à la Maison de l'Inde et aux impôts résultant du commerce à grande échelle. Néanmoins d'autres aspects des mathématiques que l'on classifie de «classiques» ou «traditionnelles» comme les problèmes sur les nombres, les racines carrées et cubiques, les progressions, sont aussi présents dans toutes les publications. La persistance de ces thèmes, qui ne sont pas les objectifs principaux des traités montre l'importance que les différents auteurs leur accordent.

1.1 Les règles d'un quart et un vingtième et des comptes de Flandre

La Maison de l'Inde se révèle être une des pierres angulaires de l'organisation commerciale du Portugal (et plus particulièrement de Lisbonne) au XVI^e siècle. Elle est à l'origine de règles spécifiques que l'on rencontre uniquement dans les traités d'arithmétique marchande lusitaniens, comme nous l'avons déjà mentionné.

La principale source d'information que nous avons sur cette institution provient d'un manuscrit décrivant le règlement de la Maison de l'Inde dont un exemplaire se trouve à la Bibliothèque Centrale de la Marine et un autre à la Bibliothèque Nationale du Portugal. Une transcription de ce manuscrit fut réalisée par Damião Peres en 1947 [Peres 1947] qui en donne une reproduction exacte. La Maison de l'Inde fut créée en 1503 sous le règne de Dom Manuel I afin de gérer le commerce international avec l'Orient et garantir un monopole sur le transit des marchandises en faveur du roi. Elle englobe aussi deux autres institutions : la Maison de Guinée et la Maison de Mina, liées au commerce avec la côte ouest de l'Afrique. La Maison de l'Inde avait pour mission de réaliser la manutention, le stockage et la vente des marchandises venant de l'Orient vers le reste de l'Europe (principalement les épices). On y maintenait une comptabilité sur les achats et les ventes, en particulier on y calculait l'impôt (la règle d'un quart et un vingtième que le marchand devait au roi). La Maison de l'Inde était localisée sur la rive nord du Tage dans l'actuel *Paço da Ribeira* ; ses bâtiments étaient disposés perpendiculairement au fleuve.

L'accroissement rapide du commerce avec le port de Lisbonne et l'augmentation du volume de négoce qui en a découlé sont les principales motivations de la création de l'institution et de son règlement évoqués dès les premières pages :

Considérant les grandes choses que sont nos comptoirs de Guinée et des Indes, Dieu soit loué, et les avantages et bénéfiques qui en résultent pour notre royaume, notre peuple et les autres parties de la chrétienté, étant donné que nous devons travailler pour la bonne

² Germão Galharde était un typographe français installé à Lisbonne à partir de 1519. Il adopta le patronyme de German Galharde ou Germão Galharte et possédait des imprimeries à Lisbonne et Coimbra.

gestion, gouvernance et préservation de ces affaires, il nous apparaît que le négoce est une occupation de la plus haute importance...³

De fait, en raison des découvertes maritimes, les routes commerciales avec l'Inde se trouvent modifiées en faveur de Lisbonne et la route du Cap permet un transport de marchandises plus rapide, plus fiable, garant d'une meilleure qualité et surtout plus économique que le transit par la route traditionnelle de l'est via les pays du Moyen Orient et l'Italie. Lisbonne devient une des principales plateformes d'un commerce mondial en pleine expansion, justifiant la création d'un outil de gestion adapté.

Un des principaux objectifs de la Maison de l'Inde était la perception de l'impôt. Deux articles du règlement sont dédiés aux règles de calcul de cet impôt spécifique à Lisbonne. L'article 68.º réglemente la valeur de la taxe [Peres 1947, pp. 56-58], basée sur la règle d'un quart et un vingtième pour toutes les marchandises, tandis que l'article 71.º prévoit l'enregistrement et le contrôle de cette taxe. La règle d'un quart et un vingtième est une des spécificités du traité de Ruy Mendes. Elle est issue d'un calcul des impôts appliqué au Portugal aux marchandises provenant du commerce avec l'Orient. Elle correspond à un prélèvement d'un quart plus un vingtième des trois quarts restants, c'est-à-dire $\frac{1}{4} + \frac{1}{20} \times \frac{3}{4} = \frac{23}{80}$ de la quantité initiale.

Nous en donnons le principe tiré de l'ouvrage de Mendes: « Étant donnée une quantité, et connaissant le quart et les trois quarts de cette même quantité, quel est le vingtième de cette dernière quantité ? Et retranché de cette dernière quantité, combien reste-t-il ? »⁴

L'auteur propose ensuite un exemple concret : « Le quart de 155 *cruzados* et le vingtième de ses trois quarts cela fera combien ? »⁵. Nous reproduisons la résolution du problème telle quelle dans le traité par Ruy Mendes, mais traduit en langage mathématique actuel.

Considérons les fractions $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{20}$. Multiplions 4 par 20, cela fait 80. Effectuons maintenant les produits suivants $\frac{1}{4} \times 80 = 20$ et $\frac{3}{4} \times 80 = 60$. Le vingtième de ces $\frac{3}{4}$ [de 80] est 3, et $20 + 3 = 23$, qui est $\frac{23}{80}$ de 80 et le vingtième de ces $\frac{3}{4}$ [de 80].

Relativement aux 155 *cruzados* est appliquée la règle de trois

$$\begin{array}{r} 80 \text{ cruzados} \quad \text{-----} \quad 23 \text{ cruzados} \\ 155 \text{ cruzados} \quad \text{-----} \quad x \end{array}$$

³ « Considerando nos quam grandes couzas sam os nossos trautos de Guiné e das Índias, a Deos louvores, y quãto proveito delles se segue a nossos Regnos, e naturais delles, y assi a outras partes da Christandade, e como somos obrigados a trabalhar, quanto em nos for, de as taes couzas serem sempre bem regidas e governadas e conservadas, parecendo nos que por ho negocio ser grande e de munta importancia e ocupação... » [Peres 1947, p.3].

⁴ « Tendo uma quantia, saber $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{4}$ da mesma, a vintena quantos será? E tirados dela quanto ficará? » [Mendes 1540, f. 80].

⁵ « O quarto de 155 cruzados e a vintena dos seus três quartos, quanto será? » [Mendes 1540, f. 80].

$x = 44 \text{ cruzados } 2 \text{ tostões } 1 \text{ vintém } 5 \text{ reais}^6$.

Les trois auteurs portugais établissent un modèle (un algorithme) facile à appliquer à une grande variété de problèmes. Ce sont ces questions que nous allons traiter en classe.

La règle des comptes de Flandre correspond à une règle de conversion. En complément à la Maison de l'Inde, le comptoir d'Anvers était à l'époque sous juridiction portugaise et était dédié à la distribution en Europe des produits venant de l'Orient. La monnaie en usage à Anvers (*livra* (livre), *soldo* (sou), *dinheiro* (denier), *mita* (mite)) étant différente de celle du Portugal sur la place de Lisbonne, une conversion entre les deux systèmes a conduit à la définition de règles spécifiques regroupées sous le nom de règle des comptes de Flandre.

1.2 La mathématique et l'histoire pour les étudiants du lycée au cours de sciences humaines

Durant la première année du lycée, est enseigné le cours de "Mathématiques appliquées aux sciences sociales", destiné aux élèves de Sciences Humaines. Il est recommandé de promouvoir l'approfondissement des connaissances scientifiques, techniques et humanistes qui constituent un soutien cognitif et méthodologique pour une étude plus approfondie et pour l'intégration dans la vie active. Un des sujets que nous enseignons est lié aux différents impôts. Les étudiants sont familiers avec la règle de trois et il est prévu de travailler avec différentes situations de proportionnalité directe. Une circulaire très importante nous recommande de faire connaître quelques dates importantes de l'histoire des mathématiques et de les relier à des moments historiques de forts impacts culturels ou sociétaux.

Durant cette même année et en association avec le cours d'Histoire, il est recommandé de pratiquer l'analyse de sources sur l'époque des découvertes portugaises lorsque le professeur aborde en classe ce thème, en particulier le rôle du Portugal dans la navigation au XVI^e siècle et le déroulement de la science en tenant compte la mathématisation du réel. Selon la méthodologie proposée, nous trouvons pertinent d'enseigner les «taxes» prévues au Portugal au XVI^e siècle. Cette approche est particulièrement riche. Les étudiants connaissent la mathématisation du réel à travers des œuvres de l'époque, par la lecture de textes anciens. Les traités portugais sont particulièrement riches en informations, comme par exemple, les préoccupations des marchands dans les cas où la marchandise est perdue et, en même temps comment la Maison de l'Inde va y répondre au travers de la taxe prélevée.

1.3 Un exemple d'une activité en classe

Nous présentons ici un exemple à proposer aux élèves.

« La mathématisation du réel à travers des traités d'arithmétique du XVI^e siècle: les règles d'un quart et un vingtième et des comptes de Flandre »

Publique: les élèves en première année du lycée

⁶ Nous utilisons la notation actuelle de la règle de trois simple et la monnaie portugaise de l'époque. Les valeurs utilisées par l'auteur sont les suivantes :

1 *cruzado* = 4 *tostões*, 1 *tostão* = 5 *vinténs*, 1 *vintém* = 20 *reais* [Mendes 1540, f. 7].

Résumé:

1. Qu'est-ce que la mathématisation du réel?
 2. La Maison de l'Inde et le comptoir de Flandre.
 3. Les impôts: Les règles d'un quart et un vingtième et des comptes de Flandre (analyse des textes et résolution de problèmes proposés par les arithméticiens du XVI^e)
1. En Histoire sont étudiés certains aspects de la mathématisation du réel. Vitorino Magalhães Godinho rapporte l'éclosion d'un état d'esprit quantitatif qui sera progressivement répandu dans tous les secteurs de la société. Commencez par lire le texte 1.

Texte 1

« La formation d'une mentalité quantitative trouve son origine dans deux motivations. D'une part, la construction progressive d'un état moderne se substituant aux liens de dépendance féodale, en passant du momentané, de l'occasionnel pour le durable et le permanent. Nous mentionnerons trois exemples : la mobilisation militaire pour la constitution d'une armée permanente (...), les taxes avec des impôts généraux et permanents substituant les rentes royales (...), la comptabilité de différents services ainsi que la comptabilité publique (...).

D'autre part, durant ces deux siècles [XV^e et XVI^e siècles], se développe et s'enracine une économie de marché, essentiellement monétaire, basée sur une production à vendre dans le but de tirer de l'argent et sur les applications monétaires pour gagner encore plus d'argent. Les agents de la vie économique vont penser chaque fois plus en terme de quantité, de prix, de coût, valeur et stock d'argent. »⁷.

- 1.1. D'après la lecture du texte, souligner trois facteurs de la vie politique, économique, sociale ou culturelle, qui, selon Vitorino Magalhães Godinho, expliquent la déclaration d'un état d'esprit quantitatif en Europe dans les XV^e et XVI^e siècles.
- 1.2. Vitorino Magalhães Godinho fait référence aux impôts. Un des principaux objectifs de la Maison de l'Inde était la perception de l'impôt. Les trois arithméticiens du XVI^e présentent dans leurs traités de nombreux problèmes pour enseigner aux marchands les règles sur les impôts. Par exemple, Ruy Mendes, a écrit:

Texte 2

⁷ « A formação da mentalidade quantitativa prende-se a duas ordens de razões. Por um lado, é a progressiva construção do Estado moderno, substituindo os laços de dependência pessoal e passando do momentâneo, do ocasional para o duradouro, para o permanente.

Enumeremos três pontos: a mobilização militar para construção de exércitos permanentes (...); a tributação, com impostos gerais e permanentes, substituindo as rendas do domínio real (...); a contabilidade dos vários serviços e a contabilidade geral pública (...).

Por outro lado, durante estes dois séculos [séculos XV-XVI], desenvolve-se e enraíza a economia de mercado, basilarmente monetária, assente na produção para vender, na venda destinada a obter dinheiro (...) e na aplicação do dinheiro a fim de ganhar mais dinheiro. Quer dizer que os agentes da vida económica vão pensar cada vez mais em termos de quantidades, preços, custos, valores e stocks de moedas. » [Godinho 1963-1971, p. 31].

« Que ôter un quart et un vingtième, selon la pratique de la Maison de l'Inde, n'est rien d'autre sinon de savoir de combien, d'une certaine quantité, du quart et des trois quarts dont on ne prend que la vingtième quantité, sera retiré de cette quantité et combien restera t'il? »⁸

- 1.3. Expliquer quel est le modèle proposé par l'auteur en ce qui concerne l'impôt selon la règle décrite dans le texte. Quel est le modèle pour le marchand? Et pour le roi?
2. Un problème qui aborde le sujet de la perte d'une partie d'une cargaison de poivre, ce qui était à l'époque une situation habituelle, est le suivant:

« Un navire part des Indes avec 500 quintaux de poivre et, arrivant au Portugal, on déplore une perte de 6 pour cent de la marchandise. On demande, premièrement, combien de quintaux arrivent au Portugal. On demande ensuite quel est le quart et le vingtième des trois-quarts. Et retranché de la somme précédente, combien reste t-il? »⁹

- 2.1. Compléter le tableau ci-dessous.

Le texte	Le langage mathématique
Sur 500 quintaux de poivre il y a une perte de 6 pour cent.	
Combien de quintaux arrivent au Portugal?	
Quel est le quart et le vingtième des trois-quarts de ce qui arrive au Portugal?	
Et retranché d'eux, combien reste t-il?	

- 2.2. Les arithméticiens portugais mentionnent que la perte de marchandise correspond entre 6% et 12% de la marchandise totale. Soit x la quantité de marchandise et y la valeur de la perte.

2.2.1. Trouver une expression qui donne la perte de marchandise.

2.2.2. Trouver une expression donnant la quantité de marchandise soumise à l'impôt.

3. Nous allons maintenant aborder la deuxième règle locale : la règle des comptes de Flandre qui correspond à une règle de conversion. En complément à la Maison de l'Inde, le comptoir d'Anvers (Flandre) était à l'époque sous juridiction portugaise et était dédié à la distribution en Europe des produits venant de l'Orient. La monnaie en usage à Anvers (*livra* (livre), *soldo* (sou), *dinheiro* (denier), *mita* (mite)) étant différente de celle du Portugal sur la place de Lisbonne, une conversion entre les deux systèmes a conduit à la définition de règles spécifiques regroupées sous le nom de règle des comptes de

⁸ « Que tirar quarto e vintena segundo se tira na Casa da Índia nã he outra cousa salvo saber de hũa certa cãtia ho quarto e dos tres quartos della mesma a vintena quantos sera e tirados della quantos ficarã? » [Mendes, 1540, f. 80 v].

⁹ « Hũa nao partio da India com 500 quintaes de pimenta: e chegando a Portugal ahouse nella de quebra a razam de 6 por cento: preguntase primeiramente com quantos quintaes chegou a Portugal e esto sabido preguntase mais o quarto deles e a vintena dos seus tres quartos quantos seram: e tirados deles mesmos quãtos ficarã » [Mendes 1540, f. 82]. Les produits transportés pouvaient souffrir d'un mauvais conditionnement entraînant leur détérioration ou bien disparaissaient complètement à cause des actes de piraterie ou d'un naufrage. Selon les auteurs, à la Maison de l'Inde il faut payer l'impôt comme s'il n'y avait pas de perte.

Flandre. Nous reproduisons un problème tel qu'il est donné dans le traité par Ruy Mendes.

« Supposons que un *arroba* de Flandres à 25 *arráteis* ou livres, comme il le nomme là bas, et qu'un homme souhaite vendre là bas 16 arroba de sucre à 5 deniers le *arrátel*. On pose la question: combien de livre va-t-il obtenir? »¹⁰

3.1. Compléter le tableau ci-dessous (prendre en consideration l'information de la figure 1).

Le texte	Le langage mathématique
L' <i>arrova</i> de Flandre correspond à 25 <i>arratéis</i> ou livres.	
Un homme souhaite vendre en Flandre 16 <i>arrovas</i> de sucre à 5 <i>dinheiros</i> l' <i>arratal</i> .	
Combien sera le coût en livre?	

Livre (<i>Livra</i>)	Sou (<i>Soldo</i>)	Denier (<i>Dinheiro</i>)	Mite ¹¹ (<i>Mita</i>)
1	20	240	5760
1/20	1	12	288
1/240	1/12	1	24
1/5760	1/288	1/24	1

Figure 1. Table monétaire au comptoir de Flandre

3.2. Une autre activité en Flandre était l'échange. À ce sujet Bento Fernandes a écrit :

« Pourquoi certains marchands sur le prendre et le donner de l'argent en échange à Anvers pour payer à Medina del Campo ou dans une autre foire en Espagne ou prenant en Espagne et donnant à Anvers ne sont pas ni experts ni même expérimentés sur cette règle de compte comme le sont les flamands et les italiens qui sont plus habiles sur ce sujet. Et pour une chose très nécessaire aux négoce et aux marchands de faire ici déclaration pour savoir de quelle manière doit-on faire des comptes similaires pour que le donner et le prendre ne soit pas sujet à tromperie. »¹²

¹⁰ « Na qual digo primeiramête assim: pode por caso que arrova de frâdes tẽ 25 arratês ou livras como la se chamã e que hũ homẽ qr vêder laa 16 arrovas de açucar a 5 dinheiros o arratal. Pregũta se quantas livras se montaria nelas » [Mendes 1540, f. 83].

¹¹ La Mite fut émise en Flandre dès 1418.

¹² « Porque algũs mercadores sobre ho tomar ou dar do dinheiro ha câbio ã Inves pera pagar ã Medina del Câpo ou ã outra qualquer feira d'Españha ou tomado e dado ã Españha pera lhe respõderẽ ã Inves nã sã tam espertos nẽ esprimêtados nesta cõta como ho sã os framẽgos e italianos que andã mais corrẽtes neste cõtratar. E por ser cousa muy necessaria aos tratãtes e mercadores farei aqui declaraçã pera saber a maneira que se ha de ter no fazer de semelhãtes contas e no dar e tomas do dinheiro que nã sejais enganados. » [Fernandes, 1555, f. 41].

Selon Bento Fernandes, que pouvons-nous conclure au sujet de la formation des marchands nationaux? Faire une recherche sur l'enseignement dispensé à l'époque ainsi que sur les autres domaines de la science au Portugal au XVI^e siècle.

Remerciements

L'auteur remercie le professeur Américo Costa pour sa contribution dans cette activité, les professeurs Helmuth Malonek et Luís Castro du laboratoire CIDMA, pour leur soutien, à Éliane et Louis Clain pour une révision linguistique, à la *Fundação para a Ciência e a Tecnologia* pour son soutien financier et à l'*Escola Secundária de Caldas das Taipas* pour son soutien actif à la promotion de la recherche en histoire des Mathématiques.

This work was supported in part by the Portuguese Foundation for Science and Technology (FCT-Fundação para a Ciência e a Tecnologia), through CIDMA - Center for Research and Development in Mathematics and Applications, within project UID/MAT/04106/2013.

REFERENCES

- Almeida, A. (1994). *Aritmética como descrição do real (1519-1679)*, vol. II. Lisboa: Imprensa Nacional, Casa da Moeda.
- Clain, T. C. (2015). *A Matemática e o comércio em Portugal através das obras de três aritméticos do século XVI: Gaspar Nicolas, Ruy Mendes e Bento Fernandes*. Aveiro: Universidade de Aveiro.
- Clain, T. C. (2015). La Prática d'Arismetica de Ruy Mendes dans le contexte des arithmétiques ibériques. *Revue d'histoires des mathématiques*, SMF, 21(1), 5-39.
- Fernandes, B. (1555). *Tratado da arte de Arismetica*. Porto: Francisco Correia.
- Godinho, V. M. (1963-1971). *Os descobrimentos e a economia mundial*. Vol. I. Lisboa: Editorial Presença.
- Mendes, R. (1540). *Pratica d'Arismetica*. Lisboa: Germão Galharde.
- Nicolas, G. (1519). *Tratado da pratica d'arimetica*. Lisboa: Germão Galharde.
- Peres, D. (1947). *Regimento das Casas das Índias e Mina*. Coimbra: Universidade de Coimbra.